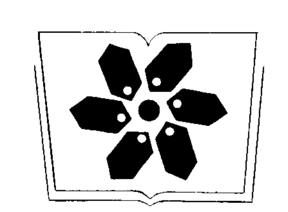
数学百科全书

第三卷

I—Opt

科学出版社



21 数学天元基金

中国科学院科学出版基金资助出版　国家自然科学基金委员会资助出版

數學百科全書

蘇步青題



《数学百科全书》

（第三卷）

编译委员会

数 学 百 科 全 书

第 三 卷

I — Opt

科 学 出 版 社

1 9 9 7

内 容 简 介

本书由三类条目组成。首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目（采用了一种很好的分科办法），对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读。其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的。最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考。本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果。多数条目附有参考文献。这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的。

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И. М. ВИНОГРАДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

图字：01－96－1567 号

责任编辑　杜小杨　夏墨英　张鸿林
特邀编辑　葛显良　戴中器　沈永欢

数学百科全书

第三卷

《数学百科全书》编译委员会 编译
科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1997 年 5 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
1997 年 5 月第一次印刷　印张：66 1/4
印数：0001－3200　字数：2 367 000
ISBN 7-03-005694-9/O · 892
定价：138.00 元

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外"数"与"形"，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种"活"的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有 12 年至 14 年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从 1977 年到 1986 年，历时 10 年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 И.М. 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》（Математическая энциклопедия），约 900 万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由 180 位西方数学家参加翻译的英文版（Encyclopaedia of mathematics）。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引，此外还增加了600余篇数学家小传。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢！

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书由河北省雄县电脑服务部排版。谨此致谢！

I

二十面体空间 [**icosahedral space**; **икосаэдра пространство**]

一个三维空间，它是二元二十面体群在三维球面上的作用的轨道空间．它是 H. Poincaré 在考虑 **Heegaard 图**（Heegaard diagram）时作为亏格为 2 的同调球面的例子发现的．二十面体空间是沿型 (q,r) 的环面纽结分歧的 S^3 的一个 p 叶覆叠，其中 p,q,r 是数 2,3,5 的任意置换．二十面体空间可以解析地定义为 $\mathbf{C}^2$ 中的曲面

$$z_1^2+z_2^3+z_3^5=0$$

与单位球面的交．最后，二十面体空间可与**十二面体空间**（dodecahedral space）相等同．

A. B. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

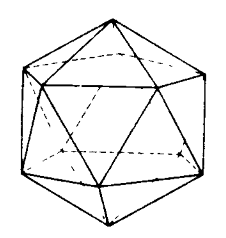
[A1] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Chelsea, reprint, 1947.

徐森林 译

二十面体 [**icosahedron**; **икосаэдр**]

五种正多面体之一．二十面体具有 20 个（三角形的）面，30 个棱，12 个顶点（在每个顶点上有 5 个棱相交）．如果 a 是二十面体的棱长，则其体积是

$$V=\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})\cong 2.1817a^3.$$



【补注】 正多面体也称为 **Plato 立体**（Platonic solids）．

二十面体的对称群在许多数学分支中都会出现，因而导致 F. Klein 写出他的名著 [A2]．

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Dover, reprint, 1973.

[A2] Klein, F., Lectures on the isocahedron and the solution of equations of the fifth degree, Dover, reprint, 1956（译自德文）．

张鸿林 译

理想 [**ideal**; **идеал**]

一个代数结构的特殊类型的子对象．理想的概念首先产生于环论中．理想这一名称由**理想数**（ideal number）概念演变而来．

对一个代数、环或半群 A，理想 I 是在以 A 的元素作乘法下封闭的子代数、子环或子半群．这里一个理想称为左理想（left ideal）（或右理想（right ideal）），如果它用 A 的元素左（右）乘之下是封闭的，即如果

$$AI=I(\text{或}\,IA=A),$$

这里

$$AI=\{ab:a\in A,b\in I\},$$

$$IA=\{ba:a\in A,b\in I\}.$$

同时是左理想和右理想的理想（即用 A 的元素相乘之下保持的理想）称为双边的（two-sided）．对交换的情况，这三个概念是一致的．每一个关于左理想的论断有关于右理想的对应的对偶论断（以下的陈述仅对"左的情况"而言）．

双边理想在环和代数中起的作用恰如**正规子群**（normal subgroup）在群中起的作用．对每个同态 $f:A$

$\to B$, 核 $\mathrm{Ker} f$(即被 f 映成 0 的元素的集合)是一个理想．且反之，每个理想 I 是某一个同态的核．此外，理想 I 确定 A 上的唯一的**同余(代数学中的)**(congruence (in algebra))κ, 在其中 I 为零类，并由此(在同构意义下)唯一地确定了以 I 为核的同态 f 的象 Af:Af 同构于商环或商代数 A/κ, 后者也记作 A/I. 多算子群的理想有关于同态方面的类似性质．在多算子 Ω 群 A 中，一个理想定义为其加群中满足以下性质的正规子群：对每一个 n 元算子 ω, 任意元素 $b\in I$ 和 $a_1,\cdots,a_n\in A$, 关系式

$$(a_1\cdots a_n\omega)+(a_1\cdots a_{i-1}(b+a_i)a_{i+1}\cdots a_n\omega)\in I$$

对所有的 $i=1,\cdots,n$ 成立．(对环和代数这个概念化为双边理想的概念．)

另一方面，半群的双边理想不给出半群的所有同态象的描述．如果半群 A 到半群 B 上的同态 f 已给定，仅当 B 是具有零的半群的情况才有可能按自然方式把 f 与一双边理想，即 $f^{-1}(0)$ 相联系；然而，这个联系不必唯一地确定 f. 但是，如果 I 是 A 的一个理想，则在以 I 的类作为元素的 A 的商半群中，存在一个极大商半群，写成 A/I(且称为理想商(ideal quotient).这个半群的元素是集合 $A\setminus I$ 的元素和理想 I 本身，I 是 A/I 中的零.

对任意子集 $X\subset A$, 能把包含 X 的所有理想的交定义为由 X 生成的理想 I_X. 集合 X 称为理想 I_X 的基(basis of the ideal). 不同的基能生成同一理想．由单一的元素生成的理想称为**主理想**(principal ideal).

左(双边)理想的交，仍是左(双边)理想，而对于半群，其并也如此．对环和代数，理想的集论的并不必是理想．设 I_1 和 I_2 是环(或代数) A 中的左或双边理想．那么理想 I_1 和 I_2 的和(sum of the ideals)是理想 $I_1+I_2=\{a+b:a\in I_1,b\in I_2\}$; 它是包含 I_1 和 I_2 的 A 的最小理想．一个环(或代数)的所有(左或双边)理想的集合在交与取和的运算之下形成一个格．很多环和代数的类由其理想上的或其理想的格上的条件定义(见**主理想环**(principal ideal ring), **Artin 环**(Artinian ring); **Noether 环**(Noetherian ring)).

一个环的乘法半群的理想可以是或不是环的理想．一个半群 A 是一个群，当且仅当 A 除 A 外无别的(左或双边)理想．这样，半群中理想的丰富性刻画了这半群不同于群的程度．

对一个 k 代数 A(域 k 上的代数)，环 A 的理想不必是代数 A 的理想．举例说，若 A 是带有零乘法的 k 代数，环 A 的理想的集合是 A 的加法群的子群的集合，而代数 A 的理想的集合是向量 k 空间 A 的所有子空间的集合．然而，当 A 是具有单位元素的代数时，这两种理想概念是一致的．所以很多结果对环和代数有同样的表述．

没有任何双边理想的环称为**单环**(simple ring). 无真单边理想的环是**除环**(skew-field). 一个环 A 的左理想也能定义为左 A 模 A 的子模．当右理想取代左理想时，环的某些性质保持不变．例如，用左理想定义的 **Jacobson 根**(Jacobson radical)与用右理想定义的 Jacobson 根是一样的．另一方面，左 Noether 环不一定是右 Noether 环.

对交换环中理想的研究是交换代数的一个重要部分．对每一个具有单位元素的交换环，能联系一个拓扑空间 $\mathrm{Spec}\,A$, 其元素是 A 的真素理想．在 A 的所有理想的根的集合与 $\mathrm{Spec}\,A$ 的闭子空间的集合之间存在一个一一对应.

在交换代数中出现了域的理想的概念，更确切地，域关于一个环的理想的概念．这里 A 是具有单位元素且无零因子的交换环，而 Q 是 A 的分式域．域 Q 的理想(ideal of the field)是这样的非零子集 $I\subset Q$, 它是 Q 的加法群的子群，在用 A 的元素作乘法下封闭(即，每当 $a\in A,b\in I$ 时，有 $ab\in I$)且存在某一元素 $q\in Q$ 使得 $qI\subset A$. 一个理想称为整理想(integral ideal), 如果它包含于 A 中(因而它是 A 的普通理想)；否则它是一个**分式理想**(fractional ideal).

格的理想(ideal of a lattice)是一个格的满足以下条件的非空子集 I:1)如果 $a,b\in I$, 则 $a+b\in I$; 和 2)如果 $c\leqslant a\in I$, 则 $c\in I$. 一个格的对偶理想(dual ideal)(或滤子(filter))以对偶方式定义($a,b\in J$ 蕴涵 $ab\in J$; $c\geqslant a\in J$ 蕴涵 $c\in J$). 格的理想在包含关系下也构成一个格．一个格的所有真理想的集合中的极大元称为极大理想(maximal ideal). 如果 f 是一个格到一个有零的偏序集上的同态，则零的完全逆象是一个理想．它称为 f 的核理想(kernel ideal). 格 L 的理想 S 称为标准理想(standard ideal), 如果对任意的 $a,b\in L$, $s\in S$, 不等式 $a<b+s$ 蕴涵 $a=x+t$, 这里 $x\leqslant b$ 且 $t\in S$, 每一个标准理想是核理想．相对有补格(见**有补格**(lattice with complements))的核理想是标准的．一个理想 I 称为素理想(prime ideal), 如果每当 $ab\in I$ 时有 $a\in I$ 或 $b\in I$. 对于格 L 的理想 I, 以下的每一个条件等价于 I 的素性：a)补 $A\setminus I$ 是滤子；或 b) I 是 L 到一个二元格上某个同态下零的完全逆象．每一个分配格的极大理想是素的.

偏序集中理想(ideal in a partially ordered set)的概念与前述的定义不完全一致．事实上，取代 1)要求更强的条件成立：对这个理想的每一个子集，该集合的上确界(并)(如果它存在)也在 I 中.

具有零态射的范畴的对象 A 的理想是 A 的**子对象**(subobject)(U,μ), 使得对某个态射 $\alpha:A\to B$, $\mu=\ker\alpha$. 这个理想能等同于所有那些是某态射的核的单态射的集合(亦见**正规单态射**(normal monomor-

phism)). 一个范畴的对象的上理想的概念按对偶方式定义. Ω 群的理想概念是范畴中对象的理想概念的特殊情况.

范畴 $\mathfrak{R}$ 的左理想 (left ideal of a category) 是这样一个态射类 J, 只要某态射 φ 在其中, 那么对任何 $\alpha\in\mathfrak{R}, \alpha\varphi$ 也必在其中, 如果 $\alpha\varphi$ 有定义的话. 范畴的右理想 (right ideals of a category) 按对偶方式定义. 一个双边理想 (two sided ideal) 是既是左理想又是右理想的态射类.

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[3] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967–1971 (译自德文) (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 1, 2, 科学出版社, 1976).

[4] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961–1967.

[5] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: A. Г. 库洛什, 一般代数学讲义, 上海科学技术出版社, 1964).

[6] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

[7] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970 (英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, Hindushtan Publ. Comp., 1977).

[8] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

Л. В. Кузьмин, Т. С. Фофанова, М. Ш. Цаленко 撰

【补注】关于偏序集 A 中理想 I 的正确定义有某些不同意见. 代替上面给出的定义, 某些作者允许 I 是任意的下集 (lower set) (如果 $a\leqslant b\in I$, 则 $a\in I$); 另外一些作者还另外要求 I 是有向的 (directed) (如果 $a\in I$ 和 $b\in I$, 则存在 $c\in I$, 使得 $a\leqslant c$ 和 $b\leqslant c$). 后面的定义有这样的优点, 即与当 A 为格 (或并半格) 的情况的通常定义一致.

对一个 **Boole 代数** (Boolean algebra) A, A 的子集 I 是格论意义下的理想, 当且仅当它是 **Boole 环** (Boolean ring) A 的理想. 正是这个等价性导致 M. H. Stone ([A1]) 把术语"理想"的使用范围从环扩大到格. 此后, 理想的研究在格论中起着重要的作用, 特别是在分配格的理论中.

参考文献

[A1] Stone, M. H., Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics, *Časopis Pešt. Mat. Fys.*, **67** (1937), 1–25.

[A2] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A3] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[A4] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

葛显良 译 李慧陵 校

理想数 [**ideal number**; **идеальное число**]

代数数域的整数环 A 的**除子** (divisor) 半群 D 中的元素. 半群 D 是自由交换幺半群. 它的自由生成元称为素理想数 (prime ideal numbers). 在现代术语中, 理想数被称为 A 的整除子 (integral divisors)、用一个自然的方法, 可将它们等同于 A 的**理想** (ideal).

理想数的引进与代数数域的整数环中没有素因子分解唯一性有关. 若在 A 中的素因子分解不是唯一的, 则对于任一 $a\in A$, 对应的除子 $\varphi(a)$ 分解成素理想数之积, 可以视为 A 中的素因子唯一分解的替代.

例如, 域 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ 的整数环 A 由所有数 $a+b\sqrt{-5}$ 组成, 其中 a, b 都是整数. 在该环中, 数 6 有两种不同的分解

$$6=2\cdot 3=(1-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}),$$

其中 2, 3, $1-\sqrt{-5}$ 和 $1+\sqrt{-5}$ 是 A 中两两互不相伴的不可约 (素) 元; 因而 A 中的不可约因子分解不是唯一的. 但是, 在 D 中, 元素 $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(1-\sqrt{-5})$ 和 $\varphi(1+\sqrt{-5})$ 都不是不可约的. 事实上, $\varphi(2)=\mathfrak{p}_1^2$, $\varphi(3)=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, $\varphi(1-\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\varphi(1+\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$, 其中 $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ 和 $\mathfrak{p}_3$ 都是 D 中的素理想数. 因此, 6 在 A 中的两种分解, 在 D 中产生同一个分解 $\varphi(6)=\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$.

理想数的概念是 E. Kummer 在分圆域上的算术的研究中提出来的 (见[1], [2]). 设 $K=\mathbf{Q}(\zeta)$ 是 p 次**分圆域** (cyclotomic field), p 为一素数. 设 $A=\mathbf{Z}[\zeta]$ 是 K 的整数环. A 的理想数定义为素理想数的乘积, 而后者定义为自然素数的"理想"素除子. 为了构造在一个给定的自然素数 q 中包含的所有素理想数, 用了 **Kummer 定理** (Kummer theorem). Kummer 利用 A 在 $\mathbf{Z}$ 上有一组整基 $1, \zeta, \cdots, \zeta^{p-2}$ 这一事实, 去研究 p 次分圆多项式 $F_p(X)$ 在环 $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})[X]$ 中的分解. 整除 q 的理想数与 $F_p(X)$ 在 $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})[X]$ 中的不可约因子一一对应 (在 $q=p$ 的情形下, 需要有些不同的方法). 有一个特殊的方法用来确定一个给定的素理想数在给定元素 $a\in A$ 中出现的指数. 他发展了一个类似的方法, 在形如 $\mathbf{Q}(\zeta, m^{1/p})(m\in\mathbf{Q}(\zeta))$ 的域中创造了可除性理论.

将理想数理论推广到任意代数数域的工作, 主要归功于 L. Kronerker 和 R. Dedekind. 在他们的文章中, 开始出现将理想数理论分成了除子理论 (Kronecker 的方法) 和理想理论. Dedekind 将每个理想数与环 A 中理想 (ideal) 一一对应起来, 这个理想被他定义为 A

中由 0 及能被这个理想数整除的所有元素组成的子集. 若 $a_1, \cdots, a_n$ 是理想 I 的生成元, 则对应于 I 的理想数是理想数 $\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n)$ 的最大公因子.

后来, 理想的概念推广到任意环 A 上. 那些理想概念和除子概念相一致的环, 现在称为 **Dedekind 环** (Dedekind ring).

参考文献

[1A] Kummer, E., Zur Theorie der complexen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **35** (1847), 319–326.

[1B] Kummer, E., Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren, *J. Reine Angew. Math.*, **35** (1847), 327–367.

[2] Kummer, E., Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers, *J. Math. Pures Appl.*, **16** (1851), 377–498.

[3] Edwards, H. M., The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 1975, 3, 219–236.

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[5] Bourbaki, N., Outline of the history of mathematics, Springer, to appear (译自法文).

Л. В. Кузьмин 撰 裴定一 译 赵春来 校

理想点 [ideal point; идеальная точка], 反常点 (improper point), 无穷远点 (point at infinity, infinitely-distant point)

使平面完全化以描述某些几何关系或系统的一个点. 例如, 一个**反演** (inversion) 是由一理想点完全化的 Euclid 平面上的一个一一映射; 仿射平面由一理想点的完全化产生**射影平面** (projective plane) 的概念. 亦见**无穷远元** (infinitely-distant elements).

А. Б. Иванов 撰 杨路、曾振柄 译

理想列 [ideal series; идеальный ряд], 半群 S 的子半群的序列

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_m = S, \qquad (*)$$

其中 A_i 是 A_{i+1} 的 (双边) 理想, $i = 1, \cdots, m-1$. 子半群 A_1 和 Rees 商半群 (见**半群** (semi-group)) A_{i+1}/A_i 称为序列 (*) 的因子 (factor). 两个理想序列, 若能在它们的因子间建立一个一一对应, 使得对应的因子是同构的, 则称它们是同构的 (isomorphic). 理想列

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots B_n = S$$

称为 (*) 的加细 (refinement), 若它包含 (*) 作为部分序列. 若一个理想列没有真正的加细就称为合成列 (composition series). 半群的任意两个理想列有同构的加细; 特别地, 对于有合成列的半群, 它的所有合成列皆同构 (这与群中正规列的 Schreier 和 Jordan-Hölder 定理类似, 见 [1], [2]). 理想列是主列 (chief series), 若它的项皆为整个半群的理想且没有由该半群的理想作成的加细. 若半群有合成列, 则必有主列, 反之不对. 在有主列的半群中, 它的因子同构于 S 的**主因子** (principal factor).

正如群中正规列一样, 上面提到的概念 (同样地, 它们的性质) 可自然地推广到子半群套的无限族的情形. 特别地, 半群 S 中的升理想列 (ascending ideal series) 是全序的序列

$$A_1 \subset \cdots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \cdots \subset A_\beta = S,$$

其中在极限点处正是前面成员的并集, 且对所有 $\alpha < \beta$, A_α 是 $A_{\alpha+1}$ 的理想.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теории групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algbraic theory of semigroups, 1–2, Amer. Math. Soc., 1961 – 1967.

Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 许以超 校

伊代尔 [idèle; идель]

阿代尔 (adèle) 环中的可逆元. 全体伊代尔的集合在乘法下构成群, 称为伊代尔群 (idèle group). 有理数域的伊代尔群的元素是下述形式的序列:

$$a = (a_\infty, a_2, \cdots, a_p, \cdots),$$

其中 a_∞ 是一个非零实数, a_p 是一个非零 p **进数** (p-adic number) ($p = 2, 3, 5, 7, \cdots$); 且对于除有限个素数之外的所有素数 p 有 $|a_p| = 1$ (这里 $|x|_p$ 是 p 进范数). 一个伊代尔的序列

$$a^{(n)} = (a_\infty^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_p^{(n)}, \cdots)$$

收敛于一个伊代尔 a, 如果它按坐标收敛到 a, 并且存在 N, 对一切 p 及 $n > N$, 有 $|a_p^{-1} a_p^{(n)}|_p = 1$. 在该拓扑下, 伊代尔群是一个局部紧拓扑群. 任意数域的伊代尔群可类似地构造.

有理数域的乘法群可同构地嵌入它的伊代尔群中. 每个有理数 $r \neq 0$ 对应序列

$$(r, r, r, \cdots),$$

它是一个伊代尔. 这样的伊代尔称为主伊代尔 (principal idèle). 由所有主伊代尔构成的群是伊代尔群的一个离散子群.

伊代尔和阿代尔的概念是 C. Chevalley 为了代数数论的目的于 1936 年引进的. 这种新的语言在代数群的算术理论的研究中显示了它是很有用的. 最后, A.

Weil 将阿代尔和伊代尔的定义推广到定义于数域上的任意线性代数群的情形.

参考文献

[1] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1973.

[2] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

В. Л. Попов 撰

【补注】 设 I 是一个指标集，对于每一个 $i\in I$，有一个给定的局部紧拓扑环或群 G_i，以及一个开紧子环或子群 B_i. G_i 关于 B_i 的限制直积(restricted direct product) $G=\prod' G_i$ 由所有的族 $(g_i)_{i\in I}$ 组成，其中除有限个 i 之外均有 $g_i\in B_i$. 取集合 $\prod_i U_i$ 作为恒等元(零元)的开邻域基，G 成为一个局部紧群(环)，这里对一切 i，U_i 是 G_i 中的开集，并且除了有限个 i 之外，均有 $U_i=B_i$，对于每一个有限集 $S\subset I$，令 $G_S=\prod_{i\in S}G_i\times\prod_{i\notin S}B_i$，则 G 是 G_S 的直并极限.

设 k 是一个数域(或者，更一般地，一个整体域)，而 I 是 k 的所有素除子的集合(有限和无限的). 对每个 $\mathfrak{p}\in I$，令 $k_\mathfrak{p}$ 是 k 关于 $\mathfrak{p}$ 的范数的完全化，$A_\mathfrak{p}$ 是 $k_\mathfrak{p}$ 的整数环(如果 $\mathfrak{p}$ 是无限的，令 $A_\mathfrak{p}=k_\mathfrak{p}$)，则 $k_\mathfrak{p}$ 关于 $A_\mathfrak{p}$ 的限制直积是 k 的阿代尔环(ring of adèles) A_k.

对于每个 $\mathfrak{p}\in I$，令 $k_\mathfrak{p}^*$ 是 $k_\mathfrak{p}$ 的非零元所成的群，$U_\mathfrak{p}$ 是 $k_\mathfrak{p}^*$ 的全体单位所成的群(如果 $\mathfrak{p}$ 是无限的，取 $U_\mathfrak{p}=k_\mathfrak{p}^*$). $k_\mathfrak{p}^*$ 关于 $U_\mathfrak{p}$ 的限制直积是 k 的伊代尔群(group of idèles). 作为集合，伊代尔群 $\mathbf{I}_k$ 是 $\mathbf{A}_k$ 的可逆元的集合. 但是 $\mathbf{I}_k$ 上的拓扑比由 $\mathbf{A}_k$ 诱导的拓扑强.

$\mathbf{I}_k$ 模掉主伊代尔构成的对角子群 $k^*=\{(\alpha)_{i\in I}\}$ 所得的商群称为伊代尔类群(idèle class group)，它在**类域论**(class field theory)中很重要.

名词伊代尔来源于理想元(ideal element)，它的缩写为 id. el.，在法语中的发音为 idèle.

裴定一 译 赵春来 校

幂等元[**idempotent** 或 idempotent element; **идемпотент**]

环、半群或广群中等于本身平方的元素 $e: e^2=e$. 称幂等元 e 包含幂等元 f(记为 $e\geqslant f$)，如果 $ef=e=fe$. 对于结合环和半群，关系 $\geqslant$ 是幂等元集 E 上的一个偏序，称为 E 上的自然偏序(natural partial order). 环的两个幂等元 u 和 v 称为正交的，如果 $uv=0=vu$. 相应于环的每个幂等元(以及每个正交幂等元系)都有环的所谓 **Peirce 分解**(Peirce decomposition). 对于 n 元代数运算 ω，如果 $(e\cdots e)\omega=e$，其中括号中的 e 出现 n 次，则称 e 为幂等的. О. А. Иванова 撰

【补注】 一个代数运算 ω 有时称为幂等的(idempotent)，如果它所作用的集合中的每个元素都是上面定义意义下的幂等元. 这种运算也称为仿射运算(affine operation)；后一名称更为可取，因为仿射一元运算与一元运算的半群的幂等元不是一回事. 在 R 模理论中，仿射运算形如

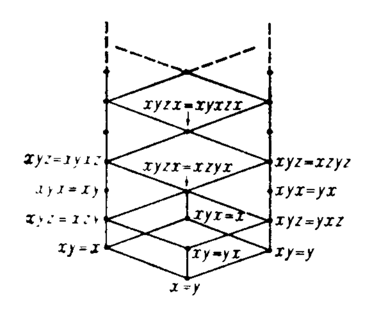
$$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n}r_ix_i,$$

而 $\sum_{i=1}^{n}r_i=1$. 郭元春 译 牛凤文 校

幂等元的半群[**idempotents, semi-group of**; **идемпотентов полугруппа**]，幂等元半群(idempotent semi-group)

每个元素皆为**幂等元**(idempotent)的半群. 幂等元半群亦称为带(band)(这与**半群的带**(band of semi-group)的概念相容：幂等元半群是单元素半群的带). 交换的幂等元半群称为半格(semi-lattice)；这术语与它在偏序集理论中的应用相容：若对交换幂等元半群 S 考虑其自然偏序，则元素 $a, b\in S$ 的最大下界正是 ab. 半格是二元半格的次直积. 若半群 S 满足恒等式 $xy=x$, $xy=y$ 中的一个，则称 S 为奇异的(singular)；在第一种情形，S 是左奇异的(left-singular)，或左零半群(semi-group of left zeros)，第二种情形是右奇异的(right-singular)或右零半群(semi-group of right zeros). 一个半群称为矩形(rectangular)半群，若它满足恒等式 $xyx=x$(该术语有时在稍广的意义下使用，见[1]). 对半群 S，下列条件是等价的：1) S 是矩形半群；2) S 是理想单的幂等元半群(见**单半群**(simple semi-group))；3) S 是幂等元**完全单半群**(completely-simple semi-group)；及 4) S 同构于直积 $L\times R$，其中 L 是左奇异半群而 R 是右奇异半群. 每个幂等元半群是 **Clifford 半群**(Clifford semi-group)且分裂成矩形半群的一个半格(亦见**半群的带**(band of semi-groups)). 这个分裂是幂等元半群的许多性质研究的起点. 幂等元半群是局部有限的.

幂等元半群已从各种观点得到研究，包括簇论的观点. 令所有幂等元半群的簇为 $\mathfrak{B}$，在[4]－[6]中完全地描述了 $\mathfrak{B}$ 的所有子簇的格；它是可数的，分配的，且簇 $\mathfrak{B}$ 的每个子簇由一个恒等式确定. 这个格可图解如下：



图中对 $\mathfrak{B}$ 中较低层的一些簇给出了与其相应的恒等

式.

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1 − 2, Amer. Math. Soc., 1961 − 1967.

[2] Mclean, A. D., Idempotent semigroups, *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954), 2, 110 − 113.

[3] Kimura, N., The structure of idempotent semigroups, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 257 − 275.

[4] Бирюков, А. П., 《Алгебра и Лорика》, **5** (1970), 2, 195 − 224.

[5] Gerhard, J., The lattice of equational classes of idempotent semigroups, *J. of Algebra*, **15** (1970), 2, 195 − 224.

[6] Fennemore, C., All varieties of bands, Ⅰ, Ⅱ, *Math. Nachr.*, **48** (1971), 1 − 6, 237 − 252; 253 − 262.

Л. Н. Шеврин 撰　石生明 译　许以超 校

恒真 [**identical truth**; **тождественная истинность**] 亦称永真，逻辑真 (logical truth)，重言式 (tautology)

谓词演算语言中公式的一个性质，意指公式在任何解释和在自由变元的任何容许赋值下为真. 例如，对一个仅含二元谓词符号 ρ 和同一种变元 (即在同一个变化域中解释的变元)，任何一个 (有序) 对 (M, R) 都称为一个**解释** (interpretation)，这里 M 是个任意非空集合，$R \subseteq M \times M$ 是 M 上的任意二元关系. M 中任何元素都是自由变元的容许值. 公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 在变元 $x_1, \cdots, x_n (n \geqslant 0)$ 的相应赋值 $a_1, \cdots, a_n (n \geqslant 0)$ 下为真，这可依公式结构归纳地定义如下. (这里自由变元取遍集合 M，而谓词符号 ρ 表示关系 R.)

假设给定公式 φ 以及包含 φ 的所有自由变量的有限变元序列 $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$，设集合 $|\varphi; \bar{x}|$ 由所有使得 $(x_1, \cdots, x_n)$ 被赋值以 $(a_1, \cdots, a_n)$ 时 φ 在解释 (M, R) 之下为真的那些 M 中元素序列 $(a_1, \cdots, a_n)$ 构成. 形如 $|\varphi; \bar{x}|$ 的集合可归纳地构造如下 (这里假定 φ 中的逻辑符号是 $\wedge, \neg, \exists$): 如果 φ 具有形式 $\rho(x_i, x_j)$，则

$$|\varphi; \bar{x}| = \{(a_1, \cdots, a_n) : (a_i, a_j) \in R\};$$

$$|\varphi_1 \wedge \varphi_2; \bar{x}| = |\varphi_1; \bar{x}| \cap |\varphi_2; \bar{x}|;$$

$$|\neg \varphi; \bar{x}| = M^n \setminus |\varphi; \bar{x}|;$$

$$|\exists y \varphi; \bar{x}| = \mathrm{pr}_{n+1} |\varphi; \bar{x} y|,$$

其中 $\cap$, $\setminus$, pr_{n+1} 分别表示集合的交、差和沿第 $n+1$ 个坐标的投影 (即关于映射 $(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \cdots, a_n)$ 的象).

这时，含自由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的公式 φ 的恒真 (identical truth) 意指在任何解释 (M, R) 之下每个 M 中元素的序列 $(a_1, \cdots, a_n)$ 都属于集合 $|\varphi; x_1, \cdots, x_n|$. 对于 $n = 0$，集合 $|\varphi; \bar{x}|$ 或为空集或为单元集. 例如，公式

$$\exists y \forall x \rho(x, y) \supset \forall x \exists y \rho(x, y)$$

是恒真公式，但反方向的蕴涵不是恒真公式.

固定一种解释后，如果一个公式在自由变元的任何赋值下在此解释下都为真，那么有时也说该公式恒真.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，1984 − 1985).

[2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

В. Н. Гришин 撰　孙智伟 译

恒等问题 [**identity problem**; **тождества проблема**]

识别具有给定生成元与定义关系的代数系统 (**群** (group); **半群** (semi-group) 及其他) 中字的等式 (恒等式) 的**算法问题** (algorithmic problem).

【补注】 这个问题更多地称为字问题 (word problem) 或字恒等问题 (word identity problem).　陈公宁 译

不适定问题 [**ill-posed problems** 或 incorrectly-posed problems, improperly-posed problems; **некорректные задачи**]

在下面刻画适定问题 (well-posed problem) 的条件中至少有一项不成立的问题. 由度量空间 U (具有度量 $\rho_U(\,,\,)$) 中的 "初始数据" u 确定度量空间 Z (具有度量 $\rho_Z(\,,\,)$) 中的解 $z = R(u)$ 的问题称为在空间对 (Z, U) 上是适定的 (well-posed)，如果: a) 对每个 $u \in U$，存在解 $z \in Z$; b) 该解唯一确定; 且 c) 该问题在空间 (Z, U) 上是稳定的，即对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对任意 $u_1, u_2 \in U$，由 $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$ 可推出 $\rho_Z(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$，其中 $z_1 = R(u_1)$ 及 $z_2 = R(u_2)$.

适定问题的概念出自 J. Hadamard (1923)，他主张每个与某物理或技术问题相应的数学问题必须是适定的. 事实上，如果数据任意小的变化会导致解的较大变化，那么解会有怎样的物理解释呢? 而且，将逼近方法用于这类问题会是困难的. 这使得研究不适定问题的手法受到怀疑.

这种观点在用于某些与时间相关的现象时是自然的，但它并不能推广到所有的问题中去. 下列问题在 Z 的度量中不稳定，因而不适定: 解第一类积分方程; 对于仅近似已知的函数进行微分; 对于其系数在 l_2 度量中近似已知的 Fourier 级数数值求和; Laplace 方程的 Cauchy 问题; 函数的解析延拓问题; 及重量

测定的反问题．其他的不适定问题是：解病态线性代数方程组；使具有不收敛极小化序列的泛函极小化；线性规划与最优控制中的各种问题；最优系统的设计与结构最优化（天线及其他物理系统的综合问题）；及由微分方程描述的各种其他控制问题（特别是微分对策）．各种物理和技术问题往往会导致上述问题（见[7]）．

在物理、技术及其他科学分支中提出的一大类所谓反问题，特别是物理实验的数据处理问题，属于该类不适定问题．设 z 为要研究的现象（或对象）的一个特征量．在物理实验中量 z 常常不能进行直接测量，但某个变换 $Az=u$（又称输出）是可测量的．为解释该结果，必须由 u 来确定 z，即解方程

$$Az=u. \tag{1}$$

求解方程（1）的问题常称为模式识别问题（pattern recognition problem）．导致泛函极小化的问题（天线及其他系统或结构的设计，最优控制问题等等）又称为综合问题（synthesis problem）．

假定在某些物理实验的数学模型中，所研究的对象（现象）是通过属于度量空间 $\widetilde{Z}$ 可能解的集合 Z 中的元素 z（函数、向量）来刻画的．假定 z_T 不能进行直接测量，并且所测量的是一个变换，$Az_T=u_T$，$u_T\in AZ$，其中 AZ 是 Z 在算子 A 下的象．显然，$z_T=A^{-1}u_T$，这里 A^{-1} 是 A 的逆算子．因为 u_T 是通过测量得到的，只是近似地知道的．设 $\widetilde{u}$ 为该近似值．在这些条件下，问题只能是寻求方程

$$Az=\widetilde{u} \tag{2}$$

逼近 z_T 的"解"．

在许多情形的算子 A，其逆 A^{-1} 并不连续，例如，在 A 是 Hilbert 空间中的全连续算子，特别是形如

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds$$

的积分算子情形．在这些条件下按经典的观点不可能作为 z_T 的近似"解"得到（2）的精确解，即元素 $z=A^{-1}\widetilde{u}$．事实上：a）这样的解不一定在 Z 上存在，因为 $\widetilde{u}$ 不一定属于 AZ；且 b）这样的解如果存在的话，也不一定在 $\widetilde{u}$ 的小变化下稳定（因为 A^{-1} 并不连续），进而不一定有物理上的解释．此时问题（2）是不适定的．

解不适定问题的数值方法．对于形如（1）的不适定问题，所提出的疑问是：近似解到底意味着什么？显然，它应定义为经过原始信息的小变化仍保持稳定．第二个疑问是：用什么样的算法来构造这样的解？这些基本问题的答案已由 А. Н. Тихонов 给出（见[1]，[2]）．

选择法（selection method）．在有些情形，（1）的近似解可通过选择法求得．其组成如下：从可能的解类 $M\subset Z$ 中选取元素 $\widetilde{z}$，使得 $A\widetilde{z}$ 以所要的精度逼近（1）的右边．取元素 $\widetilde{z}$ 作为所要求的近似解．提出的问题是：这种方法何时可用，即何时

$$\rho_U(A\widetilde{z},Az_T)\leqslant\delta$$

蕴涵

$$\rho_Z(z,z_T)\leqslant\varepsilon(\delta).$$

这里当 $\delta\to0$ 时，$\varepsilon(\delta)\to0$．在（1）的解唯一且 M 为紧的条件下，此结论成立（见[3]）．在上述讨论的基础上，可以引入 Тихонов 适定的（Tikhonov well-posed），或称条件适定的概念（或条件）（见[4]）．在应用于（1）时，一个问题称为条件适定的（conditional well-posed），如果已知：对右边的精确值 $u=u_T$，存在（1）的属于给定紧集 M 的唯一解 z_T．在此情形，A^{-1} 在 M 上连续，并且如果代替 u_T 已知元素 u_δ 使得 $\rho_U(u_\delta,u_T)\leqslant\delta$，及 $u_\delta\in AM$，则可以把 $z_\delta=A^{-1}u_\delta$ 看作右边为 $u=u_\delta$ 时（1）的近似解．当 $\delta\to0$ 时，z_δ 趋于 z_T．

在很多情况下得到的右边近似值 $\widetilde{u}$ 并不属于 AM．在此条件下，方程（1）没有古典解．于是以广义解，即所谓的拟解作为近似解（见[5]）．（1）在 M 上的拟解（quasi-solution）是指对给定的 $\widetilde{u}$，使泛函 $\rho_U(Az,\widetilde{u})$ 在 M 上达到最小值的元素 $\widetilde{z}\in M$（见[6]）．如果 M 是紧的，则对任何 $\widetilde{u}\in U$ 都存在拟解，且若又有 $\widetilde{u}\in AM$，则拟解 $\widetilde{z}$ 和（1）的古典（精确）解相同．只有当可能的解集 M 为紧时，才能保证拟解的存在．

正则化方法（regilarization method）．对于能够推出（1）的很多应用问题，一种典型的情况就是可能的解集 Z 为非紧的，算子 A^{-1} 在 AZ 上不连续，及与近似特性相关联的（1）的右边的变化会使解跑到 AZ 之外．这样的问题称为本质不适定的（essentially ill-posed）．已经研究出解不适定性问题的方法，它可以构造出数值方法来逼近形如（1）的本质不适定问题的解，使之在数据的小变化下保持稳定．这里右边 u 和算子 A 都应属该数据范围．

在下面的讨论中，为使说明简化，假设算子 A 已精确知道．该方法的基础在于引入正则化算子的概念（见[2]，[7]）．从 U 到 Z 的算子 $R(u,\delta)$ 称为方程 $Az=u$（在 $u=u_T$ 的邻域中）的正则化算子（regularizing operator），如果它具有下列性质：1）存在 $\delta_1>0$，使得对每一个满足 $0\leqslant\delta\leqslant\delta_1$ 的 δ 及对满足 $\rho_U(u_\delta,u_T)\leqslant\delta$ 的 $u_\delta\in U$，算子 $R(u,\delta)$ 有定义；2）对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0=\delta_0(\varepsilon,u_T)\leqslant\delta_1$，使得由 $\rho_U(u_\delta,u_T)\leqslant\delta\leqslant\delta_0$ 可得 $\rho_Z(z_\delta,z_T)\leqslant\varepsilon$，这里 $z_\delta=R(u^\delta,\delta)$．

有时用正则化算子的另一个定义更方便，它包含前面的定义．U 到 Z 的依赖于参数 α 的算子 $R(u,\alpha)$ 称为关于方程 $Az=u$（在 $u=u_T$ 的邻域中）的正则化算子（regularizing operator 或 regularization operator），如果它具有下列性质：1）存在 $\delta_1>0$，使得对每个 α 和满足 $\rho_U(u_\delta, u_T)<\delta\leqslant\delta_1$ 的任意 $u_\delta\in U$、$R(u,\alpha)$ 有定义；2）存在 δ 的函数 $\alpha=\alpha(\delta)$，使得对任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta(\varepsilon)\leqslant\delta_1$，满足：当 $u_\delta\in U$ 且 $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta(\varepsilon)$ 时 $\rho_Z(z_\delta, z_T)<\varepsilon$，这里 $z_\delta=R(u_\delta,\alpha(\delta))$．这个定义没有假定算子 $R(u,\alpha(\delta))$ 是全局单值的．

如果 $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$，则可以取通过正规化算子 $R(u,\alpha)$ 得到的元素 $z_\alpha=R(u_\delta,\alpha)$ 作为右边近似为 U_δ 的方程（1）的近似解，这里 $\alpha=\alpha(\delta)$ 与初值 u_δ 的误差是相容的（见[1]，[2]，[7]）．这称为（1）的正则化解（regularized solution）．数值参数 α 称为正则化参数（regularization parameter）．当 $\delta\to 0$ 时，正则化近似解 $z_\alpha(\delta)=R(u_\delta,\alpha(\delta))$（在 Z 中度量的意义下）趋于精确解 z_T．

这样，寻找（1）的在右边小变化下稳定的近似解的任务归结为：a）寻找正则化算子；b）通过问题的其他信息，例如，给定右边 u 时误差的大小，来确定正则化参数 α．

正则化算子的构造（construction of regularizing operators）．假设方程 $Az=u_T$ 有唯一解 z_T．假设替代 $Az=u_T$，方程 $Az=u_\delta$ 已解出，且 $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$．由于 $\rho_U(Az_T, u_\delta)\leqslant\delta$，可以在满足 $\rho_U(Az, u_\delta)\leqslant\delta$ 的元素 z_δ 类 Z_δ 中找到 $Az=u_\delta$ 的近似解．Z_δ 是可能的解集．不能取 Z_δ 中的任意元素 z_δ 作为近似解，因为这样的"解"不唯一，且通常关于 δ 不连续．作为一种对于可能解的选择原理，以确保从 Z_δ 中得到连续依赖于 δ，且当 $\delta\to 0$ 时趋于 z_T 的元素 z_δ，这需要用到所谓变分原理（variational principle）（见[1]）．设 $\Omega[z]$ 是定义在 Z 的子集 F_1 上的非负连续泛函，它在 Z 上处处稠密，且使得：a）$z_1\in F_1$；b）对每一个 $d>0$，F_1 中满足 $\Omega[z]\leqslant d$ 的元素 z 的集合在 F_1 上为紧的．具有这些性质的泛函称为关于问题（1）的稳定化泛函（stabilizing functional）．设 $\Omega[z]$ 为定义在 Z 的子集 F_1 上的稳定化泛函（F_1 可以是整个 Z）．在 $F_{1,\delta}=F_1\cap Z_\delta$ 中寻找一个（或几个）使 $\Omega[z]$ 在 $F_{1,\delta}$ 上达到最小值的元素．可以证明这样的元素 z_δ 是存在的（见[7]）．这可以看成是将某个算子 $R_1(u_\delta, d)$ 作用于方程 $Az=u_\delta$ 右边的结果，即 $z_\delta=R_1(u_\delta, d)$．这时 $R_1(u,\delta)$ 是方程（1）的正则化算子．事实上，可以按下述方式来寻找 z_δ：在对于 $\Omega[z]$ 附加的微弱限制（$\Omega[z]$ 的拟单调性，见[7]）下，可以证明，$\inf\Omega[z]$ 在满足 $\rho_U(Az_\delta, u_\delta)=\delta$ 的元素 z_δ 上达到．元素 z_δ 是给定 $\rho_U(Az, u_\delta)=\delta$ 的极小化问题 $\Omega[z]$ 的解，即条件极值问题的解，它可以利用 Lagrange 乘子法和泛函

$$M^\alpha[z, u_\delta]=\rho_U^2(Az, u_\delta)+\alpha\Omega[z]$$

的极小化来解决．对任意 $\alpha>0$，可以证明存在使 $M^\alpha[z,u_\delta]$ 极小化的元素 z_α．参数 α 由条件 $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$ 来确定．如果存在 α，使得 $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$，则原来的变分问题等价于对 $M^\alpha[z, u_\delta]$ 的极小化问题，它可以在计算机上用各种方法来解决（例如，通过解关于 $M^\alpha[z, u_\delta]$ 的相应的 Euler 方程），使 $M^\alpha[z, u_\delta]$ 极小化的元素 z_α 可以看作将某算子 $R_2(u_\delta,\alpha)$ 用于方程 $Az=u_\delta$ 右边的结果，该算子依赖于 α，即 $z_\alpha=R_2(u_\delta,\alpha)$，其中 α 由偏差关系 $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$ 来确定．这时 $R_2[u,\alpha]$ 为（1）的正则化算子．原始的变分问题与寻找 $M^\alpha[z_1, u_\delta]$ 的极小值问题等价，例如，对线性算子 A．对非线性算子 A 未必如此（见[8]）．

所谓光滑泛函（smoothing functional）$M^\alpha[z_1, u_\alpha]$ 可以形式地引入，不必将它与泛函 $\Omega[z]$ 的条件极值问题相联系，而是来寻找集合 $F_{1,\delta}$ 上使之极小化的元 z_α．这样就提出问题：寻找作为 δ 的函数的正则化参数 α，$\alpha=\alpha(\delta)$，使得决定元素 $z_\alpha=R_2(u_\delta,\alpha(\delta))$ 的算子 $R_2(u,\alpha(\delta))$ 是（1）的正则化．在某些条件下（例如，已知 $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$ 且 A 为线性算子时），这样的函数存在且可以从关系 $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$ 找到．还有一些其他方法来寻找 $\alpha(\delta)$．

设 T_{δ_1} 是 $[0,\delta_1]$ 上非负非递减的连续函数类，z_T 是右边为 $u=u_T$ 的（1）的解，且 A 为 Z 到 U 的连续算子．对任何正数 ε 和满足 $\beta_2(0)=0$ 和 $\delta^2/\beta_1(\delta)\leqslant\beta_2(\delta)$ 的 T_{δ_1} 类函数 $\beta_1(\delta)$ 和 $\beta_2(\delta)$，存在 $\delta_0=\delta_0(\varepsilon,\beta_1,\beta_2)$ 使得对 $u_\delta\in U$ 和 $\delta\leqslant\delta_0$，由 $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$ 可以推出 $\rho_z(z_\delta, z_T)\leqslant\varepsilon$，这里对所有满足 $\delta^2/\beta_1(\delta)\leqslant\alpha\leqslant\beta_2(\delta)$ 的 α 有 $z^\alpha=R_2(u_\delta,\alpha)$．

寻找正则化参数的方法依赖于可从该问题中得到的附加信息．如果关于 u_δ 的方程右边的误差已知，即 $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$，则按照前面提到的，$\alpha$ 自然可以由偏差来确定，即通过关系 $\rho_U(Az_\alpha^\delta, u_\delta)=\varphi(a)=\delta$ 确定．

函数 $\varphi(\alpha)$ 对每个 $\alpha>0$ 是单调且半连续的．如果 A 为线性算子，Z 为 Hilbert 空间，且 $\Omega[z]$ 为严格凸泛函（例如，二次函数），则元素 z_α^δ 是唯一的且 $\varphi(\alpha)$ 为单值函数．在这些条件下，对每个正数 $\delta<\rho_U(Az_0, u_\delta)$，这里 $z_0\in\{z:\Omega[z]=\inf_{y\in F}\Omega[y]\}$，存在 $\alpha(\delta)$ 使得 $\rho_U(Az_\alpha^\delta, u_\delta)=\delta$（见[7]）．

但对非线性算子 A，方程 $\varphi(\alpha)=\delta$ 可能无解（见[8]）．

正则化方法与**样条**(spline)的构造密切相关．例如，寻找$[a, b]$上具有逐段连续二阶导数的函数$z(x)$使得泛函$\Omega[z]=\int_a^b(z'')^2dx$极小化并在格点$\{x_i\}$上取给定的值$\{z_i\}$的问题与构造二次样条函数等价．

构造正则化算子可以用谱方法(见[7],[8])，在卷积型方程情形用经典的积分变换(见[10],[7])，及用拟映射法(见[11])或迭代法(见[12])．正则化算子存在的必要与充分条件已经得到(见[13])．

下面假设不仅(1)的右边而且算子A也是近似给出的，以便用(A_h, u_δ)来代替精确初值(A, u_T)，这里

$$\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta,$$

$$h=\sup_{\substack{\delta\in F_1\\ \Omega[z]\neq 0}}\frac{\rho_U(A_hz, Az)}{\{\Omega[z]\}^{1/2}}<\infty.$$

在这些条件下，求近似解的步骤相同，只是要用泛函

$$M^\alpha[z, u_\delta, A_h]=\rho_U^2(A_hz, u_\delta)+\alpha\Omega[z]$$

代替$M^\alpha[z, u_\delta]$，并且参数α，例如，可由关系

$$\rho_U^2(A_hz, u_\delta)=(\delta+h\{\Omega[z_\alpha]\}^{1/2})^2$$

来确定(见[7])．

如果(1)的解集是无限集，则引入**正规解**(normal solution)的概念．假设Z为赋范空间．则例如可以取解$\bar{z}$，使得它同所给元素$z_0\in Z$的偏差按范数最小，即

$$\|\bar{z}-z_0\|_Z=\inf_{z\in Z}\|z-z_0\|_Z.$$

对于在(1)式右边的小变化下仍保持稳定的(1)的正规解，它的逼近可以通过上述正则化方法来实现．这类具有无穷多解的问题包括着退化的线性代数方程组．所谓约束条件不完整的线性代数方程组可以看作是当算子A用它的逼近A_h来代换时从退化方程组中得到的方程组．可以取最小范数$\|z\|$的解z作为相应退化方程的正规解．在光滑泛函情形$\Omega[z]$可以取泛函$\Omega[z]=\|z\|^2$．约束条件不完整的方程组的近似解也可以通过取$\Omega[z]=\|z\|^2$的正则化方法得到(见[7])．

类似的方法可用来按谱的形式解第二类 Fredholm 积分方程，这是指在方程的参数λ等于其核的一个本征值情形．

泛函极小化中的不稳定性问题．很多有重要应用的问题都归为泛函$f[z]$的极小化．这种问题分两种不同类型．第一类是要寻求泛函的极小值(或极大值)．最优系统或结构设计中的很多问题都属于这一类．对这类问题，所求的极小值是在哪些元素达到，这并不重要．因此，可以取任何极小化序列$\{z_n\}$上的泛函$f[z]$值作为这类问题的近似解．

在第二类问题中，必须求出使$f[z]$达到极小值的元素z．这称为**自变量上的极小化问题**(problem of minimizing over the argument)．例如，极小化序列可能发散．在这类问题中，不能把极小化序列的元素取为近似解．这样的问题称为**不稳定的**(unstable)或**不适定的**(ill-posed)．这些问题包括，例如，最优控制问题，其中被优化的函数(目标函数)只依赖于相变量．

假设$f[z]$是度量空间Z上的连续泛函，且$f[z]$在元素$z_0\in Z$处达到极小值．$f[z]$的极小化序列$\{z_n\}$称为**正则化的**(regularizing)，若在Z中存在含$\{z_n\}$的紧集$\bar{Z}$．如果$f[z]$的极小化问题有唯一解z_0，则正则化极小化序列收敛于z_0，并且在这些条件下，只须列出构造正则化极小化序列的算法．利用稳定化泛函$\Omega[z]$可以解决此问题．

设$\Omega[z]$为定义在集合$F_1\subset Z$上的稳定化泛函，$\inf_{z\in F_1}f[z]=f[z_0]$，且$z_0\in F_1$．常用关于$\Omega[z]$的$\delta$逼近$f_\delta[z]$，即对每个$z\in F_1$，使

$$|f_\delta[z]-f[z]|\leqslant\delta\Omega[z]$$

成立的泛函来代替$f[z]$．

于是对任何$\alpha>0$，泛函

$$M^\alpha[z, f_\delta]=f_\delta[z]+\alpha\Omega[z]$$

的极小化问题按自变量是稳定的．

设$\{\delta_n\}$和$\{\alpha_n\}$是对每个n，使$\delta_n/\alpha_n\leqslant q\leqslant 1$成立的零序列，且设$\{z_{\alpha_n,\delta_n}\}$为极小化$M^{\alpha_n}[z, f_{\delta_n}]$的元素序列．这是泛函$f_\delta[z]$的正则化极小化序列(见[7])，因而当$n\to+\infty$时，它趋于元素$z_0$．故可取元素$z_{\alpha_n,\delta_n}$作为该问题的近似解．

最优控制中不适定问题的近似解可以类似地构造．

在应用中，不适定问题经常出现在初值含随机误差情形．在构造这类问题的近似解时，确定性逼近和概率逼近都可能用到(见[7],[5])．

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **154** (1963), 3, 501 – 504.

[2] Тихонов, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **153** (1963), 1, 49 – 52.

[3] Тихонов, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **39** (1943), 5, 195 – 198.

[4] Лаврентьев, М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962 (英译本: Lavrentiev, M., Some improperly posed

problems of mathematical physics, Springer, 1967).
[5] Иванов, В. К., 《Матем. сб.》, **61** (1963), 2, 211 – 223.
[6] Иванов, В. К., 《Докл. АН СССР》, **145** (1962), 2, 270 – 272.
[7] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979 (英译本: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya., Solutions of ill-posed problems, Wiley, 1977).
[8] Гончарский, А. В., Леонов, А. С., Ягола, А. Г., 《Докл. АН СССР》, **214** (1974), 3, 499 – 500.
[9] Бакушинский, А. Б., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, 7 (1967), 3, 672 – 677.
[10] Арсенин, В. Я., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **133** (1973), 33 – 51.
[11] Lattes, R. and Lions, J. L., Méthode de quasi-réversibilité et applications, Dunod, 1967.
[12] Крянев, А. В., 《Докл. АН СССР》, **210** (1973), 1, 20 – 22.
[13] Винокуров, В. А., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, **11** (1971), 5, 1097 – 1112.
[14] Тихонов, А. Н., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, **6** (1966), 4, 631 – 634.
[15] Лаврентьев, М. М., Васильев, В. Г., 《Сиб. матем. ж.》, **7** (1966), 3, 559 – 576.

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов 撰

【补注】 B. L. Phillips [A26] 也提出过条件适定性的思想; 在西方, 不用"Тихонов 适定性"表述.

导致上述意义下的不适定问题的其他问题有波动方程的 Dirichlet 问题 (Dirichlet problem), 热传导方程中的非特征性 Cauchy 问题 (Cauchy problem), 向后热传导方程的初边值问题, 反散射问题 ([A2]), 对于从极特殊的数据 ([A1], [A4]) 和计算机化的层面 X 线照相术得到的偏微分方程 ([A8]) 中的参数 (系数) 识别.

如果 A 是 Hilbert 空间之间的有界线性算子, 则正如上面所提到的, 正则化算子可以通过谱理论 (spectral theory) 来构造: 如果当 $\alpha \to 0$ 时 $U(\alpha, \lambda) \to 1/\lambda$, 那么在粗略的假设下, $U(\alpha, A^*A)A^*$ 为正则化算子 (参见 [A5]); 关于引出这种方法的最优收敛速度问题的正则化参数的选择, 见 [A3]. 对 $U(\alpha, \lambda) = 1/(\alpha+\lambda)$, 最终的方法称为 Тихонов 正则化 (Tikhonov regularization): 正则化解 z_α^δ 由 $(\alpha I + A^*A)z = A^*u_\delta$ 来定义. 这种方法在 Hilbert 尺度下的变形在 [A7] 中作了进一步研究, 参数选择的法则在 [A9] 中给出. 本文讨论的由 $\rho_U(AZ_\alpha^\delta, u_\delta) = \delta$ 给出的参数选择法则称为偏差原理 (discrepancy principle) ([A6]).

参考文献

[A1] Baumeister, J., Stable solutions of inverse problems, Vieweg, 1986.
[A2] Colton, D. and Kress, R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley, 1983.
[A3] Engl, H. W. and Gfrerer, H., A posteriori parameter choice for general regularization methods for solving linear ill-posed problems, *Appl. Num. Math.*, **4** (1988), 395 – 417.
[A4] Engl, H. W. and Groetsch, C. W. (eds.), Inverse and ill-posed problems, Acad. Press, 1984.
[A5] Groetsch, C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Pitman, 1984.
[A6] Morozov, V. A., Methods for solving incorrectly posed problems, Springer, 1984 (译自俄文).
[A7] Natterer, F., Error bounds for Tikhonov regularization in Hilbert scales, *Applic. Analysis*, **18** (1984), 29 – 37.
[A8] Natterer, F., The mathematics of computerized tomography, Wiley, 1986.
[A9] Neubauer, A., An a-posteriori parameter choice for Tikhonov regularization in Hilbert scales leading to optimal convergence rates, *SIAM J. Numer. Anal.*, **25** (1988), 1313 – 1326.
[A10] John, F., Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 551 – 585.
[A11] Cormak, A. M., Representation of a function by its line integrals with some radiological applications, *J. Appl. Phys.*, **34** (1963).
[A12] Kac, M., Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 1 – 23.
[A13] Backus, G. and Gilbert, F., The resolving power of gross earth data, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **16** (1968).
[A14] Colin, L., Mathematics of profile inversion, in Proc. Workshop Ames Res. Center, June 12 – 16, 1971, Vol. TM-X-62. 150, NASA.
[A15] Payne, L. E., Improperly posed problems in partial differential equations, SIAM, 1975.
[A16] Carasso, A. and Stone, A. P., Improperly posed boundary velue problems, Pitman, 1975.
[A17] Baltes, P. H. (ed.), Inverse source problems in optics, Springer, 1978.
[A18] Herman, G. T. (ed.), Image reconstruction from projections, Springer, 1979.
[A19] Baltes, P. H. (ed.), Inverse scattering problems in optics, Springer, 1980.
[A20] Boerner, W. M. and Jordan, A. K. (eds.), Inverse methods in electromagnetics, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **2** (1981).
[A21] Herman, G. T. and Nattherer, F. (eds.), Mathematical aspects of computerized tomography, Proc. Oberwolfach, February 10 – 16, 1980, Springer, 1981.

[A22] Groetsch, C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of first kind, Pitman, 1984.
[A23] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, 1984.
[A24] Lavrent'ev, M. H., Romanov, V. G. and Shishalskiĭ, S. P., Ill-posed problems of mathematical physics and analysis, Amer. Math. Soc., 1986 (译自俄文).
[A25] Beck, J. V., Blackwell, B. and StClair, C. R., Inverse heat conduction: ill posed problems, Wiley, 1985.
[A26] Phillips, B. L., A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *J. ACM*, 9 (1962), 84 - 97. 唐 云 译

复变函数论中的不适定问题 [ill-posed problems in complex function theory; некорректные задачи теории функций комплексного переменного]

原指微分方程的具有一类与 Laplace 方程的 Cauchy 问题相似的不稳定性的 (Hadamard 不适定 (Hadamard ill-posed)) 问题 (见**不适定问题** (ill-posed problems)). 对于这种类型的问题, 可以构造 Hadamard 例子 (Hadamard example): 对于数据及任意有限个导数的任意小的改变, 解都有相应的有限的改变 (见 [2], [5]). 现在, 术语"不适定问题"的含义相当广泛 (见 [1], [6]).

单变量函数论中的**解析开拓** (analytic continuation) 问题在 Hadamard 的意义下是不适定的. 对于这样的函数, 问题的一般形式叙述如下. 给定复平面里的一个区域 D 和 D 的闭包里的两个集合 A 与 B: $A \subset B \subset \overline{D}$. 在 A 上给定一个解析函数 $f(z)$, 它在 D 内是正则的. 要求在 B 上确定 $f(z)$. 关于 $f(z)$, 除了在 D 内的正则性外, 还可以附加一些信息, 例如,

$$|f(z)| \leqslant C, \ z \in \overline{D}, \qquad (*)$$

其中 C 是一个给定的常数.

经典的解析开拓问题是: 1) A 是区域 D 的一个子区域; 2) A 是 D 的边界 Γ 的一部分; 假定 Γ 是 (逐段) 连续可微的闭曲线, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $A = \Gamma_1$; 或 3) A 是一个在 D 内有极限点的集合.

上述问题的一些唯一性定理是在 19 世纪证明的. (它们可以在复变函数论的教科书中找到.) 问题 2) 等价于 **Laplace 方程** (Laplace equation) 的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem).

关于类型 1) 和 2) 的解析开拓问题的稳定性估计称为三常数定理 (three-constants theorems) (在条件 (*) 下, 用数据的改变来表示问题的解的改变的估计). 解析开拓问题是线性的, 线性不适定问题的一般的正则化方法适用于它们 (见 [3], [6]). 对于问题 2), 基于 Carleman 函数的构造, 一些特殊的正则化方法已经建立 (见 [3]).

解析开拓问题与广泛的应用问题相联系. 常常由一些物理定律得知, 许多物理场都是某些变量的解析函数. 要求从这个场在某一个集合上的数值 (测量是在这个集合上进行的) 出发在一个更大的集合上确定这个场. 以下列出一些这样的应用问题.

1. 根据地球的引力场和磁场在地球表面的数值, 确定地球表面上方的这个场的问题. 这个问题被用于勘探有用矿产的储量.

2. 根据理想流体的流动的位势或恒定电流滤波在某个物体部分表面上的数值, 确定物体内部这个流动或位势的问题 (见 [4]).

3. 根据一个具有紧支集的函数的 Fourier 变换在一个有限区间上的数值, 确定这个函数的问题.

从应用的观点看, 根据一个解析函数在有限集上的数值来确定这个函数的问题是相当重要的. 这个问题的解不是唯一的. 但是, 倘若这个集合在某种意义下接近于一个唯一性集 (见**解析函数的唯一性** (uniqueness properties of analytic functions)), 那么一个有小误差的近似解是可能的.

对于多复变量的函数, 既有适定的解析开拓问题, 又有不适定的解析开拓问题. 对于从正则性区域内部的一些集合的解析开拓问题, 熟知有下述结果: 一个集合成为唯一性集的充分必要条件是, 它不是有限个解析流形的并.

参考文献

[1] Иванов, В. К., Васин, В. В., Танана, В. П., Теория линейных некорректных задач и ее приложения, М., 1978.
[2] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文).
[3] Лаврентьев, М. А., Онекоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962 (英译本: Lavrentiev, M. [M. A. Lavrent'ev], Some improperly posed problems of mathematical physics, Springer, 1967).
[4] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1958.
[5] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966 (英译本: Sobolev, S. L., Partial differential equations of mathematical physics, Pergamon, 1964).
[6] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974 (英译本: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya., Solutions of ill-posed problems, Wiley, 1977).

[7] Фукс, Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд. ч. 1, М., 1962(英译本: Fuks, B. A., Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).

М. М. Лаврентьев 撰 陈怀惠 译

照明问题[illumination problem; освещения задача]

确定照亮一个**凸体**(convex body)的整个边界所需要的最少的不同向的平行光束数或最少的光源数. 设 K 是 n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸体, $\mathrm{bd}\,K$ 及 $\mathrm{int}\,K$ 分别表示它的边界和内部, 而且还假定 $\mathrm{bd}\,K \neq \varnothing$. 熟知的照明问题是指:

1)设 l 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个固定的方向. $\mathrm{bd}\,K$ 中一个点 x 称为是沿方向 l 从外部被照亮的, 如果过 x 且平行于 l 的直线过 $\mathrm{int}\,K$ 中某一点 y, 并且向量 $\overrightarrow{xy}$ 和 l 同向. 求空间 $\mathbf{R}^n$ 中将整个集合 $\mathrm{bd}\,K$ 照亮的最少的方向数 $c(K)$.

2)设 z 是 $\mathbf{R}^n \setminus K$ 中一点. $\mathrm{bd}\,K$ 中一个点 x 称为是被点 z 从外部照亮的, 如果由点 z 和 x 确定的直线过 $\mathrm{int}\,K$ 中某点 y, 并且向量 $\overrightarrow{xy}$ 和 $\overrightarrow{zy}$ 同向. 求 $\mathbf{R}^n \setminus K$ 中将整个集合 $\mathrm{bd}\,K$ 照亮的最少的点数 $c'(K)$.

3)设 z 是 $\mathrm{bd}\,K$ 中一点. $\mathrm{bd}\,K$ 中一点 x 称为是被点 $z(z \neq x)$ 从内部照亮的, 如果由点 z 和 x 确定的直线过 $\mathrm{int}\,K$ 中某点 y, 并且向量 $\overrightarrow{zy}$ 和 $\overrightarrow{zy}$ 逆向. 求 $\mathrm{bd}\,K$ 中将整个集合 $\mathrm{bd}\,K$ 从内部照亮的最少的点数 $p(K)$.

4)一个点系 $Z \subset \{z : z \in \mathrm{bd}\,K\}$ 称为对 K 是固定的(fixing), 如果它具有性质: a) Z 从内部照亮整个 $\mathrm{bd}\,K$, b)没有任何 Z 的真子集能将 $\mathrm{bd}\,K$ 从内部照亮. 对 $\mathbf{R}^n$ 中凸体 K, 求成为 K 的固定点系的最多的点数 $p'(K)$.

问题1)的提出与 **Hadwiger 假设**(Hadwiger hypothesis)有关(见[1]): 以相似系数 $k(0<k<1)$ 位似于有界凸体 K 的凸体中, 覆盖 K 的最少的凸体数 $b(K)$ 满足不等式 $n+1 < b(K) \leqslant 2^n$, 其中 $b(K) = 2^n$, 当且仅当 K 为平行六面体. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中有界凸体 K 来讲, 有 $c(K) = b(K)$; 如果 K 无界, 则 $c(K) \leqslant b(K)$, 并且存在凸体满足 $c(K) < b(K)$, 或者 $c(K) = b(K) = \infty$(见[1]).

问题2)的提出与问题1)有关. 如果 $K \subset \mathbf{R}^n$ 有界, 则等式 $c(K) = c'(K)$ 成立. 如果 K 无界, 则 $c'(K) \leqslant b(K)$ 且 $c(K) \leqslant c'(K)$. 对于 $\mathbf{R}^3$ 中的无界凸体 K, $c'(K)$ 取 $1,2,3,4,\infty$ 中的某一值(见[1]).

问题3)的解答是: $p(K)$ 当且仅当 K 不是**锥**(cone)的时候才有定义, 在此条件下有:

$$2 \leqslant p(K) \leqslant n+1,$$

其中 $p(K) = n+1$, 当且仅当 K 是空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维单形(见[1]).

关于问题4)(见[2]), 有以下猜想: 如果 $K \subset \mathbf{R}^n$ 有界, 则不等式

$$p'(K) \leqslant 2^n$$

成立.

每一个照明问题都与凸体 K 的某个特殊的**覆盖(集合的)**(covering (of a set))有着紧密的联系(见[1]).

参考文献

[1] Болтянский, В. Г., Солтан, П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978.

[2] Grünbaum, B., Fixing systems and inner illumination, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15**(1964), 161–163.

П. С. Солтан 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in Tölke, J. and Willes, J. M. (eds.): Contributions to geometry, Birkhäuser, 1979, 13–59.

[A2] Boltjansky, V. and Gohberg, I., Results and problems in combinatorial geometry, Cambridge Univ. Press, 1985(译自俄文).

成 斌 译

态射的象[image of a morphism; образ морфизма], 范畴的

与从一个集合到另一集合的映射的象的概念类似的概念. 可是, 在范畴理论中, 有好几种途径来定义这个概念. 最简单的方法是与**双范畴**(bicategory)的概念密切相关的. 假定在**范畴**(category) $\mathfrak{K}$ 中存在一个双范畴结构 $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, 这里 $\mathfrak{E}$ 是容许满态射的类, 而 $\mathfrak{M}$ 是容许单态射的类. 如果 $\alpha : A \to B$ 是 $\mathfrak{K}$ 中任意的一个态射, 而 $\alpha = \nu\mu$ 是 α 的一个容许因式分解, 即, $\nu \in \mathfrak{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$, 则由单态射 μ 所定义的 B 的子对象 $(\mu]$ 就称为态射 α 的(容许的)象(对于所给定的双范畴结构). 如果 $\mathfrak{K}$ 中只有唯一的双范畴结构, 那么就可说成态射 α 的(确定的)象. 特别, 在集合的范畴, 群范畴与域上向量空间的范畴中, 上面所述的定义就是映射或同态的象的通常定义.

另一方面, 如果 $\mathfrak{K}$ 中有多个双范畴结构, 那么, 一个给定的态射对于不同的结构就可能有不同的象. 例如, 在拓扑空间的范畴与结合环的范畴中, 这种情况就会出现.

下面是定义一个态射的象的另一个途径. 一个态射 $\alpha : A \to B$ 可通过对象 B 的一个子对象 $(\mu]$ 来分解因式, 是指 α 可以写成 $\alpha = \alpha'\mu$ 的形式. 在 B 的所有可使 α 分解因式的子对象中, 其最小的子对象, 如果存在, 就称为 α 的象. 如果 $\mathfrak{K}$ 是良-幂的, 并且具

有公共上定义域的单态射族都有极限，则 $\mathfrak{R}$ 中的每一个态射都有一个象.

如果在 $\mathfrak{R}$ 中有一个双范畴结构，其中所有的单态射都是容许的，那么，态射的象的第二个定义等价于用给定的双范畴结构的定义.

一个态射的象通常表以 $\mathrm{Im}\alpha$；$\mathrm{im}\alpha$ 表示子对象 $\mathrm{Im}\alpha$ 的任何代表.

M. Ш. Цаленко 撰

【补注】 如果范畴 $\mathfrak{R}$ 有拉回，上面倒数第二段中的论断的逆也是成立的：象的存在性（在第二意义下）蕴涵着这样的性质，即，所有单态射之类形成 $\mathfrak{R}$ 上一个因式分解（"双范畴"）结构的一半，另一半就是极端满态射（extremal epimorphisms）类（即那些不能通过它们的上定义域的任何真子对象来分解因式的满态射）. 在正则范畴（regular categories）([A1]) 的理论中，象的因式分解是起作用的；事实上，一个正则范畴的最简单的定义是一个范畴，它具有有限极限与象，而且象的因式分解在拉回下是稳定的.

参考文献

[A1] Grillet, P. A., Regular categories, in Exact categories and categories of sheaves, Lecture notes in math., Vol. 236, Springer, 121 – 122.

周伯埙 译

虚数 [imaginary number; мнимое число]

形如 $x+iy$ 的数，其中 i 是虚数单位，x 和 y 是实数，且 $y\neq0$，即不为实数的**复数**（**complex number**）；形如 iy 的虚数称为纯虚数（purely imaginary number）（有时只把这样的数称为虚数）.

【补注】 "虚数"和"复数"通常理解为同义词；"虚数"一词是历史上采用的，而"复数"一词则是现代更常使用的.

数学家在 16 世纪前期开始遇到虚数. 在使用新发现的方法解方程 $x^3=15x+4$ 的过程中（S. del Ferro (1465–1526)、B. Tartaglia (1499–1557)），出现形式为 $(2+\sqrt{-121})^{1/3}+(2-\sqrt{-121})^{1/3}$ 的数 4. R. Bombelli (1526–1572) 已经敢于把负数的根像对"普通数"那样来进行运算. 但是，直到 17 世纪前期，人们才在某种程度上承认了这些所谓"似是而非的量"，虽然并不情愿. 甚至 R. Descartes (1596–1650) 也不认为它们是真正的数，而只是"空中楼阁"（mental buildings）. 在 18 世纪，这些数得到了较多的依据，这主要归功于 L. Euler (1707–1783) 的贡献，他还引入字母 i 来表示 $\sqrt{-1}$（取自 imaginary 的第一个字母）. C. F. Gauss (1777–1855) 沿用了这种表示法. 1800 年前后，几位数学家，其中包括 J. R. Argand (1768–1882) 和 C. Wessel (1745–1818)，给出了虚数的几何解释. A. Girard (1595–1632) 已经沿同样的思路做过工作. 最著名的结果是所谓 Argand 图（Argand diagram），其中一个虚数是用它的模和辐角来表示（见**复数**（complex number），向量解释）.

W. R. Hamilton (1805–1865) 以更代数的方式引入虚数，作为实数 a 和 b 的数对 (a, b)，并且定义运算 + 和 · 如下：

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$$

从这些定义可以推出熟知的虚数计算法则；并且可知它们构成具有这些运算的一个**域**（field）（记为 $\mathbf{C}$）. 可以证明，实数域 $\mathbf{R}$ 能够同构地嵌入复数域 $\mathbf{C}$，因此，实数 a 对应于数对 $(a, 0)$. 根据乘法法则：$(0, 1)\cdot(0, 1)=(-1, 0)$，数对 $(0, 1)$ 可以等同于**虚数单位**（imaginary unit）i. 由此推出，数对 (a, b) 可以写成 $(a, b)=(a, 0)+(0, b)=(a, 0)+(b, 0)\cdot(0, 1)$，它也可写成 $a+bi$. 于是，在直观上把虚数 (a, b) 写成 $a+bi$，便有了合理依据.

张鸿林 译

虚数单位 [imaginary unit; мнимая единица]

复数（complex number）i，它的平方等于负一：$i^2=-1$.

张鸿林 译

嵌入字 [imbedded word; вхождение]，出现（occurrence）

包含一个字在另一个字中的位置的完整信息的具特殊类型的字（word）. 更确切地说，**字母表**（alphabet）A 中的一个出现是形如 $P\star Q\star R$ 的一个字，其中，P, Q, R 均为 A 中的字，而 $\star$ 不是该表中的字母. 出现 $P\star Q\star R$ 也是进入字 PQR 内的字 Q 的出现（accurrence of a word）. 字 Q 称为这个出现的基（base），字 P 与 R 分别被称为左翼（left wing）与右翼（right wing）. 出现的概念可以作为概念系统的基础，这便于一类型或另一类型的字的句法结构研究.

参考文献

[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **42** (1954), 25–34 (英译本: Markov, A. A., Theory of algorithms, Israel Progr. Sci. Transl., 1961).

[2] Марков, А. А., Нагорный, Н. М., Теория алгорифмов（英译本: Markov, A. A. and Nagornyi, N. M., The therory of algorithms, Kluwer, 1988）.

Н. М. Нагорный 撰

【补注】 英文中通常不用嵌入字（imbedded word）这一术语. [1] 的英译本用的是"一个字进入（entry）另一个字"，以及"左界定"（left delimiter）和"右界定"（right delimiter），而不是 [2] 的英译本中使用的"出现"，以及"左翼"和"右翼". 其他英文作者倾向于将字的出现称为另一个字的子字（subword）（或部分（segment））.

参考文献

[A1] Eilenberg, S., Automata, languages and machines, A, Acad. Press, 1974.

[A2] Britton, J. L., The word problem, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 16-32.

陈公宁 译

范畴的嵌入 [imbedding of categories; вложение категорий]

从一个范畴 C 到一个范畴 C_1 的一个共变函子(functor) F, 它在 C 的态射类上是单射的.

【补注】 等价地, 一个嵌入是一个忠实的函子, 它在对象上是单射的. 有些作者用名词"嵌入"为"忠实函子"的同义词.

周伯埙 译

函数空间的嵌入 [imbedding of function spaces; вложение функциональных пространств]

在集合论意义下, 一线性**赋范空间** (normed space) V 到一线性赋范空间 W 中的包含关系 $V \subset W$, 且对任何 $x \in V$, 以下不等式成立:

$$\| x \|_W \leqslant C \| x \|_V,$$

这里 C 是一个不依赖于 $x \in V$ 的常数. 这里, $\| x \|_W$ 是元素 x 在 W 中的范数 (半范数), 而 $\| x \|_V$ 是此元素 x 在 V 中的范数 (半范数).

把一个元素 $x \in V$ 映到 W 中同一个元素的从 V 到 W 的恒同映射称为 V 到 W 中的嵌入算子 (imbedding operator). 嵌入算子总是有界的. 如果嵌入算子是**完全连续算子** (completely-continuous operator), 那么这种函数空间的嵌入称为紧的 (compact). 关于函数空间嵌入的一些结果由所谓的**嵌入定理** (imbedding theorems) 得出.

例 设 E 是 n 维 Euclid 空间中有有限测度 mes E 的 Lebesgue 可测集, $L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 是 E 上 p 次幂可积的可测函数的 Lebesgue 空间, 具有范数

$$\| x \|_p = \left[\int_E |x(t)|^p dt \right]^{1/p}.$$

如果 $p \geqslant q$, 则有嵌入 $L_p(E) \to L_q(E)$, 且

$$\| x \|_q \leqslant (\text{mes}\, E)^{1/q - 1/p} \| x \|_p.$$

Л. П. Купцов 撰

【补注】 参考文献见**嵌入定理** (imbedding theorems) 条目.

葛显良 译 鲁世杰 校

环的嵌入 [imbedding of rings; вложение кольца]

一个环到另外一个环内的**单同态** (monomorphism); 如果环 R 同构于环 L 的一个子环, 则环 R 可嵌入到环 L 内. 一个结合环嵌入到一个 (结合) **除环** (skew-field) 及任一个环嵌入到一个除环的条件已被很仔细地研究. 这些研究是由 А. И. Мальцев ([1]) 开始的, 他构造了一个无零因子而不能嵌入体的结合环的例子. 下述 Мальцев 问题 (Mal'tsev problem) 在很长一段时间内都是公开问题: 其非零元的半群可嵌入一个群的任意的无零因子结合环, 是否必可以嵌入到一个体中? 这个问题在 1966 年被否定 (见 [2]). 结合环 R 上 $n \times n$ 阶方阵 A 称为不完全的 (non-full), 如果它可表为 $A = BC$, 其中 B, C 分别为 $n \times r$ 阶和 $r \times n$ 阶矩阵, 且 $r < n$. 设

$$A = (a, a_2, \cdots, a_n), \quad B = (b, a_2, \cdots, a_n)$$

都是 R 上 $n \times n$ 阶方阵, 其所有列 (第一列可能除外) 都是相同的. 矩阵

$$C = (a + b, a_2, \cdots, a_n)$$

称为 A 和 B 关于第一列的行列式和 (determinant sum). 同阶方阵关于任一列 (行) 的行列式和可类似地定义. 一个带单位元的结合环可嵌入到一个体内, 当且仅当它无零因子, 且没有非零元 a 在对角线上的纯量矩阵 aE 能够表作有限个非完全矩阵的行列式和 ([2]). 可嵌入到体内的结合环类不是有限公理化的 (即不能由有限多公理所定义) ([3]). 已经知道把结合环嵌入到体内的一些充分条件; 下列是最重要的. 设 R 是无零因子结合环, 其非零元半群满足 Ore 条件 (见**半群的嵌入** (imbedding of semi-groups)). 那么, R 可嵌入到一个体中 ([4]). 有序群的群代数可嵌入到一个体中 (Мальцев-Neumann 定理 (Mal'tsev-Neumann theorem), 见 [4]). 自由右 (左) 理想的任意一个整环 (见**结合环与代数** (associative rings and algebras)) 可以嵌入到一个体中 ([2]).

环 R 可嵌入到除环中, 当且仅当它无零因子. 设 R, L 是环, ∞ 是一符号, $\infty \notin L$. 映射 $\varphi: R \to \{L, \infty\}$ 称为 T 同态 (T-homomorphism), 如果: 1) 集合 $\varphi^{-1}(L)$ 是一个环, 而且在这个集合上的映射 φ 是一个环同态; 2) 由 $\varphi(ab) \neq \infty$, $\varphi(a) = \infty$ 可导出 $\varphi(b) = 0$; 3) 由 $\varphi(ab) \neq \infty$, $\varphi(b) = \infty$ 可导出 $\varphi(a) = 0$. 一个域的 T 同态即是域的 (一个点的) 特殊化 (见**点的特殊化** (specialization of a point)). 除环 L 是环 R 的一个自由 T 扩张 (free T-extension), 如果 L 包含 R 且 (作为一个除环) 由环 R 生成, 而且环 R 到某除环 S 内的任意 T 同态总可扩张为 L 到 S 内的一个 T 同态. 每个无零因子环都有一个自由 T 扩张 ([4]).

参考文献

[1] Malcev, A. I. [A. I. Mal'tsev], On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Ann.*, **113** (1937), 686-691.

[2] Cohn, P. M., Free rings and their relations, Acad. Press, 1971.

[3] Cohn, P. M., The class of rings embeddable in skew fields, *Bull. London Math. Soc.*, **6** (1974), 147-148.

[4] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
[5] Bokut', L. A., Embedding of rings, Russian Math. Surveys, **42** (1987), 4, 105–138 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **42** (1987), 87–111).
Л. А. Бокуть 撰

【补注】 T同态也称为局部化(localization)(亦见**交换代数中的局部化**(localization in a commutative algebra)).

另一个经典问题是，一个环R到一交换环上的有限矩阵环的嵌入．一个必要条件是，它满足整数$n \times n$矩阵环上的所有泛多项式恒等式$p[x_1, \cdots, x_m]=0$．如果R是素的或半素的，条件还是充分的，其他情况则不然(见[A1]).

参考文献

[A1] Rowen, L. H., Polynomial identities in ring theory, Acad. Press, 1980, Chapt. 7.
郭元春 译 牛凤文 校

半群的嵌入[imbedding of semi-groups; вложение полугруппы], 到群中的

半群(semi-group)到**群**(group)中的**单态射**(monomorphism)．半群S可嵌入到群G中，如果S同构于G的子半群．这种可嵌入性的充分必要条件是 А. И. Мальцев 发现的([1])(亦见[3])．这些条件构成无限组条件恒等式(或**拟恒等式**(quasi-identity))，特别地有下列一些:

$$ap=aq \to p=q,\ pa=qa \to p=q$$

(消去律(cancellation laws));

$$ap=bq,\ ar=bs,\ cp=dq \to cr=ds,$$

其中a, b, c, d, p, q, r, s是半群的元素．这类可嵌入群中的半群不能由有限个条件恒等式刻画([2])．已知道半群到群中的可嵌入性的一些充分条件．最重要的是下列一些条件．设S是具有消去律的半群且对任何元素$a, b \in S$都存在S的元素x, y使得$ax=by$(Ore 条件(Ore condition))，则S可嵌入到群中．设S是具有消去律的半群，且若从等式$ab=cd$推出对某元素$x \in S$有$a=cx$或$c=ax$，则S可嵌入群中([4])．还知道一些用图论语言表述可嵌入性的充分条件(参见，例如[5]).

参考文献

[1] Мальцев, А. И., 《Матем. сб.》, **6** (1939), 48, 331–336.
[2] Мальцев, А. И., 《Матем. сб.》, **8** (1940), 50, 251–264.
[3] Cohn, P. M., Universal algebra, Riedel, 1981.
[4] Doss, R., Sur l'immersion d'une semi-groupe dans une groupe, *Bull. Sci. Math.*, **72** (1948), 2, 139–150.
[5] Адян, С. И., Труды матем. ин-та АН СССР, **85** (1966), 1–123.
Л. А. Бокуть 撰 石生明 译 许以超 校

嵌入定理[imbedding theorems; вложения теоремы]

与研究同一函数在不同赋范空间类中的范数间的不等式时涉及的一类问题有关的一些定理．通常涉及两个函数类$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}_1$，这里$\mathfrak{M}$是$\mathfrak{M}_1$的一部分($\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$)，且对所有的$f \in \mathfrak{M}$，满足一个不等式

$$\|f\|_{\mathfrak{M}_1} \leqslant C\|f\|_{\mathfrak{M}},$$

这里C是不依赖于f的常数，而$\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_1}$分别是在$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}_1$中的范数．在这些条件下，就说存在$\mathfrak{M}$到$\mathfrak{M}_1$中的一个嵌入(imbedding)或称$\mathfrak{M}$为到$\mathfrak{M}_1$中的可嵌入函数类(imbeddable class)，记作$\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_1$(亦见**函数空间的嵌入**(imbedding of function spaces))．与嵌入定理有关的研究工作构成了函数论的一个分支，但其发展的主要途径是与数学物理中的边值问题有关，特别是与直接变分方法有关．由于这个缘故，在过去的30年中，多元可微函数类的系统的嵌入理论已发展起来．

以下的问题是用嵌入定理加以解决的问题的一些例子．设已知函数f，通常具有l阶广义偏导数(见**广义导数**(generalized derivative))，它们的p次幂在n维空间$\mathbf{R}^n$的给定区域Ω上可积．问题是: 1) 这函数在Ω上有多少个连续导数? 2) 如果区域Ω有充分光滑的边界Γ，是否能在某种意义下确定函数f在点$x \in \Gamma$上的迹(trace)$\varphi(x)$，即当u趋于x时$f(u)$的极限值，且这个迹有何种可微性质? 这些性质常常需要知道得足够精确，使得当给定在Γ上的函数φ具有这些性质时，就能从Γ延拓到Ω上，使此延拓函数有p次幂在Ω上可积的l阶广义导数．从下面给出的事实可以看出，这些用来确定f的迹φ和φ的延拓的极限(在几乎处处收敛意义下)能伴随着f在Ω和Γ上的范数之间的不等式而得出，它们被用于边值问题的理论中．

多维的可微函数类嵌入理论起源于20世纪30年代 С. Л. Соболев 关于数学物理的研究工作，在分析中起重要作用的函数类$W_p^l(\Omega)$(**Соболев 空间**(Sobolev space))的基本嵌入定理是属于他的．称函数$f(x)=f(x_1, \cdots, x_n)$属于$W_p^l(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l=0, 1, \cdots$，如果它定义在Ω上且有有限范数

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_p^l(\Omega)}, \tag{1}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}\|f\|_{L_p(\Omega)} &= \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p},\\ \|f\|_{w_p^l(\Omega)} &= \sum_{|k|=l} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中求和是对所有可能的$|\mathbf{k}|=l$阶(Соболев 广义)偏导数

$$D^{\mathbf{k}}f = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}, \tag{3}$$

$$\mathbf{k}=(k_1,\cdots,k_n),\ |\mathbf{k}|=\sum_{j=1}^{n}k_j.$$

在 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 情形下的 Соболев 基本定理(Sobolev fundamental theorem,为 В.И.Кондрашов 和 В.П.Ильин 所补充):如果 $1\leqslant m\leqslant n$, $1<p<q<\infty$, $0\leqslant k=l-n/p+m/q$,则以下的嵌入成立:

$$W_p^l(\mathbf{R}^n)\to W_q^{[k]}(\mathbf{R}^m), \tag{4}$$

这里 $[k]$ 是 k 的整数部分.

如果 $m<n$,这说明函数 $f\in W_p^l(\mathbf{R}^n)$ 在任一 m 维坐标超平面 $\mathbf{R}^m$ 上具有迹(参看以下部分)

$$f|_{\mathbf{R}^m}=\varphi\in W_q^{[k]}(\mathbf{R}^m)$$

而且

$$\|f\|_{W_q^{[k]}(\mathbf{R}^m)}\leqslant C\|f\|_{W_p^l(\mathbf{R}^n)},$$

这里 C 不依赖于 f([6],[7]).

设函数 f 定义在 $\mathbf{R}^n$ 上,对固定的 $x_{m+1}^0,\cdots,x_n^0$, $\mathbf{R}^m$ 是点 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}^0,\cdots,x_n^0)$ 构成的 m 维(坐标)子空间,如果 f 能在某一 n 维零测集上修改,使得修改后的函数(仍用 f 表示)满足下式:

$$\|f(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}^0,\cdots,x_n^0)+ \\ -f(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\|_{L_p(\mathbf{R}^m)}\to 0, \tag{5}$$

当 $x_j\to x_j^0(j=m+1,\cdots,n)$ 时,则称函数 f 在 $\mathbf{R}^m$ 上具有迹.

如果 $\mathfrak{M}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的某些函数 f 的集合,描述这些函数在子空间 $\mathbf{R}^m(1\leqslant m<n)$ 上的迹的性质的问题称为关于类 $\mathfrak{M}$ 的迹问题(trace problem).

对类 $W_p^l(\Omega)$ 而言,定理(4)是最终的定理,仅当引入新的函数类时,进一步加强才有可能.

在一维的情况,$n=m=1$,迹问题不存在,定理(4)应归于 G.H.Hardy 和 J.E.Littlewood.

此理论发展的下一阶段是 Никольский 对广义 Hölder 类(见 **Hölder 空间**(Hölder space))(H 类)的嵌入定理.这些类带有刻画函数光滑性的连续变化的参数,构成一个等级.其中的函数在不同的方向通常显示不同的可微性质,在此意义下它们是非迷向的(anisotropic).设 Ω_η 是与 Ω 的边界的距离大于 $\eta(\eta>0)$ 的所有点 $\mathbf{x}\in\Omega$ 构成的集合,又设 $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_n)$ 是一正向量($r_j>0;j=1,\cdots,n$),$r_j=r_j^*+\alpha_j$,这里 r_j^* 是整数且 $0<\alpha_j\leqslant 1$.

称函数 f 属于函数类 $H_p^{\mathbf{r}}(\Omega)$,$1\leqslant p\leqslant\infty$,如果 $f\in L_p(\Omega)$ 且对任一 $j=1,\cdots,m$,广义偏导数

$$D_j^{r_j^*}f=\frac{\partial^{r_j^*}f}{\partial x_j^{r_j^*}} \tag{6}$$

存在且满足不等式

$$\|\Delta_{jh}^2[D_j^{r_j^*}f]\|_{L_p(\Omega_{2h})}\leqslant M|h|^{\alpha_j}, \tag{7}$$

这里 Δ_{jh}^2 表示函数对变量 x_j,步长 h 的二阶差分算子,而 M 是与 h 无关的一个常数.

类 $H_p^{\mathbf{r}}(\Omega)$ 以

$$\|f\|_{H_p^{\mathbf{r}}(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+M_f$$

为范数成为一个 **Banach 空间**(Banach space),这里 M_f 是使不等式(7)满足的最小常数 M.如果 $r_1=\cdots=r_n=r$,各个(迷向的)类用 H_p^r 表示.如果 l 是整数,则类 H_p^l 以精度 $\varepsilon>0$ 在下面的意义下

$$H_p^{l+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)\to W_p^l(\mathbf{R}^n)\to H_p^{l-\varepsilon}(\mathbf{R}^n), \tag{8}$$

接近 Соболев 类 W_p^l.Никольский 嵌入定理成立:

$$H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)\to H_q^{\rho}(\mathbf{R}^m), \tag{9}$$

这里

$$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\ 1\leqslant m\leqslant n,\ \rho=(\rho_1,\cdots,\rho_m),$$

$$\rho_j=\kappa r_j\ (j=1,\cdots,m),$$

$$\kappa=1-\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j}-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{r_j}>0;$$

当 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant m<n$, $\rho_j=\kappa r_j$, $j=1,\cdots,m$,

$$\kappa=1-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{r_j}>0$$

时,

$$H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)\rightleftharpoons H_p^{\rho}(\mathbf{R}^m) \tag{10}$$

(见[5]).

定理(9)是定理(4)在非迷向情况下的类似结果,其优点在于其中出现的函数类的(向量的)上标 $\mathbf{r}$,ρ 可以连续变化.此外,它包括 $p=1$,∞ 的情况.然而,对 $\kappa=0$,与(4)不同,它不成立.Hardy 和 Littlewood 对单变元情形($n=m=1$),对非整数 r 和 ρ 证明了这个定理.

(10)式中带上面箭头的嵌入也由定理(9)的一个特殊情形 $p=q$ 给出.它表明函数 $f\in H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上有迹 $f|_{\mathbf{R}^m}=\varphi$,并有

$$\|\varphi\|_{H_p^{\rho}(\mathbf{R}^m)}\leqslant C\|f\|_{H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)}, \tag{11}$$

这里 C 不依赖于 f.由下面的箭头表示的逆命题也是正确的,且应按照下面的意义来理解:任一定义在 $\mathbf{R}^m$

上的函数 $\varphi\in H_p^{\rho}(\mathbf{R}^m)$ 可以延拓到整个空间 $\mathbf{R}^n$ 上，使得所得到的函数 $f(\mathbf{x})$（在 $\mathbf{R}^m$ 上的迹等于 φ）属于 $H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)$ 且满足不等式（与（11）相反）

$$\|f\|_{H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\|\varphi\|_{H_p^{\rho}(\mathbf{R}^m)},$$

这里 C 不依赖于 φ.

互逆的嵌入（10）表示，对 H 类的迹问题藉助于 H 类得到完全的解决．

定理（9）是传递的，这就是说传递关系

$$H_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)\to H_{p'}^{\rho'}(\mathbf{R}^m)\to H_{p''}^{\rho''}(\mathbf{R}^{m''})\qquad(12)$$

从链（12）中的第一类到第二类，再从第二类到第三类，这里参数 ρ', ρ'' 由（9）中公式计算得出，取代上述关系，也可以从第一类直接传递到第三类，ρ'' 由同样的公式计算．

随后（见[14]）给出了一般非迷向的 W 类的迹问题的解．这导致引入一族新的多变量可微函数类 $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)$，它依赖于向量参数 $\mathbf{r}$ 和满足不等式 $1\leqslant p,\theta\leqslant\infty$ 的两个标量参数 p,θ．这一族完全是由 О．В．Бесов 定义的、他还研究了其基本性质．

函数 f 属于函数类 $W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)$，如果它有有限的范数：

$$\|f\|_{W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{w_p^{\mathbf{l}}(\Omega)},\qquad(13)$$

$$\|f\|_{w_p^{\mathbf{l}}(\Omega)}=\sum_{j=1}^{n}\|D_j^{l_j}f\|_{L_p(\Omega)},$$

其中 $\mathbf{l}=(l_1,\cdots,l_n)$ 是整向量．

函数 f 属于函数类 $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}(\Omega)$，如果它有有限的范数

$$\|f\|_{B_p^{\mathbf{r}}(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{b_p^{\mathbf{r}}(\Omega)},$$

$$\|f\|_{b_p^{\mathbf{r}}(\Omega)}=\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_0^{\infty}t^{-\theta\alpha_j-1}\|\Delta_{jt}^2f_{x_j}^{(r_j^*)}\|_{L_p(\Omega_{2t})}^{\theta}\right\}^{1/\theta},$$

其中 $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_n)$ 是任意向量，不必是整的，$1\leqslant p,\theta\leqslant\infty$，$r_j>0$，数 r_j^* 和 d_j 定义如前．

如果 $\theta=\infty$，把类 $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}$ 看成等同于类 $H_p^{\mathbf{r}}$ 是自然的（$B_{p\infty}^{\mathbf{r}}=H_p^{\mathbf{r}}$）．如果 $r_1=\cdots=r_n=r$，通常把 $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}$ 写成 $B_{p\theta}^{r}$（以标量 r 代替向量 $\mathbf{r}$）且记 $B_p^{\mathbf{r}}=B_{pp}^{\mathbf{r}}$, $B_p^r=B_{pp}^r$．对任意给定的 $p,\theta,\mathbf{r}$，类 $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}$ 是 Banach 空间．

嵌入定理（9）和（10）仍然成立，如果把其中的符号 H 换成 B．也存在互逆的嵌入

$$W_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)\rightleftharpoons B_{p\theta}^{\kappa\mathbf{r}^m}(\mathbf{R}^m).\qquad(14)$$

其中 $\mathbf{r}$ 是整的，$1<p<\infty$，$\mathbf{r}^m=(r_1,\cdots,r_m,0,\cdots,0)$，$\kappa=1-(1/p)\sum_{j=m+1}^{n}1/r_j>0$，它完全解决了 W 类的迹问题，且不与完全以 B 类术语表达的互逆嵌入

$$B_{p\theta}^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)\rightleftharpoons B_{p\theta}^{\kappa\mathbf{r}^m}(\mathbf{R}^m)\qquad(15)$$

相抵触．

对应于参数值 $p=\theta=2$ 的类 $B_2^{\mathbf{r}}$ 通常表示为 $W_2^{\mathbf{r}}$（$B_2^{\mathbf{r}}=W_2^{\mathbf{r}}$）．如果 $p=2$，则嵌入（14）也可写成

$$W_2^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)\rightleftharpoons W_2^{\kappa\mathbf{r}^m}(\mathbf{R}^m).\qquad(16)$$

其定义中包含 Liouville 分数阶导数概念（见**分数阶积分与微分**（fractional integration and differentiation））的函数类是 W 类的自然推广．

用**广义函数**（generalized function）的术语，可以定义检验函数类 Λ，使得在其上构造的广义函数 Λ' 有以下性质：1）对任意有限数 $p\geqslant0$，$L_p(\mathbf{R}^n)\subset\Lambda'$；2）对任意的 $l>0$，不必是整数，运算

$$D_j^lf=\widehat{x_j^{l_j}\widetilde{f}},\ f\in\Lambda'\qquad(17)$$

有意义，其中 $\widetilde{\psi}$, $\hat{\psi}$ 分别表示 $\psi\in\Lambda'$ 的正的和逆的 **Fourier 变换**（Fourier transform）；3）如果 l 是整数且函数 $f\in L_p(\mathbf{R}^n)$ 有 Соболев 广义导数 $D_j^lf\in L_p(\mathbf{R}^n)$，则方程（17）对它适合．

在 l 是分数的情形，对无穷次可微的具有紧支集的函数，运算（17）等同于 Liouville 分数次微分运算．如果 l 不是整数，很自然地称 D_j^lf 为 f 关于 x_j 的 l 阶分数阶导数（fractional derivative）．

如果给定了任一向量 $\mathbf{l}=(l_1,\cdots,l_n)$，可以引入空间 $L_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)$，$1\leqslant p<\infty$，对整向量 $\mathbf{l}$，它等同于 $W_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)$，在（13）式把 W 换成 L．

如果 $l=l_1=\cdots=l_n$，令 $L_p^l=L_p^{\mathbf{l}}$．函数类族 $L_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)$, $\mathbf{l}>0$, $1\leqslant p<\infty$ 可以看成族 $W_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)$ 自然的推广到分数 $\mathbf{l}$ 的情况，称为"自然的"，是由于从现在所关心的方面来看，类 $L_p^{\mathbf{l}}$ 显示了 $W_p^{\mathbf{l}}$ 的所有的优点和缺点．如果用 L 代替 W，公式（4）（其中 k 可代替$[k]$），公式（8）（其中 l 可以是分数），公式（14），公式（16）（其中 $\mathbf{r}$ 可以是分数）仍然成立．公式（9）中如果把 H 换成 L，即使在更宽的条件 $\kappa\geqslant0$ 下，只要假设 $1<p<q<\infty$，则此式仍然适用．

除了现已构成的空间 S' 外，以下还将用到广义函数的工具．对任意实数 ρ，下述 Bessel-Macdonald 运算是有意义的：

$$J_\rho f=\widehat{(1+|\mathbf{x}|^2)^{-\rho/2}\widetilde{f}},\ f\in S',\ |\mathbf{x}|^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

它有以下的性质：$J_0f=f$, $J_{r+\rho}=J_rJ_\rho$, $J_{-2l}=(1-\Delta)^l$, $l=0,1,\cdots$，这里 $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\partial^2/\partial x_j^2$ 是 **Laplace 算子**（Laplace operator）．

迷向类 $L_p^\rho=L_p^\rho(\mathbf{R}^n)$，$1<p<\infty$，也可以定义为能表成形如 $f=J_\rho\varphi$ 的函数 f 的集合，其中 φ 跑遍空间 $L_p=L_p(\mathbf{R}^n)$（$L_p^\rho=J_\rho(L_p)$）；此外，在等

价意义下，

$$\|f\|_{L_p^\rho}=\|\varphi\|_{L_p}.$$

类 L_p^ρ 的这个定义对负数 ρ 也是适用的，但这种情况下 L_p^ρ 通常是广义函数的集合（$L_p^\rho\subset S'$）．特别地 $L_p^0=L_p$.

运算 J_ρ 也可作为工具来定义类 $B_{p\theta}^r(B_{p\infty}^r=H_p^r)$. 因此，称广义函数 f 为在 L_p 意义下正则的（regular）或属于 S_p'，如果存在 $\rho>0$ 使得 $J_\rho f\in L_p$. 任何函数 $f\in B_{p\theta}^r=B_{p\theta}^r(\mathbf{R}^n)$ $(1\leqslant\rho,\ \theta\leqslant\infty,\ B_{p\infty}^r=H_p^r)$ 可以定义为在 L_p 意义下正则的函数，且能写成级数

$$f(\mathbf{x})=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(\mathbf{x}),$$

弱收敛到 f（在 S' 意义下），这里 q_0 在 Δ_0 中具有谱（spectrum）（$\widetilde{q}_0$ 的支集），而对 $s\geqslant1$，q_s 在 $\Delta_{s+1}\setminus\Delta_{s-1}$ 中有谱并且

$$\Delta_s=\{\mathbf{x}:|x_j|\leqslant2^s;\ j=1,\cdots,n\},$$

而且

$$\|f\|_{B_{p\theta}^r}=\left[\sum_{s=0}^{\infty}2^{s\theta\gamma}\|q_s\|_{L_p}^{\theta}\right]^{1/\theta}<\infty.$$

特别地，

$$\|f\|_{H_p^r}=\|f\|_{B_{p\infty}^r}=\sup_s\{2^{sr}\|q_s\|_{L_p}\}.$$

类 $B_{p\theta}^r$ 的这个定义可以自动地推广到 $r\leqslant0$ 的情形，且属于带负数 r 的类的函数 f 通常是广义的（$f\in S'$）．这里 $J_r(B_p^0)=B_p^r$，$-\infty<r<\infty$.

基于函数空间的插值原理，也存在负类 $B_{p\theta}^r$ 的其他的等价的定义．上面给出的定义是构造性的——每一个被参数 r, p, θ 定义的类是独立地定义的，且可以构造性地定义线性运算，藉此，按给定的函数 $f\in S_p'$，可定义函数 q_s（如果 $s\geqslant1$，则属指数型 2^{s+1} 的，如果 $s=0$，则属型 1 的）．

以下的嵌入定理成立:

$$\Lambda_p^r(\mathbf{R}^n)\to\Lambda_q^{r-(1/p-1/q)^n}(\mathbf{R}^n).$$

此定理与定理（4）属同样类型，但有 $n=m$；对 $\Lambda=L$，$1<p<q<\infty$，或对 $\Lambda=B$，$1\leqslant p<q<\infty$，$1\leqslant\theta<\infty$，或对 $\Lambda=H$，$1\leqslant p<q\leqslant\infty$，它对所有的实数 r 成立．

另一方面，对 $r-(n-m)/p=0$，任何函数 $f\in\Lambda_p^r(\mathbf{R}^n)$ 在 $\mathbf{R}^m(m<n)$ 上通常没有迹，除非加上另外的条件．

上面公式表述的嵌入定理应用于定义在整个 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上的函数类（[5]）．然而，在实际应用中，重要的是要对区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 有类似的定理，Ω 应尽可能一般．当 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^m$ 分别换成 Ω，$\mathbf{R}^m\cap\Omega$，而其上关于类 W, B 和 H 的上述嵌入定理仍成立的区域 Ω 的几何结构现在已经阐明．对迷向的类 $W_p^r(\Omega)$，$B_{p\theta}^r(\Omega)$，区域 Ω 必须满足一种锥条件，或者与此等价的条件，它的边界必须局部地满足一个 **Lipschitz 条件**（Lipschitz condition）．对非迷向的类 $W_p^{\mathbf{r}}(\Omega)$，$B_{p\theta}^{\mathbf{r}}(\Omega)$，区域 Ω 必须满足 $\mathbf{r}$ 角条件或者一个弯的**锥条件**（cone condition），并且这个条件在某种意义下是必要的（[2]）．

另一个有重要实际应用的问题是在 m 维流形 S^m 上的迹问题．

对迷向的类 W, H, B，这问题已完全解决（见 [2]，[16]）．如 S^m 是充分地可微的且 $r=r_1=\cdots=r_n$，在（14），（15），（16）中 S^m 可取代 $\mathbf{R}^m$，而在（19）中 B 可取代 H．如果 S^m 是分片光滑的，此问题也已完全解决（[16]，[22]）．解此问题的条件一方面由 S^m 的各光滑片上的互逆嵌入表示，另一方面由各类函数在这些光滑片的接触点处的性态的特别的附加条件表示．对非迷向类的迹问题的解决（[9]，[21]）也处于进展阶段．这里主要困难来自考虑 S^m 上其切平面与坐标轴平行的那些点上的迹的特征．

还有一个问题如下．给定一函数

$$f\in\Lambda_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)=\Lambda_p^{\mathbf{r}},$$

这里 $\Lambda_p^{\mathbf{r}}$ 表示以上考虑的类之一．此函数有些什么混合偏导数 $D^{\mathbf{k}}f$ 且其性质如何？此问题的一个肯定回答依赖于量

$$\kappa=1-\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j}{r_j}.$$

事实上，对 $f\in\Lambda_p^{\mathbf{r}}$，如果 $\kappa>0$，则存在一个属于 $\Lambda_p^{\kappa\mathbf{r}}$ 的偏导数 $D^{\mathbf{k}}f$．这条件可以推广到空间 $L_p^{\mathbf{r}}$ 的情况，如果 $\kappa\geqslant0$（见 [5]）．

下面还有另一个表示特性的定理，或许可称为关于弱紧性的定理，在变分法的直接方法中有应用．

设 $\mathfrak{M}$ 是满足不等式

$$\|f\|_{\Lambda_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)}\leqslant K$$

的函数 f 组成的无限集，其中 K 是已知常数而 Λ 是上面讨论的函数类之一，从 $\mathfrak{M}$ 中可取出一函数序列 $\{f_m\}$ 且指出一函数 f_0，具有范数

$$\|f_0\|_{\Lambda_p^{\mathbf{r}}(\mathbf{R}^n)}\leqslant K,$$

使得对所有的有界区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 和所有的向量 $\varepsilon>0$，

$$\|f_m-f_0\|_{\Lambda_p^{\mathbf{r}-\varepsilon}(G)}\to0,\ m\to\infty$$

（[5]）．在这个表述中 $\mathbf{R}^n$ 可用区域 Ω 取代，如果 Ω 有足够好的边界．仅仅是在实际应用中最常碰到的典

型的函数类（和与它们关联的嵌入定理）在上面作了讨论. 在现代的探讨研究中，重点放在更一般的类上（[2]），其中或多或少地任意的微分算子扮演了起初的偏导数 $D^k f$, $D_j^p f$ 所扮演的角色.

所研究的另外一些类是所谓的加权类（见**加权空间**（weighted space）），其中的一个典型例子是类 $W_{p\alpha}^r(\Omega)$，定义如下. 设 $\rho(\mathbf{x})$ 是一点 $\mathbf{x}$ 和区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 的边界 Γ 之间的距离. 函数 f 属于 $W_{p\alpha}^r(\Omega)$, $r > 0$, $1 \leqslant p < \infty$，如果它有有限范数（见[4]，[12]）

$$\|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)},$$

这里

$$\|f\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \left\| \frac{D^k f}{\rho^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

一个结果表述如下. 设 Γ 是充分光滑的 m 维边界；则

$$W_{p\alpha}^r(\Omega) \rightleftarrows H_p^{r+\alpha-(n-m)/p}(\Gamma),$$

如果 $r + \alpha - (n-m)/p > 0$, $\alpha < (n-m)/p$, $1 < p < \infty$.

例 利用嵌入定理给出了边界函数上的条件问题的完全的解，在这些条件下可以应用 **Dirichlet 原理**（Dirichlet principle）. 事实上，在广义意义下取偏导数，且为了简单起见，假设曲面 Γ（三维区域的边界）是有界的且是二次可微的，又设在 Ω 上，已给定一个函数 $f_0 \in W_2^1(\Omega)$. 对这函数 **Dirichlet 积分**（Dirichlet integral）$D(f_0) < \infty$，并且按照嵌入定理

$$W_2^1(\Omega) \rightleftarrows W_2^{1/2}(\Gamma) = B_2^{1/2}(\Gamma),$$

f_0 在 Γ 上有迹（f_0 的迹存在这件事藉助于较粗的嵌入定理即能确立）. 用 $\mathfrak{M}$ 表示这样的函数类 $f \in W_2^1(\Omega)$，它们在 Γ 上有和 f_0 一样的迹，$f|_\Gamma = f_0|_\Gamma = \varphi$，那末 Dirichlet 原理可表述如下：$D(f)$ 在 $f \in \mathfrak{M}$ 上的最小值为唯一的函数所达到，此函数在 Ω 上也是调和的. 从上面的嵌入定理推出：Dirichlet 原理是适用的，当且仅当类 $\mathfrak{M}$ 非空，即当边界函数 $\varphi \in B_2^{1/2}(\Gamma)$.

为证明 Dirichlet 原理是恰当的，第一步是证明此函数 $u \in \mathfrak{M}$ 存在且唯一，并证明 u 是 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的**广义解**（generalized solution）. 然后用一个特别的方法逐次证实此广义解属于类 $W_2^l(\omega)$，这里 $l = 2, 3, \cdots$，且 $\omega \subset \Omega$ 是任意的闭球. 特别地，由 $u \in W_2^4(\omega)$ 这个事实，应用嵌入定理

$$W_2^4(\omega) \to H_2^4(\omega) \to H_\infty^{5/2}(\omega)$$

（见[2]，[5]）对 $n = m = 3$, $p = 2$, $q = \infty$, $r_1 = r_2 = r_3 = 4$，推出可以改变 u 在一个三维零测集上的值使所得函数在 Ω 上二次连续可微. 然后容易证明 u 是调和的.

这例子可以推广到包括带有不同阶数偏导数的某些泛函，提高幂次数，通常不等于 $2(p \neq 2)$；因而必须应用对更一般的通常是非迷向类的嵌入定理.

参考文献

[1] Бесов, О. В., et al., Сб. дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970, 38－63.

[2] Бесов, О. В., Ильин, В. П., Никольский, С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1974（英译本：Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikolskiĭ, S. M., Integral representations of functions and imbedding theorems, Wiley, 1978).

[3] Буренков, В. И., Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных во всем пространстве, в. кн: Итоги науки. Математический анализ, 1965, М., 1966.

[4] Никольский, С. М.,《Успехи матем. наук》, **16** (1961), 5, 63－114.

[5] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969（英译本：Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[6] Соболев, С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950（中译本：С. Л. 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959).

[7] Соболев, С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

[8] Бесов, О. В.,《Труды матем. ин-та АН СССР》, **60** (1961), 42－81.

[9] Бугров, Я. С.,《Сиб. Матем. Ж.》, **5** (1964), 5, 1007－1026.

[10] Ильин, В. П.,《Докл. АН СССР》, **96** (1954), 5, 905－908.

[11] Кондрашов, В. И.,《Докл. АН СССР》, **48** (1945), 563－566.

[12] Кудрявцев, Л. Д.,《Труды матем. ин-та АН СССР》, **55** (1959), 1－182.

[13] Лизоркин, П. И.,《Докл. АН СССР》, **132** (1960), 3, 514－517.

[14] Лизоркин, П. И.《Матем. сб.》, **60** (1963), 3, 325－353.

[15] Никольский, С. М.,《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **38** (1951), 244－278.

[16A] Никольский, С. М.,《Матем. сб.》, **33** (1953), 2, 261－326.

[16B] Никольский, С. М.,《Матем. сб.》, **43** (1957), 7, 127－144.

[17] Соболев, С. Л.,《Докл. АН СССР》, **3** (1935), 7, 291－294.

[18A] Соболев, С. Л., 《Матем. сб.》, **1** (1936), 1, 39–72.

[18B] Соболев, С. Л., 《Матем. сб.》, **4** (1938), 3, 471 – 497.

[19] Слободецкий, Л. Н., 《Докл. АН СССР》, **118** (1958), 2, 243 – 246.

[20] Успенский, С. В., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **60** (1961), 282 – 303.

[21] Успенский, С. В., 《Докл. АН СССР》, **164** (1965), 4, 750 – 752.

[22] Яковлев, Г. Н., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **60** (1961), 325 – 349.

[23] Gagliardo, E., Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabli, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **27** (1957), 284 – 305.

[24] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., A convergence criterion for Fourier series, *Math. Z.*, **28** (1928), 612 – 634.

[25] Lions, J. E. and Magenes, E., Non-homogenous boundary value problems and applications, 1 – 2, Springer, 1972(译自法文).

С. М. Никольский 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

浸入 [immersion; погружение]

把一个拓扑空间映入另一个拓扑空间的映射 $f: X \to Y$，使得 X 的每一点都有一个邻域 U，被 f 同胚地映成 fU. 这个概念主要应用于流形间的映射，这时往往附带要求一个局部平坦性条件（就像**局部平坦嵌入**(locally flat imbedding)的情形一样）. 如果流形 X 和 Y 都是可微流形，映射 f 的 Jacobi 矩阵具有最大的秩，在每点处等于 X 的维数，则上述条件自动满足. 把一个流形映入另一个流形的浸入分类问题，除了一个正则同伦不计外，可以归结为一个纯同伦问题. **同伦**(homotopy) $f_t: X^m \to Y^n$ 称为正则的(regular)，如果对每个点 $x\in X$，这个同伦都可以扩充为一个**同痕（拓扑学中的）**(isotopy(in topology)) $F_t: U\times D^k \to Y^n$，这里 U 是 x 的一个邻域，D^k 是一个 $k=n-m$ 维圆盘，而 F_t 与 f_t 在 $U\times O$ 上一致，O 是圆盘的中心. 就可微流形而言，只须要求 Jacobi 矩阵对每个 t 都具有最大秩，并且连续地依赖于 t. 一个浸入的微分 D_f 确定一个纤维式单态射，把切丛 τX 映入切丛 τY. 正则同伦确定这样的单态射的同伦. 这就在正则同伦类与丛的单态射同伦类之间建立了一个一一对应关系.

Euclid 空间中的浸入问题归结为映入 **Stiefel 流形** (Stiefel manifold) $V_{n,m}$ 中的映射的同伦分类问题. 例如，因为 $\pi_2(V_{3,2})=0$，所以只有一个从球面 S^2 到 $\mathbf{R}^3$ 中的浸入类，从而标准嵌入正则同伦于其镜面反射（球面可以正则地从内向外翻）. 因为 $V_{2,1}\approx S^1$，所以存在可数多个从圆周到平面中的浸入类；因为 S^2 上的 Stiefel 纤维化同胚于射影空间 $\mathbf{R}P^3$，而 $\pi_1(\mathbf{R}P^3)=\mathbf{Z}_2$，所以只有两个从 S^1 到 S^2 的浸入类，等等.

А. В. Чернавский 撰

【补注】 说明 S^2 可以正则地从内向外翻的图形见 [A3].

参考文献

[A1] Gromov, M. L., Stable mappings of foliations into manifolds, *Math. USSR Izv.*, **3** (1969), 671–694. (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, **33** (1969), 707–734.)

[A2] Poénaru, V., Homotopy theory and differentiable singularities, in N. H. Kuiper (ed.): Manifolds-Amsterdam, 1970, Lecture notes in math., Vol. 197, Springer, 1971, 106–132.

[A3] Phillips, A., Turning a surface inside out, *Scientific Amer.*, May (1966), 112–120.

胡师度、白苏华 译

流形的浸入 [immersion of a manifold; погружение многообразия]

m 维流形 M^m 到 n 维流形 N^n 中的一个连续映射 $F: M^m \to N^n$，使得对每个 $x\in M^m$，存在一个邻域 U_x，在其中，F 是嵌入，即到 $F(U_x)\subset N^n$ 上的一个**同胚**(homeomorphism). 特别地，如果 F 是到 $F(M^m)$ 中的一个同胚，则称之为 M^m 在 N^n 中的一个**嵌入**(imbedding). 浸入 F 称为 $C^{l,\alpha}$ 浸入 ($C^{l,\alpha}$-immersion)，如果 M^m 和 N^n 是 $C^{l,\alpha}$(光滑) 流形 ($l\geqslant 1, 0\leqslant\alpha<1, m\leqslant n$) 及映射 F 在相应的坐标卡中由函数

$$x^i = f^i(u^1,\cdots,u^m), i=1,\cdots,n$$

给出，函数是属于 $C^{l,\alpha}$ 光滑类的，而矩阵 $\|df^i/du^j\|$ 在每个点 $x\in M^m$ 处的秩等于 m(一个 $C^{l,\alpha}$(光滑) 流形是一个配备了 Γ 结构的流形，其中伪群由 l 阶可微且导数满足指数 α 的 Holder 条件的映射所组成).

曲面和 $C^{l,\alpha}$(光滑) 曲面的概念是与浸入和 $C^{l,\alpha}$(光滑) 浸入的概念紧密地相联系的. 流形 M 和 N 之间的两个浸入 F 和 G 称为等价的，如果存在一个同胚 $\Phi: M\to M$，使得 $F=G\Phi$.

一个浸入流形 (immersed manifold) 是由流形 M 和它的一个浸入 F 组成的偶对. 在维数 n 的流形 N^n 中的维数 m 的曲面是浸入 $F: M^m\to N^n$ 的等价类；该类中的每一个浸入称为曲面的参数化 (parametrization of the surface). 曲面称为 $C^{l,\alpha}$ 光滑的 ($C^{l,\alpha}$-smooth) 如果能在流形 M 和 N 中引进 $C^{l,\alpha}$ 结构及如果在曲面的参数化中能找到参数化 F，它在这些结构中是 $C^{l,\alpha}$ 浸入.

浸入流形的理论通常涉及的性质是在上述等价类概念下的不变量，特别当研究与浸入几何有关的论题时，实质上与曲面理论相一致.

设 M^m 是一个 $C^{l,\alpha}$ 流形，$l\geqslant 1$, $0\leqslant\alpha<1$. 任

何 M^m 在 $m \geqslant 1$ 时允许有到 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{2m}$ 中的一个嵌入，在 $m \geqslant 2$ 时，有到 $\mathbf{R}^{2m-1}$ 中的一个 $C^{l,\alpha}$ 浸入．如果 m 是正的且不是 2 的幂，则任何 M^m 容许到 $\mathbf{R}^{2m-1}$ 中的一个 $C^{l,\alpha}$ 嵌入，反之，对任意 $m = 2^s$ $(s \geqslant 0)$，存在闭光滑 m 维流形甚至不容许有到 $\mathbf{R}^{2m-1}$ 中的拓扑嵌入（例如，射影空间）．如果 M^m 没有紧分支，则它允许在 $\mathbf{R}^{2m-1}$ 有 $C^{l,\alpha}$ 嵌入．

对 $m \neq 1, 4$．一个定向 m 维流形允许到 $\mathbf{R}^{2m-1}$ 中有 $C^{l,\alpha}$ 嵌入．对 $n < 2m-1$，到 $\mathbf{R}^n$ 中浸入一个 m 维流形的可能性与流形的 Whitney 和 **Понтрягин 类**（Pontryagin class）有关．也即，每个 $C^{l,\alpha}$ 光滑 m 维流形（$l \geqslant 1, 0 \leqslant \alpha < 1$）容许一个到 $\mathbf{R}^{2m}$ 中的正常的浸入及容许一个到 $\mathbf{R}^{2m+1}$ 中的正常的嵌入（即一个浸入或嵌入，使得每个紧集合的原象是紧的）．如果在 M^m 上已给定了 **Riemann 度量**（Riemannian metric），人们常常联想到 M^m 到 $\mathbf{R}^n$ 中或到另一个 Riemann 空间 N^n 中的**等距浸入**（isometric immersion）．$C^{l,\alpha}$ 光滑 Riemann 流形（$l = 2, 0 < \alpha < 1; l > 2, 0 \leqslant \alpha < 1$）容许有一个到 $\mathbf{R}^n$ 中的 $C^{l,\alpha}$ 光滑等距浸入．在紧 M^m 的情形中，$n = (2m+1)(6m+14)$．相反地，M^m 到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 $C^{l,\alpha}$ 光滑浸入（$l \geqslant 2, 0 < \alpha < 1$）诱导出一个在 M^m 上的 $C^{l,\alpha}$ 光滑 Riemann 度量（[4]）．

参考文献

[1] Smale, S., The classification of spheres in Euclidean spaces, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 327 – 344.

[2] Jacobowitz, H., Implicit function theorems and isometric embeddings, *Ann. of Math.*, **95** (1972), 191 – 225.

[3] Рохлин, В. А. Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии, Геометрические главы, М., 1977（英译本：Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology: geometric chapters, Springer, 1984）.

[4] Сабитов, И. Х., Шефель, С. З., 《Сиб. матем. Ж.》, **17** (1976), 4, 914 – 925.

С. З. Шефель 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nash, J., The embedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 20 – 63.

薛春华 译

浸入运算 [immersion operation; погружающая операция]

在**数理逻辑**（mathematical logic）里的一种运算，它把一逻辑语言里的表达式转换为另一逻辑语言里的表达式而保持演绎性质．在建立不同的逻辑理论或**演算**（calculus）的关系时广泛地应用了浸入运算．

例如，如果在形式算术里的公式 A 转换成为同一语言里的公式 A^*，转换的方式是在 A 和它的每个子公式前插入二否定词（例如，$(A \vee B)^*$ 是 $\neg\neg(\neg\neg A^* \vee \neg\neg B^*)$，$(\exists x A)^*$ 是 $\neg\neg \exists x \neg\neg A^*$ 等），那么在经典形式算术中 A 的可推导性蕴涵在直觉主义形式算术中 A^* 的可推导性．这意味着直觉主义算术系统的相容性蕴涵经典形式算术系统的相容性．这个 Gödel 否定解释（Gödel negative interpretation）产生了直觉主义的和经典的算术之间的关系．

另一个浸入运算的典型例子是 Gödel-Tarski 翻译（Gödel-Tarski translation），它建立模态的和直觉主义的逻辑间的关系．在公理集合论里，模型的构造通常也可以语法地看成是某种浸入运算的构造：集合论中的内模型．

参考文献

[1] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

[2] Feys, R., Modal logics, Gauthier-Villars, 1965.

[3] Драгалин, А. Г., Математический интуиционизм, М., 1979.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】 浸入运算更通常的说法是**解释**（interpretation）或翻译（translation）．

解释可以看成是一逻辑理论到另一逻辑理论的"同态"，这是在范畴逻辑里已被广泛运用的一个观点（见[A1]）．

参考文献

[A1] Kock, A. and Reyes, G. E., Doctrines in categorical logic, in J. Barwise (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1987, 283 – 313.

[A2] Gödel, K., Zur intuitionistischen Arithmetik und Aussagenkalküls, Ergebn. eines Math. Kolloq., **4** (1933), 34 – 38.

[A3] Gödel, K., Eine interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, Ergebn. eines Math. Kolloq., **4** (1933), 39 – 40.

杨东屏 译

禁集 [immune set; иммунное множество]

一个不包含无穷递归可枚举子集的自然数的无穷集（见**可枚举集**（enumerable set））．特别地，禁集本身不是递归可枚举集．从对递归可枚举子集饱和的观点看，禁集在一定意义下和产生集（见**产生集**（productive set））相反．补集为禁集的递归可枚举集称为单集（simple set），且单集组成一类重要的非递归的递归可枚举集类．禁集和有限集的递归等价型称为孤立子（isols），从基数理论的递归类比的观点来看是有趣的．在**递归集合论**（recursive set theory）和它的应用里，人们也使用禁集类的特殊子类，例如超禁集类．（超禁集（hyper-immune set）是一自然数集，当它的元素由小到大排成一序列时，任何一般递归函数不能优超它；其补集为超禁集的递归可枚举集称为超单集（hyper-simple set））．

参考文献

[1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effe-

ctive computability, McGraw-Hill, 1967.
В. А. Душский 撰 杨东屏 译

蕴涵 [implication; импликация]

一种逻辑运算，用来从两个表示式 A 和 B 构造表示式"如果 A，那么 B". 在形式语言中，最常用的表示蕴涵的符号是 ⊃，→ 或 ⇒. 表示式 A 称为 $A \supset B$ 的前提 (premise)，而表示式 B 称为结论 (consequence). 表示式 $A \supset B$ 的确切含意在经典的、可构成的和其他一些对语言的语义处理中各不相同. 在经典语义的语言中，蕴涵式的含义由如下**真假值表** (truth table) 给出:

A	B	$A \supset B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

如上所说的这种蕴涵称为实质蕴涵 (material implication).
В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bell, J. L. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977. 沈复兴 译

蕴涵范式 [implicative normal form; импликативная нормальная форма]

如下类型的**命题形式** (propositional form):

$$C_1 \supset (C_2 \supset \cdots (C_n \supset \perp) \cdots),$$

这里所有 $C_i (i=1, \cdots, n)$ 都具有形式:

$$C_{i1} \supset (C_{i2} \supset \cdots (C_{im_i} \supset \perp) \cdots).$$

每个 $C_{ij} (i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, m_i)$ 或是一个命题变元，或是命题变元的否定，⊥ 是表示假值的逻辑符号. 对每个命题演算公式 A，可以构造一个具有蕴涵范式的公式 B，等价于 A，同时，B 中只含有在 A 中出现的命题变元. 这样的一个公式 B 称为 A 的一个蕴涵范式.

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.
С. К. Соболев 撰 王 驹 译

蕴涵命题演算 [implicative propositional calculus; импликативное пропозициональное исчисление]

仅使用 ⊃ (蕴涵词) 作为原始联结词的命题演算. 完全 (或古典) 蕴涵命题演算 (complete (classical) implicative propositional calculus) 是这类演算的例子. 该演算的公理为

$$p \supset (q \supset p), ((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))),$$
$$((p \supset q) \supset p) \supset p,$$

其推理法则是: **分离法则** (modus ponens) 及**代换法则** (substitution rule). 另一个例子是所谓正蕴涵命题演算 (positive implicative propositional calculus). 其公理为:

$$p \supset (q \supset p), (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)),$$

其推理规则与上面相同. 任一仅含蕴涵词的命题演算公式称为蕴涵公式 (implicative formula)，它在完全 (或正) 蕴涵命题演算中可推出，当且仅当它在古典的 (相应的，直觉主义的) 命题演算中可推出. 令 V 是命题变元组成的有限集，由 V 及 ⊃ 可组成无穷个蕴涵公式，但在正蕴涵命题演算中，该无穷个公式中仅有有限个是两两不等价的 (见 [3]). 存在可有限公理化的蕴涵命题演算，它是不可判定的 (见 [4]).

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, I. Princeton Univ. Press, 1956.
[2] Lukasiewicz, J. and Tarski, A., Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *C. R. Soc. Sci. Letters Varsovie*, *CL.* Ⅲ, **23** (1930), 30 – 50.
[3] Diego, A., Sur les algèbres de Hilbert, Gauthier-Villars, 1966 (译自西班牙文).
[4] Gladstone, M. D., Some ways of constructing a propositional Calculus of any required degree of unsolvability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **118** (1965), 192 – 210. С. К. Соболев 撰 王 驹 译

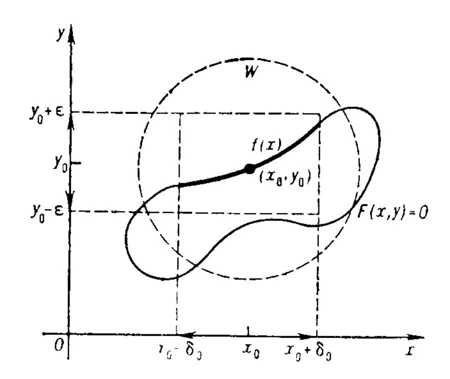
隐函数 [implicit function, неявная функция]

由方程 $F(x,y)=z_0$ 给出的函数 $f: E \to Y$，这里 $F: X \times Y \to Z$，$x \in X$，$y \in Y$，$E \subset X$，X、Y、Z 是某些集合，亦即这样的函数 f，使得对任意 $x \in E$ 均有 $F(x, f(x)) = z_0$. 若 X，Y，Z 是拓扑空间，而且有某点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ 使 $F(x_0, y_0) = z_0$，则在某些条件下，方程 $F(x,y)=z_0$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域中对变量之一唯一可解。这个方程的解的性质是由隐函数定理来描述的。

最简单的隐函数定理如下。设 X, Y 是实数直线 $\mathbf{R}$ 的子集，令 $x_0 \in X$，$y_0 \in Y$，而 (x_0, y_0) 是平面集合 $X \times Y$ 的内点；若 F 在 (x_0, y_0) 的某邻域中连续，$F(x_0, y_0) = 0$，而且存在 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使当 x 固定在 $(x_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 中时，$F(x, y)$ 作为 y 的函数在 $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ 上严格单调，这时必有 $\delta_0 > 0$，使有唯一的函数

$$f:\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta_0)\to(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon),$$

而 $F(x,f(x))=0$ 对所有 $x\in(x_0-\delta_0,\ x_0+\delta_0)$ 成立；此外，f 是连续的，而且 $f(x_0)=y_0$．如果 F 在 (x_0,y_0)



的某邻域中连续，偏导数 F_y 存在，且在 (x_0,y_0) 点连续；如果 $F(x_0,y_0)=0$，而 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则此定理的假设是满足的．如果偏导数 F_x 也存在，且在 (x_0,y_0) 为连续，则隐函数 f 在 x_0 可微，而且

$$\frac{df(x_0)}{dx}=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\ .$$

这个定理已推广到方程组的情况，即 F 为一向量函数的情况．令 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 是有固定坐标系，而其点分别为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_m)$ 的 n 维和 m 维 Euclid 空间．设 F 将 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ $(x_0\in\mathbf{R}^n,y_0\in\mathbf{R}^m)$ 的某个邻域 W 映入 $\mathbf{R}^m$，而 F 的坐标函数为 $F_i(i=1,\cdots,m)$，即 $F=(F_1,\cdots,F_m)$，而 F_i 为 $n+m$ 个变元 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m$ 的函数．若 F 在 W 上可微，$F(x_0,y_0)=0$，而且 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0,$$

则分别有 $x_0\in\mathbf{R}^n$，$y_0\in\mathbf{R}^m$ 的邻域 U 和 V，$U\times V\subset W$，以及有唯一的映射 $f:U\to V$，使 $F(x,f(x))=0\in\mathbf{R}^m$ 对一切 $x\in U$ 成立．这里 $f(x_0)=y_0$，f 在 U 上可微，而若记 $f=(f_1,\cdots,f_m)$，偏导数 $\partial f_j/\partial x_i(i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m)$ 的显式可以从含这些偏导数的 m 个线性方程组

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}=0$$

中解出，这里 $k=1,\cdots,m$，i 固定（$i=1,\cdots,n$）．这个定理的主要论断有时陈述如下：有 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域 U 和 (x_0,y_0) 在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ 中的邻域 W_0 $(W_0\subset W)$ 以及唯一的映射 $f:\ U\to\mathbf{R}^m$，使得 $(x,f(x))\in W_0$，且对一切 $x\in U$，$F(x,f(x))=0$．换言之，条件

$$(x,y)\in W_0,\ \ F(x,y)=0$$

等价于 $x\in U$、$y=f(x)$．在这个情况下，方程 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 的邻域 W_0 中唯一可解．

这样陈述的经典的隐函数定理可按以下方式推广到更一般空间的情况．令 X 为一拓扑空间，Y 和 Z 是实数域或复数域上的仿射赋范空间，即是这些域上的仿射空间，而且赋范向量空间 $\mathbf{Y}$ 与 $\mathbf{Z}$ 就是与它们联系的，$\mathbf{Y}$ 是完全的，令 $\mathscr{L}(\mathbf{Y},\ \mathbf{Z})$ 为由 $\mathbf{Y}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的连续线性映射的集合，令 W 是乘积空间 $X\times Y$ 中的开集，$(x_0,y_0)\in W$，$x_0\in X$，$y_0\in Y$．

令 $F:\ W\to Z$ 为一连续映射，而 $F(x_0,y_0)=z_0$．若对每一个固定的 x 和 $(x,y)\in W$，映射 F 有一偏 **Fréchet 导数** (Fréchet derivative) $F_y\in\mathscr{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$，而若 $F_y(x,y)$: $W\to\mathscr{L}(\mathbf{Y},\ \mathbf{Z})$ 是一连续映射且线性映射 $F_y(x_0,y_0)$: $\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}$ 有连续的逆线性映射（即是说，它是 $\mathscr{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ 的可逆元），则必有开集 $U\subset X$ 和 $V\subset Y$，$x_0\in U$，$y_0\in V$，使得对任一 $x\in U$ 必有唯一元素 $y\in V$，记作 $y=f(x)$，满足方程

$$f(x)\in V,\ \text{且}\ F(x,f(x))=z_0\ .$$

这样定义的函数 $y=f(x)$ 是由 U 到 V 内的连续映射，而 $y_0=f(x_0)$．

若 X 也是一个仿射赋范空间，则在一定条件下，适合方程

$$F(x,y)=z_0 \tag{1}$$

的隐函数 $f:x\mapsto y$ 也是可微的．具体说，令 X，Y，Z 都是仿射赋范空间，W 是 $X\times Y$ 中的开集，$F:W\to Z$，$F(x_0,y_0)=z_0$，$x_0\in X$，$y_0\in Y$，又令 f 是 (1) 所给出的隐映射，将 x_0 的某个邻域 U 映入 Y 的开子集 V 内，且 $U\times V\subset W$．这样，对所有 $x\in U$，

$$f(x)\in V,\ \text{且}\ F(x,f(x))=z_0\ . \tag{2}$$

再设 f 也在 x_0 连续，且 $f(x_0)=y_0$．若 F 在 (x_0,y_0) 可微，而它的偏 Fréchet 导数 $F_x(x_0,y_0)$ 和 $F_y(x_0,y_0)$ 是将与 X 相联系的线性空间 $\mathbf{X}$ 以及与 Y 相联系的线性空间 $\mathbf{Y}$ 映入与 Z 相联系的线性空间 $\mathbf{Z}$，再设算子 $F_y(x_0,y_0)$ 是 $\mathscr{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ 的可逆元，则 f 在 x_0 可微，其 Fréchet 导数是

$$f'(x_0)=-F_y^{-1}(x_0,y_0)\circ F_x(x_0,y_0)\ .$$

这可以由 (2) 作形式微分得出：即由

$$F_x(x_0,y_0)+F_y(x_0,y_0)\circ f'(x_0)=0\in\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$

双方以 $F_y^{-1}(x_0,y_0)$ 左乘即得．

若此外还设映射 $F:W\to Z$ 在 W 上连续可微；若隐函数 $f:U\to V$ 在 U 上连续，$U\times V\subset W$，又若对任一

$x \in U$、偏 Fréchet 导数 $F_y(x, f(x))$ 是 $\mathscr{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ 的可逆元，则 f 是由 U 到 V 内的连续可微映射．

一般情况下，也可由 Fréchet 导数的连续性来表述隐函数存在与唯一性的条件：若 Z 是完全的，映射 F: $W \to Z$ 在 W 上连续可微；若 $F(x_0, y_0) = z_0$，而偏 Fréchet 导数是 $\mathscr{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ 中的可逆元，则 (1) 在 (x_0, y_0) 的充分小邻域中唯一可解，即有 x_0 在 X 中的邻域 U 与 y_0 在 Y 中的邻域 V、$U \times V \subset W$，以及唯一的隐函数 f: $U \to V$ 满足 (2)．这里 f 在 U 上也是连续可微的．这种形式的赋范空间中的隐函数定理是对单个二变量标量方程的经典的隐函数定理的直接推广．

此外，若 $F: W \to Z$ 是 (x_0, y_0) 的邻域 W 中的 k 次连续可微映射，$k = 1, 2, \cdots$，则隐函数 $f: U \to V$ 也是 k 次连续可微的．

J.Nash 给出了经典的隐函数定理对于微分算子的深远的推广(见 **Nash 定理(微分几何学中的)** (Nash theorems (in differential geometry)))．

参考文献

[1] Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本：А.Н. 柯尔莫果洛夫、С.В. 佛明，函数论与泛函分析初步(上、下册)，高等教育出版社，1992).

[2] Люстерник, Л.А., Соболев, В.И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本：刘斯铁尔尼克，索伯列夫，泛函数分析概要，第二版，科学出版社，1985).

[3] Никольский, С.М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1–2, М., 1975 (中译本：С.М. 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷一、二分册，人民教育出版社，1980–1982，第二卷第一分册，高等教育出版社，1992).

[4] Schwartz, L., Cours d'analyse, 1, Hermann, 1967 (中译本：L.Schwarz，分析教程，第一卷一分册，高等教育出版社，1989).

[5] Ильин, В.А., Позняк, Э.Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч.1, М., 1971.

Л.Д.Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fleming, W., Functions of several variables, Addison-Wesley, 1965.

齐民友 译

隐函数(代数几何学中的)[implicit function (in algebraic geometry); неявная функция в алгебраической геометрии]

由一个代数方程确定的函数．设 $F(X_1, \cdots, X_n, Y)$ 为关于 $X_1, \cdots, X_n$ 与 Y 的多项式(假定具有复系数)．这时此多项式的零点簇 $V(F) \subset \mathbf{C}^{n+1}$ 可以看成一种对应 $y: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ 的图象．这种对应，允许某种不精确性，又称为由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数．一般地说，y 是多值的，且并非处处有定义，因此它不是通常意义下的函数．有两种方法将这种对应转化为函数．第一种方法要追溯到 B. Riemann，是假定隐函数 y 的定义域不是 $\mathbf{C}^n$ 而是簇 $V(F)$，后者是 $\mathbf{C}^n$ 的有限叶覆叠．这种设置导向极其重要的 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 概念．在此方法中隐函数概念与**代数函数** (algebraic function) 有内在联系．

另一种方法是将 $V(F)$ 局部地表示为单值函数的图象．种种隐函数定理断言，存在开集 $U \subset \mathbf{C}^n$ 与 $W \subset \mathbf{C}$，使 $(U \times W) \cap V(F)$ 为光滑函数(依某种意义) $y: U \to W$ 的图象(见**隐函数** (implicit function))．然而，开集 U, W 照例不是依 **Zariski 拓扑** (Zariski topology) 开的并且在代数几何中没有意义．因此，人们修改此方法如下，在由方程 $F(X, Y) = 0$ 确定的隐函数的点 $a \in \mathbf{C}^n$ 的形式芽 (formal germ) (或分支 (branch))，定义为满足 $F(X, y) = 0$ 的**形式幂级数** (formal power series) $y \in \mathbf{C}[[X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n]]$．很一般地，满足多项式方程 $F(X, y) = 0$ 的幂级数 y 称为代数的 (algebraic)．代数幂级数在 a 的某个邻域中收敛．

设 A 为具有极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部 **Noether 环** (Noetherian ring)．A 的完全化 $\hat{A}$ 的元素 y 称为在 A 上代数的 (algebraic)，如果对某个多项式 $F(Y) \in A[Y]$ 有 $F(y) = 0$．由 $\hat{A}$ 中成为 A 上代数元的集构成一个环 $\widetilde{A}$．下列样式隐函数定理表明有充分多的代数函数存在．设

$$f(Y) = (f_1(Y_1, \cdots, Y_m), \cdots, f_m(Y_1, \cdots, Y_m))$$

为 $A[Y_1, \cdots, Y_m]$ 中 m 个多项式的集，并设 $\bar{y}^0 = (\bar{y}_0, \cdots, \bar{y}_m)$ 为剩余类域 $A/\mathfrak{m}$ 的元(字母上横线表示依 mod $\mathfrak{m}$ 约化)，满足条件：

1) $\bar{f}(\bar{y}^0) = 0$;

2) $\overline{\det(\partial f_i / \partial Y_j)}\ (\bar{y}^0) \neq 0$.

那么，存在 A 上代数的元 $y = (y_1, \cdots, y_m)$，使 $f(y) = 0$ 与 $\bar{y} = \bar{y}^0$．换句话说，$\widetilde{A}$ 是 **Hensel 环** (Hensel ring)．

关于此类型的另一结果为 Artin 逼近定理(见[2])．设 A 为局部环且是域上有限型的代数的局部化．其次，设 $f(Y) = 0$ 为系数属于 A (或 $\widetilde{A}$) 的多项式方程组，并设 $\hat{y}$ 为系数属于 $\widetilde{A}$ 满足 $f(\hat{y}) = 0$ 的向量．那么，存在分量属于 $\widetilde{A}$ 的向量 $\tilde{y}$，与 $\hat{y}$ 任意接近且满足 $f(\tilde{y}) = 0$．对于解析方程组也有此定理的一种样式([3])．

参考文献

[1] Artin, M., Algebraic spaces, Yale Univ. Press, 1971.

[2] Artin, M., Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. IHES*, **36** (1969),

23 – 58.
[3] Artin, M., On the solution of algebraic equations, *Invent. Math.*, **5** (1968), 277 – 291.
В. И. Данилов 撰 郑维行 译 沈祖和 校

隐算子 [implicit operator, неявный оператор]

非线性算子方程 $F(x, y)=0$ 的解 $y=f(x)$，其中 x 起参数的作用，而 y 为未知元．令 X, Y, Z 为 Banach 空间，而 $F(x, y)$ 是非线性算子，它在 $(x_0, y_0)\in X\dot{+}Y$ 的一个邻域 Ω 中连续，并把 Ω 映入 Z 中零元的一个邻域内．若 **Fréchet 导数**(Fréchet derivative) $F_y(x, y)$ 在 Ω 上连续，算子 $[F_y(x_0, y_0)]^{-1}$ 存在且连续，而且 $F(x_0, y_0)=0$，则存在数 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，使当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，方程 $F(x, y)=0$ 有唯一解 $y=f(x)$ 于球 $\|y-y_0\|<\varepsilon$ 中．这里，若 $F(x, y)$ 此外还在 Ω 中 n 次可微，则 $f(x)$ 也 n 次可微．若 $F(x, y)$ 是 Ω 中的**解析算子**(analytic operator)，则 $f(x)$ 也是解析的．这些论断推广了关于隐函数的人所熟知的命题．关于退化情况，见非线性方程**解的分支**(branching of solutions)．

参考文献

[1] Hildebrandt, T. H. and Graves, L. M., Implicit functions and their differences in general analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 127 – 153.
[2] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: 刘斯铁尔尼克，索伯列夫，泛函数分析概要，第二版，科学出版社，1985).
[3] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本: Vaĭnberg, M. M. and Trenogin, V. A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff, 1974).
[4] Nirenberg, L., Topics in nonlinear functional analysis, New York Univ., 1974.
В. А. Треногин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. S., Nonlinearity and functional analysis, Acad. Press, 1977 (中译本: M. S. 博格，非线性与泛函分析，科学出版社，1989).
齐民友 译

不可能事件 [impossible event; невозможное событие]

在给定条件下不可能发生的事件．如果 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是概率空间，不可能事件是空集 $\emptyset\in\mathscr{A}$，它不包含任何基本事件 $\omega\in\Omega$．不可能事件是这个概率模型中**必然事件**(certain event) 的余事件，因此，赋予它零概率 $\mathrm{P}(\emptyset)=0$．

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译

非本原群 [imprimitive group; импримитивная группа]

集合 S 到自身的一一对应(**置换**(permutation))的群，使 S 能划分成一组无交子集 $S_1, \cdots, S_m$ $(m\geqslant 2)$ 的并，满足下列性质：至少一个子集 S_i 中元素数大于 1；对任何置换 $g\in G$ 及任何 i、$1\leqslant i\leqslant m$，存在 j，$1\leqslant j\leqslant m$，使得 g 把 S_i 映满 S_j．

子集 $S_1, \cdots, S_m$ 的集合称为非本原性系 (system of imprimitivity)，而子集 S_i 本身称为群 G 的非本原性域 (domains of imprimitivity)．不是非本原置换群就称为本原 (primitive) 群．

非本原群的一例为集合 S 上不传递的非平凡置换群 G(见**传递群**(transitive group))：可取 G 在 S 上的所有**轨道**(orbit)(传递性域)，作为非本原性系．集合 S 的传递置换群 G 是本原的当且仅当对某元素 $y\in S$(因此对所有元素)，G 中使 y 不动的置换的集合是 G 的极大子群．

非本原置换群的概念在向量空间的线性变换群中有一个类似，即群 G 的**线性表示**(linear representation) ρ 称为非本原的 (imprimitive)，若 ρ 的表示空间能分解成一组真子空间 $V_1, \cdots, V_m$ 的直和且有下列性质：对任何 $g\in G$ 和任何 i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 都有 j，$1\leqslant j\leqslant m$，使得

$$\rho(g)V_i=V_j.$$

子集 $V_1, \cdots, V_m$ 的集合称为表示 ρ 的非本原性系 (system of imprimitivety)．若 V 没有上述的分解，就称 ρ 为本原表示 (primitive representation)．非本原表示 ρ 称为传递非本原的 (transitive imprimitive)，若对非本原性系中任一对子空间 V_i 和 V_j 都存在元素 $g\in G$ 使得 $\rho(g)V_i=V_j$．若表示 ρ 是非本原的(或本原的)，则空间 V 的线性变换群 $\rho(G)$ 及由表示 ρ 决定的 G 模 V 也称为非本原的(或本原的)．

例 域 k 上 n 维空间 V 中由置换基元素 $e_1, \cdots, e_n$ 决定的线性变换作成对称群 S_n 的表示 ρ，它是传递非本原的，一维子空间组 $\{ke_1, \cdots, ke_n\}$ 构成 ρ 的非本原性系．传递非本原表示的另一个例子是有限群 G 在域 k 上的**正则表示**(reguler representation)；当 g 遍取 G 的元素时，一维子空间 kg 的集合构成非本原性系．更一般地，有限群的**单项表示**(monomial representation)是非本原的．实平面上由旋转角为 $2\pi/m$ $(m\geqslant 3)$ 的倍数的旋转作成 m 阶循环群的表示是本原表示．

非本原表示的概念与**诱导表示**(induced representation)的概念密切相关．令 ρ 是有限群 G 的非本原有限维表示，$\{V_1, \cdots, V_n\}$ 是非本原性系．集合 $\{V_1, \cdots, V_n\}$ 在由表示 ρ 决定的 G 的作用下分成轨道的并．设 $\{V_{i_1}, \cdots, V_{i_s}\}$ 是该作用下不同轨道的代表的完全集，又设

$$H_m=\{g\in G: \rho(g)(V_{i_m})=V_{i_m}\}, m=1, \cdots, s,$$

令 φ_m 是群 H_m 在 V_{i_m} 中的表示，它是由表示 ρ 限制到 H_m 上而确定的，又令 ρ_m 是 G 的由 φ_m 诱导的表示，则 ρ 等价于表示 $\rho_1, \cdots, \rho_s$ 的直和．反之，设 $H_1, \cdots, H_s$ 是 G 的子群集合，令 φ_m 是 H_m 在有限维向量空间 $W_m (m=1, \cdots, s)$ 中的表示，又令 ρ_m 是 G 的由 φ_m 诱导的表示．进一步设 $\{g_{m,j}\}_{j=1}^{r_m}$ 是 G 对于 H_m 的左陪集代表系，则表示 $\rho_1, \cdots, \rho_s$ 的直和是非本原的，同时 $\rho(g_{m,j})(W_m)$ $(j=1, \cdots, r_m, m=1, \cdots, s)$ 是非本原性系（这里 W_m 自然地等同于 V 的子空间）．

参考文献

[1] Hall, M., Group theory, Macmillan, 1959（中译本：M．赫尔，群论，科学出版社，1982）．

[2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

Н. Н. Вильямс, В. Л. Попов 撰

【补注】 非本原性域常称为块或区（block）．

石生明 译　许以超 校

反常分布 [improper distribution; несобственное распределение]

同**退化分布**（degenerate distribution）．

【补注】 在西方，通常把退化分布和反常分布视为不同概念．前者见**退化分布**（degenerate distribution），后者定义为 $\mathbf{R}$ 的 Borel 集上的**测度**（measure）μ，使得 $\mu(\mathbf{R})<1$．

反常积分 [improper integral; несобственный интеграл]

无界函数的积分或函数在无界集上的积分．设 f 是定义在有限或无限半区间 $[a, b)$ $(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$ 上的函数，且对每个 $\eta\in[a, b)$，f 是在 $[a, \eta]$ 上 Riemann（或 Lebesgue）可积的．那么极限

$$\lim_{\eta\uparrow b}\int_a^{\eta} f(x)\,dx \tag{1}$$

（当 $b=+\infty$，条件 $\eta\uparrow b$ 理解为 $\eta\to+\infty$）称为**反常积分**

$$\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

如果极限（1）存在且有限，则称该反常积分为**收敛的**（convergent），否则称为**发散的**（divergent）．例如，反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}},\ a>0,$$

对 $\alpha>1$ 收敛而对 $\alpha\leqslant1$ 发散．如果 $b<+\infty$，则

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$$

对 $\alpha<1$ 收敛而对 $\alpha\geqslant1$ 发散．

如果 $b<+\infty$ 且 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann（或 Lebesgue）可积，则反常积分（1）与**定积分**（definite integral）是一样的．

类似地，在相应的假设下可定义 $(a, b]$ $(-\infty\leqslant a<b<+\infty)$ 上的反常积分

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\xi\downarrow a}\int_{\xi}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

如果 f 在每个区间 $[\xi, \eta]\subset(a, b)$ 上 Riemann（或 Lebesgue）可积，如果 $c\in(a, b)$ 且两个反常积分

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ 和 } \int_c^b f(x)\,dx$$

都收敛，则反常积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

定义为它们的和，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

且不依赖于 c 的选取．

如果在 (a, b) 上存在有限多个点 $x_k (k=0, \cdots, n)$，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得 f 在每个不包含任何点 x_k 的区间 $[\xi, \eta]$ 上 Riemann（或 Lebesgue）可积且如果对每个 $k=1, \cdots, n$，反常积分

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

收敛，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

这个定义不依赖于点 x_k 的位置．

积分的下述一般性质对反常积分仍然保持：线性，关于在其上进行积分的区间的可加性，关于积分不等式的规则，中值定理，分部积分法，变量变换，以及 Newton-Leibniz 公式．例如，如果 f 在 $[a, b)$ 上几乎处处与在每个 $[a, \eta]$ $(a<\eta<b)$ 上绝对连续的函数 F 的导数一致，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b-)-F(a).$$

为了决定不变号函数的反常积分的收敛性可用**比较检验法**（comparison test）．例如，对形式（1）的反常积分，如果当 $x\uparrow b$ 时，

$$f(x)=O(g(x)),$$

$(x)\geqslant0$，$g(x)\geqslant0$，$x\in[a, b)$，则反常积分

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

的收敛性蕴涵

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

的收敛性；这时 g 称为比较函数（comparison function）. 在有限积分限 b 的情况，常用 $1/(b-a)^{\alpha}$ 作为积分（1）的一个比较函数；对形式（2）的积分在有限积分限 a 的情况常用 $1/(x-a)^{\alpha}$ 作为比较函数；而当有一个或两个无穷的积分限时，常用 $1/|x|^{\alpha}$ 作为比较函数．例如，如果对 $x \geqslant a$ 定义的非负函数 f，极限

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = k$$

存在，则由比较检验法可以推出：对 $\alpha > 1$ 和 $0 \leqslant k < +\infty$ 形式（1）的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛，而对 $\alpha \leqslant 1$ 和 $0 < k \leqslant +\infty$ 则发散．

反常积分收敛性的一个必要充分条件由 Cauchy 准则给出．即形式（1）的反常积分收敛，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta \in [a, b)$，使得对所有的 η', $\eta'' \in (\eta, b)$，

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

反常积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

称为绝对收敛的（absolutely convergent），如果反常积分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

收敛．如果一个反常积分绝对收敛，则它收敛且与 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral）一致．存在收敛而不绝对收敛的反常积分．例如，对一有限区间：

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx$$

收敛而不绝对收敛，而对无穷区间：

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

收敛而不绝对收敛．

有几个确立反常积分收敛性的检验法．例如，设 f 和 g 对 $x \geqslant a$ 有定义，如果 f 在 $x \geqslant a$ 上有一个有界的原函数，且 g 是单调函数，当 $x \to +\infty$ 时趋于零，则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

收敛．另一检验法是：如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛，且对 $x \geqslant a$，g 是单调有界的，则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

收敛．

一个反常积分的收敛性可以用级数的收敛性来表示．例如，为使反常积分（1）收敛，必要充分条件是对任何序列 $b_n \to b$, $a \leqslant b_n < b$, $n = 0, 1, \cdots$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx$$

收敛，而且如果它收敛，则此级数的和与该反常积分（1）的值是一样的．（此时要求 $b_0 = a$.）

反常积分的概念已推广到多元函数．设 f 定义在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个开（有界或无界）集 G 上，且在任何 Jordan 可测集 $E(\bar{E} \subset G)$ 上 Riemann 可积．这时，f 称为在 G 上按反常意义可积，如果对任何满足 $\bar{E}_k \subset G$, $E_k \subset E_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$，且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = G$ 的 Jordan 可测集序列 E_k，极限

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f(x)\,dx$$

存在且不依赖于序列 E_k 的选取．这个极限，如果它存在且有限，则称为反常积分

$$\int_G f(x)\,dx,$$

而且与一维情形一样，称该积分收敛．这个积分收敛，当且仅当积分

$$\int_G |f(x)|\,dx$$

是有限的．在这种情形下，反常积分

$$\int_G f(x)\,dx$$

与 Lebesgue 积分是同样的．这是与以下的事实有关的：对 $n = 1$ 和上面给出的反常积分的定义，取极限的过程是在一个很特殊的 Jordan 可测集的类上即在区间上进行的．可取任意的 Jordan 可测集作为 E_k．然而，对 $n \geqslant 2$，如果取任何 Jordan 可测区域作为 E_k，则上述论断仍然成立．这样，在这种情形下，与 Lebesgue 积分相比较，反常积分概念引不出任何新的东西．

对多元函数的反常积分，类似于一维情形，存在一个比较检验法．把积分

$$\int_{r \leqslant 1} \frac{dx}{r^{\alpha}} \quad \text{和} \quad \int_{r \geqslant 1} \frac{dx}{r^{\alpha}}$$

取作比较积分，其中

$$x = (x_1, \cdots, x_n),\ r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\ .$$

前一积分对 $\alpha < n$ 收敛而对 $\alpha \geqslant n$ 发散，后一积分对 $\alpha > n$ 收敛而对 $\alpha \leqslant n$ 发散．

主值意义下的积分属于反常积分．设函数 f 定义在开集 $G \subset \mathbf{R}^n$ 上，可能有一点 $x \in G$ 除外，而且假设对任何 $\varepsilon > 0$，f 在 $G \setminus U(x, \varepsilon)$ 上（Riemann 或 Lebesgue）可积，这里 $U(x, \varepsilon)$ 是 x 的 ε 邻域．如果极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{G \setminus U(x, \varepsilon)} f(x)\,dx$$

存在，则它称为 f 的主值（principle value）意义下的积分（或主值积分（principle value integral）），且表示为

$$\mathrm{p.v.} \int_G f(x)\,dx.$$

如果

$$\int_G f(x)\,dx$$

作为反常积分存在，则它在主值意义下也存在．一般地，其逆不真．例如，反常积分

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

发散，而

$$\mathrm{p.v.} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 0.$$

可类似地定义在无穷远点按主值意义的积分．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, т. 2, М., 1973（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, A. G., Fundamentals of mathematical analysis, 2, Mir, 1982）.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975（С. М. 尼柯尔斯基，数学分析教程，第二卷第一分册，高等教育出版社，1992）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 常用 Cauchy 主值（积分）（Cauchy principal value (integral)）一词代替"主值（积分）"．它也可表示为 $\int_G f(x)\,dx$．

关于残数方法，见**复积分法**（complex integration, method of）．

一个函数 f 在区域 G 上的多维反常积分存在，当且仅当 $\int_G |f(x)|\,dx$ 存在这一（上面提到的）事实的证明，譬如可在 [A5] 中找到．

在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上按反常意义可积的函数的一个例子是函数 $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$．

参考文献

[A1] Shilov, G. E., Mathematical analysis, 1-2, M. I. T., 1974（译自俄文）.

[A2] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambridge Univ. Press, 1975.

[A3] Schwartz, L., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, 1965.

[A4] Buck, R. C., Advanced calculus, McGraw-Hill, 1965.

[A5] Valiron, G., Théorie des fonctions, Masson, 1948, 287 ff.

[A6] Apostol, T. M., Calculus, 1-2, Blaisdell, 1969.

[A7] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1963.

[A8] Rudin, W., Real and complex analysis, MacGraw-Hill, 1974（中译本：W. 卢丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1982）.

[A9] Zaanen, A. C., Integration, North-Holland, 1967.

葛显良 译

关联 [**incidence**; **инцидентность**]

几何学中的一个术语，用于表示几何学的一些基本对象：点、线、平面之间"属于"或"包含"关系．关联性质由所谓关联公理来表征（见 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms）． А. Б. Иванов 撰

【补注】 关于参考文献，亦见**关联系统**（incidence system）和**射影几何学**（projective geometry）． 张鸿林 译

关联系数 [**incidence coefficient**; **инцидентности коэффициент**]

刻画单纯复形、多面体（CW 复形）以及其他复形中关联元之间定向的协调性的整数．描述关联系数的概念和性质需引进任意抽象复形的定义，见**复形（同调代数中的）**（complex (in homological algebra)）．

设 $t^n = (a_0, \cdots, a_n)$ 为 $\mathbf{R}^N$ 中的定向单形，即给定顶点 a_i 的一个固定次序的单形，并设 $t_i^{n-1} = (a_0, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 为与 a_i 相对的定向面．若 i 为偶数，则 t^n 和 t_i^{n-1} 为协调定向的（coherently oriented），且 t_i^{n-1} 的定向由 t^n 的定向诱导；此时赋予它们关联系数 $[t^n : t_i^{n-1}] = +1$．若 i 为奇数，则 t^n 和 t_i^{n-1} 为非协调定向；此时赋予它们关联系数 $[t^n : t_i^{n-1}] = -1$．

现在设 t^n 和 t^{n-1} 为 $\mathbf{R}^N$ 中的**单纯复形**（simplicial complex）中的元素（单形）．定义它们的关联系数如下：若 t^n 和 t^{n-1} 不相关联，则 $[t^n : t^{n-1}] = 0$；若 t^n 和 t^{n-1} 相关联，则 $[t^n : t^{n-1}] = +1$ 或 -1，视它们是否协调定向而定．

关联系数的性质．

$$[-t^n : t^{n-1}] = [t^n : -t^{n-1}] = -[t^n : t^{n-1}], \quad (1)$$

其中 $-t^n$ 为定向相反的单形，即由 t^n 的顶点经一奇置换所得的定向单形；

$$\sum_k [t^n : t_k^{n-1}]\,[t_k^{n-1} : t^{n-2}] = 0, \qquad (2)$$

上述等式左边对所有的定向单形 t_k^{n-1} 求和(对单纯复形的某些定义,(2)式只有在某种完备性条件下才成立).

类似地,通过适当定义定向的协调性,亦可定义**多面体复形**(polyhedral complex)中两个元素的关联系数.设 $\mathbf{R}^{n-1}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间,$\mathbf{R}_1^n$ 为由 $\mathbf{R}^{n-1}$ 界定的两个半空间之一,并设在 $\mathbf{R}^n$ 中取定了一个定向向量基 $(e_1, \cdots, e_n)$.于是 $\mathbf{R}_1^n$ 和 $\mathbf{R}^{n-1}$ 称为协调定向,如果 $(e_2, \cdots, e_n)$ 为 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的一个基,而 e_1 指向 $\mathbf{R}_1^n$ 内部.两个胞腔 σ^r 和 σ^{r-1} 称为协调定向,如果它们分别包含在协调定向的某个半空间及其子空间之内.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

[2] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory. An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1960.

[3] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

М. Н. Войцеховский 撰 李贵松 译 张 平 校

关联系统 [incidence system; инцидентности система]

两个集合 A, $\mathfrak{B}$ 及其元素之间的一个关联关系 I 所构成的族 $S=(A, \mathfrak{B}, I)$.元素 $a \in A$, $B \in \mathfrak{B}$ 之间的关联关系写作 aIB,称为元素 a 关联于元素 B 或者元素 B 关联于元素 a.引入关联系统这一概念的目的是运用几何语言研究一般的组合存在性和构造性问题;关联关系则源于导致某些组合构形的若干性质.

组合学中关联系统的一个例子是(有限)几何学:(有限)集合 A 和 $\mathfrak{B}$ 的元素分别称为点和直线,I 是一关系,它具有射影或仿射几何学理论中常见的性质.**区组设计**(block design)的关联系统是另外一个有代表性的例子:它要求 1)每一 $a \in A$ 恰好关联于 $\mathfrak{B}$ 的 r 个元素;2)每一 $B \in \mathfrak{B}$ 恰好关联于 A 的 k 个元素;3) A 的每一对不同元素恰好关联于 $\mathfrak{B}$ 的 λ 个元素.常常将 A 的子集的一个集合取作 $\mathfrak{B}$;这时 aIB 即简单地是 $\alpha \in B$.

两个关联系统 $S=(A, \mathfrak{B}, I)$ 和 $S'=(A', \mathfrak{B}', I')$ 称为是同构的(isomorphic),如果存在一一映射 $\alpha: A \rightleftarrows A'$ 和 $\beta: \mathfrak{B} \rightleftarrows \mathfrak{B}'$ 满足

$$aIB \rightleftarrows (\alpha a) I' (\beta B).$$

如果 $A=a_1, a_2, \cdots$ 和 $\mathfrak{B}=B_1, B_2, \cdots$ 是有限集,则关联系统 S 的性质可用关联矩阵(incidence matrix) $\|\alpha_{ij}\|$ 方便地描述,其中当 $a_j I B_i$ 时 $\alpha_{ij}=1$,其余 $\alpha_{ij}=0$.矩阵 $\|\alpha_{ij}\|$ 在同构意义下决定 S.

参考文献

[1] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.

[2] Dembowski, R., Finite geometries, Springer, 1968.

В. Е. Тараканов 撰

【补注】 区组设计的条件 1)可由条件 2)和 3)导出.

关联系统的一个更一般类型是 Buekenhout - Tits 几何学(Buekenhout - Tits geometry),其中考虑对象的无穷多种类型,而不限于两个集合 A 和 $\mathfrak{B}$.

从图论的观点来看,一个关联系统就是一个**超图**(hypergraph).

关联系统又叫关联结构(incidence structure).

参考文献

[A1] Beth, T., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Bibl. Inst. Mannheim, 1985.

[A2] Beutelspacher, A., Einführung in die endliche Geometric, I - II, Bibl. Inst. Mannheim, 1982 – 1983.

杨路、曾振柄 译

斜线 [inclined line; наклонная]

对直线 l 而言的斜线,是指与 l 相交不成 $90°$ 角的直线;对平面 π 而言的斜线,是指与 π 相交不成 $90°$ 角的直线.

容斥原理 [inclusion - and - exclusion principle; включения и исключения принцип]

按照以下公式计算不具有给定性质 $a_1, \cdots, a_r$ 中任何性质的物品的数目 $N(a_1' \cdots a_r')$ 的方法:

$$N(a_1' \cdots a_r') = N - \sum_{i=1}^{r} N(a_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r} N(a_i a_j) - \cdots + (-1)^r N(a_1 \cdots a_r), \quad (1)$$

其中 a_i' 表示不具有性质 a_i,N 是物品的总数,$N(a_i)$ 是具有性质 a_i 的物品数,$N(a_i a_j)$ 是既有性质 a_i 又有性质 a_j 的物品数,等等(见[3]).容斥原理提供计算恰好具有性质 $a_1, \cdots, a_r$ 中 m 条性质 $(m=0, \cdots, r)$ 的物品数的公式:

$$e_m = \sum_{i=0}^{r-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} s_{m+i}, \quad (2)$$

其中 $s_0 = N$, $s_k = \sum N(a_{i_1} \cdots a_{i_k})$,这里的求和是对全部 k 数组 $(i_1, \cdots, i_k)$ 进行的,其中 $i_1 \neq \cdots \neq i_k$, $k=1, \cdots, r$,也就是说,

$$s_1 = \sum_i N(a_i), \ s_2 = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} N(a_i a_j), \ \cdots,$$

$$s_r = N(a_1 \cdots a_r).$$

按照(2)计算 e_m 的方法也称作容斥原理.这条原理可用于求解组合问题及数论问题([1]).例如,对于给定的自然数 a 及当 $i \neq j$ 时 $(a_i, a_j)=1$ 的自

然数 $a_1, \cdots, a_N$，不被 $a_i (i=1, \cdots, N)$ 整除并满足 $0<k\leqslant n$ 的自然数 k 的数目，按照 (1) 就是

$$n-\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left[\frac{n}{a_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left[\frac{n}{a_i a_j}\right]-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^N\left[\frac{n}{a_1\cdots a_N}\right].$$

容斥原理也可以用来求解反演问题[2], [3].

参考文献

[1] Hall, Jr., M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.
[2] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Wiley & Math. Assoc. Amer., 1963 (中译本：H. J. 赖瑟，组合数学，科学出版社，1983).
[3] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958.

С. А. Рукова 撰

【译注】

参考文献

[B1] 柯召，魏万迪，组合论（上册），科学出版社，1984.

陶懋颀 译

求和法的包含 [**inclusion of summation methods; включение методов суммирования**]

对应于所考虑的求和法的**可和性域** (summability field) 之间的包含关系．设 A, B 是定义于级数（或序列）集 M 上的两个**求和法** (summation methods)，A^*, B^* 是其可和性域；假定 $A^*\subset B^*$，则称方法 B 包含方法 A，记作 $A\subset B$．方法 A 与 B 称为对等的 (equipotent)，并记作 $A=B$，如果两者中任何一个包含另一个．对等的方法具有相同的可和性域．称方法 B 强于方法 A，如果 B 包含 A 但不对等于 A．如果所给方法的可和性域与所有收敛级数的集合全同，则称此方法对等于收敛性．有时求和法之间的包含不在它们的整个定义集上而只在其某个子集上考虑．

对于 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods) (C, k)，包含关系 $(C, k_1)\subset(C, k_2)$ 对 $k_2\geqslant k_1>-1$ 成立；对于 $k>-1$，**Abel 求和法** (Abel summation method) 强于所有 Cesàro 求和法 (C, k)；**Riesz 求和法** (Riesz summation method) (R, n, k) 对等于 Cesàro 求和法 (C, k) $(k\geqslant 0)$；Abel 求和法在通项 a_n 满足条件 $a_n=O(1/n)$ 的级数的集合上对等于收敛性．上述这些例子中的求和法都是相容的（见**求和法的相容性** (compatibility of summation methods))，尽管一般地说，求和法之间的包含不依赖于它们为相容的假设．然而，如果 A, B 是正则矩阵法（见**正则求和法** (regular summation methods)）且在有界序列集上 $A\subset B$，则 A 与 B 在该集合上是相容的 (Mazur-Orlicz-Brudno 定理 (Mazur-Orlicz-Brudno theorem))．在某些教科书中，求和法之间的包含的定义本身就附加了相容性要求．

定义于实项级数的一个集合上的求和法之间的包含称为完全的 (complete)，如果在以可求和到 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的级数使所给求和法的可和性域完全化之后，其可和性域之间的包含关系仍然保持．例如，**Hölder 求和法** (Hölder summation method) (H, k) 完全包含 Cesàro 求和法 (c, k)．

关于特殊类型可和性（例如绝对可和性，强可和性等等）的求和法之间的包含关系可类似地定义．

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Oxford Univ. Press, 1949.
[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.
[3] Кан, Г. Ф., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5－70 (英译本：Kangro, G. P., Theory of summability of sequences and series, *J. Soviet Math.*, **5** (1976), 1, 1－45).
[4] Mazur, S., Orlicz, W., Sur les méthodes linéaires de sommation, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **196** (1933), 32－34.
[5] Брудно, А. Л., 《Матем. сб.》, **16** (1945), 191－247.
[6] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.

И. И. Волков 撰　沈永欢 译

不可公度量 [**incommensurable quantities; несоизмеримые величины**]

见**可公度量和不可公度量** (commensurable and incommensurable quantities).

不完全 B 函数 [**incomplete beta-function; неполная бета-функция**]

由下式定义的函数：

$$I_x(a, b)=\frac{1}{B(a, b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt,$$
$$0\leqslant x\leqslant 1, \ a>0, \ b>0,$$

其中

$$B(a, b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

是 **B 函数** (beta-function)．如果 a 是整数，则

$$1-I_x(a, b)=\frac{(1-x)^b}{B(a, b)}\sum_{i=0}^{a-1}(-1)^i\begin{bmatrix}a-1\\ i\end{bmatrix}\frac{(1-x)^i}{b+i}=$$
$$=(1-x)^{a+b-1}\sum_{i=0}^{a-1}\begin{bmatrix}a+b-1\\ i\end{bmatrix}\left[\frac{x}{1-x}\right]^i.$$

级数表示式：

$$I_x(a,b)=\frac{x^a(1-x)^b}{aB(a,b)}\left\{1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(a+1,n+1)}{B(a+b,n+1)}x^{n+1}\right\},$$

$$0<x<1.$$

连分数表示式:

$$I_x(a,b)=\frac{x^a(1-x)^b}{aB(a,b)}\left\{\frac{1|}{|1}+\frac{d_1|}{|1}+\frac{d_2|}{|1}+\cdots\right\},$$

其中

$$d_{2m+1}=-\frac{(a+m)(a+b+m)x}{(a+2m)(a+2m+1)},$$

$$d_{2m}=\frac{m(b-m)x}{(a+2m-1)(a+2m)}.$$

对于大的 a 和 b 的渐近表示式:

$$I_x(a,b)=$$

$$=\Phi\left\{3\frac{(bx)^{1/3}\left[1-\frac{1}{9b}\right]-[a(1-x)]^{1/3}\left[1-\frac{1}{9a}\right]}{\sqrt{\frac{[a(1-x)]^{2/3}}{a}+\frac{(bx)^{2/3}}{b}}}\right\}+$$

$$+O\left[\frac{1}{\min(a,b)}\right],$$

其中

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt.$$

对于大的 b 和有界的 a 的渐近表示式:

$$I_x(a,b)=I\left[\frac{x(2b+a-1)}{2-x},a\right]+O(b^{-2}),$$

其中

$$I(z,a)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^z e^{-t}t^{a-1}dt.$$

与**超几何函数**(hypergeometric function)的联系:

$$I_x(a,b)=\frac{x^a}{aB(x,a)}F(a,1-b;a+1;x).$$

递推公式:

$$I_x(a,b)=1-I_{1-x}(b,a),$$

$$I_x(a,b)=xI_x(a-1,b)+(1-x)I_x(a,b-1),$$

$$I_x(a,a)=\frac{1}{2}I_{1-y}\left[a,\frac{1}{2}\right],\ y=4\left[x-\frac{1}{2}\right]^2,$$

$$0<x\leqslant\frac{1}{2}$$

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, A., Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover, reprint, 1973.
[2] Pearson, K., Tables of the incomplete beta-function, Combridge Univ. Press, 1932.

В. И. Пагурова 撰 张鸿林 译

不完全 Γ 函数 [**incomplete gamma-function**; **неполная гамма-функция**]

由公式

$$I(x,m)=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^x e^{-t}t^{m-1}dt,\ x\geqslant 0,\ m>0$$

定义的函数, 其中 $\Gamma(m)=\int_0^\infty e^{-t}t^{m-1}dt$ 是 **Γ 函数**(gamma-function). 如果 n 是非负整数, 则

$$I(x,n+1)=1-e^{-x}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m}{m!}.$$

级数表示式:

$$I(x,m)=$$

$$=\frac{e^{-x}x^m}{\Gamma(m+1)}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(m+1)\cdots(m+k)}\right\}.$$

连分数表示式:

$$I(x,m)=1-\frac{x^me^{-x}}{\Gamma(m+1)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1|}{|x}+\frac{1-m|}{|1}+\frac{1|}{|x}+\frac{2-m|}{|1}+\frac{2|}{|x}+\cdots\right\}.$$

对于大的 x 的渐近表示式:

$$I(x,m)=$$

$$=1-\frac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}\left\{\sum_{i=0}^{M-1}\frac{(-1)^i\Gamma(1-m+i)}{x^i\Gamma(1-m)}+O(x^{-M})\right\}.$$

对于大的 m 的渐近表示式:

$$I(x,m)=\Phi(2\sqrt{x}-\sqrt{m-1})+O(m^{-1/2}),$$

$$I(x,m)=\Phi\left[3\sqrt{m}\left(\left(\frac{x}{m}\right)^{1/3}-1+\frac{1}{9m}\right)\right]+$$

$$+O(m^{-1}),$$

其中

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt.$$

与**汇合型超几何函数**(confluent hypergeometric function)的联系:

$$I(x,m)=\frac{x^m}{\Gamma(m+1)}{}_1F_1(m,m+1;-x).$$

与 **Laguerre 多项式**(Laguerre polynomials) $L_n^{(\alpha)}(x)$ 的联系:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}I(x,n+\alpha)=$$

$$=(-1)^n n!\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x).$$

递推关系:

$$mI(x,m+1)+xI(x,m-1)=(x+m)I(x,m).$$

参考文献

[1] Abramowitz, M., Stegun, A., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, Dover, reprint, 1973.

[2] Пагурова, В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

В. И. Пагурова 撰

【补注】 也用下列记号

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt,$$

$$Q(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt,$$

其中 $\mathrm{Re}\, a > 0$, $x \geqslant 0$. Q 函数与**汇合型超几何函数** (confluent hypergeometric function) 由下式相联系:

$$Q(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^a e^{-x} \Psi(1; a+1; x).$$

[A1] 中给出了 $P(a, x)$ 与 $Q(a, x)$ 两者新的渐近展开式.

参考文献

[A1] Temme, N. M., The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions, *SIAM J. Math. Anal.*, **10** (1979), 757 - 766.

沈永欢 译

不相容性 [inconsistency; несовместимость]

形式系统 (formal system) 中与**相容性** (consistency) 相对立的性质. 一个形式系统称为不相容的 (inconsistent), 如果它不是相容的. 如果在给定形式系统的语言中某个公式类不是相容的, 那么就称这个类与给定形式系统是不相容的. 特别地, 如果由单独一个公式构成的类与给定的形式系统是不相容的, 那么就称这个公式与给定的形式系统是不相容的. 一个公式的不相容性意味着, 如果它包含在公理中, 那么就得到一个不相容的形式系统.

不相容的形式系统没有有意义的**解释** (interpretation).

发现某一公式的否定与给定的形式系统的不相容性, 构成一个称为**归谬法** (reductio ad absurdum) 的证明方法: 对于通常的形式系统, 由一个公式的不相容性得到这个公式的否定是可以推演出的.

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977 (译自俄文).

卢景波 译

不相容类 [inconsistent class; противоречивый класс]

在给定的形式理论的语言中具有如下性质的公式类 K: 存在一个公式 φ, φ 和 $\neg\varphi$ (φ 的否定式) 在这个理论中都可以由 K 推导出来. 这就是说, 如果把 K 中所有的公式都加进这一理论的公理算作新的公理, 那么在所得到的理论中, 公式 φ 和 $\neg\varphi$ 都可以被推出来.

В. Н. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

[A2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland & Noordhoff, 1950 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984).

沈复兴 译

递增函数 [increasing function; возрастающая функция], 亦称增函数

在某个实数集合 E 上定义的实值函数 f, 使得由条件

$$x' < x'', \quad x', x'' \in E$$

可以推出

$$f(x') < f(x'').$$

这样的函数有时称为严格递增函数 (strictly increasing function), 而 "递增函数" 一词是指这样的函数: 对于上面给定的 x' 和 x'', 只满足条件

$$f(x') \leqslant f(x'')$$

(非减函数 (non-decreasing functions)). 任何严格递增函数的反函数都是单值的, 也是严格递增的. 如果 x_0 是集合 E 的右侧 (左侧) 极限点 (见**集合的极限点** (limit point of a set)), f 是非减函数, 集合 $A = \{y : y = f(x), x > x_0, x \in E\}$ 是下有界的 (或者 $\{y : y = f(x), x < x_0, x \in E\}$ 是上有界的), 则当 $x \to x_0^+$ 时 (或者相应地, 当 $x \to x_0^-$ 时) ($x \in E$), 值 $f(x)$ 具有有限的极限; 如果这个集合不是下有界的 (或者相应地, 不是上有界的), 则值 $f(x)$ 具有无穷的极限 $-\infty$ (或者相应地, $+\infty$).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 如果 f 在 E 上非减且 $x_0 \in E$, 则上述的集合 A 自动地以 $f(x_0)$ 为下界, 除非 A 是空集. 此外, 如果 x_0 是 $\{x \in E : x > x_0\}$ 的一个极限点, 则 f 在 x_0 的右侧极限即是 A 的下确界:

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \inf A.$$

对右侧极限类似的注记成立。

张鸿林 译

递增序列 [increasing sequence; возрастающая последовательность] 亦称增序列

一个实数序列 $\{x_n\}$, 对于一切 $n = 1, 2, \cdots$, 都有 $x_n < x_{n+1}$. 有时这样的序列称为严格递增的 (strictly increasing), 而 "递增序列" 一词指的是对于一切 n, 满足条件 $x_n \leqslant x_{n+1}$ 的序列. 这样的序列也称为非减序

列(non-decreasing sequences). 每个上有界的非减序列都具有有限的极限，每个非上有界的非减序列都具有无穷的极限 $+\infty$. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见递减序列(decreasing sequence).

张鸿林 译

不可分解连续统 [indecomposable continuum; неразложимый континуум]

不可能表为两个真子连续统之并的非退化的**连续统**(continuum). А. А. Мальцев 撰

【补注】 两个等价定义是: 1)存在三个点，使得该连续统在其中每两点间是不可约的(见**不可约连续统**(irreducible continuum)); 2)任何真子连续统都是疏的.

在不可分解连续统中可以考虑与连通分支相似的合成子: 点 x 的合成子是含有 x 的所有真子连续统之并.

不可分解连续统的例子有: **伪弧**(pseudoarc), 这甚至是一个**遗传不可分解的连续统**(hereditarily indecomposable continuum); **螺线管**(solenoid); 半直线 $\mathscr{H}=[0,\infty)$ 在其 **Stone-Čech 紧化**(Stone-Čech compactification)中的补集 $\beta\mathscr{H}\setminus\mathscr{H}$.

参考文献

[A1] Bellamy, D. P., A non-metric indecomposable continuum, *Duke. Math. J.*, **38**(1971), 15 - 20.

[A2] Kuratowski, K., Topology, Ⅱ, PWN & Acad. Press, 1968.

胡师度、白苏华 译

不可分解的分布 [indecomposable distribution; неразложимое распределение]

不能表成非退化分布的卷积的非退化概率分布. 具有不可分解的分布的随机变量不能表为独立非常值随机变量之和.

不可分解的分布的例子有**反正弦分布**(arcsine distribution)、当 $n+m<2$ 时的 **B 分布**(beta-distribution), **Wishart 分布**(Wishart distribution), 以及 $\mathbf{R}^k$ $(k\geqslant 2)$ 中任一集中于一严格凸且闭的超曲面上的分布. 不可分解的分布的集是足够丰富的, 它依弱收敛拓扑在所有分布的集中稠密.

在概率分布的卷积半群中不可分解分布所起的作用, 在某种意义上类似于素数在算术中的作用(见关于分布的因子分解的 **Хинчин 定理**(Khinchin theorem)), 但并非每一分布都有不可分的因子.

参考文献

[1] Линник, Ю. В., Островский, И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972(英译本: Linnik, Yu. V., Ostrovskiĭ, I. V., Decomposition of random variables and vectors, Amer. Math. Soc., 1977).

[2] Лившиц, Л. З., Островский, И. В., Чистяков, Г. П., в кн., Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 12, М., 1975, с. 5 - 42.

[3] Parthasarathy, K. R., Rao, R. R., Varadhan, S. R. S., On the category of indecomposable distributions on topological groups, *Trans. Amer. Soc.*, **102** (1962), 200 - 217.

И. В. Островский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970.

潘一民 译

不可分解表示 [indecomposable representation; неразложимое представление]

一个群(或代数, 环, 半群等等)的表示(见**群的表示**(representation of a group)), 它不等价于这同一个群(或代数等等)的非零表示的直和. 因此, 不可分解表示应被看成有关代数系统的最简单的表示. 藉助于这些表示, 可以研究这个代数系统的结构, 它的表示理论以及这个系统上的调和分析. 一个**拓扑群**(或代数等等)在一个拓扑空间内的表示(见**拓扑群的表示**(representation of a topological group))称为不可分解的, 如果它不等价于这同一代数系统的非零表示的拓扑直和.

每一个**不可约表示**(irreducible representation)一定是不可分解的. 群 $\mathbf{R}$ 的有限维不可分解表示类和把 $\mathbf{R}$ 的一个给定的有限维表示分成不可分解表示的分解与矩阵的 **Jordan 正规形式**(Jordan normal form)和常系数线性常微分方程的理论有直接联系. 即使像 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{Z}^n(n>1)$ 这样的群的不可分解表示的分类也远没有完成(1997). 群, 特别是可解 Lie 群的半直积的不可分解表示可能是可约的(即使在有限维情形也是如此). 另一方面, 实半单 Lie 群的有限维不可分解表示是不可约的. 然而这些群有可约的无限维不可分解表示, 特别这些群的表示的基本连续系列(见**表示的连续系列**(continuous series of representations))的解析开拓是如此.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978(英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

[3] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976(英译本: Naĭmark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[4] Гельфанд, И. М., Пономарев, В. А., 《Успехи матем. наук》, **23** (1968), 2, 3 - 60.

А. И. Штерн 撰 郝钢新 译

不定积分[indefinite integral; неопределенный интеграл]

给定的在某个区间上定义的单变量函数$f(x)$的积分

$$\int f(x)\,dx. \qquad (*)$$

它是给定函数$f(x)$在这个区间上的一切原函数的集合．如果$f(x)$定义在实轴的一个区间Δ上，$F(x)$是$f(x)$在Δ上的任何原函数，即对于一切$x\in\Delta$，$F'(x)=f(x)$，则$f(x)$在Δ上的任何其他原函数都具有形式$F(x)+C$，其中C是常数．因此，不定积分$(*)$由一切形如$F(x)+C$的函数组成．

一个$[a, b]$上的可和函数$f(x)$的Lebesgue不定积分是形如

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$$

的一切函数的集合．在这种情况下，一般说来，等式$F'(x)=f(x)$仅在$[a, b]$上几乎处处成立．

在测度为μ的测度空间X上定义的可和函数$f(x)$的（广义）Lebesgue不定积分指的是在X中一切可测集E的集合上定义的集函数

$$\int_E f(x)\,d_\mu x.$$

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯尔莫果洛夫，С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，上、下册，高等教育出版社，1992）.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1–2, М., 1975（中译本：С. М. 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷一、二分册，人民教育出版社，1980–1982，第二卷，高等教育出版社，1992）.

[3] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, Mir, 1982）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 其他参考文献，见**反常积分**（improper integral）；**积分**（integral）.

张鸿林 译

不定极限和不定式的求值[indefinite limits and expressions, evaluations of; неопределенностей раскрытие]

计算由一些公式给出的函数的极限的方法，当把自变量的极限值形式地代入这些公式时，它们将失去意义，即成为下列形式的表达式：

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

不可能判断所要求的极限是否存在，即使存在，也不可能直接求出．不定式求值的基本工具是**Taylor公式**（Taylor formula），利用Taylor公式可以分出函数的主部．例如，在$0/0$型不定式的情况下，为了求出极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

其中

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0,$$

在点x_0的邻域内由Taylor公式表示函数f和g（如果可能的话），直到第一个非零项：

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\ a\neq 0,$$

$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),\ b\neq 0;$$

结果求得极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{如果 } n>m,\\ \dfrac{a}{b}, & \text{如果 } n=m,\\ \infty, & \text{如果 } n<m.\end{cases}$$

在∞/∞型的不定式的情况下，为了求出极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

其中

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty,$$

利用变换

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

化为$0/0$型不定式的求值问题．

$0\cdot\infty$型或$\infty-\infty$型的不定式分别由变换

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},$$

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\,\dfrac{1}{g(x)}},$$

也不难化为$0/0$型的不定式．

为了求0^0型、∞^0型或1^∞型不定式的值，首先取需要求极限的表达式的对数是适宜的．

求$0/0$型或∞/∞型不定式以及可以化为这些类型的不定式的另一个一般方法是**l'Hospital法则**（l'Hospital rule）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis Wadsworth, 1981.

张鸿林 译

不定度规[**indefinite metric**; **индефинитная метрика**]

不定度规空间(space with an indefinite metric)理论的一个术语，用来表示定义在所考虑空间上的**双线性型**(bilinear form)、**半双线性型**(sesquilinear form)或有一定度齐性的(非线性)泛函(依赖于空间的类型). 不定度规不是度量(即距离)，表示特征的形容词"不定"意味着或者半线性型不是正定的，或者此泛函不是这空间上一个范数的幂. 不定度规的各种不同的类型称为 G 度规、I 度规、J 度规(见**带不定度规的 Hilbert 空间**(Hilbert space with an indefinite metric); **Понтрягин 空间**(pontrygin space)).

А. И. Штерн 撰 葛显良 译

独立性[**independence**; **независимость**], 概率论中的

概率论中最重要的概念之一. 有时用其他术语，如统计独立性(statistical independence), 随机独立性(stochastic independence). 从数学**概率论**(probability theory)最初发展时期以来，就常常以假定事件、试验和随机变量是独立的作为普遍前提.

两个随机事件的独立性定义如下: 设 A 和 B 是两个随机事件，$\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$ 是它们的概率，B 在给定 A 发生之下的条件概率(conditional probability)定义为

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)},$$

其中 $\mathrm{P}(A \cap B)$ 是 A 和 B 同时发生的概率. 称事件 A 和 B 是独立的(independent), 如果

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A) \mathrm{P}(B). \qquad (1)$$

若 $\mathrm{P}(A)>0$，则等价于

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B). \qquad (2)$$

这一定义的意义可以解释如下: 在试验进行次数 N 很大的假定下，将(2)中的概率暂时看作相对频率，我们可以断定在所有 N 次试验中事件 B 的相对频率必等于它在事件 A 发生的那些次试验中发生的相对频率. 于是，两个事件独立，是指一个事件的发生与另一个事件的发生之间没有可以辨别的联系. 例如，事件"随机选择的一个人的姓以字母 A 打头"与事件"这同一个人将在下一次抽奖游戏中获得重奖"是独立的.

n 个随机事件 $A_1, \cdots, A_n (n>2)$ 独立的定义可以用几种等价形式表述. 按其中一种表述，称这些事件是独立的，如果对任意 $m (2 \leqslant m \leqslant n)$ 和任意 m 个两两不同的自然数 $k_1, \cdots, k_m \leqslant n$，事件 $A_{k_1}, \cdots, A_{k_m}$ 同时发生的概率等于它们的概率的乘积

$$\mathrm{P}(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_m})=\mathrm{P}(A_{k_1}) \cdots \mathrm{P}(A_{k_m}). \qquad (3)$$

因此，像前面一样，可以断言，在给定其他任意事件组发生的条件下，每一事件的条件概率等于它的"无条件"概率.

有时，除事件 $A_1, \cdots, A_n$ 独立(相互独立)的概念外，还考虑所谓的两两独立(pairwise independence)的概念: 这些事件中的任意两个事件，例如 A_i 和 A_j $(i \neq j)$ 是独立的. 事件的独立蕴含两两独立，但反之不真.

在概率的公理化结构建立以前，独立性概念不能以足够清晰的方式表达. 正如 A. A. Марков 所说([1], p. 24): "在著名的理论问题中，独立事件概念也许被认为是十分清楚的，可是在另一些问题中，由于概率的基本观念的模糊，使这一概念也变得很模糊了".

在公理化方法中，独立性最自然的定义如下: 设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是某一**概率空间**(probability space)，其中 Ω 是基本事件集合，$\mathscr{A}$ 是事件的 σ 代数，P 是 $\mathscr{A}$ 上的概率测度. 我们首先定义事件类的独立性(这里考虑的类 $\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{A}$ 的子 σ 代数). 称类 $\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_n$ 是(关于 P)独立的(independent), 如果任意事件 $A_1 \in \mathscr{B}_1, \cdots, A_n \in \mathscr{B}_n$ 在(3)的意义下独立; 称类 $\mathscr{B}_t, t \in T$(其中 T 是一个任意指标集)为独立的，如果对任意整数 $n \geqslant 2$ 和任意两两不同的 $t_1, \cdots, t_n \in T$，类 $\mathscr{B}_{t_1}, \cdots, \mathscr{B}_{t_n}$ 是独立的. 事件 $A_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 的独立性等价于类

$$\mathscr{B}_k=\{\phi, A_k, \bar{A}_k, \Omega\}$$

的独立性. 在试验的情形下，独立确切地是指由试验产生的 σ 代数独立.

随机变量 $X_t (t \in T)$ 的独立是用子 σ 代数 $\mathscr{B}(X_t)$ 的独立定义的，其中 $\mathscr{B}(X_t)$ 是实直线上 Borel 集的 σ 代数在 X_t 之下的逆象. 随机事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的独立性等价于它们的指示函数 $I_{A_k} (1 \leqslant k \leqslant n)$ 的独立性，即用

$$I_{A_k}(\omega)=1, \omega \in A_k$$

和

$$I_{A_k}(\omega)=0, \omega \notin A_k$$

所定义的随机变量的独立性.

关于随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的独立性，有各种各样的充分必要条件:

1) 对任意实数 $a_1, \cdots, a_n$，**分布函数**(distribution function)的值

$$F_{X_1, \cdots, X_n}(a_1, \cdots, a_n)=\mathrm{P}\{\omega: X_1(\omega)<a_1, \cdots, X_n(\omega)<a_n\}$$

等于各自分布函数的乘积

$$F_{X_1, \cdots, X_n}(a_1, \cdots, a_n)=F_{X_1}(a_1) \cdots F_{X_n}(a_n).$$

2) 如果密度 $p_{X_1,\cdots,X_n}(a_1,\cdots,a_n)$ (见**概率分布的密度** (density of a probability distribution)) 存在，则对 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，几乎所有的 $(a_1,\cdots,a_n)$，这一密度等于各自密度的乘积 $p_{X_1}(a_1)\cdots p_{X_n}(a_n)$.

3) 对所有实数 $u_1,\cdots,u_n$，**特征函数** (characteristic function)

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(u_1,\cdots,u_n)=\mathsf{E}\,e^{iu_1X_1+\cdots+iu_nX_n}$$

等于各自特征函数的乘积

$$f_{X_1}(u_1)\cdots f_{X_n}(u_n),\ f_{X_k}(u_k)=\mathsf{E}^{iu_kX_k}.$$

概率论最重要的概形都基于各种事件和随机变量独立性的假定：如独立随机变量序列 (例如，参见 **Bernoulli 随机游动** (Bernoulli random walk); **大数律** (law of large numbers); **极限定理** (limit theorems) (概率论中的)，独立增量过程 (例如，见 **Wiener 过程** (Wiener process); **随机过程** (stochastic process))，等等. (亦见**零一律** (zero-one law)).

关于独立性概念的一般注记

1) 独立随机变量的函数的独立性. 给定独立随机变量 $X_1,\cdots,X_n$，可以导出各种十分显然且完全与独立性的直观想法一致的命题. 例如，$X_1,\cdots,X_k$ 的函数和 $X_{k+1},\cdots,X_n$ 的函数是独立随机变量. 其他类型的函数的独立性仅在某些附加假定下才成立；这种独立性可以用作定义各种类型的分布. 例如，如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布的正态随机变量，则函数

$$\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \tag{4}$$

和

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2 \tag{5}$$

(它们分别是对 X_k 的期望和方差的统计估计) 是独立随机变量. 其逆也是真的：若 $X_1,\cdots,X_k$ 是独立同分布的，且 (4) 和 (5) 是独立的，则 X_k 服从正态分布. 同样，如果已知 $X_1,\cdots,X_k$ 是独立同分布的，两个线性型

$$Y_1=\sum_{j=1}^{n}a_jX_j \text{ 和 } Y_2=\sum_{j=1}^{n}b_jX_j$$

是独立随机变量，$(a_1,\cdots,a_n)\neq(b_1,\cdots,b_n)$ 且系数 a_j,b_j 不为零，则所有 X_j 都是正态分布的. (在极少假定下，用这种类型的定理可导出例如像分子速度的 Maxwell 律.) 上面的命题是一些称为特征定理的例子，由 Ю.Б.Линник 和他的学派相当彻底地研究过.

2) 在一个给定的概率空间上独立随机变量 (independent random variables) 的存在性. 如果基本事件集合 Ω 由三个元素组成，每一个发生的概率指定为 1/3，则在 Ω 上不存在非常数的独立随机变量. 设概率空间是具有 Lebesgue 测度 m 的区间 $[0,1]$，给定任一分布函数序列 $F_1(x),F_2(x),\cdots$，我们可以定义任 $[0,1]$ 上的可测函数 $X_k(\omega)$，使得它们关于测度 m 独立，且

$$m\{\omega:0\leqslant\omega\leqslant1,\ X_k(\omega)<x\}=F_k(x).$$

在 $[0,1]$ 上这种统计独立函数的最简单的例子由 ω $(0\leqslant\omega\leqslant1)$ 的二进制展开的符号提供，或与其 Rademacher 函数相联系：

$$r_k(\omega)=\operatorname{sign}\sin(2\pi\cdot2^{k-1}\omega),k=1,2,\cdots.$$

应该注意到存在概率空间，在其上可以用给定的分布定义独立随机变量，是关于无穷维空间的 Колмогоров 概率定理的一个推论 (见 [3], Chapt. Ⅲ. Sect. 4).

3) 作为其他概形的来源的独立随机变量. 设 $Y_1,\cdots,Y_n,\cdots$，是一独立随机变量序列，令

$$X_0=0,\ X_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k(n\geqslant1);$$

于是得到一个 **Марков 链** (Markov chain). 类似的方法可以产生一个 **Марков 过程** (Markov process)，例如从 Wiener 过程出发利用随机微分方程. 从具有独立值的 Gauss 随机测度出发，利用 Fourier 变换，可以构造 Gauss 平稳随机过程，等等.

4) 弱相关性 (weak dependence). 对独立随机变量序列建立的概率论的渐近律，通常可以推广到所谓的弱相关变量序列，亦即在序列 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$，中，相隔较远的变量之间相关性较小 (最简单的情形可以是 m 相关随机序列，即如果 $|k-l|>m$，则 X_k 和 X_l 独立；或者是**遍历 Марков 链** (Markov chain, ergodic); 等等). 证明这些定理的主要方法之一是归结为独立情形.

5) 数论中的独立性. 设 $p\geqslant2$ 和 $q\geqslant2$ 是两个互素的数. 再设 N 是一个自然数，假定在 1 到 N 之间随机地选择一个数 (每个数被选中的概率为 $1/N$). 用 $A_p(A_q)$ 表示所选的数能被 p(被 q) 整除这一事件，则

$$\mathsf{P}(A_p)=\frac{1}{N}\left[\frac{N}{p}\right],\ \mathsf{P}(A_q)=\frac{1}{N}\left[\frac{N}{q}\right],$$

$$\mathsf{P}(A_p\cap A_q)=\frac{1}{N}\left[\frac{N}{pq}\right],$$

且当 $N\to\infty$ 时，事件 A_p 和 A_q 成为"几乎独立"的. 更深刻得多的一个命题是：令 $N\to\infty$，可选择 $S=S_N\to\infty$，使得事件 $A_2,\cdots,A_{p_s}$ (其中 A_j 表示能被第 j 个素数整除) 是联合"几乎独立"的；这一命题为研究算术函数的值分布提供了基础 (见**数论中的概率方法** (number theory, probabilistic methods in)). 还有另一些数论分支，在其中独立性思想起着或大或小的作用.

6) 对于在假设检验中如何利用观察结果的独立

性，见**统计假设检验**(statistical hypotheses, verification of).

参考文献

[1] Марков, А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.

[2] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974(中译本：A. H. 柯尔莫格洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952).

[3] Колмогоров, А. Н., Теория вероятностей, в кн., Математика, ее содержание, методы и значения, М., 1956(英译本：Kolmogorov, A. N., The theory of probability, in *Mathematics. its content, methods and meaning*, Vol. 4, Amer. Math. Soc., 1963, Chapt. 6).

[4] Kac, M., Statistical independence in probability, analysis and number theory, Math. Assoc. Amer., 1963.

[5] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1–2, Wiley, 1957–1971(中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964, 1979).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rényi, A., Foundations of probability, Holden-Day, 1970.

刘秀芳 译

公理系统的独立性[**independence of an axiom system; независимость системы аксиом**]

给定公理理论的一个公理系统的一种性质，其定义如下：系统中的每一公理是独立的(independent)，即它不是系统中其他公理构成的集合的逻辑结果．具有这种性质的一个公理系统称为独立的(independent)．

在一个给定的公理理论中，一条公理的独立性意味着该公理可用它的否定代替，而不会得到矛盾．换句话说，一条公理是独立的，当且仅当存在该理论的一个**解释**(interpretation)，使得它在这个解释中是假的，然而该公理理论的其他所有公理在这个解释中都是真的．构作这样一种解释是证明独立性的一个典型方法．

当一个公理理论是作为一个**形式系统**(formal system)被构造出时，逻辑结果的概念形式化为可推演性概念；一条公理被认为是独立的，如果它不能由该形式系统的其他公理用其推演法则推演出．对于一大类形式系统(即一阶理论)，相对于可推演性的独立性与相对于逻辑结果的独立性是一致的．

对于形式系统及**演算**(calculus)，谈论推导法则的独立性也是有意义的．一个**推导法则**(derivation rule)称为独立的(independent)，如果存在演算的一个定理不用该推导法则就推导不出来．

公理的独立性本身不是公理理论的必不可少的性质．它仅仅表示理论的各个初始假设都不是多余的，暗示它们在技术上有某种便利．然而，研究公理系统的独立性以及独立性的证明有利于对所研究理论更好的理解．我们只需举出几何公理系统中 Euclid **第五公设**(fifth postulate)独立性问题的研究对数学发展的影响就足够了．

参考文献

[1] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973(英译本：Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Addison-Wesley, 1964).

[2] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der mathematik, 1–2, Springer, 1968–1970.

[3] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

В. Е. Плиско 撰

【补注】令数学家们关心的最通常的例子是**连续统假设**(continuum hypothesis)及**选择公理**(axiom of choice)与集合论的通常公理的独立性：K. Gödel 已经证明，由集合论的公理既不能证明连续统假设的否定，也不能证明选择公理的否定．而 P. Cohen 已经证明，集合论的公理既不蕴涵连续统假设，也不蕴涵选择公理．

卢景波 译

独立函数系[**independent functions, system of; независимых функций система**]

一个可测函数序列 $\{f_i\}$，对任给的 n 与任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 满足

$$\mu\{x: f_1(x)<\alpha_1, \cdots, f_n(x)<\alpha_n\}= =\prod_{i=1}^{n}\mu\{x: f_i(x)<\alpha_i\}.$$

独立函数系的最简单例子是 **Rademacher** 系(Rademacher system)．

判别独立函数级数几乎处处收敛的(Колмогоров准则(Kolmogorov criterion))：独立函数级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ 几乎处处收敛的充分必要条件是对某个 $C>0$，下面三个级数收敛：

$$\sum_i \mu\{x: f_i(x)>C\},\ \sum_i \int f_i^C(x)\,dx,$$

$$\sum_i \int (f_i^C(x))^2\,dx-\left[\int f_i^C(x)\,dx\right]^2,$$

其中

$$f_i^C(x)=\begin{cases} f_i(x), & |f_i(x)|\leqslant C, \\ 0, & |f_i(x)|>C. \end{cases}$$

Е. М. Семенов 撰

【补注】当然，为了引进独立函数系的概念，必需有一个**测度空间**(measure space) (X, μ)，这些函数定义于其上并且可测(相对于 μ)．而且 μ 必须是正的有限测度，这样 μ 可以看成**概率测度**(probability measure)((X, μ) 则是**概率空间**(probability space))．$(X, \mu)=([0, 1]$、Lebesgue 测度)就是一个例子．

在这个抽象的体系中，用随机变量代替函数，因此得到一个独立随机变量系 (system of independent random variables).

不要把独立函数(随机变量)系混同于域 K 上向量空间 V 的独立元素集 (independent set of elements): V 中的元素集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，使得 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n=0$ 蕴含 $c_1=\cdots=c_n=0$. 亦见**向量空间** (vector space).

参考文献

[A1] Kahane, J.-P., Some random series of functions, Cambridge Univ. Press, 1985.

刘建明 译 苏维宜 校

独立可测分解 [**independent measurable decompositions**; **независимые измеримые разбиения**], 独立可测分划 (independent measurable partitions)，正规化测度空间的

两个可测分解 ξ 与 η，满足条件：若 $B(\xi)$ 与 $B(\eta)$ 分别为完全由 ξ 与 η 的元素组成的可测集的 Boole σ 代数，则其中之一的元素依概率论意义与另一个的元素独立．即对 $A\in B(\xi)$, $B\in B(\eta)$ 有 $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$. 在这些条件下，如果一个可测分解作为 ξ 与 η 两者的改进，依 mod 0 合于单点分解，则 ξ 与 η 称为独立补 (independent complements). 在 **Lebesgue 空间** (Lebesgue space) 中可测分解具有独立补的条件是已知的.

参考文献

[1] Рохлин, В. А., 《Матем. сб.》, **25** (1949), 1, 107 – 150.

[2] Ершов, М. П., 《Успехи матем. наук》, 32 (1977), 1, 187 – 188.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 亦见**可测分解** (measurable decomposition).

参考文献

[A1] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinaǐ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文).

[A2] Parry, W., Topics in ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1981.

郑维行 译 沈祖和 校

独立测度 [**independent measures**; **независимые меры**]

同**互相奇异测度** (mutually-singular measures).

不定方程 [**indeterminate equation**; **неопределенное уравнение**]

一个含有多于一个未知数的方程．一个方程组，如果其中所含未知数的个数多于方程的个数，则称为不定方程组 (indeterminate system of equations). 不定方程和不定方程组通常具有无穷多个解．"不定方程"一词应用于数论，其中考虑不定方程的满足某些算术条件的解(通常是整数解或有理数解)．这种方程的研究构成 **Diophantus 方程** (Diophantine equations) 理论的课题．

БСЭ-3 撰 张鸿林 译

指标 [**index**; **индекс**], 数 a 模 m 的

同余式 (congruence) $a\equiv g^{\gamma} \pmod m$ 中的指数 γ，这里 a 和 m 是互素的整数，而 g 是模 m 的**固定原根** (primitive root). a 模 m 的指标用 $\gamma=\mathrm{ind}_g a$ 表示，或者简单地表成 $\gamma=\mathrm{ind}\, a$. 原根只对形如 $2, 4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$ 的模才存在，此处 $p>2$ 是素数；因此，指标的概念只对这些模有定义.

假如 g 是模 m 的一个原根，γ 取遍值 $0, \cdots, \varphi(m)-1$, 此处 $\varphi(m)$ 是 **Euler 函数** (Euler function), 则 g^{γ} 取遍模 m 的**既约剩余系** (reduced system of residues). 因此，对于与 m 互素的每一个数都存在唯一的指标 γ，使得 $0\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1$. a 的任何其他指标 γ' 满足同余式 $\gamma'\equiv\gamma \bmod \varphi(m)$. 所以，$a$ 的指标组成模 $\varphi(m)$ 的一个剩余类.

指标的概念类似于**数的对数** (logarithm of a number) 概念，同时指标也具有一系列对数的性质，也就是：

$$\mathrm{ind}(ab)\equiv\mathrm{ind}\, a+\mathrm{ind}\, b \pmod{\varphi(m)},$$
$$\mathrm{ind}(a^n)\equiv n\,\mathrm{ind}\, a \pmod{\varphi(m)},$$
$$\mathrm{ind}\,\frac{a}{b}\equiv\mathrm{ind}\, a-\mathrm{ind}\, b \pmod{\varphi(m)},$$

此处 a/b 表示方程

$$bx\equiv a \pmod m$$

的根.

如果 $m=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是任一自然数 m 的标准因子分解式，而 $g_1, \cdots, g_s$ 分别是模 $p_1^{\alpha_1}, \cdots, p_s^{\alpha_s}$ 的原根，则对于每一个与 m 互素的数 a，存在整数 $\gamma, \gamma_0, \cdots, \gamma_s$，使得

$$a\equiv(-1)^{\gamma}5^{\gamma_0} \pmod{2^{\alpha}},$$
$$a\equiv g_1^{\gamma_1} \pmod{p_1^{\alpha_1}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$a\equiv g_s^{\gamma_s} \pmod{p_s^{\alpha_s}}.$$

上面的数组 $\gamma, \gamma_0, \cdots, \gamma_s$ 叫做 a 模 m 的指标组 (system of indices of a modulo m). 对于每一个与 m 互素的数 a 有唯一的一个指标组 $\gamma, \gamma_0, \cdots, \gamma_s$ 与之对应，使得

$$0\leqslant\gamma\leqslant c-1, 0\leqslant\gamma_0\leqslant c_0-1,$$
$$0\leqslant\gamma_1\leqslant c_1, \cdots, 0\leqslant\gamma_s\leqslant c_s,$$

此处 $c_i=\varphi(p_i^{\alpha_i}) (i=1, \cdots, s)$, 而 c 和 c_0 定义如下：

$$c=1, c_0=1, \text{ 当 } \alpha=0 \text{ 或 } \alpha=1;$$
$$c=2, c_0=2^{\alpha-2}, \text{ 当 } \alpha\geqslant 2.$$

a 的任一其他指标组 $\gamma', \gamma'_0, \cdots, \gamma'_s$ 满足同余式

$$\gamma' \equiv \gamma (\bmod c), \gamma'_0 \equiv \gamma_0 (\bmod c_0), \cdots, \gamma'_s \equiv \gamma_s (\bmod c_s).$$

数 a 模 m 的指标组的概念对于模 m 简化剩余类的乘法群特征的显式构造是很方便的.

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1952).

С. А. Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

指标公式 [index formulas; индекса формулы]

某一类算子的解析不变量和拓扑不变量之间的关系式. 更准确地说, 指标公式建立了线性算子

$$D: L_0 \to L_1$$

(L_0, L_1 均为拓扑向量空间)的解析指标和拓扑指标之间的关系, 前者定义为

$$i_a(D) = \dim \operatorname{Ker} D - \dim \operatorname{Coker} D \in \mathbf{Z},$$

并用以度量 D 的亏子空间(即其核 $\operatorname{Ker} D = D^{-1}(0)$ 和余核 $\operatorname{Coker} D = L_1 / D(L_0)$) 之间的"差别"; 后者是算子 D 和空间 L_0, L_1 的一种拓扑特征. 对于闭流形上的一般椭圆型微分算子, 求其指标公式这一问题是在 20 世纪 50 年代末提出来的([1]), 且在 1963 年得到解决(见 [2]), 然而指标公式的某些特殊形式如 **Gauss-Bonnet 定理** (Gauss-Bonnet theorem) 及其高维的变体早就知道了. 后来对本质更复杂的对象, 指标公式得到了许多推广; 这时, 出现的不是指标 (它一定是整数), 而可能是任意复数和更一般的对象(如函数).

初等指标公式 (elementary index formulas). 1) 令 M 为有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 的可微的边界, A 为映 M 上的值在 $\mathbf{C}^p$ 中的复值可微向量函数空间 $C^\infty(M, \mathbf{C}^p)$ 到其自身中的椭圆伪微分算子. 令 $B(M)$ 为 M 上的长 $\leqslant 1$ 的余切向量流形, 它的定向是 $2n$ 形式

$$(dx^1 \wedge d\xi_1) \wedge \cdots \wedge (dx^n \wedge d\xi_n),$$

$x^1, \cdots, x^n$ 是 M 的局部坐标, $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是余切空间中的相应坐标, $S(M)$ 是 $B(M)$ 的有向边界, 由单位余切向量构成. 由于 A 是椭圆型的, 它的符号 a 是 $S(M)$ 上非奇异 ($p \times p$) 矩阵函数. 于是对 A 的指标有以下的 Дынин-Федосов 公式([7]):

$$\operatorname{ind} A = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2\pi i)^n (2n-1)!} \int_{S(M)} \operatorname{Tr}(a^{-1} da)^{\wedge 2n-1}, \quad (1)$$

$(a^{-1}da)^{\wedge 2n-1}$ 是矩阵外形式 $a^{-1}da$ 的外幂, Tr 表示 $p \times p$ 矩阵形式的迹. 特别地, 若 $p<n$ 或 A 为一奇数维流形上的微分算子, 则 $\operatorname{ind} A = 0$(对于伪微分算子, 这一点一般不真).

2) 令 A 为以下形状的空间 $C^\infty(\Omega)$ 上的椭圆型微分算子

$$A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha(x) \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right]^\alpha$$

(α 是重指标), $B_1, \cdots, B_{m/2}$ 是由 $C^\infty(\Omega)$ 到 $C^\infty(M)$ 中的边界微分算子, 其形为

$$B_j = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} B_{j\alpha}(x) \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right]^\alpha.$$

如果函数 $\xi \to r_{jk}(\xi)$ 在 $S(M)$ 上是非奇异的, 则称算子族 $\{A, B_1, \cdots, B_{m/2}\}$ 定义一椭圆型边值问题. 这里 $r_{jk}(\xi)$ 是 λ 的多项式

$$r_j(\xi, \lambda) = \sum_{k=0}^{m/2-1} r_{jk}(\xi) \lambda^k$$

的系数, $r_j(\xi, \lambda)$ 是 λ 的多项式 $b_j(\xi, \lambda)$ 除以 λ 的多项式 $a^+(\xi, \lambda)$ 的余式, 而

$$b_j(\xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| = m_j} B_{j\alpha}(x)(\xi + \lambda \nu)^\alpha,$$

a^+ 则由因式分解 $a = a^+ a^-$ 来定义, 这里

$$a(\xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x)(\xi + \lambda\nu)^\alpha,$$

$x \in M$, ξ 和 ν 分别是 M 的单位余切向量和内余法线向量; $a^+(a^-)$ 是 λ 的多项式而在 λ 的上(下)半平面中无零点. 所谓上述边值问题的指标即指映 $u \in C^\infty(\Omega)$ 为 $\{Au, B_1 u|_M, \ldots, B_{m/2} u|_M\}$ 的由 $C^\infty(\Omega)$ 到 $C^\infty(\Omega) \times C^\infty(M)^{m/2}$ 的相应线性算子 $\mathfrak{U}$ 的指标. 情况是: 椭圆型边值问题的指标就是以矩阵 $r = (r_{jk})$ 为符号的椭圆型伪微分算子的指标. 特别地, Dirichlet 问题 $\{A, 1, \partial/\partial\nu, \cdots, (\partial/\partial\nu)^{m/2-1}\}$ 的指标为 0. 对于边值问题有一般的指标公式([16],[17],[27]).

Atiyah-Singer 指标公式 (Atiyah-Singer index formula). 令 $C^\infty(\xi)$ 和 $C^\infty(\eta)$ 是 n 维闭微分流形 M 上的向量丛 ξ 和 η 的无穷可微截面的空间, D 是映 $C^\infty(\xi)$ 入 $C^\infty(\eta)$ 的椭圆型(伪微分)算子. D 的拓扑指标 $i_t(D)$ 定义如下. 由 D 的椭圆性, 其符号 $\sigma(D)$ 决定了 $S(M)$ 上的提升向量丛的同构:

$$\sigma(D): \pi^*(\xi) \to \pi^*(\eta),$$

这里 $\pi: S(M) \to M$ 是 M 的余切丛 T^*M 上的单位球面丛. 令 $B(M)$ 为 T^*M 上的单位球体丛; 它是一个 $2n$ 维流形, 而边界是 $S(M)$. 将两份 $B(M)$ 即 $B^+(M)$

和 $B^-(M)$ 沿其公共边界粘合，即得一个闭的$2n$ 维流形 $\Sigma(M)=B^+\cup_{S(M)}B^-$，其上可以构造出向量丛

$$V(\sigma)=\pi^{+*}(\xi)\bigcup_{\sigma(D)}\pi^{-*}(\eta),$$

这里 $\pi^\pm: B^\pm(M)\to M$，$\sigma(D)$ 表示沿 $S(M)$ 将 ξ 与 η 等同．该向量丛 $V(\sigma)$ 包含了定义拓扑指标所需的所有拓扑信息．即有

$$i_t(D)=\{\mathrm{ch}(V(\sigma))\cdot\pi_\Sigma^*\mathscr{T}(M)\}[\Sigma(M)].\quad(2)$$

$\mathrm{ch}(V(\sigma))$ 表示丛 $V(\sigma)$ 的上同调**陈(省身)特征标**(Chen character)；$\mathscr{T}(M)$是复化余切丛$T^*M\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$的**Todd 类**(Todd class)；$\pi_\Sigma:\Sigma(M)\to M$；$\pi_\Sigma^*\mathscr{T}(M)=\mathscr{T}(\Sigma(M))$.上式右方表示元素 $\mathrm{ch}(V(\sigma))\cdot\pi_\Sigma^*\mathscr{T}(M)$ 在流形 $[\Sigma(M)]$ 的**基本闭链**(fundamental cycle)上的$2n$ 维成分的值．于是映射 $V(\sigma(D))\to i_t(D)$ 决定了一个同态 $K(\Sigma(M))\to\mathbf{Z}$，它在 $K(M)$ 的象上是平凡的；这里 $K(X)$是由 X上的复向量丛生成的 **Grothendieck 群**(Grothendieck group)．

Atiyah-Singer 指标定理(Atiyah-Singer index theorem) 指出：

$$i_a(D)=i_t(D).\quad(3)$$

公式(2)有许多修正．依赖于象征 $\sigma(D)$ 的有理上同调类 $\mathrm{ch}[\sigma(D)]$可以引入如下．对于三元组 $\{\pi^*(\xi),\pi^*(\eta),\sigma(D)\}$ 可以有一个差元素(见 **K理论中的差异元素**(difference element in K-theory))，它可看作是将同构 σ 拓展到整个 $B(M)$ 上去的第一个**阻碍**(obstruction)，

$$[\sigma(D)]\in K(B(M)/S(M))=K(TM),$$

这里 TM是切丛(用 M上的 Riemann 度量)它等同于 T^*M；$K(B/S)$ 是 B/S上的向量丛的相对 Grothendieck 群，故对$[\sigma(D)]$ 的陈(省身)特征标有：$\mathrm{ch}[\sigma(D)]\in H^*(B/S;\varphi)$. D的拓扑指标公式现在可以写为

$$i_t(D)=(-1)^n\{\mathrm{ch}[\sigma(D)]\cdot\pi^*\mathscr{T}(M)\}[TM],\ (4)$$

这里，$\pi:TM\to M$，$\pi^*\mathscr{T}(M)=\mathscr{T}(TM)$.

于是，**Thom 同构**(Thom isomorphism)

$$\varphi_*:H^*(B/S)=H^*(TM)\to H^*(M)$$

使我们能将(4)写成

$$i_t(D)=(-1)^{n(n+1)/2}\{\varphi_*\mathrm{ch}[\sigma(D)]\cdot\mathscr{T}(M)\}[M].\quad(5)$$

(和前面一样，(4)和(5)的右方是相应元素在基本闭链上的值，如(2))．

拓扑指标可以用 K理论的语言表示如下．令 $i:M\to E$是 M在 Euclid空间 E中的可微嵌入，W是 M在 E中的一个管状邻域，它可以看作是 M上的实向量丛，而 TW就是在$\mathbf{R}$上同构于 $\pi^*(W\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$ 的，即用 $\pi:TM\to M$提升到 TM上的 W 的复化．Thom 同构 $\varphi:K(TM)\to K(TW)$ 与嵌入 $W\to E$所诱导的自然同态 $K(TW)\to K(TE)$复合成一同态 $i_!:K(TM)\to K(TE)$．令 $\beta:K(TE)\to\mathbf{Z}$为 Bott 周期性同构．这时同态 $\beta\circ i_!\ K(TM)\to\mathbf{Z}$就不依赖于嵌入而有

$$i_t(D)=\beta\circ i_!([\sigma(D)]).$$

例．3) 令 M为一闭的定向 Riemann 流形，$\xi^k=\wedge^k(T^*M)\otimes\mathbf{C}$是 M上的复外 k形式丛，并令

$$d:C^\infty(\xi^k)\to C^\infty(\xi^{k+1}),\ d^*:\ C^\infty(\xi^{k+1})\to C^\infty(\xi^k)$$

分别是外微分算子及其伴随算子．算子

$$d+d^*:\ C^\infty(\xi^e)\to C^\infty(\xi^0)$$

(其中 $\xi^e=\oplus_p\xi^{2p}$，$\xi^0=\oplus_p\xi^{2p+1}$) 是椭圆型算子，而指标公式(3)对它成立；此外，其拓扑指标等于 M的 **Euler 示性数**(Euler characteristic)$\chi(M)$(Hodge-de Rham 定理(Hodge-de Rham theorem))．当 $\dim M=2$ 时即 Gauss-Bonnet 定理．

4) 令 $\xi^\pm$是对合 $I(\alpha)=i^{p(p-1)+k}\star\alpha(\alpha\in\xi^p)$ 的本征(±)空间，$\star$是 M上的度量所定义的对偶算子，$\dim M=2k$．将算子 $d+d^*$ 限制为 $C^\infty(\xi^+)$ 到 $C^\infty(\xi^-)$ 中的算子，称为符号差算子 δ_M，它是一椭圆型算子，而对此指标公式(3)成立；此外，其解析指标等于流形 M 的**符号差**(signature)，拓扑指标则等于其 L **亏格**(genus)(Hirzebruch 定理(Hirzebruch theorem))．

5) 令 η为紧复流形 M上的全纯向量丛，$\xi^{0,q}$是$(0,q)$型微分形式丛，$\eta\otimes\xi^{0,q}$ 是系数在 η中的 $(0,q)$ 型形式丛，$\xi^{0,q}$ 则是此丛的光滑截面 $\mathbf{C}$模．令$\bar\partial:\xi^{0,q}\to\xi^{0,q+1}$是 Cauchy-Riemann-Dolbeault 算子，$\bar\partial^*$ 是其伴随算子，而 $\xi^e=\oplus_p\xi^{0,2p}$，$\xi^0=\oplus_p\xi^{0,2p+1}$．于是算子$\bar\partial+\bar\partial^*:\xi^e\to\xi^0$是椭圆型算子，而对此(3)成立；此外，其解析指标则是 M的系数在 η的全纯截面芽层中的 Euler 示性数，而拓扑指标则是$\{\mathrm{ch}\,\eta\cdot\mathscr{T}(M)\}[M]$，这里 $\mathrm{ch}\,\eta$是 η 的陈(省身)特征标，$\mathscr{T}(M)$是 M 的切丛的 Todd 类 (Riemann-Roch-Hirzebruch 定理(Riemann-Roch-Hirzebruch theorem))．

椭圆复形(elliptic complex)．在一些自然出现的更一般的情况中，例如在微分几何学中，要考虑的不是单个算子 D，而是(伪微分)算子的复形

$$A:0\to C^\infty(\xi_0)\xrightarrow{D_0}C^\infty(\xi_1)\xrightarrow{D_1}\cdots\xrightarrow{D_{N-1}}C^\infty(\xi_N)\to 0,$$

ξ_j是闭流形 M上的可微向量丛，$D_{j+1}D_j=0$．复形A的

符号(symbol of the complex)就是相应的主符号序列

$$\sigma(A):0\to\pi^*(\xi_0)\xrightarrow{\sigma_0}\pi^*(\xi_1)\xrightarrow{\sigma_1}\cdots\xrightarrow{\sigma_{N-1}}\pi^*(\xi_N)\to 0,$$

这里 $\pi^*(\xi_j)$ 是 ξ_j 通过投影 $\pi: T^*M\to M$ 到 $S(M)$ 上的提升．若一复形的符号是零调的，即它在零截面以外处处是恰当的，就说复形 A 是椭圆的．复形 A 的解析指标(analytic index of the complex)即其 Euler 示性数：

$$i_a(A)=\chi(A)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\dim H^j(A),$$

其中 $H^j(A)$ 是 A 的 j 阶上同调群．de Rham 复形和它的复类似物 Dolbeault 复形是椭圆复形的两个重要例子．用复形 $\sigma(A)$ 在 $K(TM)$ 中的类来计算 $\chi(A)$ 的问题，可以化为计算单个算子的指标的问题([3])．

若紧群 G 作用在 A 上(且与 D_j 的作用可交换，即 A 为一个 G 复形)，则 $H^j(A)$ 是一个 G 模，$\chi(A)$ 则定义为群 G 的特征标环的元素．这是一个 $C^\infty(G)$ 函数．这时指标定理可以看作是关于不动点的 **Lefschetz 定理**(Lefschetz theorem)的推广，因为一点 $g\in G$ 处的拓扑指标可以用象征在 $M^g\subset M$ 上的限制的指标来表示，其中 M^g 是 g 所定义的映射的不动点所成的子集．

令 G 为一拓扑循环群，即 G 中有一元素 g，其幂在 G 中稠密．令 N^g 为 M^g 在 M 中的法丛，而 $[\sigma(S)]\in K_G(TM)$ 是 A 的符号的类．令 $i^*[\sigma(A)](g)\in K_G(TM^g)$ 为其限制而 $\lambda_{-1}(N^g\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})(g)$ 是从 $\pi^*(N^g\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$ 到 M_g 的外幂的标准复形生成的类(这里 $i: M^g\to M$，$\pi: TM^g\to M^g$)．于是 Lefschetz 数(Lefschetz number) $L(g,A)$，它等于 $\sum(-1)^j\mathrm{Tr}(g|H^j(A))$，将由下式给出：

$$L(g,A)=\mathrm{ind}\left\{\frac{i^*[\sigma(A)](g)}{\lambda_{-1}(N^g\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})(g)}\right\}=\mathrm{ind}_G A(g),$$

这里 ind: $K(TM^g)\otimes\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 是拓扑指标 $K(TM^g)\to\mathbf{Z}$ 的自然扩张．此式的上同调形式是

$$\mathrm{ind}_G A(g)=\left\{\frac{\mathrm{ch}\, i^*[\sigma(A)](g)}{\mathrm{ch}\,\lambda_{-1}(N^g\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})(g)}\cdot\pi^*\mathscr{T}(M^g)\right\}[M]. \tag{6}$$

不设 G 为紧，但设 M^g 是零维子流形，且 G 的作用是非退化的(即 g 的图象横截于 $M\times M$ 的对角线)，则有一类似公式可以表示如下．若 $P\in M^g$，则 $dg(P)$ 使 $TM|_P$ 不变，而 g 则在纤维 $\xi_j|_P$ 上诱导一个线性映射 $l_j(g,P)$，且

$$\mathrm{ind}_G A(g)=\sum_{P\in M^g}\sum_j(-1)^j\frac{\mathrm{Tr}\, l_j(g,P)}{\det(1-g(P))}.$$

最后，可以减弱 G 复形 A 的椭圆性条件而考虑所谓横截椭圆复形(transversally-elliptic complex)；这时，指标将变成群 G 上的广义函数(见[8])．特别地，若 G 是有限群，则横截椭圆性就等价于椭圆性，而前面的公式都可以应用．若 $M=G/H$ 是一齐性空间，则所有的算子复形都是横截椭圆的，这时指标公式和群 G 的诱导表示的 Frobenius 互反性公式本质上是相同的．

非 Fredholm 算子(non-Fredholm operators)．这个情况下有时也可以给出解析指标的另一个定义，并得出相应的指标公式．

例．6)令 D 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有殆周期系数的一致椭圆型算子．解析指标 $i_a(D)$ 可以用 II_∞ 因子中的相对维数(见 **von-Neumann 代数**(von-Neumann algebra))来引入，而为一实数(见[11])．有一个类似于(1)的公式，其中用殆周期函数的平均值代替 $\mathbf{R}^n$ 上的积分．

7)设有一离散群 Γ 自由地作用在一流形 M 上，且商空间 $\widetilde{M}=M/\Gamma$ 为紧；令 ξ,η 为 M 上的向量丛，而 Γ 在其上的作用与其在 M 上的作用相符合．M 上的与 Γ 的作用可交换的椭圆型算子 $D: C^\infty(\xi)\to C^\infty(\eta)$ 的解析指标由下式定义：

$$i_a(D)=\mathrm{Tr}_\Gamma P_1-\mathrm{Tr}_\Gamma P_2, \tag{7}$$

P_1,P_2 是 $L_2(M,d\mu)$ 到 $\mathrm{Ker}\,D$ 和 $\mathrm{Ker}\,D^*$ 上的正交投影，$d\mu$ 是 M 上任意的 Γ 不变光滑密度，$\mathrm{Tr}_\Gamma P$ 对于与 Γ 可交换且有光滑核 $P(x,y)$ 的算子 P 由下式定义：

$$\mathrm{Tr}_\Gamma P=\int_{M_0}\mathrm{tr}\, P(x,x)\,d\mu\ .$$

(M_0 是群 Γ 在 M 上的任意基本域，tr 是矩阵的迹)．结果有 $i_a(D)=i_a(\widetilde{D})$，其中 $\widetilde{D}$ 是 $\widetilde{M}$ 上的算子，其符号 $\sigma(\widetilde{D})$ 在用典范投影 π: $M\to\widetilde{M}$ 提升到 M 后诱导出 $\sigma(D)$ ([12])．这样，关于算子 D 的指标公式可以由紧流形 $\widetilde{M}$ 上的算子 $\widetilde{D}$ 的指标公式得出．这个结果使我们可以揭示实现离散级数的表示的空间的非平凡性([13])．

也可以得出 Lie 群的齐性空间上的不变椭圆型算子同样类型的公式，即使 Γ 不是离散的，而解析指标有自然的推广([20])．

若考虑流形 M 上有局部紧群 G 的作用且 M/G 为紧，这时可以得到另一种推广([24])．

8)若 $\mathbf{R}^n$ 上的一致椭圆型算子 D 的系数构成一齐性的可测随机场，则也可引入解析指标 $i_a(D)$，它是由(7)式定义的随机变量(在遍历情况则为一实数)，而用 $\mathrm{Tr}P$ 代替 $\mathrm{Tr}_\Gamma P$．这里的 $\mathrm{Tr}P$ 是由算子的核 $P(x,y)$ 之迹对 x 平均而得：$\mathrm{Tr}P=M_x\{\mathrm{tr}\,P(x,x)\}$．此例是例 6)的推广，它也有一类似的指标公式([14])．

9)令 M 为具有叶状结构 $\mathscr{F}$ 的紧流形，而 D 为 M 上的一个纵向椭圆型微分算子(longitudinal elliptic differential operator)，即只含沿叶片的微分而在各叶片上均为椭圆型的．设 $\mathscr{F}$ 上有一横截的测度．这时可定

义 D 的实值解析指标且可证明一个 Atiyah-Singer 型定理．考虑可测的叶状结构，在这情况下可以推广例 8）的公式（[18],[19]）．

值在 K 群中的指标公式 10）若给出一族椭圆型算子而以紧空间 Y 中的点 y 为参数，则也已经定义了其解析指标 $i_a(D)\in K(Y)$（见 [15]）．拓扑指标 $i_t(D)$ 可以类比于公式(6)来构造（所有构造都沿着 Y 的“纤维方向”来进行），且指标定理成立．

11）如果考虑在紧流形上作用于一向量丛的截面上的椭圆型算子，而此向量丛的纤维是一固定 C^* 代数 $\mathscr{A}$ 上的有限生成的投射模，还可以得到一更一般的定理．这里，解析指标在群 $K^0(\mathscr{A})$ 中取值．若取 $\mathscr{A}$ 为 $C(Y)$，而 Y 为紧的，则得例 10）中的公式．也可以在这样的条件下考虑等价的情况（具有紧 Lie 群 G）（[26],[29]）．

$\mathscr{A}$ 为一个 II_1 因子的情况特别有趣（[28]），它蕴涵了例 7）的公式．

12）当解析指标在同调 K 群或双变的Каспаров K 群中取值时，Atiyah-Singer 公式有几个推广．取陈（省身）特征标并应用某种相交指标，就能过渡到通常的数值指标公式（[23],[25]）．例 9）中的纵向指标定理也可以这样推广（[21]）．

13）考虑两个在无穷远附近相合的广义 Dirac 算子 D_0 和 D_1（特别地，它们可以定义于两个在无穷远附近重合的 Riemann 流形 M_0，M_1 上，即对紧集 $K_j\subset M_j$ $(j=1,2)$，$M_0\backslash K_0$ 和 $M_1\backslash K_1$ 为等距的）．令 D_0 和 D_1 在无穷远附近为正，并有自然的分裂

$$D_j=\begin{pmatrix}0 & D_j^-\\ D_j^+ & 0\end{pmatrix},\quad j=0,1\ .$$

于是 $\operatorname{ind}D_1^+-\operatorname{ind}D_0^+$ 可以表为一个 Atiyah-Singer 型公式，它有重要的几何应用（[22]）．

新分析工具．Atiyah-Bott 公式（Atiyah-Bott formula）

$$\operatorname{ind}D=\operatorname{Tr}\exp(-tD^*D)-\operatorname{Tr}\exp(-tDD^*)$$

可给出指标的局部表示，这里要用到右方的迹当 $t\downarrow 0$ 时的渐近展开式．但此式中会包含 D 的符号中的低阶项，因此不易看出相应的积分如何相消．事实是，应用某些对称和超对称的论据即可得到相消．处理热核的迹，概率论方法也是有效的．也可以这样考虑椭圆型算子族（[30]－[42]）．

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., 《Успехи матем. наук》, 15 (1960), 3, 121 – 132.

[2] Atiyah, M.F. and Singer, I.M., The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 422 – 433.

[3] Atiyah, M.F. and Singer, I.M., The index of elliptic operators I, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 484 – 530.

[4] Atiyah, M.F. and Segal, G.B., The index of elliptic operators II, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 531 – 545.

[5] Atiyah, M.F. and Singel, I.M., The index of elliptic operators III, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 546 – 604.

[6] Atiyah, M.F. and Singer, I.M., The index of elliptic operators IV, *Ann. of Math.*, **93** (1971), 119 – 138.

[7] Федосов, Б. В., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **30** (1974), 159 – 241.

[8] Atiyah, M.F., Elliptic operators and compact groups, Springer, 1974.

[9] Palais, R., Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[10A] Atiyah, M.F., Bott, R. and Patodi, V.K., On the heat equations and the index theorem, *Invent. Math.*, **19** (1973), 279 – 330.

[10B] Atiyah, M.F., Bott, R. and Patodi, V.K., Errata to 'on the heat equations and the index theorem', *Invent. Math.*, **28** (1975), 277 – 280.

[11] Coburn, L., Moyer, R. and Singer, I.M., C^*-algebras of almost-periodic pseudo-differential operators, *Acta Math.*, **130** (1975), 3 – 4, 279 – 307.

[12] Atiyah, M.F., Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Astérisque, **32–33** (1976), 43 – 72.

[13] Atiyah, M.F. and Schmid, W., A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, *Invent. Math.*, **42** (1977), 1 – 62.

[14A] Федосов, Б.В., Шубин, М.А., 《Матем. Сборник》, **106** (1978), 1, 108 – 140.

[14B] Федосов, Б.В., Шубин, М.А., 《Матем. Сборник》, **106** (1979), 3, 455 – 483.

[15] Atiyah, M.F., K-theory: lectures, Benjamin, 1967.

[16] Boutet de Monvel, L., Boundary problems for pseudo-differential operators, *Acta. Math.*, **126** (1971), 1–2, 11 – 51.

[17A] Федосов, Б. В., 《Матем. Сборник》, **93** (1974), 1, 62 – 89.

[17B] Федосов, Б. В., 《Матем. Сборник》, **95** (1974), 4, 525 – 550.

[17C] Федосов, Б.В., 《Матем. Сборник》, **101** (1976), 3, 380 – 401.

[18] Connes, A., Sur la théorie non-commutative de l'intégration, in *Algébres d'opérateurs*, Lecture notes in math., Vol 725, Springer, 1979, 19 – 143.

[19] Connes, A., A survey of foliations and operator algebras, in *Operator algebras and applications*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 38, Amer. Math. Soc., 1982, 521 – 628.

[20] Connes, A. and Moscovici, H., The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups, *Ann. of Math.*, **115** (1982), 291 – 330.

[21] Connes, A. and Skandalis, G., The longitudinal index

theorem for foliations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, **20** (1984), 1139 - 1183.

[22] Gromov, M. and Lawson, H.B., Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, *Publ. Math. IHES*, **58** (1983), 83 - 196.

[23] Каспаров, Г.Г., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **39** (1975), 796 - 838.

[24] Каспаров, Г.Г. 《Докл. АН СССР》, **268** (1983), 533 - 537.

[25] Kasparov, G.G., Operator *K*-theory and its applications: elliptic operators, group representation, higher signatures, C^*-extensions, in *Proc. Internat. Congress Mathematicians, Warszawa*, 1983, PWN & Elsevier, 1984, 987 - 1000.

[26] Мищенко, А. С., Фоменко, А. Т., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **43** (1979), 831 - 851.

[27] Rempel, S. and Schulze, B.-W., Index theory of elliptic boundary problems, Akad. Verlag, 1982.

[28] Singer, I.M., Some remarks on operator theory and index theroy, in *K-theory and operator algebras*, Lecture notes in math., Vol. 757, Springer, 1977, 128 - 138.

[29] Тройцкий, Е.В., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **50** (1986), 849 - 965.

[30] Alvarez-Gaumé, L., Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem, *Commun. Math. Phys.*, **90** (1983), 161 - 173.

[31] Quillen, D., Superconnections and the Chern character, *Topology*, **24** (1985), 85 - 95.

[32] Berline, N. and Vergne, M., A computation of the equivariant index of the Dirac operator, *Bull. Soc. Math. France*, **113** (1985), 305 - 345.

[33] Berline, N. and Vergne, M., A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators, *Topology*, **26** (1987), 435 - 464.

[34] Bismut, J.-M., The Atiyah-Singer theorem: A probabilistic approach I. The index theorem, *J. Funct. Anal.*, **57** (1984), 56 - 98.

[35] Bismut, J.-M., Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families, *Commun. Math. Phys.*, **103** (1986), 127 - 166.

[36] Bismut, J.-M., The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, *Invent. Math.*, **83** (1986), 91 - 151.

[37] Donnelly, H., Local index theorem for families, *Michigan Math. J.*, **35** (1988), 11 - 20.

[38] Getzler, E., Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem, *Commun. Math. Phys.*, **92** (1983), 163 - 178.

[39] Getzler, E., A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem, *Topology*, **25** (1988), 111 - 117.

[40] Gilkey, P., Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer theorem, Publish or Perish, 1984.

[41] Léandre, R., Sur le théorème d'Atiyah-Singer, *Probab. Theory Related Fields*, **80** (1988), 119 - 137.

[42] Léandre, R., Sur le théorèm de l'indice des familles, in Sém. Probab. Strasbourg XII, Lecture notes in math. Vol. 1321, Springer, 1988, 348 - 413.

М.И. Войцеховский, М.А. Шубин 撰

【补注】 近年来给出了 Atiyah-Singer 指标定理的几个新证明.

E. Witten 在[A5]中提出超对称量子论可以为指标定理的简单证明提供一个框架. L. Avarez-Gaumé ([30])和后来的 Friedan-Windey([A4])实现了这一证明. 这些理论物理学家依赖路径积分(包括 Fermi 子路径积分)中的形式演算. 所以他们的证明肯定不够严格. E. Getzler([38])找到了这个论证的严格形式, 它依赖于**伪微分算子**(pseudo-differential operator)理论和超流形理论. 更近一些, Getzler([39])又找到了一个证明, 其几何和代数部分都是初等而明显的. J.-M. Bismut([34])与此独立地用概率论方法找到一个有关的证明.

进一步的材料亦见[A2]XIX章, [A1]12章和[A3]9章.

参考文献

[A1] Cycon, H.L., Froese, R.G., Kirsch, W. and Simon, B., Schrödinger Operators, Springer, 1987.

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, III, Pseudo-differential operators, Springer, 1985.

[A3] Kaku, M., Introduction to superstrings, Springer, 1988.

[A4] Friedan, D. and Windey, P., Supersymmetric derivation of the Atiyah-Singer index theorem and the chiral anomaly, *Nucl. Phys.*, B253 (1984), 395 - 416.

[A5] Witten, E., Supersymmetry and Morse theory, *J. Diff. Geom.*, **17** (1982), 661 - 692.

齐民友 译

算子的指标[index of an operator; индекс оператора], 亦称算子的指数

线性算子 $A: L_0 \to L_1$ 的**亏子空间**(deficiency subspace)维数之差, 如果 A 的核和余核都是有限维子空间, 则它就是核 $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0)$ 和余核 $\operatorname{Coker} A = L_1/A(L_0)$ 的维数之差. 算子的指标是一同伦不变量, 它刻画了方程 $Ax = b$ 的可解性.

【补注】 上面定义的指标也称为 A 的解析指标(analytic index), 见**指标公式**(index formulas).

指标可适当定义而且是同伦不变量的一个重要情况是, 作用在紧流形上的向量丛之截面上的椭圆型偏微分算子.

也可以定义另一些算子的指标, 例如 Banach 空间之间的线性 Fredholm 算子, 椭圆型边值问题和"几乎"伪微分算子(pseudo-differential operator)(亦见

[A1]).

参考文献

[A1] Hörmander, L. V., The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985. 齐民友 译

切线标线 [indicatrix of tangents; касательных индикатриса], Euclid 空间中的曲线 Γ 的

球面 $S^{n-1} \subset E^n$ 上的曲线 Γ^*，它在参数值 τ 时的位置向量平行于 Γ 在 τ 时的切向量．为了使球面曲线 L 为 E^n 中某闭曲线的切线标线，其充要条件是 L 不局限在某个开半球面内（Крейн 定理（Kreĭn theorem））．

参考文献

[1] Выгодский, М. Я., Дифференциальная геометрия, М.-Л., 1949. М. И. Войцеховский 撰

【补注】 切线标线也称为球面切线象（spherical tangent image）．也见**球面标线**（spherical indicatrix）． 沈一兵 译

个体常元 [individual constant 或 object constant; индивидная константа]

形式语言（formal language）的一种符号，用以表示用这个语言描述的结构中的特定的固定元素（个体）．每一个个体常元可以视为一个 0 元函数常元．例如，域论的语言包含两个个体常元 0 和 1，而射影几何的语言根本不包含个体常元． С. К. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bell, J. L. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977. 卢景波 译

个体遍历定理 [individual ergodic theorem; индивидуальная эргодическая теорема]

指 **Birkhoff 遍历定理**（Birkhoff ergodic theorem）及其推广．

个体变元 [individual variable; индивидная переменная]，对象变元（object variable）

形式语言（formal language）中的一种符号，用来表示由这种语言所描述的结构中的任意一个元素．每一种形式语言中都含有一类或几类个体变元，每一类个体变元都有无穷多个．例如，向量空间理论的语言中有两类个体变元，一类表示向量，一类表示标量，而算术理论的语言中只有一类变元， 表示非负整数．

С. К. Соболев 撰

【补注】 参见**个体常量**（individual constant）．沈复兴 译

不可分量法 [indivisibles, method of; неделимых метод]

目的在于确定图形的面积或体积之间的关系的各种不同方法的通称；此名称始于 16 世纪末．不可分量法的基本想法是对于要求出其面积或体积之间关系的图形，比较以某种方式构成此图形的"不可分"元素（或不可分元素组）．至于"不可分"的实际含意，不同时代的不同学者各有不同的解释方法．

不可分量法可追溯到古典时代．看来希腊科学家 Democritus（±460 – ±380 B. C.）已把固体看成很多很多非常小的"不可分"原子之"和"．Archimedes（287 – 212 B. C.）把他的杠杆理论与平面图形由无数平行直线段构成、空间图形由无数平行平面片构成的想法结合起来，求出了许多图形的面积和体积．然而这种想法和做法在当时就受到激烈非难．例如，Archimedes 就认为有必要在**穷竭法**（exhausion, method of）基础上对运用不可分量法所得到的结果给出第二个证明．在 16、17 世纪之交，由于 J. Kepler，特别是由于 B. Cavalieri，不可分量法的观念在数学研究中得以复兴；而不可分量法也常常同 B. Cavalieri 的姓氏联系在一起．Cavalieri 的不可分量法后来有很大改变，并成为创立积分学的一个阶段．见**无穷小演算**（infinitesimal calculus）． БСЭ-3

【补注】 一般地说，Archimedes 喜欢先用力学方法得到某个关系，再发现有必要对这个关系提供一个证明．

参考文献

[A1] Edwards, C. H., The historical development of the calculus, Springer, 1979（中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987）．

[A2] Waerden, B. L. van der, Science awakening, Oxford Univ. Press, 1961, p. 138. 沈永欢 译

诱导纤维丛 [induced fibre bundle; индуцированное расслоение]，诱导纤维化（induced fibration）

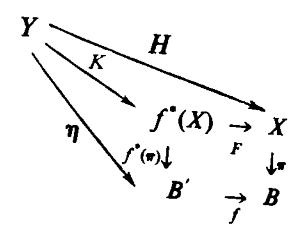
是由映射 $f: B' \to B$ 和纤维化 $\pi: X \to B$ 导出的纤维化 $f^*(\pi): X' \to B'$，这里 X' 是直积 $B' \times X$ 中的子空间，它由适合条件 $f(b') = \pi(x)$ 的偶 (b', x) 组成，而 $f^*(\pi)$ 是由对应 $(b', x) \to b'$ 所决定的映射．从诱导纤维丛到原纤维丛的如下映射 F: $f^*(X) \to X$, $F(b', x) = x$ 是覆盖 f 的丛态射．对每个点 $b' \in B$，限制映射

$$F_{b'}: (f^*(\pi))^{-1}(b') \to \pi^{-1}(f(b'))$$

为同胚．此外，对任意的纤维化 $\eta: Y \to B'$ 和覆盖 f 的态射 $H: \eta \to \pi$，恰有一 B' 态射 $K: \eta \to f^*(\pi)$ 使 $FK = H$, $f^*(\pi)K = \eta$．因此下图可换（见下页）．

由同构的纤维化导出的纤维丛是同构的．由常值映射导出的纤维丛与平凡纤维丛同构．

对纤维化 π 的任一截面 s，由 $\sigma(b') = (b', sf(b'))$ 所定义的映射 $\sigma: B' \to f^*(X)$ 是诱导纤维化 $f^*(\pi)$ 的截面，并满足关系 $F\sigma = sf$．例如，映射 π:



$X \to B$ 导出的纤维化 π^2(它是以 $\pi^*(X)$ 为全空间，X 为底空间的纤维化 π 的平方)，具有正则截面 $s(x)=(x, x)$.

参考文献

[1] Godbillon, C., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

[2] Steenrod. N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[3] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

М. И. Войцеховский 撰 沈信耀 译 黄华乐 校

诱导表示 [**induced representation**; **индуцированное представление**]

局部紧群 G 的由闭子群 H 的表示 ρ 所诱导出的表示 π(见**群的表示**(representation of a group)). 更确切地说，给定 H 的表示 ρ 的表示空间 V. 记 E 为 G 上取值于 V 的适合条件：$f(hg)=\rho(h)f(g)$，对所有 $g\in G$, $h\in H$ 的函数构成的空间，则 E 为 G 的表示 π 的表示空间，它定义为 $[\pi(g_1)f](g)=f(gg_1)$，对所有 $f\in E$, g, $g_1\in G$ 成立. 诱导表示 π 通常记成 $\mathrm{Ind}\,\rho$, $\mathrm{Ind}_H^G\rho$, U^ρ, ${}_HU^\rho$ 或 ${}_HU_G^\rho$. 构造诱导表示的运算是从较简单的群的表示出发来构作较复杂的群的表示的最简单且最重要的步骤，而且对广泛的一类群能用诱导表示或它们的推广来给出不可约表示的完全描述.

若 G 是有限群，则表示 ρ 也假定为有限维的，而空间 E 是 G 的在 V 中取值的所有函数 f 的空间，而这些函数 f 满足条件 $f(hg)=\rho(h)f(g)$. 当 ρ 是单位元子群 $\{e\}$ 的恒等表示时，${}_{\{e\}}U_G^\rho$ 是 G 的右**正则表示**(regular representation)；表示 ${}_GU_G^\rho$ 等价于 ρ. 表示 ${}_HU_G^\rho$ 等价于下述表示 σ：它的表示空间 W 是由齐性空间 $X=G/H$ 的取值于 V 的全体函数 f 组成，σ 则定义为 $[\sigma(g)f](x)=a(g, x)f(xg)$，而函数 a 叙述如下：设 s: $X\to G$ 是满足条件 $s(x)\in x$，对所有 $x\in X$ 的映射，则 $a(g, x)=\rho(h)$，这里 $s(x)g=hs(xg)$，对所有 $x\in X$, $g\in G$. 函数 a 是群 G 的一维上链，其系数是在 X 上的取值为 V 中可逆算子的函数的群中. 设 ρ_1 与 ρ_2 等价，则 $\mathrm{Ind}\,\rho_1$ 与 $\mathrm{Ind}\,\rho_2$ 等价；表示 $\mathrm{Ind}(\rho\oplus\sigma)$ 等价于 $\mathrm{Ind}\,\rho\oplus\mathrm{Ind}\,\sigma$. 设 K, H 是 G 的子群，$K\subset H$ 且 ρ 是 K 的表示，则由 H 的表示 ${}_KU_H^\rho$ 所诱导出的 G 的表示等价于 ${}_KU_G^\rho$(诱导表示的合成(composition of induced representations)定理). 设 π, ρ 分别是群 G 和子群 H 的表示，则交结算子(intertwining operator)的空间 $\mathrm{Hom}(\pi, {}_HU_G^\rho)$ 和 $\mathrm{Hom}(\pi|_H, \rho)$ 同构，其中 $\pi|_H$ 是 π 在 H 上的限制(Frobenius 互反定理(Frobenius reciprocity theorem)). 特别地，设 π, ρ 皆不可约，则 π 在 U^ρ 中出现的重数与 ρ 在 $\pi|_H$ 中出现的重数相同. 群 G 的诱导表示 $\pi=U^\rho$ 的特征标 χ_π 由下列公式确定：

$$\chi_\pi(g)=\sum_{\{\delta:\,\delta\}\in H\delta\}}\chi_\rho(\delta g\delta^{-1}),$$

其中 χ_ρ 是由 H 的表示 ρ 的特征标扩充为整个群 G 的函数，它在 H 外的元素上取值为零，而 δ 取遍 H 在 G 中右陪集的代表集. 设 H, K 是 G 的子群，ρ 是 H 的表示，令 $G_g=K\cap g^{-1}Hg$，对所有 $g\in G$，且令 π^g 是由 G_g 的表示 ρ^g 所诱导的 K 的表示，其中 ρ^g 由公式 $\rho^g(x)=\rho(gxg^{-1})$ $(x\in G)$ 所决定. 于是 π^g 由 g 所在的双陪集 HgK 唯一决定，而诱导表示 ${}_HU_K^\rho$ 限制到 K 上等价于表示 π^g 的直和，其中求和是取遍所有双陪集 HgK $(g\in G)$ 的代表集(诱导表示到子群上的限制定理). 特别地该定理可应用于诱导表示张量积的分解. 给定诱导表示的交结算子空间有清楚的表述. 群 G 的表示 π 等价于对某 H 和 ρ 的 ${}_HU_G^\rho$ 类型的诱导表示当且仅当存在从 $H\backslash G$ 的子集的集合到表示 π 的空间 E 的投影的集合的映射 P 使得 1) $P(\phi)=0$, $P(H\backslash G)=1$; 2) 若 M, $N\subset H\backslash G$ 及 $M\cap N=\phi$，则 $P(M\cup N)=P(M)+P(N)$; 3) $P(M\cap N)=P(M)P(N)$，对所有 M, $N\subset H\backslash G$ 成立；以及 4) $P(Mg)=\pi^{-1}(g)P(M)\pi(g)$，对所有 $M\subset H\backslash G$, $g\in G$ 成立(这样的映射 P 称为表示 π 对基 $H\backslash G$ 的非本原性系(system of imprimitivity)). 有限群的诱导表示能直接用群代数的模的语言来表述也能由范畴的语言来确定. 有限群称为单项(monomial)群，如果它的每个不可约表示都可由某子群的一维表示所诱导. 单项群是**可解群**(solvable group)；**幂零群**(nilpotent group)是单项群.

局部紧群的诱导表示的定义主要取决于空间 E 的选择；例如，人们常取 G 上满足条件 $f(gh)=\rho(h)f(g)$ 的所有连续函数的空间或(若 G 是 Lie 群) G 上满足同样条件的可微函数的空间作为 E. 另一方面，令 ρ 是闭子群 $H\subset G$ 在 Hilbert 空间 V 上的连续**酉表示**(unitary representation)，又设 s 是局部紧空间 $X=H\backslash G$ 到 G 中的对所有 $x\in X$ 满足条件 $s(x)\in x$ 的可测映射；令 Δ_G 和 Δ_H 分别是群 G 和 H 的模(见 **Haar 测度**(Haar measure))，又令 ν_s 是 X

上的 G 拟不变测度且满足

$$\frac{d\nu_s(xg)}{d\nu_s(x)} = \Delta_H(h^{x,g})\Delta_G^{-1}(h^{x,g}),$$

其中 $s(x)g = h^{x,g}s(xg)$，对所有 $x \in X$，$g \in G$；现设 $L_2(G, H, \rho)$ 是 G 上取值于 V 的可测向量函数 F 的 Hilbert 空间，且所有函数 F 要使条件

$$F(hg) = \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right]^{1/2} \rho(h)F(g)$$

对所有 $h \in H$ 和 $g \in G$ 成立，并使得积分

$$\int_X \| F(s(x)) \|_V^2 d\nu_s(x)$$

收敛；则 G 在 $L_2(G, H, \rho)$ 上的连续酉表示 π 由下列公式确定，对所有 $g, g_1 \in G$ 及 $F \in L_2(G, H, \rho)$

$$[\pi(g_1)F](g) = F(gg_1).$$

表示 π 称为局部紧群 G 的酉诱导表示（unitary induced representation）. 有限群的诱导表示的多数结果可推广到局部紧群的酉诱导表示的情形. 在这些结果中有：表示 $\operatorname{Ind}(\rho_1 \oplus \rho_2)$ 和 $\operatorname{Ind}(\rho_1 \otimes \rho_2)$ 的性质；诱导表示与 G 的上闭链的联系；诱导表示合成的定理；诱导表示限制到子群的定理；诱导表示的特征标的公式；表示的可诱导性判别法；单项群的性质；以及 Frobenius 互反性定理. 这些结果或多或少可直接推广到酉诱导表示的情形. 局部紧群 G 的诱导表示与该群的某种推广的群代数有关. 若 G 是 Lie 群，则 G 的诱导表示的概念可以有各种推广，包括全纯诱导表示的推广，它的表示空间 E 是 G 上对某些变量解析的函数的空间，也包括 G 的齐性空间上向量丛上同调中的表示（零上同调中的表示正是诱导表示）. 诱导表示的概念及其推广在表示论中的作用是富有成效的. 特别地，群扩张的表示可用酉诱导表示来描述；连通实半单 Lie 群 G 的连续酉表示的基本序列是由诱导表示，也即由 G 的 Borel 子群诱导的 G 的有限维酉表示构成的；线性实半单 Lie 群表示的离散序列可在该群的齐性空间上某个向量丛上同调中实现；类型 I 的可解连通 Lie 群的不可约连续酉表示可用全纯诱导表示来描述（[7]）. 构作诱导表示的运算可推广到局部紧群的非酉表示的情形，同样可推广到非局部紧致的拓扑群. 对 C^* 代数的诱导表示的类似也已被研究（[6]）.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, М., 1972（英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976）.

[2] Наймарк, М. А., Теории представлений групп, М., 1976（英译本：Naĭmark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982）.

[3] Serre, J. P., Linear representations of finite groups, Springer, 1977（中译本：J. P. 塞尔，有限群的线性表示，科学出版社，1984）.

[4] Mackey, G. W., Infinite-dimensional group representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 628 – 686.

[5] Schmid, W., L^2 cohomology and the discrete series, *Ann. of Math.*, **103** (1976), 375 – 394.

[6] Rieffel, M., Induced representations of C^* algebras, *Adv. in Math.*, **13** (1974), 2, 176 – 257.

[7] Auslander, L. and Konstant, B., Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, *Invent. Math.*, **14** (1971) 4, 255 – 354.

[8] Вершик, А. М., Гельфанд, И. М., Граев, М. И., 《Успехи матем. наук》, **30** (1975), 6, 3 – 50.

[9] Менский, М. Б., Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц, М., 1976.

А. И. Штерн 撰

【补注】“诱导表示的合成定理”也称“逐次诱导定理”（theorem on induction by stages）.

石生明 译　许以超 校

归纳公理 [induction axiom; индукции аксиома]

定义于所有非负整数的集合上的某些谓词 $P(x)$ 对所有 x 皆真的断言，如果下列两个条件成立：1) $P(0)$ 为真；并且 2) 对任意 x，$P(x)$ 的真值蕴涵 $P(x+1)$ 的真值. 归纳公理形式地记作

$$P(0) \& \forall x(P(x) \supset P(x+1)) \supset \forall x P(x).$$

在归纳公理的应用中，$P(x)$ 称为归纳谓词（induction predicate），或归纳命题（induction proposition），并且 x 称为归纳变元（induction variable），归纳参数（induction parameter）或称为对其施行归纳的变数（当 $P(x)$ 包含不同于 x 的参数时）. 这里归纳条件 1) 的证明称为归纳法基础（induction basis），而条件 2) 的证明称为归纳步骤（induction step）. 2) 中 $P(x)$ 为真的假设（由此导出 $P(x+1)$ 真）称为归纳假设（induction hypothesis）. 数学中（数学）归纳法原理（principle of (mathematical) induction）是对所有可能的谓词 $P(x)$ 的所有归纳公理的格式. 在**形式算术**（arithmetic, formal）FA 中归纳格式仅仅由那些其对应的谓词可以在 FA 中表示的归纳公理构成（这些谓词形成一个可数集）. 正是这种情况，即归纳法在 FA 中不能完满地表示，导致了 FA 的不完全性（见 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem））.

有时人们用下面的公理代替归纳公理：设 $P(x)$ 是非负整数的某种性质；如果对任一 x，由假设对所有比 x 小的 y，$P(y)$ 都真，能得到 $P(x)$ 真，那么对所有 x，$P(x)$ 都真. 换句话说，

$$\forall x((\forall y < x)P(y) \supset P(x)) \supset \forall x P(x).$$

这个公理称为完全的(complete)或递归的(recursive)归纳公理. 完全归纳法原理等价于通常的归纳法原理. 亦见**超限归纳法**(transfinite induction).

参考文献

[1] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.

С. К. Соболев 撰 卢景波 译

归纳定义 [**inductive definition** 或 definition by induction; **индуктивное определение**]

依赖于非负整数参数 n 的某个对象或概念 $A(n)$ 的定义, 它遵循如下的模式: a) $A(0)$ 的值是已知的; b) 给出一个由 n 和 $A(n)$ 的值得出 $A(n+1)$ 的值的规则. 一种典型的归纳定义是函数 $n!$ 的定义: a) $0!=1$; b) $(n+1)!=n!(n+1)$. 更一般的归纳定义是依赖于一个(超限)**序数**(ordinal number) α 的对象 $A(\alpha)$ 的用**超限归纳法**(transfinite induction)的定义. 这种定义是通过给出某种规则来实现的, 这种规则能够从已知的 $A(\beta)(\beta<\alpha)$ 的值得到 $A(\alpha)$ 的值. 例如, 两个序数 γ 和 α 的和 $\gamma+\alpha$ 这样定义:

$$\gamma+0=\gamma,\ 对于\ \alpha>0,\ \gamma+\alpha=\sup_{\beta<\alpha}(\gamma+\beta+1).$$

归纳定义的另一种推广是所谓的广义归纳定义(generalized inductive definition). 用广义归纳定义可以定义某些对象的类. 这是遵循下列模式来进行的: 1) 要定义的类中的某些(初始)对象是给定的; 2) 给出能从已知的已在这个类中的对象得到类中的其他对象的某些规则; 3) 由规则 1) 和 2) 得到的对象恰好是所求类中的对象(后一个规则通常被认为是不言而喻的, 因此往往被省略). 广义归纳定义的例子是给定的公理系统 S 的定理这一概念的定义: S 的每一条公理都是定理; 如果 S 的某个**推理法则**(derivation rule)的前提是定理, 那么这个推理法则的结论也是定理.

为了证明由某个广义归纳定义定义出的类的所有对象, 例如, 公理系统 S 的每一条定理, 具有某种性质 P, 只要证明如下的事实: S 的每一条公理有性质 P; 如果推理法则的前提具有性质 P, 那么推理法则的结论也有性质 P. 这类证明被称为按照相应概念(在上述例子中就是定理)的定义或按照相应对象的构造(这要由上下文来定)的归纳证明(proof by induction).

参考文献

[1] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.
[2] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

С. К. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Moschovakis, Y. N., Elementary introduction on abstract structures, North-Holland, 1974.

朱建平 译

归纳维数 [**inductive dimension**; **индуктивная размерность**], 大归纳维数(large inductive dimension) $\mathrm{Ind}\,X$, 小归纳维数(small inductive dimension) $\mathrm{ind}\,X$.

拓扑空间 X 的**维数不变量**(dimension invariant); 这两个不变量都用两集合之间分拆的概念来定义. 用归纳法定义如下: 对空空间 $X=\emptyset$, 令 $\mathrm{Ind}\,\emptyset=\mathrm{ind}\,\emptyset=-1$. 设对所有空间 X, $\mathrm{Ind}\,X<n$ 为已知, 其中 n 为一非负整数, 若对 X 的任意两个不相交闭子集 A 和 B, 存在 A 和 B 之间的一个分拆 C 满足 $\mathrm{Ind}\,C<n$, 则取 $\mathrm{Ind}\,X<n+1$. 这里闭集 C 称为 X 中集合 A 和 B 之间的一个**分划**(partition), 如果开集 $X\setminus C$ 是分别包含 A 和 B 的两个不相交开集 H_A 与 H_B 之和. 取集合 A 和 B 之一为单点集, 另一个为不含此点的任意闭集, 则上述定义转化为小归纳维数 $\mathrm{ind}\,X$ 的定义. L. E. J. Brouwer ([1]) 对相当宽的(度量)空间类定义了大归纳维数. П. С. Урысон ([2]) 和 K. Menger ([3]) 各自独立地定义了小归纳维数. 仅在空间 X 满足足够强的分离公理, 主要是正规性公理(见**分离公理**(separation axiom))的假定下, 归纳维数及更一般的维数不变量的研究才有意义.

参考文献

[1] Brouwer, L. E. J., Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.*, **142** (1913), 146 – 152.
[2] Urysohn, P. S., Les multiplicités cantoriennes, *C. R. Acad. Sci.*, **175** (1922), 440 – 442.
[3] Menger, K., Ueber die Dimensionalität von Punktmengen. I, *Monatshefte Math. und Phys.*, **33** (1923), 148 – 160.
[4] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности, М, 1973.

В. И. Зайцев 撰

【补注】 此学科领域的广泛讨论见 [A1]. 可分度量空间维数论的简要介绍见 [A2] 的第 4 章.

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978.
[A2] Mill, J. van, Infinite-dimensional topology, Horth-Holland, 1988.

白苏华、胡师度 译

归纳极限 [**inductive limit**; **индуктивный предел**]

一种构造, 它首先出现于集合论中, 其后又广泛地用于代数、拓扑, 以及数学的其他领域. 归纳极限的一个重要的特殊情况是相同类型的数学结构的有向族的归纳极限. 设 C 为一个有向的前序集, 即, 在 C 上定义了一个自反的与传递的关系 $\prec$, 且对任两个元素 $\alpha,\beta\in C$, 存在一个元素 $\gamma\in C$ 使 $\alpha\prec\gamma$ 与 $\beta\prec\gamma$. 再假定对每一个 $\alpha\in C$ 都有一个结构 A_α 与之相联系(为明确计, 设 A_α 都是群), 并且对每一个 $\alpha\prec\beta$, 都给定了同态 $\varphi_{\alpha\beta}: A_\alpha\to A_\beta$ 满足以下的两个条件: 对任何 $\in C$, $\varphi_{\alpha\alpha}=1_{A_\alpha}$; 且对 C 中任何 $\alpha\prec\beta\prec\gamma$ 有

$\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}=\varphi_{\alpha\gamma}$. 在集合 $\overline{A}=\bigcup_{\alpha\in C}A_\alpha$ 上引进一个等价关系 ～：元素 $x\in A_\alpha$ 等价于 $y\in A_\beta$，如果有某一个 γ 使 $x\varphi_{\alpha\gamma}=y\varphi_{\beta\gamma}$. 于是商集 $A=\overline{A}/\sim$ 就可赋以一个群结构：如果 $x\in A_\alpha$，$y\in A_\beta$，且 $\alpha\prec\gamma$，$\beta\prec\gamma$，则由 x 与 y 所代表的等价类的积就定义为由 $(x\varphi_{\alpha\gamma})(y\varphi_{\beta\gamma})$ 所代表的等价类. 所得到的群 A 称为群族 A_α 的归纳极限 (inductive limit of the family of groups). 对每一个 $\alpha\in C$，存在一个自然同态 $\varphi_\alpha:A_\alpha\to A$，它将一个元素 $x\in A_\alpha$ 对应其等价类. 群 A 连同其同态 φ_α 有下列的性质：对任何系列的同态 $\psi_\alpha:A_\alpha\to B$，$\alpha\in C$，只要 $\alpha\prec\beta$ 时有 $\psi_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}\psi_\beta$，就必存在唯一的同态 $\psi:A\to B$ 使对任何 $\alpha\in C$ 恒有 $\psi_\alpha=\varphi_\alpha\psi$.

上述归纳极限构造的一个推广是函子的归纳极限 (inductive limit)（正极限 (direct limit) 或上极限 (colimit)）. 一个范畴 $\mathfrak{K}$ 的一个对象 A 称为共变函子 $F:\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ 的归纳极限 (inductive limit of the covariant functor)，如果：

1) 存在态射 $\varphi_D:F(D)\to A$，这里 $D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$，使对 $\mathfrak{D}$ 中任何态射 $\alpha:D\to D_1$ 有 $F(\alpha)\varphi_{D_1}=\varphi_D$；

2) 对于任何一族态射 $\psi_D:F(D)\to B$，这里 $D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$，若对 $\mathfrak{D}$ 中任何 $\alpha:D\to D_1$ 恒有 $F(\alpha)\psi_{D_1}=\psi_D$，则必存在唯一的一个态射 $\gamma:A\to B$ 使 $\psi_D=\varphi_D\gamma$，$D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$.

归纳极限表以 $(A,\varphi_D)=\lim_{\to}F$ 或 $A=\lim_{\to}F$，或 $A=\lim_{\to}F(D)$. 反变函子 $F:\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ 的归纳极限定义为从对偶范畴 $\mathfrak{D}^*$ 到范畴 $\mathfrak{K}$ 的共变函子 F^* 的归纳极限.

每一个前序集 C 都可看成为一个范畴. 其对象就是 C 的元素，而其态射则是所有的对象偶 (α,β)，其中 $\alpha,\beta\in C$ 且 $\alpha\prec\beta$，合成的规律是当然的. 在一个任意的范畴 $\mathfrak{K}$ 中，一族对象 A_α，$\alpha\in C$，与态射 $\varphi_{\alpha\beta}:A_\alpha\to A_\beta$，其中 $\alpha\prec\beta$，可看成为一个函子 $F:C\to\mathfrak{K}$ 的象，如果 $\varphi_{\alpha\alpha}=1$ 且当 $\alpha\prec\beta\prec\gamma$ 时 $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}=\varphi_{\alpha\gamma}$. 如果 $\mathfrak{K}$ 是集合的范畴（群，拓扑空间的范畴，等等），则函子 $F:C\to\mathfrak{K}$ 的归纳极限与上面所定义的归纳极限的构成重合.

如果 $\mathfrak{D}$ 是一个小的离散范畴，则从 $\mathfrak{D}$ 到任意的一个范畴 $\mathfrak{K}$ 的任何函子 F 的归纳极限都是诸对象 $F(D)$ 的一个余积，这里 $D\in\mathfrak{D}$. 特别，如果 $\mathfrak{D}$ 是空的，则归纳极限是 $\mathfrak{K}$ 的一个左零或一个始对象. 任何范畴 $\mathfrak{K}$ 的态射偶的余核都是定义于有两个对象 X 与 Y，与四个态射 $1_X,1_Y$，与 $\alpha,\beta:X\to Y$ 的范畴上的函子的归纳极限.

从任意的一个小范畴 $\mathfrak{D}$ 到一个范畴 $\mathfrak{K}$ 的每一个共变函子 F 都有归纳极限，当且仅当 $\mathfrak{K}$ 的每一对态射都有余积与余核.

参考文献

[1] Александров, П. С., Топологические теореты двойственности, ч. 1, М., 1955 (Тр. матет. ин-та АН СССР, т. 48).

[2] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[3] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974. М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在上面的正文中，$x\varphi_{\alpha\gamma}$ 的意思是 $\varphi_{\alpha\gamma}(x)$；它是同态 $\varphi_{\alpha\gamma}$ 在元素 x 处所取的值.

类似地，同态的合成是倒过来写的；$\varphi_{\alpha\beta}\psi_\beta$ 的意思是先作 $\varphi_{\alpha\beta}$ 再作 ψ_β.

在英文中，"归纳极限"这个词通常仅限于有向前序集上的极限，而更广义的范畴概念则称为上极限 (colimit). "态射偶的余核"通常都称为余等化子 (coequalizers).

与归纳极限的概念相对偶的是**投射极限** (projective limit) 的概念，也称为反极限.

参考文献

[A1] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971. 周伯埙 译

无效统计量 [**inefficient statistic**; **неэффективная статистика**]，无效估计量 (inefficient estimator)

方差大于有效估计量之方差的**统计估计量** (statistical estimator). 换句话说，对于无效估计量，至少对于被估计参数的一个值，**Rao-Cramér 不等式** (Rao-Cramer inequality) 中不能达到等式. 无效估计量之无效性的数值度量，是称做其效率 (efficiency) 的一个数 e，它等于有效估计量之方差与无效估计量之方差的比值. 效率 e 非负且不大于 1. 数值 $1/e$ 表示，使用无效估计量时需要将观测次数增大到使用有效估计量时的多少倍，才能认为使用两种估计量的结果是等价的. 例如，由 n 个独立正态 $N(\theta,\sigma^2)$ 分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 构造的经验分布函数的中位数 μ_n，有参数为 θ 和 $\sigma^2\pi/(2n)$ 的渐近正态分布，并且是估计数学期望 θ 的无效**顺序统计量** (order statistic). 在这种情形下，估计量 $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_n)/n$ 是有效统计量，它服从正态分布律 $N(\theta,\sigma^2/n)$. 统计量 μ_n 的效率 e 等于

$$e=\frac{\mathrm{D}(\overline{X})}{\mathrm{D}(\mu_n)}=\frac{2}{\pi}.$$

从而，为使对未知数学期望的估计有同样精度，使用统计量 μ_n 所必须的观测次数平均是使用统计量 $\overline{X}$ 时的 $\pi/2\approx1.57$ 倍.

参考文献

[1] Cramer, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1983.

М. С. Никулин 撰

【补注】亦有估计量的可达到的最小方差大于 Cramér-Rao 界的情形 [A1].

参考文献

[A1] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965, 283(中译本: C.R. 劳, 线性统计推断及其应用, 科学出版社, 1985).

周概容 译

不等式 [inequality; неравенство]

用符号 <(小于), ≤(小于或等于), >(大于), ≥(大于或等于), ≠(不等于)之一联结两个实数 a_1, a_2 的一个关系式, 即

$$a_1 < a_2,\ a_1 \leqslant a_2,\ a_1 > a_2,\ a_1 \geqslant a_2,\ a_1 \neq a_2.$$

有时把几个不等式连写在一起, 例如

$$a < b < c.$$

不等式有许多性质与等式相同. 例如, 如果在不等式两边加上(或减去)同一个数, 则此不等式仍然成立. 同样, 不等式两边可乘以同一个正数. 然而, 如果两边同乘一个负数, 则不等式应改变其符号(即以 < 代替 >, 以 > 代替 <). 由 $A < B$ 和 $C < D$ 可得 $A + C < B + D$, $A - D < B - C$, 即同号不等式 ($A < B$ 和 $C < D$) 可逐项相加, 反号不等式 ($A < B$ 和 $D > C$) 可逐项相减. 如果 A, B, C, D 是正的, 则 $A < B$ 和 $C < D$ 蕴涵 $AC < BD$, $A/D > B/C$, 即同号(正数)不等式可逐项相乘, 反号(正数)不等式可逐项相除.

含有可取不同数值的量的不等式可对某些值成立而对另一些值不成立. 例如, 不等式 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 对 $x = 4$ 成立而对 $x = 2$ 不成立. 对于这类不等式就有求解问题, 即求出为使所给不等式成立变量变动的界限. 例如, 通过把 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 写为 $(x-1)\cdot(x-3) > 0$ 的形式, 可见它对所有满足 $x < 1$ 或 $x > 3$ 的 x 成立, 因而 $x < 1$ 或 $x > 3$ 就是所给不等式的解.

下面给出其变量在某些变动范围内时恒成立的一些不等式.

1) 绝对值不等式. 对任何实数或复数 $a_1, \cdots, a_n$,

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

2) 平均值不等式. 有一些联系**调和平均值** (harmonic mean)、**几何平均值** (geometric mean)、**算术平均值** (arithmetic mean) 和**二次平均值** (quadratic mean) 的著名不等式:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$$

$$\leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

这里所有数 $a_1, \cdots, a_n$ 都必须是正的.

3) 关于和的不等式及其积分推广. 这类不等式有, 例如, **Буняковский 不等式** (Bunyakovskiĭ inequality), **Hölder 不等式** (Hölder inequality), **Hilbert 不等式** (Hilbert inequality), **Cauchy 不等式** (Cauchy inequality).

4) 关于数的幂的不等式. 最著名的是 **Minkowski 不等式** (Minkowski inequality) 及其对级数和积分的推广.

5) 关于某些序列类或函数类的不等式. 例如关于单调序列的 **Чебышев 不等式** (Chebyshev inequality) 和关于凸函数的 **Jensen 不等式** (Jensen inequality).

6) 关于行列式的不等式. 例如 Hadamard 不等式 (Hadamard inequality), 见关于行列式的 **Hadamard 定理** (Hadamard theorem).

7) 线性不等式. 考虑形如

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i,\ i = 1, \cdots, n$$

的不等式组. 这个不等式组的解集是 n 维空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中的某个**凸多面体** (convex polyhedron); **线性不等式** (linear inequality) 理论的任务就在于研究这一凸多面体的性质.

不等式在数学各个分支中都有重大价值. 数论中 **Diophantus 逼近** (Diophantine approximations) 整个分支完全建基于不等式之上; 解析数论中也常涉及不等式运算(例如, 见 **Виноградов 估计** (Vinogradov estimates)). 在几何学中, 不等式出现于凸体理论和等周问题中(见**等周不等式** (isoperimetric inequality); **经典等周不等式** (isoperimetric inequality, classical)). 概率论中许多定律通过不等式陈述(例如, 见**概率论中的 Чебышев 不等式** (Chebyshev inequality in probability theory) 及其推广 —— **Колмогоров 不等式** (Kolmogorov inequality)). 微分方程论中用到所谓**微分不等式** (differential inequality). 函数论和逼近论中用到关于多项式和三角多项式的导数的各种不等式(例如, 见 **Бернштейн 不等式** (Bernstein inequality), **Jackson 不等式** (Jackson inequality)); 关于与可微函数类的嵌入相联系的不等式, 见 **Колмогоров 不等式** (Kolmogorov inequality); **嵌入定理** (imbedding theorems). 在泛函分析中, 当定义函数空间中的**范数** (norm) 时, 要求范数满足三角不等式 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. 许多经典不等式本质上确定了这个或那个空间中线性泛函或线性算子范数的值或给出其近似值(例如, 见 **Bessel 不等式** (Bessel inequality); **Min-

kowski 不等式(Minkowski inequality)). 计算数学中用不等式估计一个问题近似解的误差.

参考文献

[1] Hardy, G. H., Littlewood. J. E., Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934(中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚, 不等式, 科学出版社, 1965).

[2] Beckenbach, E. F., Bellman, R., Inequalities, Springer, 1961. БСЭ-3

【补注】 关于绝对值的一个著名不等式是三角不等式(triangle inequality): 对于 $a, b \in \mathbf{C}$,

$$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

1)中所述不等式是其推广.

Буняковский 不等式的更通行的名称是 Cauchy(Cauchy-Schwarz)不等式.

参考文献

[A1] Bottema, O., Djordjević, R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M., Geometric inequalities, Noordhoff, 1969.

[A2] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M., Means and their inequalities, Kluwer, 1988.

沈永欢 译

惯性素数[**inertial prime number** 或 inert prime number; **инертное простое число**]

在扩张 $K/\mathbf{Q}$ 中的惯性素数——一个素数 p, 由 p 生成的主理想在 $K/\mathbf{Q}$ 中仍是素元, 其中 K 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的有限扩张; 换句话说, 理想 (p) 在 B 中仍是素的, 这里 B 是 K 的整数环. 此时亦称 p 在扩张 $K/\mathbf{Q}$ 中是惯性的(inert). 类似地, 称 Dedekind 环 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 在扩张 K/k 中是惯性的(inert), 若理想 $\mathfrak{p}B$ 是素的, 这里 k 是 A 的分式域, K 是 k 的有限扩张, B 是 A 在 K 中的整闭包.

设 K/k 为 Galois 扩张, 以 G 为其 Galois 群, 则对环 $B \subset K$ 的任一理想 $\mathfrak{P}$, 定义了理想 $\mathfrak{P}$ 的分解群 $G_{\mathfrak{P}}$ 的一个子群 $T_{\mathfrak{P}}$, 称为惯性群(inertia group)(见**分歧素理想**(ramified prime ideal)). 扩张 $K^{T_{\mathfrak{P}}}/K^{G_{\mathfrak{P}}}$ 是使理想 $\mathfrak{P} \cap K^{G_{\mathfrak{P}}}$ 为惯性的 K/k 的最大中间扩张.

在任一代数数域的循环扩张中一定存在无限个惯性素理想.

参考文献

[1] Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.

[2] Weyl, H., Algebraic theory of numbers, Princeton Univ. Press, 1959.

[3] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 设 K/k 是以 G 为 Galois 群的 Galois 扩张, 设 $\mathfrak{P}$ 是 K(整数环 A_K)的素理想. $\mathfrak{P}$ 的分解群(decomposition group)定义为 $G_{\mathfrak{P}}=\{\sigma \in G: \mathfrak{P}^{\sigma}=\mathfrak{P}\}$. 子群 $I_{\mathfrak{P}}=\{\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$: 对所有 $a \in B$ 有 $a^{\sigma} \equiv a \bmod \mathfrak{P}\}$ 是 $\mathfrak{P}$ 在 k 上的惯性群. 它是 $G_{\mathfrak{P}}$ 的正规子群. $G_{\mathfrak{P}}$ 和 $I_{\mathfrak{P}}$ 依 Galois 理论所对应的 K 的子域分别称为 $\mathfrak{P}$ 的分解域(decomposition field)和惯性域(inertia field).

裴定一 译 赵春来 校

惯性系 [**inertial system**; **инерциальная система отсчета**], 惯性标架(inertial frame)

使 Newton 第一定律成立的经典力学和狭义相对论中的参考坐标系. 惯性系的概念是一种抽象, 但是在相当广泛的自然现象中(其中无强引力场描述)存在非常接近于惯性系的坐标系. 在从整体上讲惯性系不存在的情况下(譬如, 在广义相对论中), 在每一点上可以建立这样的坐标系, 使其在此点的小邻域内近似地是惯性的. 在广义相对论的情况下, 这样的坐标系称为局部 Galilio 坐标系. 局部 Galilio 坐标系的存在意味着在该点的切空间逼近弯曲时空.

任何一个相对于惯性系做直线、匀速运动的坐标系是一个惯性坐标系. 在经典力学中不同的惯性系由非齐次 **Galilio 变换**(Galilean transformation)群的变换相联系; 在狭义相对论中则由 Poincaré 群的变换相联系(见 **Lorentz 变换**(Lorentz transformation)). 经典力学定律和狭义相对论定律分别相对于非齐次 Galilio 变换群和 Poincaré 群是不变的(见**相对性原理**(relativity principle)). 只在惯性系中成立的多种守恒定律(能量、动量、角动量守恒)是相对性原理的推论. 在狭义相对论中惯性系通常由 **Galilio 坐标系**(Galiean coordinate system)给出, 而在经典力学中则由 Descartes 坐标系给出.

参考文献

[1] Фок, В. А., Теория пространства, времени и тяготния, 2 изд., М., 1971(英译本: Fock, V. A., The theory of space, time and gravitation, Macmillan, 1964).

[2] Møller, C., The theory of relativity, Clarendon Press, 1972.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weinberg, S., Gravitation and cosmology, Wiley, 1972, Chapt. 3.

[A2] Lawden, D. F., An introduction to calculus and relativity, Methuen, 1962.

[A3] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978(译自俄文).

沈 青 译

非本质映射[**inessential mapping**; **несущественное отображение**], 同伦平凡映射(homotopically-trivial mapping)

一个连续映射 $f:X\to Q^n$，把拓扑空间 X 映入 n 维球体 Q^n，使得存在一个连续映射 $g:X\to Q^n$，在 Q^n 的边界 S^{n-1} 的逆像 $f^{-1}S^{n-1}$ 上，g 与 f 一致并且把 X 映入 S^{n-1} 中（即是 $gX\subseteq S^{n-1}$）．对于一个正规 Hausdorff 空间 X 而言，$\dim X<n$ 的充要条件是：任何连续映射 $f:X\to Q^n$，$n=1,2,\cdots$，都是非本质映射（Александров 定理（Alexandrov theorem））．

把拓扑空间映入 n 维球面中的连续映射．如果同伦于常值映射，也称为非本质映射．

Б. А. Пасынков 撰

【补注】 术语"同伦平凡映射"在涉及 $f:X\to Q^n$ 时不使用．见[A1]，[A2]和[A3]．

通常，同伦于常值映射的映射就称为零伦的（nul-homotopic）或同伦平凡的（homotopically trivial）；在[A3]中称为非本质的．亦见**本质映射**（essential mapping）．

参考文献

[A1] Alexandrov, P. S. and Hopf, H., Topologie, 1, Springer, 1974.

[A2] Engelking, R., Dimension theory, PWN, 1977.

[A3] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.

胡师度、白苏华 译

无限小数展开式[infinite decimal expansion; бесконечная десятичная дробь]

把一个数写成十进小数形式，其中不存在最后一位数字．例如，$1/11=0.090909\cdots$，$7/4=1.75000\cdots$ 或 $7/4=1.74999\cdots$，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，等等．如果这个数是有理数，则无限小数是循环的（recurrent）：它从某一位数字起，是由无限循环的一位数字或一组数字组成的，这一位数字或这一组数字称为一个周期．在上述各例中，对于 $1/11$，周期是 09；对于 $7/4$，周期是 0 或 9．如果这个数是无理数，则无限小数不是循环的（例如 $\sqrt{2}$）．

В. И. Битюцков 撰

【补注】 如果 q 不能被 2 或 5 整除，则有理数 p/q 的小数展开的周期长度是可被 q 整除的那些 10^n-1 中的最小正整数 n．因此，这个周期长度可以整除 **Euler 函数**（Euler function）$\varphi(q)$．

张鸿林 译

无限维表示[infinite-dimensional representation; бесконечномерное представление]，Lie 群的

Lie 群（Lie group）在无限维向量空间中的表示（见**拓扑群的表示**（representation of a topological group））．Lie 群表示论是拓扑群表示一般理论的组成部分．Lie 群的特点使得在该理论中能运用解析工具（特别地，运用无穷小方法）并能显著扩大"自然"的**群代数**（group algebra）的类（对于卷积的函数代数），它的研究把该理论与抽象调和分析，也即与拓扑代数的一般理论的组成部分联系起来（见**抽象调和分析**（harmonic analysis, abstract）；**拓扑代数**（topological algebra））．

设 G 是 Lie 群．一般意义下，G 的表示（representation）是任何同态 $G\to\mathrm{GL}(E)$，其中 $\mathrm{GL}(E)$ 是向量空间 E 上所有可逆线性变换的群．若 E 是拓扑向量空间，通常所考虑的同态取值于 E 的全部连续线性变换的代数 $C(E)$ 或取值于 E 的全部弱连续变换的代数 $S(E)$．代数 $C(E)$ 和 $S(E)$ 具有标准的拓扑之一（例如弱或强拓扑）．表示 φ 称为连续的（continuous）（可分连续的（separately continuous）），如果向量函数 $\varphi(g)\xi$ 在 $G\times E$ 上连续（可分连续）．若 E 是拟完全的**桶型空间**（barrelled space），则任何可分连续的表示是连续表示．连续表示称为可微的（differentiable）（解析的（analytic）），如果算子函数 $\varphi(g)$ 在 G 上是可微的（解析的）．表示 φ 的维数（dimension of a representation）是 E 的维数．群 G 的表示的最重要的例子是它的**正则表示**（regular representation）$\varphi(g)f(x)=f(xg)$，对所有 $x,g\in G$，它可以在 G 上某个函数类上定义．若 G 是 Lie 群，它的正则表示在 $C(G)$ 上及在 $L_p(G)$ 上连续（这里 $L_p(G)$ 是对于 G 上 **Haar 测度**（Haar measure）而定义的）而且在 $C^\infty(G)$ 上可微（对于 $C^\infty(G)$ 上的标准拓扑：紧收敛的拓扑）．群 G 的每个连续的**有限维表示**（finite-dimesional representation）是解析的．若 G 是复 Lie 群，自然，同样要考虑复解析（全纯）表示．通常，在 Lie 群表示论中仅考虑连续表示，且连续性条件是不明显规定的．若群 G 是紧群，它的所有不可约（连续）表示是有限维的．类似地，若 G 是复半单 Lie 群，则它的全部不可约全纯表示是有限维的．

与群代数表示的关系．Lie 群的最重要的群代数是代数 $L_1(G)$；代数 $C^*(G)$，这是 $L_1(G)$ 在最小正则范数下的完全化（见**函数代数**（algebra of functions））；$C_0^\infty(G)$——G 上具有紧支集的所有无限可微函数的代数；$M(G)$——G 上具有紧支集的所有复 Radon 测度的代数；$D(G)$——G 上具有紧支集的所有广义函数（Schwarz 分布）的代数；对复 Lie 群还有：G 上所有解析泛函的代数 $A(G)$．线性空间 $M(G)$，$D(G)$，$A(G)$ 分别对偶于 $C(G)$，$C^\infty(G)$，$H(G)$，其中 $H(G)$ 是 G（具有紧收敛拓扑）上所有全纯函数的集合．所有这些代数有自然的拓扑．特别地，$L_1(G)$ 是 **Banach 代数**（Banach algebra）．设 A 是上述群代数之一，则两个元素 $a,b\in A$ 的积（卷积）由下面等式确定：

$$ab(g)=\int a(gh^{-1})b(h)dh,$$

上式中 dh 是 G 的右不变测度，这运算可自然地推广

到广义函数类．积分公式

$$\varphi(a)=\int a(g)\varphi(g)dg,\ a\in A,$$

在群 G 的表示和代数 A 的表示之间建立了自然的联系（若积分是正确定义的）：若积分是弱收敛的，且对每个 $a\in A$ 定义了算子 $\varphi(a)\in S(E)$，则映射 $a\to\varphi(a)$ 是同胚映射．于是说群 G 的表示 $\varphi(g)$ 被延拓到代数 A 的表示，或说它是 A 表示（A-representation）．反之，代数 A 的所有弱连续非退化表示可按上面公式由 G 的某个表示（对 $A=M(G)$ 是弱连续的，对 $A=D(G)$ 是弱可微的，对 $A=A(G)$ 是弱解析的）决定．该对应保持了表示间所有自然的关系，例如拓扑不可约性或等价性．若 G 是么模群，它的**酉表示**（unitary representation）（Hilbert 空间中的）对应到代数 $L_1(G)$ 的关于它的对合的对称表示（见**群代数**（group algebra）；**对合表示**（involution representation））．设 E 是序列完全的局部凸 Hausdorff 空间，则群 G 在 E 中的任何连续表示皆为 $M(G)$ 表示．进而设 G 的表示是可微的，则它是 $D(G)$ 表示．特别地，设 E 是自反的，或拟完全的桶空间，则任何可分连续表示 $\varphi(G)$ 是 $M(G)$ 表示，且对所有 $a\in M(G)$, $\varphi(a)\in C(E)$.

无穷小方法．设表示 $\varphi(g)$ 可微，通常设为无限次可微，且空间 E 有 $\mathfrak{g}$ 模结构，其中 $\mathfrak{g}$ 是群 G 的 **Lie 代数**（Lie algebra），而 Lie 无穷小算子（Lie infinitesimal operator）如下确定：

$$\varphi(a)=\frac{d}{dt}\varphi(e^{ta})_{t=0},\ a\in\mathfrak{g}.$$

算子 $\varphi(a)$ 形成代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，称为 $\varphi(g)$ 的微分表示（differential representation）．向量 $\xi\in E$ 称为可微的（differentiable）（对于 $\varphi(g)$），如果向量函数 $\varphi(g)\xi$ 在 G 上是可微的．向量 $\xi\in E$ 称为解析的（analytic），如果 $\varphi(g)\xi$ 在单位元 $e\in G$的一个邻域中是解析函数．若 $\varphi(g)$ 是 C_0^∞ 表示，则所有无限次可微的向量的空间 $V(E)$ 在 E 中处处稠密．特别地，对 Banach 空间中的所有连续表示这是正确的；进而，此时（[4]）解析向量的空间 $W(E)$ 在 E 中处处稠密．即使 $\varphi(g)$ 在 E 上是拓扑不可约，$\varphi(g)$ 的微分表示在 $V(E)$ 上也许可约．G 的两个等价表示对应于 $V(E)$ $(W(E))$ 上等价的微分表示；一般说，其逆不真．对 Hilbert 空间 E, H 中酉表示，从 $W(E)$, $W(H)$ 上微分表示的等价性推出它们也等价（[7]）．在有限维情形，连通 Lie 群的表示唯一地由它的微分表示得出．代数 $\mathfrak{g}$ 的表示称为可积的（integrable）（G 可积的（G-integrable）），若它与群 G 的微分表示在某个子空间上一致，而且该子空间在表示空间中处处稠密．目前（1997）仅在个别情况知道可积性判别准则（[4]）．若 G 是单连通的，代数 $\mathfrak{g}$ 的所有有限维表示是 G 可积的．

不可约表示．表示论的重要任务之一是对给定群 G 的所有**不可约表示**（irreducible representation），在不可约性和等价性的适当定义下，在等价意义下加以分类．于是下列两个问题受到关注：1）群 G 的不可约酉表示的所有酉等价类的集合 $\hat{G}$ 的描述；2）群 G 的全不可约表示（totally-irreducible representation, completely-irreducible representation）的所有 Fell 等价类（[7]）的集合 $\widetilde{G}$ 的描述．对于具有有限中心的半单 Lie 群，Fell 等价与 Наймарк 等价一致（[7]），且自然嵌入 $\hat{G}\to\widetilde{G}$ 成立．集合 $\hat{G}$, $\widetilde{G}$ 具有自然的拓扑，且它们的拓扑不一定是 Hausdroff 的（[5]）．若 G 是紧 Lie 群，则 $\widetilde{G}=\hat{G}$ 是离散空间．这种情形下，集合 $\hat{G}$ 的描述归功于 E. Cartan 和 H. Weyl．此时群 G 的矩阵元的线性包 $\gamma(G)$（也即表示 $\varphi\in\hat{G}$ 的矩阵元的线性包）形成 $C_0^\infty(G)$（球函数的代数）的子代数，它是在 $C(G)$ 及 $C^\infty(G)$ 中处处稠密的．矩阵元形成 $C^\infty(G)$ 的基．若所有表示 $\varphi\in\hat{G}$ 的矩阵是在同一组基定义的，且在该基下它们全是酉矩阵，则对应的矩阵元形成 $L_2(G)$ 中的正交基（Peter-Weyl 定理）．若一个群是非紧的，它的不可约表示通常是无限维的．构造这样的表示的方法类似于经典的矩阵群，这是由 И. М. Гельфанд 和 М. А. Наймарк 提出的（[1]），并已成为无限维酉表示理论的深入发展的出发点．G. W. Mackey 的诱导表示理论是这种理论的对任意 Lie 群的推广．20 世纪 50 年代开始发展的局部凸向量空间中非酉表示的一般理论在很大程度上基于拓扑向量空间和广义函数的理论．$\widetilde{G}(\hat{G})$ 的详细描述只对个别的 Lie 群类（复半单的，幂零的及某些可解的 Lie 群以及它们的半直积）已经知道（1988）．

设 G 是具有有限中心的半单 Lie 群，φ 是空间 E 中的 $M(G)$ 表示及 K 为 G 的紧子群．向量 $\xi\in E$ 称为 K 有限的（K-finite），如果它的循环包对于 K 是有限维的．全体 K 有限向量的子空间 V 在 E 中处处稠密且是子空间 $V^\lambda(\lambda\in\hat{K})$ 的直（代数）和，这儿 V^λ 是 V 中的 K 表示为 λ 的倍数的极大子空间．表示 φ 称为 K 有限的，若对所有 λ 有 $\dim V^\lambda<\infty$．子群 K 称为大的（massive 或 large）或丰富的（rich），如果 G 的每个完全不可约表示是 K 有限的．下列事实在表示论中至为重要：设 K 为 G 中极大紧子群，则 K 是大量的．设 V 的向量都是可微的，则 V 对于表示 φ 的微分 $d\varphi$ 是不变的．表示 φ 称为正规的（normal），如果它是 K 有限的且 V 的向量都是弱解析的．设 φ 是正规的，则在 G 模 φ 中的闭子模和 $\mathfrak{g}$ 模 $\varphi_0=d\varphi|_V$ 的子模，其中 $\mathfrak{g}$ 是群 G 的 Lie 代数，之间存在一一映射（由限制到 V 上来确定）

([7]). 于是正规表示的研究可用无穷小方法来代数化. 群 G 的正规表示的一例为它的主系列表示 $e(\alpha)$. 该表示对在一般位置上的点 α 是完全不可约的. 一般情况下 $e(\alpha)$ 能分解成某个有限的合成列, 且它的因子皆为完全不可约的. 群 G 在 Banach 空间中的任何拟-单不可约表示无穷小地等价于 $e(\alpha)$ 的因子之一, 对于给定的 α. 对 G 的在拟-完全局部凸空间中的完全不可约表示, 这也是对的. 设 G 为复的或实的, 代替考虑 $e(\alpha)$ 的因子, 只要考虑它的子表示就足够了([7]). 在 $G=\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ 这最简单的情况, 表示 $e(\alpha)$ 由具有整数差的复数偶 p, q 所确定, 且操作是在满足齐性条件 $f(\lambda x_1, \lambda x_2)=\lambda^{p-1}\bar{\lambda}^{q-1}f(x_1, x_2)$ 的全体函数 $f\in C^{\infty}(\mathbf{C}^2\setminus\{0\})$ 的空间中按右移公式 $\varphi(g)f(x)=f(xg)$, $x=(x_1, x_2)$, $g\in G$, 来进行. 若 p, q 是正整数, $e(\alpha)$ 包含有限维不可约子表示 $d(\alpha)$ (在 x_1, x_2 的多项式的类中), 它的因子是完全不可约的. 若 p, q 是负整数时, $e(\alpha)$ 具有对偶结构. 所有其他情况下, 模 $e(\alpha)$ 是完全不可约的. 这时 $\widetilde{G}$ 一一对应于某些数偶 (p, q) 的集合, 这里 $p-q$ 是整数, 且模去了关系 $(p, q)\sim(-p, -q)$. 子集 $\hat{G}$ 由基系列的表示 ($(p+q)$ 是纯虚数) (见**表示的系列** (series of representations)), 补系列的表示 ($0\leqslant p=q<1$) 以及平凡 (唯一的) 表示 δ_0 (它由 $p=q=1$ 产生) 共同组成. 设 G 是半单的连通复 Lie 群, B 是它的极大可解 (Borel) 子群, 令 M 是极大环面, $H=MA$ 是某 Cartan 子群, 又令 α 是群 H 的特征标 (延拓到 B), 则 $\widetilde{G}$ 与集合 A/W 一一对应, 其中 A 是所有特征标 α 的集合而 $W=W_1$ 是复代数 $\mathfrak{g}$ 的 **Weyl 群** (Weyl group) ([7]). 对于"一般位置"上的特征标, 表示 $e(\alpha)$ 是完全不可约的. 集合 $\widetilde{G}$ 的描述归结为某些双线性型的正定性的研究, 但最终的描述迄今 (1988) 仍未知. 对实 Lie 群, 特别关注在所谓**表示的离散系列** (discrete series of representations) ($L_2(G)$ 中的直和). 离散系列的所有不可约表示由它们的特征标来分类 ([3]).

对幂零连通 Lie 群 ([8]), 集合 $\hat{G}$ 等价于 $\mathfrak{g}'/G$, 这里 $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间, 而 G 在 $\mathfrak{g}'$ 上的作用共轭于 $\mathfrak{g}$ 上伴随表示 ([9]). 对应是用**轨道方法** (orbit method) 建立的 ([8]). 子代数 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ 称为元素 $f\in\mathfrak{g}'$ 的极化 (polarization), 如果 f 零化 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ 且

$$\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}-\frac{1}{2}\dim\Omega,$$

其中 Ω 是 f 对于 G 的轨道 (所有轨道是偶维的). 设 H 是 G 中的相应的解析子群而 $\alpha=e^f$ 是 H 的特征标, 则与 f 相应的表示 $u(\alpha)$ 是由 α 诱导的. 这时 $u(\alpha_1)$ 与 $u(\alpha_2)$ 等价当且仅当对应的泛函 f_1, f_2 位于同一轨道 Ω 中. 在 $\mathbf{C}^3$ 的固定基下的全体幂幺矩阵的群 $G=Z(3)$ 这简单情况下, $\mathbf{C}^3=\{(\lambda, \mu, \nu)\}$ 中一般位置的轨道是二维平面 $\lambda=$ 常数 $\neq 0$ 及平面 $\lambda=0$ 中的点 (μ, ν). 一般位置上的每个轨道对应于群 G 的不可约表示 $u(\alpha)$, 它由公式

$$u(\alpha, g)f(t)=\alpha(t, g)f(t, g), \quad -\infty<t<\infty,$$

决定, 表示空间是 Hilbert 空间 $E=L_2(\infty, -\infty)$. 该表示的无穷小算子与算子 d/dt, $i\lambda t$, $i\lambda I$ 一致, 其中 I 是 E 中恒等算子. 该结果等价于关于自伴算子 P, Q 的 Stone-von Neumann 定理, 其中 P, Q 具有换位子关系 $[P, Q]=i\lambda I$. 对每个点 (μ, ν) 对应 $Z(3)$ 的一个一维表示 (特征标). 集合 $\widetilde{G}$ 可用类似的方法描述, 而参数 λ, μ, ν 取值于复数区域. 轨道方法可自然地推广到可解连通 Lie 群, 甚至到任意 Lie 群; 一般情形下所考虑的轨道是 $\mathfrak{g}'_C$ 中的轨道 (这里 $\mathfrak{g}'_C$ 是 g' 的复化), 它们满足某些整数条件 ([8]). 一般情形的研究在某种程度上归结为上面考虑的两种情形, 这要藉助于诱导表示理论 ([5]), 对于具有正规子群 N 的半直积 $G=HN$, 用 N 和子群 H 的某些子群的不可约表示通过诱导可描述 G 的不可约酉表示 (由于 **Леви-Мальцев 定理** (Levi-Mal'tsev theorem)). 实践上, 该方法仅当根为交换时才有效. 研究 $\widetilde{G}$ (以 $\hat{G}$) 的另一种方法是描述 G 的不可约酉表示的特征标; 这种特征标的集合与 $\hat{G}$ 一一对应. 由 A. A. Кириллов 提出的特征标的一般公式 ([8]) 的正确性仅对少数特殊的 Lie 群类得到验证 (1988).

G 上函数的调和分析. 对紧 Lie 群, 调和分析归结为将函数 $f(x)$ $(x\in G)$ 展开为由群 G 的矩阵元构成的广义 Fourier 级数 ($L_2(G)$ 上 Peter-Weyl 定理及它在其他函数类上的类似). 对于非紧 Lie 群, 调和分析的基础是在 [1] 中引进的广义 Fourier 变换

$$F(\alpha)=\int f(x)e(\alpha, x)dx,$$

其中 $e(\alpha, x)$ 是初等表示 $e(\alpha)$ 的算子而 dx 是 G 上 Haar 测度, 以及在经典矩阵群 G 的情形引入 $L_2(G)$ 上的反演公式 (**Plancherel 公式** (Plancherel formula) 的类似). 该结果被推广到局部紧么模群 (抽象的 **Plancherel 定理** (Plancherel theorem)). Fourier 变换把群上函数的卷积反转为它们的 (算子) Fourier 象 $F(\alpha)$ 的乘法, 因此在群代数研究中是很重要的工具. 设 G 是半单 Lie 群, 则算子 $F(\alpha)$ 满足下列形式的结构关系

$$A_s(\alpha)F(\alpha)=F(s\alpha)A_s(\alpha),$$

$s\in W_i$, $i=1, 2$, 其中 $A_s(\alpha)$ 是交结算子, W_1 是对称空间 G/K 的 Weyl 群 (K 是 G 中极大紧子群),

而 W_2 是代数 $\mathfrak{g}_C$ 的 Weyl 群，这儿 $\mathfrak{g}_C$ 是群 G 的 Lie 代数的复化. 设函数 $f(x)$ 有紧支集，则算子函数 $F(\alpha)$ 是复参数 α 的整函数. 对群代数 $C_0^\infty(G)$，$D(G)$，这里 G 是半单连通复 Lie 群，已知道经典的 **Paley-Wiener 定理** (Paley-Wiener theorem) 的类似 ([7])；它们是这些代数在 Fourier 变换下的象的描述. 这些结果使我们能研究群代数的结构，它的理想和表示；特别地，它们被用于群 G 的不可约表示的分类. 对某些幂零 (亚交换) Lie 群和 Euclid 空间中的运动群也知道了与 Paley-Wiener 定理类似的结果.

谱分析问题. 对 Lie 群的酉表示已知道如何分解表示成不可约表示的直接积分的一般步骤 ([5]). 问题是在找出解析的方法来对特指的 Lie 群及其表示实现这种分解以及对这种分解建立唯一判别准则. 对幂零 Lie 群，将群 G 的不可约表示 φ 限制到其子群 G_0，已知道了分解的方法 (见**轨道方法** (orbit method)). 对非酉表示，这任务本身还必须更精确地陈述，因为在这样的表示类中缺乏完全可约性. 在几种情况中，不是考虑群 G 本身，而是它的群代数 A 中之一，**谱分析** (spectral analysis) 问题是作为代数 A 的双边理想的研究来处理的. 谱分析 (以及**谱综合** (spectral synthesis)) 问题也与群 G 及齐性空间 G/H 上 (这里 H 是子群) 的函数用群 G 的矩阵元的线性组合来逼近的问题紧密相连.

对数学物理的应用. Cartan 是首先注意到 Lie 群表示论与数学物理中特殊函数之间联系的人. 随之建立了主要的函数类与经典矩阵的表示紧密联系的结果 ([10]). 实际上，这种联系的存在性对特殊函数理论的基本问题: 完全性和正交性，微分和递推关系，加法定理等注入了新观点，且使得能够探测新的联系和新的函数类. 所有这些函数是经典群的矩阵元或其修正 (特征标，球函数). 按这些函数来展开的理论构成了齐性空间 G/H 上一般调和分析的组成部分. Lie 群理论在数学物理中特别在量子力学和量子场论中所起的基本作用是由于这些理论中的基本方程的对称性 (至少近似地) 群的出现. 这种对称性的经典例子包括 Einstein 的相对性原理 (对于 Lorentz 群)，Менделеев 的表与转动群表示的联系，同位旋理论及基本粒子的酉对称性等. 同理论物理的联系对 Lie 群表示的一般理论的发展有刺激作用.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М, Наймарк, М. А., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **36** (1950).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8 (译自法文).

[3] Borel, A., Représentations de groups localement compacts, Springer, 1972.

[4] Nelson, E., Analytic vectors, *Ann. of Math.*, **70** (1959), 572 – 615.

[5] Mackey, G. W., Infinite-dimensional group representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 628 – 686.

[6] Наймарк, М. А., Бесконечномерные представления групп и смежные вопросы, в кн.: Итоги науки. Сер. матем., [в. 2], М., 1964, 38 – 82.

[7] Желобенко, Д. П., Гармонический анализ функций на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974.

[8] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, М., 1972 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of theory of representations, Springer, 1976).

[9] Warner, G., Hamonic analysis on semi-simple Lie group, Ⅰ, Springer, 1972.

[10] Виленкин, Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965 (英译本: Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group representations, Amer. Math. Soc., 1968).

Д. П. Желобенко, М. А. Наймарк 撰

【补注】 可微与解析表示的概念通常是与强拓扑相联系 ([9]) 的.

代数 $D(G)$ (G 上具有紧支集的广义函数的代数) 在西方常记成 $E'(G)$. 记号 $D(G)$ 常作为 $C_0^\infty(G)$ 的同义词使用.

近来 (1986)，对某些 G 已经决定了 $\hat{G}$，如对 $G = \mathrm{SL}(n, K)$，这里 K 是实数域，复数域或四元数体 (D. A. Vogan)，对 G 是实秩为 2 的复单 Lie 群 (M. Duflo)，对 G 是分裂秩或半单的实 Lie 群 (Baldoni-Silva-Barbasch). 关于这方面现状的综述可参见 [A3], [A5].

对实的约化 Lie 群，也已知道 Paley-Wiener 定理的一个类似的结果 (参见 [A7], [A10]).

参考文献

[A1] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

[A2] Harish-Chandra, Collected papers, 1 – 4, Springer, 1984.

[A3] Vogan, D. A., Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.

[A4] Casselman, W. and Miličič, D., Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke. Math. J.*, **49** (1982), 869 – 930.

[A5] Knapp, A. W. and Speh, B., Status of classification of irreducible unitary representations, in F. Ricci and G. Weiss (eds.): Hamonic analysis, Lecture notes in math., Vol. 908, Springer, 1982, 1 – 38.

[A6] Duflo, M., Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie, in Hamonic analysis and group representations, C. I. M. E. & Liguousi, 1982.

[A7] Arthur, J., A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, *Acta. Math.*, **150** (1983), 1 – 89.

[A8] Rossman, W., Kirillov's character formula for reductive Lie groups, *Invention Math.*, **48** (1978), 207–220.

[A9] Duflo, M., Heckman, G. and Vergne, M., Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, *Mém. Soc. Math. France Nourelle Série*, **15** (1985), 65–128.

[A10] Delorme, P., Théoréme de type Paley-Wiener pour les groupes de Lie semi-simple réels avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan, *J. Funct. Anal.*, **47** (1982), 26–63.

石生明 译 许以超 校

无限维空间 [infinite-dimensional space; бесконечномерное пространство]

一个正规的 T_1 空间 X (见**正规空间** (normal space)), 使得对于任何 $n=-1, 0, 1, \cdots$ 都不满足不等式 $\dim X \leqslant n$, 即 $X \neq \phi$, 并且对任何 $n=0, 1, \cdots$ 存在 X 的有限开覆盖 ω_n, 使得加细 ω_n 的任何有限覆盖的重数都 $>n+1$. 无限维空间的例子有 **Hilbert 立方体** (Hilbert cube) I^∞ 和 **Тихонов 立方体** (Tikhonov cube) I^τ. 泛函分析中碰到的大多数空间也都是无限维空间.

正规的 T_1 空间 X 称为在大 (小) 归纳维数 (large (small) inductive dimension) 意义下的无限维空间, 如果不等式 $\mathrm{Ind} \leqslant n (\mathrm{ind} \leqslant n)$ 对任何 $n=-1, 0, 1, \cdots$ 都不成立. 若 X 是无限维空间, 它就是在大归纳维数意义下的无限维空间. 如果 X 还是紧空间, 它也就是在小归纳维数意义下的无限维空间. 一个度量空间是无限维空间, 等价于它在大归纳维数意义下是无限维空间. 存在一些有限维紧统, 在小 (因而在大) 归纳维数意义下是无限维空间. (截至目前) 还不知道是否存在一个紧统 (或一个度量空间), 在小归纳维数意义下是有限维空间, 而在大归纳维数意义下却是无限维空间.

研究无限维空间最自然的方法之一, 是引进小超限维数 $\mathrm{ind}\, X$ 和大超限维数 $\mathrm{Ind}\, X$. 这种方法在于把大小归纳维数的定义推广到无限序数上. 超限维数 $\mathrm{ind}\, X$ 和 $\mathrm{Ind}\, X$ 并非对所有无限维空间都有定义. 例如, 对 Hilbert 立方体而言, 两者均无定义. 大超限维数对空间 $\bigcup I^n$ 无定义, 但 $\mathrm{ind} \bigcup I^n = \omega_0$, 这里 $\bigcup I^n$ 是 n 维方体 $I^n (n=0, 1, \cdots)$ 的离散和.

若超限维数 $\mathrm{ind}\, X (\mathrm{Ind}\, X)$ 对正规空间 X 有定义, 那么这个维数等于一个序数, 其基数不超过 X 的权 wX (大权 WX). 特别是, 若 X 具有可数基, 则有 $\mathrm{ind}\, X \leqslant \omega_1$; 若 X 是紧空间, 也有 $\mathrm{Ind}\, X < \omega_1$. 对于度量空间, 也有 $\mathrm{Ind}\, X < \omega_1$. 若 $\alpha < \omega_1$, 则存在紧统 S_α 和 L_α, 使得 $\mathrm{Ind}\, S_\alpha = \alpha$, $\mathrm{ind}\, L_\alpha = \alpha$. 对任何序数 $\alpha < \omega_1$, 存在度量空间 X_α, 使得 $\mathrm{ind}\, X_\alpha = \alpha$.

如果超限维数 $\mathrm{Ind}\, X$ 有定义, 则超限维数 $\mathrm{ind}\, X$ 也有定义, 并且 $\mathrm{ind}\, X \leqslant \mathrm{Ind}\, X$. 已经构造出一些度量紧统, 使得超限维数 $\mathrm{Ind}\, X$ 有定义, 并且 $\omega_0 < \mathrm{ind}\, X < \mathrm{Ind}\, X$.

如果空间 X 的超限维数 $\mathrm{ind}\, X (\mathrm{Ind}\, X)$ 有定义, 那么超限维数 $\mathrm{ind}\, A (\mathrm{Ind}\, A)$ 对任何 (任何闭) 集合 $A \subseteq X$ 有定义, 并且不等式 $\mathrm{ind}\, A \leqslant \mathrm{ind}\, X (\mathrm{Ind}\, A \leqslant \mathrm{Ind}\, X)$ 成立.

对于正规空间 X 的极大紧化 βX, 等式 $\mathrm{Ind}\, \beta X = \mathrm{Ind}\, X$ 成立. 一个正规空间 X, 如果其权为 τ, 超限维数 $\mathrm{Ind}\, X \leqslant \alpha$, 则有一个紧化 bX, 其权也是 τ, 而维数 $\mathrm{Ind}\, bX \leqslant \alpha$. 存在一个具有可数基的空间 L, 其维数 $\mathrm{ind}\, L = \omega_0$, 使得具有可数基的任何紧化 bX, 其维数不满足 $\mathrm{ind}\, bX = \omega_0$. 一个可度量化空间 R, 如果有超限维数 $\mathrm{Ind}\, R = \alpha$, 则该空间有一度量, 使得它关于这个度量的完全化 CR 具有维数 $\mathrm{Ind}\, CR = \alpha$. 一个具有可数基的可度量化空间 R, 如果有超限维数 $\mathrm{ind}\, R = \alpha$, 则该空间有一度量, 使得它关于这个度量的完全化 CR 具有维数 $\mathrm{ind}\, CR = \alpha$.

大或小超限维数有定义的空间类与可数维度量空间类有紧密的联系. 如果一个完全度量空间是可数维空间, 则其小超限维数有定义; 若小超限维数对具有可数基的度量空间有定义, 则该空间是可数维空间; 如果大超限维数对一个度量空间有定义 (特别是, 如果是一个有限维空间), 则该空间是可数维空间; 大超限维数对可数维度量紧统有定义. 空间 $\bigcup I^n$ 是可数维空间, 并且是无限维空间. Hilbert 立方体不是可数维空间.

一个度量空间 R 是可数维空间等价于下列任何一个性质: a) 存在一个有限对一 (但一般并非对任何 $k=1, 2, \cdots$ 是 k 对一) 的连续闭映射, 把一个零维度量空间映成 R; b) 存在一个可数对一的连续闭映射, 把一个零维度量空间映成 R; c) R 是**可数零维空间** (countably zero-dimensional space).

有关把 n 维度量空间表为 $n+1$ 个零维子集之和或表为一个零维度量空间在 $(n+1)$ 对一的连续闭映射之下的象的定理表明, 考虑可数维 (度量) 空间类是自然的, 并且表明这类空间与有限维空间类相近. 正如有限维的情形一样, 在权 $\leqslant \tau$ 的可数维度量空间的类中, 存在一个可数维空间, 是同胚嵌入意义下的万有空间.

如果一个正规空间可表为其可数维子空间的有限和或可数和, 则该空间就是可数维空间. 可数维完满正规空间的子空间是可数维空间.

下述定理说明可数维与非可数维度量空间之间的关系: 若度量空间 R 与 S 之间的映射 $f: R \to S$ 是连续闭映射, 若 R 是可数维空间, 而 S 是不可数维空

间，则集 $\{y \in S: |f^{-1}y| \geq c\}$ 也是不可数维空间.

除了可数维空间外，弱可数维空间类也是有限维空间类的自然扩充．如果只考虑可度量化空间，则弱可数维空间介于有限维空间与可数维空间之间．存在可数维度量紧统，不是弱可数维空间，而 $\bigcup I^n$ 既是弱可数维空间、又是无限维空间．弱可数维空间的闭子空间是弱可数维空间．一个正规空间如果可表为其弱可数维闭子集的有限和或可数和，则是弱可数维空间．

在弱可数维正规空间类与弱可数维度量空间类中，存在（同胚嵌入意义下的）万有空间．就具可数基的空间而言，Hilbert 立方体的子空间 I^{ω} 是一个例子．这个子空间由只有有限多个坐标非零的点组成．空间 I^{ω} 没有弱可数维紧化．

上面考虑过的所有各类无限维空间，例如与 Hilbert 立方体相比较，都是"不很无限维的空间"．如何甄别"不很无限维的空间"与"很无限维的空间"的问题，是由 П. С. Александров 与 Ю. М. Смирнов 引进 A 弱与 S 弱无限维正规空间以及 A 强与 S 强无限维正规空间的概念而解决的．任何有限维空间都是 S 弱无限维空间，而任何 S 弱无限维空间也是 A 弱无限维空间．空间 $\bigcup I^n$ 是 A 弱无限维空间，但却是 S 强无限维空间．

就紧统而言，A 弱（强）与 S 弱（强）无限维的定义是等价的，因此 A 弱（强）无限维紧统简称为弱（强）无限维紧统（weakly (strongly) infinite-dimensional compacta）．Hilbert 立方体是强无限维紧统．也存在无限维紧统及弱无限维紧统．

A 弱（S 弱）无限维空间的闭子空间是 A 弱（S 弱）无限维空间．一个正规空间如果是其 S 弱无限维闭子集的有限和，它本身也就是 S 弱无限维空间．一个仿紧统如果是其 A 弱无限维闭子集的有限和或可数和，它本身也是 A 弱无限维空间．一个遗传正规空间如果是其 A 弱无限维子集的有限和或可数和，它本身也是 A 弱无限维空间．

弱可数维仿紧统是 A 弱无限维空间．遗传正规的可数维空间是 A 弱无限维空间．R. Pol[3] 构造了一个弱无限维但却不是可数维的度量紧统．

研究任意的 S 弱无限维可度量化空间归结为研究紧的情形，理由如下：度量化空间 R 是 S 弱无限维空间的必要和充分条件是，它可以表为一个弱无限维紧统与有限维开集 O_n, $n = 1, 2, \cdots$ 之和，使得对任何离散点列

$$x_i \in R,\ i = 1, 2, \cdots,$$

存在一个集合 O_n（依赖于该点列），含有自某个点开始的所有的点 x_i.

下述定理提供了另一个办法来研究无限维紧统，以代替研究任意的 S 弱无限维空间：S 弱无限维空间的极大紧化是弱无限维空间；权为 τ 的任何 S 弱无限维正规空间具有权为 τ 的弱无限维紧化．A 弱无限维空间 I^{ω} 的所有紧化都是强无限维空间．

一个紧统是强无限维空间的必要充分条件是，存在连续映射 $f: X \to I^{\infty}$，使得对任何集合

$$I^n = \{y = (y_i) \in I^{\infty}: y_i = 0,\ i > n\}$$

（它同胚于 n 维立方体），映射 f 在逆象 $f^{-1}I^n$ 上的限制是一个**本质映射**（essential mapping）．

存在一个无限维度量紧统，其任何非空子空间或为零维空间，或为无限维空间．此外，任何强无限维度量紧统都包含一个子紧统，其任何非空子空间或为零维空间、或为无限维空间．任何强无限维紧统均包含一个无限维 Cantor 流形．

所有可分 Banach 空间都是彼此同胚的 A 强无限维空间，并且同胚于可数多条直线之积．

参考文献

[1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности…, М., 1973.

[2] Engelking, R., Transfinite dimension. in G. M. Reed (ed.): Surveys in topology, Acad. Press, 1980, 131–161.

[3] Pol, R., A weakly infinite-dimensional compactum which is not countable dimensional, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **82** (1981), 634 – 636.

Б. А. Пасынков 撰

【补注】 一个空间如果可以表为可数多个有限维子集之并，则称为可数维空间．亦见**可数零维空间**（countable zero-dimensional space）．

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978.

[A2] Engelking, R. and Pol, E., Countable dimensional spaces: a survey, *Diss. Math.*, **216** (1983), 1–41.

[A3] Ljuksemburg, L. A., On compact metric spaces with non-coinciding transfinite dimensions, *Pac. J. Math.*, **93** (1981), 339 – 386.

[A4] Bessaga, C. and Pelczyński, A., Selected topics in infinite-dimensional topology, PWN, 1975.

胡师度、白苏华 译

无限对策 [infinite game; бесконечная игра]

一种有无限局中人策略集的**非合作对策**（non-cooperative game），特别是**二人零和对策**（two-person zero-sum game）．设

$$\Gamma = \langle X_1, \cdots, X_n, H_1, \cdots, H_n \rangle$$

为有 n 个参加者的无限对策．C. Berge ([1]) 指出，如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是局部凸的紧线性拓扑 Hausdorff 空间，支付函数 H_i 在 $\prod_{i=1}^n X_i$ 上连续，且对于 $x_i \in$

X_i 拟凹，$i = 1, \cdots, n$，那么对策 Γ 有平衡点（解）．还可指出（[2]），如果 X_i 是紧 Hausdorff 空间，H_i 在 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ 上连续，$i = 1, \cdots, n$，那么 Γ 在混合策略中有平衡点．然而，并非所有无限对策都有平衡点，即使是在混合策略中．例如，对于局中人策略集是整数集，支付函数有形式为

$$H(m, n) = \begin{cases} 1, & m > n, \\ 0, & m = n, \\ -1, & m < n, \end{cases}$$

的二人零和对策就不存在值．研究最充分的正规形式的无限对策类是无限二人零和对策，特别是**单位正方形上的对策**（game on the unit square）．

参考文献

[1] Berge, C., Théorie générale des jeux à n personnes, Gauthier-Villars, 1957.

[2] Gliksberg, I. L., A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 1, 170－174.

Е. Б. Яновская 撰 史树中 译

无限归纳法［**infinite induction; бесконечная индукция**］，Carnap 法则（Carnap rule），ω 法则（ω-rule）

具有无限多个前提的一个非初等**推导法则**（derivation rule）．更确切地说，在某逻辑数学语言中，设变数 x 在自然数上变化，并且设 $\varphi(x)$ 是该语言的一个公式．如果无限多个公式

$$\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(n), \cdots$$

中的每一个都可以推导出，那么无限归纳法则断言公式 $\forall x \varphi(x)$ 也可推导出．

在推导公式的过程中使用无限归纳法则常常使得一个推导的存在性问题成为不可判定的．包含 ω 法则的公理系统称为半形式理论（semi-formal theory）（或半形式公理系统（semi-formal axiomatic system））．半形式理论在**证明论**（proof theory）中起着重要作用．为了使得理论中的推演概念是能行的，必须附加另外的限制以保证诸前提可以被能行地推导出．例如，可以要求诸前提的推导以由某一一般递归函数所枚举（所谓构造性的无限归纳法则（infinite induction rule））．已经知道，附加了构造性无限归纳法则的**形式算术**（arithmetic, formal）关于经典真值是完全的．通过按步语义系统的方法，无限归纳法则在构作构造数学的语义中也找到了应用．

А. Г. Драгалин 撰

【补注】 ω 法则还有另一个名称是完全归纳法则（complete induction rule）．

参考文献

[A1] Barwise, J., Infinitary logics, in E. Agazzi (ed.): Modern logic —— a survey, Reidel, 1981, 93－112.

卢景波 译

无穷积［**infinite product; бесконечное произведение**］

形如

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k) \qquad (*)$$

的表达式，其中包含无穷多个因子（数或函数），每个因子都不为零．一个无穷积称为收敛的（convergent），如果部分积

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)$$

的序列当 $n \to \infty$ 时存在非零极限．这个无穷积的值（value）是极限

$$\lim_{n \to \infty} p_n = P,$$

记为

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k) = P.$$

一个无穷积是收敛的，当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k)$$

是收敛的．因此，无穷积收敛性的研究化为级数收敛性的研究．无穷积（$*$）称为绝对收敛的（absolutely convergent），如果无穷积

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + |u_k|)$$

是收敛的．无穷积（$*$）绝对收敛的必要和充分条件是级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

绝对收敛．一个无穷积具有重排性（即它的值与因子的次序无关），当且仅当它是绝对收敛的．

以在复 z 平面的一个区域 D 中定义的函数

$$1 + u_k = 1 + u_k(z)$$

作为因子的无穷级数（$*$）在 D 中是一致收敛的（uniformly convergent），如果部分积 $p_n(z)$ 的序列在 D 中一致收敛于非零极限．在实际应用中的一个非常重要的情况是某些因子在 D 中具有零点，使得在任何紧集 $K \subset D$ 中至多有有限个零点．收敛的概念可以推广如下：无穷积（$*$）称为在 D 内部（绝对，一致）收敛的，如果对于任何紧集 $K \subset D$，存在数 $N = N(K)$，使得对于 $k \geqslant N$，一切因子 $1 + u_k(z) \neq 0$，而部分积

$$\prod_{k=N}^{n}(1 + u_k(z))$$

的序列在 K 上（绝对，一致）收敛于非零极限．如果一切因子在 D 中都是解析的，并且无穷积在 D 内部一致收敛，则它的极限是 D 中的一个解析函数．

F. Viète (1593) 在研究化圆为方问题时首先遇到了无穷积．他把数 π 解析地表示为下列无穷积：

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\cdots.$$

数 π 的另一个表示式应归功于 J. Wallis (1665):

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots.$$

L. Euler (1742) 遇到了以函数作为因子的无穷积; 例如

$$\sin z=z\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right].$$

无穷积是表示明显指出其零点的解析函数的重要工具; 对于**整函数** (entire function), 它们类似于多项式的因式分解. 亦见 **Blaschke 积** (Blaschke product); 关于无穷积的 **Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem); **典范积** (canonical product).

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1, Mir, 1982).

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1 – 2, М., 1976.

[3] Бицадзе, А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦见关于整函数的 **Hadamard 定理** (Hadamard theorem).

参考文献

[A1] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1984 (中译本: J. B. 康威, 复变函数, 上海科学技术出版社, 1985).

[A2] Holland. A. S. B., Introduction to the theory of entire functions, Acad. Press, 1973.

张鸿林 译

无限连通区域 [**infinitely connected domain** 或 domain of infinite connectedness; **бесконечносвязная область**]

其**基本群** (fundamental group) 不是有限生成群的区域. 无限连通区域的概念通常用于扩充复平面上的区域, 这时, 上述定义等价于如下事实: 区域的边界由无穷多个边界连通分支组成. 无限连通区域的拓扑性质为 П.С. Урысон 所研究 ([1]). 无限连通区域上的解析函数和单叶函数的理论基础则主要由 P. Koebe ([2]) 和 H. Grötzsch ([3]) 奠定.

参考文献

[1] Урысон, П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.-Л., 1951.

[2A] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1909), 324 – 361.

[2B] Koebe, P., Zur konformen Abbildung unendlichvielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1918), 60 – 71.

[3A] Grötzsch, H., Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlichvielfach zusammenhängender Bereiche, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Naturwiss. Kl.*, **83** (1931), 185 – 200.

[3B] Grötzsch, H., Das Kreisbogenschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Naturwiss. Kl*, **83** (1931), 238 – 253.

[3C] Grötzsch, H., Ueber die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche III, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Naturwiss. Kl.*, **83** (1931), 283 – 297.

[3D] Grötzsch, H., Ueber Extremalprobleme bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Naturwiss Kl.*, **84** (1932), 3 – 14.

П. М. Тамразов 撰 白苏华、胡师度 译

无穷远元 [**infinitely-distant elements** 或 infinitely-remote elements; **бесконечно удаленные элементы**], 反常元 (improper elements), 理想元 (ideal elements)

将一仿射空间扩充为紧空间所产生的元素(点, 直线, 平面等). 无穷远元是"实在的" **无穷** (infinity) 在各种数学理论中所呈现的形式之一. 无穷远元只有在一"有限"空间的某一具体紧化的背景下考虑才是有意义的, 这一事实显示了有限和无限之间的连续联系. 由有限维 Euclid 空间最常用的紧化方法而得到的几种无穷远元可描述如下:

1) 如果引入无穷远元 (点 $-\infty$ 和 $+\infty$), 数轴 $\mathbf{R}$ 完全化为紧的扩充数轴 (extended number axis) $\overline{\mathbf{R}}$, 它同胚于一 (闭) 线段. 另一种紧化方法是将 $\mathbf{R}$ 嵌入于实射影直线 $P_1(\mathbf{R})$, 后者同胚于圆周 S^1 (见**射影空间** (projective space)); 这时 $\mathbf{R}$ 由一个唯一的无穷远点 (infinitely-distant point) ∞ 完全化.

2) 有限复平面 $\mathbf{C}$ 添加一个唯一的无穷远点 ∞ 后完全化为紧的扩充复平面 (extended complex plane) $\overline{\mathbf{C}}$, 它同胚于**复射影直线** (projective straight line) 或 Riemann 球面 S^2 (Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面).

3) n 维实数空间 $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 1)$ 添加一个唯一的无穷远点 ∞ 后完全化为紧的扩张数空间 $\overline{\mathbf{R}}^n$, 它同胚于球面 S^n, 此同胚可用**球极平面投影** (stereographic projection) 直观地说明. 另一种紧化方法是将 $\mathbf{R}^n$ 嵌入于 n 维实射影空间 $P_n(\mathbf{R})$. 如果 $n>1$, 则这两种紧化方法不同胚.

例如, 在射影平面 $P_2(\mathbf{R})$ 中平行直线对应于同一个无穷远点, 而不同的无穷远点对应于不平行的直

线．平面 $P_2(\mathbf{R})$ 的全体无穷远点构成无穷远直线(infinitely-distant straight line)．类似地，射影空间 $P_3(\mathbf{R})$ 中每一平面被一无穷远直线完全化．$P_3(\mathbf{R})$ 中所有的无穷远点和无穷远直线构成无穷远平面．一般地，$P_n(\mathbf{R})$ 中维数小于或者等于 $(n-2)$ 的无穷远元构成 $(n-1)$ 维无穷远超平面(infinitely-distant hyperplane)．

4) n 维复数空间 $\mathbf{C}^n(n \geqslant 1)$ 的一个紧化可由将 $\mathbf{C}^n$ 嵌入到复 n 维射影空间 $P_n(\mathbf{C})$ 而得到．同样，$P_n(\mathbf{C})$ 中维数小于或者等于 $(n-2)$ 的无穷远元构成 $(n-1)$ 维无穷远超平面．另一种紧化方法是将 $\mathbf{C}^n$ 扩充到扩充复空间(extended complex space) $\overline{\mathbf{C}}^n$，它是 n 个 $\overline{\mathbf{C}}$ 的拓扑积．当 $n>1$ 时，空间 $P_n(\mathbf{C})$ 和 $\overline{\mathbf{C}}^n$ 不同胚．$\overline{\mathbf{C}}^n$ 的无穷远点是其中至少有一个坐标分量 $z_v=\infty$ 的点 $z=(z_1, \cdots, z_n)$．空间 $\overline{\mathbf{C}}^n$ 的所有无穷远点自然地分成 n 个集合

$$M_v=\{z \in \overline{\mathbf{C}}^n : z_v=\infty,\ z_k \in \overline{\mathbf{C}},\ k \neq v\},$$

每个集合 M_v 的维数是 $n-1$．点 $(\infty, \cdots, \infty)$ 属于所有的 M_v，$v=1, \cdots, n$．对于 $\mathbf{C}^n$ 上的实函数，也可使用一点紧化(见 **Александров 紧化**(Aleksandrov compactification)) $\dot{\mathbf{C}}^n$，它同胚于 $\dot{\mathbf{R}}^{2n}$ 以及球面 S^{2n}．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Springer, 1988 (译自法文).

[2] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971.

[3] Hartshorne, R., Foundations of projective geometry, Benjamin, 1967.

[4] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962 (英译本: Fuks, B. A., Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965.

[5] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1－2, М., 1976.

Е. Д., Соломенцев 撰 杨路 曾振柄 译

无穷可分分布[infinitely-divisible distribution; безгранично делимое распределение]

对于任何 $n=2, 3, \cdots$，可以表为 n 个同一概率分布的合成(卷积)的概率分布．无穷可分分布的定义对直线与有穷维 Euclid 空间上的分布，以至某些其他更普遍的情形都同样适用．下面仅考虑一维情形．

无穷可分分布的特征函数 $f(t)$ 称为无穷可分的(infinitely-divisible)．对于任何 n，这个函数可以表为另一特征函数的 n 次幂:

$$f(t)=(f_n(t))^n.$$

无穷可分分布的例子包括**正态分布**(normal distribution)，**Poisson 分布**(Poisson distribution)，**Cauchy 分布**(Cauchy distribution)，与 **χ^2 分布**('chi-squared' distribution)．无穷可分性这一性质最容易用特征函数来检验．无穷可分分布的合成以及无穷可分分布的弱收敛序列的极限，仍然是无穷可分的．

定义在某个概率空间上的随机变量称为无穷可分(infinitely divisible)的，如果对任何 n，它可以表为定义在该空间上的 n 个独立同分布的随机变量之和．每一个这种变量的分布是无穷可分的，但反之不恒真．例如，考虑由 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 组成的离散概率空间并赋以 Poisson 概率

$$\mathsf{P}(m)=\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m=0, 1, \cdots).$$

随机变量 $X(m)=m$ 并不是无穷可分的，然而它的概率分布(Poisson 分布)却是无穷可分的．

无穷可分分布首先出现在与随机连续、有平稳独立增量的齐次随机过程有关的研究中(见**平稳增量随机过程**(stochastic process with stationary increments); **独立增量随机过程**(stochastic process with independent increments))(见[1]，[2]，[3])．这类过程 $X(\tau)$ $(\tau \geqslant 0)$ 满足下列条件: 1) $X(0)=0$; 2) 增量 $X(\tau_2)-X(\tau_1)$ $(\tau_2>\tau_1)$ 的概率分布只依赖于 $\tau_2-\tau_1$; 3) 对于 $\tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_k$，诸增量

$$X(\tau_2)-X(\tau_1), \cdots, X(\tau_k)-X(\tau_{k-1})$$

是相互独立的随机变量; 4) 对任意 $\varepsilon>0$，当 $\tau \to 0$ 时

$$\mathsf{P}(|X(\tau)|>\varepsilon) \to 0.$$

此过程对于任一 τ 的值 $X(\tau)$，是一无穷可分的随机变量，其相应的特征函数满足关系式

$$f_\tau(t)=(f_1(t))^\tau.$$

这类过程的 $f_\tau(t)$ 的一般形式——在方差 $\mathsf{D}X(\tau)$ 为有穷的假定下——由 А. Н. Колмогоров ([2]) 求得(它是下述无穷可分分布典范表示的一种特殊情形)．

无穷可分分布的特征函数恒不为零，且它的对数(在主值意义下)有如下形式的表示:

$$\ln f(t)=i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty} L(u, t) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \tag{*}$$

(称为 Lévy-Хинчин 典范表示(Lévy-Khinchin canonical representation))，其中

$$L(u, t)=e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2},$$

γ 为某一实常数，而 $G(u)$ 为一有界变差的非减函数

且 $G(-\infty)=0$. 被积函数在 $u=0$ 处的值取为 $-t^2/2$. 对于每一常数 γ 及每一有上述性质的函数 G, 公式 (*) 都确定某一无穷可分分布特征函数的对数. 在无穷可分分布与二元偶 (γ, G) 之间的对应是一对一且双连续的 (bicontinuous). 这意味着一列无穷可分分布弱收敛于一无穷可分的极限分布, 当且仅当 $n\to\infty$ 时 $\gamma_n\to\gamma$ 且 G_n 收敛于 G.

例 令 $U(x)=0$, $x\leqslant 0$, $U(x)=1$, $x>0$. 那么, 为了由公式 (*) 得到数学期望为 a 及方差为 σ^2 的正态分布, 必须置

$$\gamma=a,\ G(x)=\sigma^2 U(x).$$

对于参数为 λ 的 Poisson 分布, 须有

$$\gamma=\frac{\lambda}{2},\ G(x)=\frac{\lambda}{2}U(x-1).$$

对于密度为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x)^2}$$

的 Cauchy 分布, 须有

$$\gamma=0,\ G(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}.$$

就纯"技术"的观点而言, 典范表示 (*) 是方便的 (由于 G 为有界变差这一事实), 但是函数 G 没有直接的概率意义. 为此, 也同时使用无穷可分分布的另一种表示形式, 它有直接的概率解释. 设函数 $M(u)$ 与 $N(u)$ 分别对 $u<0$ 与 $u>0$ 由如下公式定义:

$$dM(u)=\frac{1+u^2}{u^2}dG(u),$$

$$dN(u)=\frac{1+u^2}{u^2}dG(u),$$

$$M(-\infty)=N(\infty)=0.$$

这两个函数都是非减的, 对 $u<0$, $M(u)\geqslant 0$, 对 $u>0$, $N(u)\leqslant 0$; 在 0 的邻域内它们可以是无界的. 如果用 σ^2 表示 G 在零点的跳, 那么公式 (*) 可重写如下:

$$\ln f(t)=$$

$$=i\gamma t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\int_{-\infty}^{-0}L(u,t)dM(u)+$$

$$+\int_{+0}^{\infty}L(u,t)dN(u)$$

(Lévy 典范表示 (Lévy canonical representation)). 粗略地说, 函数 M 与 N 描述满足条件

$$\ln f_\tau(t)=\tau\ln f(t)$$

的齐次独立增量过程 $X(\tau)$ 中变量的跳跃频率. 无穷可分分布在概率论的极限定理中所起的重要作用在于, 这些且只有这些分布, 才可能是服从**渐近可忽略性** (asymptotic negligibility) 要求的独立随机变量之和的极限分布. 为此, 考虑相互独立随机变量的三角阵列 $X_{n1},\cdots,X_{nk_n}(n=1,2,\cdots)$, 然后选择有无穷可分分布 (称为伴随无穷可分分布 (accompanying infinitely-divisible distribution)) 的相互独立随机变量 $Y_{n1},\cdots,Y_{nk_n}$; 变量 Y_{nk} 的特征函数 $g_{nk}(t)$ 由变量 X_{nk} 的特征函数 $f_{nk}(t)$ 来确定, 使之保持如下基本性质: 和

$$\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}-A_n$$

的分布收敛于一极限分布 (对于适当选择的常数 A_n), 当且仅当和

$$\sum_{k=1}^{k_n}Y_{nk}-A_n$$

收敛于同一极限分布. 对于有对称分布的 X_{nk}, 即取

$$g_{nk}(t)=\exp(f_{nk}(t)-1).$$

对其他情形, g_{nk} 的表达式要复杂些, 而且还包含 X_{nk} 的所谓截尾数学期望. 无穷可分分布的性质由组成其典范表示的各部分函数所刻画. 例如, 无穷可分分布函数 $F(x)$ 为连续, 当且仅当 $\int_{-\infty}^{\infty}u^{-2}dG(u)=\infty$.

无穷可分分布的一个重要特殊情形是所谓的**稳定分布** (stable distribution). 亦见**无穷可分分布的因子分解** (infinitely-divisible distributions, factorization of).

参考文献

[1] Finetti, D. de., Sulla funzione a incremento aleatorio, *Atti Accad. Naz. Lincei Sez. I* (6), **10** (1929), 163–168.

[2] Kolmogorov, A. N., Ancora sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, *Atti Accad. Naz. Lincei Sez. I* (6), **15** (1932), 866–869.

[3] Lévy, P., Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser.* 2, **3** (1934), 337–366.

[4] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

[5] Хинчин, А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1938.

[6] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本: Б. В. 哥涅坚科等著, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 1955).

[7] Fisz, M., Infinitely divisible distributions: recent results and applications, *Ann. of Math. Statist.*, **33** (1962), 68–84.

[8] Петров, В. В., Суммы независимых случайных

величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

[9] Сазонов, В. В., Тутубалин, В. Н., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **11** (1966), 3 – 55.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Steutel, F. W., Infinite divisibility in theory and practice, *Scand. J. Statist.*, **6** (1979), 57 – 64.

[A2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, I – 2, Wiley, 1968 – 1971.

潘一民 译

无穷可分分布的因子分解 [infinitely-divisible distributions, factorization of; безгранично делимых распределений разложение]

无穷可分分布表成某些概率分布的卷积形式的表示. 参与无穷可分分布因子分解的分布称为此因子分解的分量.

某些无穷可分分布的因子分解可以有非无穷可分的分量([1]). 无穷可分分布的因子分解理论的一个重要任务, 就是描述那些具有排他性的无穷可分分量的无穷可分分布类 I_0. I_0 的代表成员包含**正态分布** (normal distribution), **Poisson 分布** (Poisson distribution) 以及它们的合成 (见 **Lévy-Cramér 定理** (Lévy-Cramér theorem)).

在类 I_0 的描述中, 无穷可分分布的 Линник 类 $\mathfrak{L}$ (见[2]) 起着重要的作用, 类 $\mathfrak{L}$ 分布的 Lévy-Хинчин 典范表示中的函数 $G(x)$ 为一阶梯函数, 它在 0, $\mu_{m,1}$, $\mu_{m,2}$ $(m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 中的点处有跳, 其中 $\mu_{m,1}>0$, $\mu_{m,2}<0$, 且 $\mu_{m+1,r}/\mu_{m,r}$ $(r=1,2;$ $m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是异于 1 的自然数. 如果一无穷可分分布满足 $G(+0)-G(-0)>0$, 那么为要它属于 I_0, 必须它属于 $\mathfrak{L}$. 这一条件不是充分的, 但是已知, 若对某个 $k>0$, 当 $y \to \infty$ 时有

$$\int_{|x|>y} dG(x) = O(\exp(-ky^2)),$$

则 $\mathfrak{L}$ 中的这个分布必属于 I_0.

如果 $G(+0)-G(-0)=0$, 则属于 $\mathfrak{L}$ 并非属于 I_0 的必要条件. 例如, 所有那样的无穷可分分布都是属于 I_0 的, 如果当 $x<a$ 及 $x>b$ 时, 其 $G(x)$ 为常值, 其中 $0<a<b \leqslant 2a$.

下面是一无穷可分分布不属于 I_0 的一个简单的充分条件: 在区间 $a<x<b$ 上, 成立不等式 $G'(x) \geqslant$ 常数 >0, 其中 $0<a<2a<b$. 由此条件推出, 除正态分布与单点分布之外的**稳定分布** (stable distribution), 以及 Γ 分布与 χ_2 分布, 都不属于 I_0.

类 I_0 依弱收敛拓扑在全体无穷可分分布类中稠密; 所有的无穷可分分布都可以表为 I_0 中分布的有限或可数集的合成.

参考文献

[1] Хинчин, А. Я., 《Бюлл. МГУ. Секц. А》, **1** 1937, 1, 6 – 17.

[2] Линник, Ю. В., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **3** (1958), 3 – 40.

[3] Линник, Ю. В., Разложения вероятностных законов, Л., 1960 (英译本: Linnik, Yu. V., Decomposition of probability laws, Oliver and Boyd, 1964).

[4] Линник, Ю. В., Островский, И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972 (英译本: Linnik, Yu. V., Ostrovskiĭ, I. V., Decomposition of random variables and vectors, Amer. Math. Soc., 1977).

[5] Ramachandran, B., Advanced theory of characteristic functions, Statist. Publ. Soc., Calcutta, 1967.

[6] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970.

[7] Лившиц, Л. З., Островский, И. В., Чистяков, Г. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, [т. 12], М., 1975, 5–42.

[8] Ostrovskiĭ, I. V., The arithmetic of probability distributions, *Theor. Probab. Appl.*, **31** (1987), 1, 1–24.

И. В. Островский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lukacs, E., Developments in characteristic function theory, Griffin, 1983.

潘一民 译

无穷大函数 [infinitely-large function; бесконечно большая функция]

变量 x 的函数, 随 x 的变化, 其绝对值变得并且保持比任何给定的数都大. 更确切地说, 在点 x_0 的邻域内定义的函数 f, 当 $x \to x_0$ 时称为无穷大函数, 如果对于任何数 $M>0$, 都可找到一个数 $\delta=\delta(M)>0$, 使得对于满足条件 $|x-x_0|<\delta$ 的一切 $x \neq x_0$, 不等式 $|f(x)|>M$ 均成立. 这一事实可以写成

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

也可类似地定义

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

例如,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

意味着对于任何 $M>0$, 都可找到一个数 $\delta=\delta(M)>0$, 使得对于一切 $x<-\delta$, 不等式 $f(x)>M$ 均成立. 无穷大函数的研究, 可以化为**无穷小函数** (infinitely-small function) 的研究, 因为 $\psi(x)=1/f(x)$ 是无穷小函数.

В. И. Битюцков 撰

【补注】 亦见**无穷小演算**(infinitesimal calculus).

张鸿林 译

无穷小函数 [**infinitely-small function**; **бесконечно малая функция**]

变量 x 的函数，随 x 的变化，其绝对值变得并且保持比任何给定的数都小．更确切地说，在点 x_0 的邻域内定义的函数 f，当 $x \to x_0$ 时称为无穷小函数，如果对于任何数 $\varepsilon > 0$，都可找到一个数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于满足条件 $|x - x_0| < \delta$ 的一切 x，不等式 $|f(x)| < \varepsilon$ 均成立．这一事实可以写成

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 .$$

此外，符号表示

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

意味着对于任何 $\varepsilon > 0$，都可找到一个数 $N = N(\varepsilon) > 0$，使得对于一切 $x > N$，不等式 $|f(x)| < \varepsilon$ 均成立．无穷小函数的概念可以作为函数极限的一般定义的基础．事实上，函数 f 当 $x \to x_0$ 时的极限是有限的，且等于 A，当且仅当

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0,$$

即函数 $f(x) - A$ 是无穷小函数．亦见**无穷小演算**(infinitesimal calculus). В. И. Битюцков 撰 张鸿林 译

无穷小演算 [**infinitesimal calculus**; **бесконечно малых исчисление**]

以前包括与**无穷小函数**(infinitely-small function)概念有联系的数学分析各种分支的一个术语．虽然"无穷小"方法已经被古希腊和中世纪欧洲的科学家以各种不同方式顺利地用来解决几何学中和自然科学中的问题，但是无穷小函数理论的基本概念的确切定义直到19世纪才提出来．为了领会这个方法的重要性，必须指出不但无穷小演算本身有实际的重要性，而且应用它导出有限量结果的情况也是重要的．在数学史中有三类这样的问题是特别重要的．

1) 由古希腊数学家用**穷竭法**(exhaustion, method of)解决的最简单的一些问题，其中无穷小量只是用来证明两个给定的量(或预先给定量之间的两个比)相等．

2) 包含穷竭法的更复杂的一些问题，其中需要求的有限量是作为无穷多个无穷小量之和

$$\Delta_1^{(n)} + \cdots + \Delta_n^{(n)} \ (n \to \infty)$$

的极限而得到的．这些问题最终导致**积分学**(integral calculus)的创立．

3) 其中有限量是作为无穷小量之比的极限而得到的一些问题；它们导致**微分学**(differential calculus)的创立．

穷竭法的发明要归功于尼多斯(今土耳其西南角)的 Eudoxus(公元前 4 世纪)．然而，可以说，这个方法贯穿于 Euclid 的《几何原本》(Elements)第 12 卷中用来作为主要演绎工具．Euclid 的推理环节可以写成以下的现代形式：如果所有的比

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \cdots = k$$

彼此相等且等于一个常值 k，且当 $n \to \infty$ 时两个差 $a - a_n$，$b - b_n$ 成为无穷小，则

$$\frac{a}{b} = k .$$

例如，为了比较两个圆盘的面积，Euclid 在每个圆盘中分别内接一个正方形，并证明这个正方形的面积大于圆盘面积的一半；因而剩下的四个弓形合计小于此圆盘面积的一半(见图 1)；然后他在圆盘中内接一个正八边形且指出剩下的面积小于此圆盘面积的四分之一；然后内接一个正十六边形并指出剩下的十六个弓形总计小于此圆盘面积的八分之一，等等．这样当内接多边形的边数增加时此圆盘的面积逐渐地"被穷竭"．因为分别内接于两个圆盘的两个多边形的面积之比等于这两圆盘的半径平方之比，所以 Euclid 用间接证法推断出两圆盘自身的面积有同样的比率．

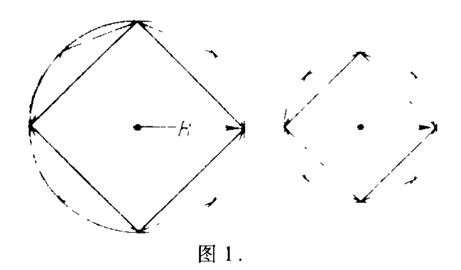


图 1.

更广泛和更自如地运用无穷小量是由 Archimedes(公元前 287－212)作出的．在他的著作《关于劈锥曲面、球体和螺线》(On conoids, spheroids and spirals)中，Archimedes 用基于确实类似现代积分概念的想法的一种方法，系统地计算面积和体积．

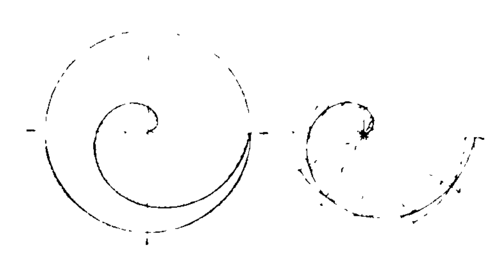


图 2. 图 3.

例如，Archimedes 确定了现在称为 **Archimedes 螺线**（Archimedean spiral）且在极坐标中其方程为

$$r = a\varphi$$

的螺线的第一圈的面积．在所考虑的图形 S 中内接一个由 $n-1$ 个顶角为 π/n 的圆扇形组成的图形（图 3 的阴影部分表示当 $n=12$ 时的这些扇形），而由 n 个相似圆扇形组成的图形外切于 S（图 3 中无阴影区域）．在这两种情况下，一个内接或外切扇形的面积公式具有形式

$$\frac{4\pi^3 a^2 k^2}{n^3}$$

其中 k 取适当的值．显然，图形 S 的面积包含于两个界之间

$$S_n' < S < S_n'', \tag{1}$$

其中

$$S_n' = \Delta_1^{(n)} + \cdots + \Delta_{n-1}^{(n)},$$

$$S_n'' = \Delta_1^{(n)} + \cdots + \Delta_n^{(n)}.$$

因为

$$S_n' = 4\pi^3 a^2 \frac{[1^2 + \cdots + (n-1)^2]}{n^3} = $$
$$= 2\pi^3 a^2 \frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2},$$

$$S_n'' = 4\pi^3 a^2 \frac{[1^2 + \cdots + n^2]}{n^3} =$$
$$= 2\pi^3 a^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2},$$

由此推出，对任何 n，

$$S_n' < \frac{4}{3}\pi^3 a^2 < S_n''.$$

Archimedes 把最后这个关系式表成几何形式：对任何 n，

$$S_n' < \frac{K}{3} < S_n'', \tag{2}$$

其中 K 是图 2 中表示的圆盘的面积．比较（1）和（2），且由于当 $n \to \infty$ 时

$$S_n'' - S_n' = \Delta_n^{(n)}$$

成为无穷小这一事实，Archimedes 推断出

$$S = \frac{K}{3}.$$

以上推理的末尾表明 Eudoxus 的穷竭法是怎样为 Archimedes 所发展和改进的，而其开始表明 Archimedes 也熟悉上面第二组中的例子，它的意义相当于积分法．

积分学给出了所考虑的这个面积的值：

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{(a\varphi)^2}{2}\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

由定义，这公式中的积分是形如

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k^2}{2}(\varphi_k - \varphi_{k-1})$$

的和式的极限，其中

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = 2\pi,$$
$$r_k = a v_k^2,\ \varphi_{k-1} \leqslant v_k \leqslant \varphi_k.$$

对于特殊情形

$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{n}, \tag{3}$$

$v_k = \varphi_{k-1}$ 产生了 Archimedes 和 S_n'，而 $v_k = \varphi_k$ 产生了 Archimedes 和 S_n''．特别是，应该指出，如果分点 φ_k 如（3）中那样选取，则 Archimedes 和 S_n' 与 S_n'' 恒等于 **Darboux 和**（Darboux sum），对 Darboux 和不等式（1）在一般情况也成立．由此看出 Archimedes 用了积分学中具有完善逻辑推理形式的几种方法（借助于 Darboux 和从上方和从下方的精确估计），这些只在 19 世纪后半叶才融合于一般理论中．Archimedes 用了类似方法去解关于面积和体积计算的其他问题．

看来，直到其发展的末期，古希腊数学家也着手处理属于上面指出的第二组问题．同时必须指出古代人关于数学方法的思维方式与现代数学家的思维方式之间的基本差别．作为一个例子，在解上述问题时，Archimedes 不计算

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{K}{3},$$

而是任意地取值 $K/3$，对等式 $S = K/3$ 给出一个间接证明，由于（1）和（2），又因为差 $S_n' - S_n''$ 是无穷小，不等式 $S \neq K/3$ 会导出矛盾（他的想法常起源于“机械的考虑”），这样就建立了证明．希腊数学家不但未能发展任何计算极限的一般规则，也从未阐明极限概念本身，而他们的方法要以此为基础（即使对这些方法的一般术语“穷竭法”也是一个现代术语）．更不必说，古代科学从未产生类似于现代积分学算法的任何东西，由积分学得出的结果，当用现代方法计算一个新的积分时，不把它作为和的极限来确定，而是运用对属于不同类函数进行积分的简单和方便得多的规则．Archimedes 的著作（特别是他的“致 Eratosthenes 的信”（Message to Eratosthenes））指出——早于 Archimedes 的借助于很多个数无限下降的项（即现代意义下无穷小量这个词）的和去估计面积和体积的逻辑上严密的方法——也存在一个更原始更直观的方法，可归因于 Democritus（公元前 4 世纪）．Archi-

medes 特别指出，Democritus 确定棱锥体积先于 Eudoxus（虽然他未能给出其结果的严格证明）.

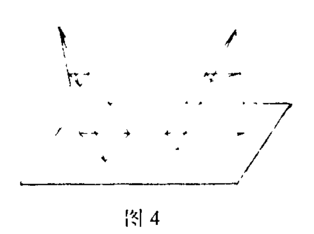


图 4

在推导棱锥体积过程中，Euclid 和 Eudoxus 所遇到的主要困难是要证明两个具有等高和等底面积的棱锥具有相等的体积．Euclid 在他的《几何原本》中用穷竭法克服了这个困难．

如 Archimedes 所报导的，Democritus 用以证明以上定理的"原子的"方法（图 4）可描述如下．由相似性得出这两个棱锥的横截面面积在相等的高度是相等的；棱锥的体积简单地认为是这些面积的"和"；因此，这两个和的对应项相等证明和本身也相等．Archimedes 引述了用这个方法解决更复杂问题的很多例子．Archimedes 认为这个方法的严格性不如在启发性上有很高价值（即对得到新结果，必须随后更严格地加以证明）；从现代观点看，这一见解无疑是正确的，由于 Democritus 的方法只是一种无事实根据的尝试，想用面积相加可以得到体积这一站不住脚的先验的假设去代替取极限过程

$$S=\lim_{n\to\infty}(\Delta_1^{(n)}+\cdots+\Delta_n^{(n)}).$$

Archimedes 致 Eratosthenes 的通信，简称"笔记本"（Ephodikon），被古希腊的作者广泛地引用和评注，但是从未达到现代数学开创时期欧洲数学家的水平．由于不知道 Democritus 的极其简单的原子的推理方法，这些欧洲数学家在最好情况下也不得不求助于其他来源的混乱的提示（"笔记本"的内容只是到 1906 年才重新发现，后来以《Archimedes 方法》为名刊行于世）．然而，这个方法于 17世纪被 J．Kepler（1517－1630）和 B．Cavalieri（1598－1647）辉煌地发展了．Kepler 在他的《酒桶的体积测量》（Stereometria doliorum）（1615）中确定了 92 种旋转体的体积．如果他在每个这样的测定中学究式地追随 Archimedes 的推理，他的著作的篇幅会极庞大．Kepler 的方法能用一简单的例子来说明．他确定圆盘面积是根据以下的推理．把圆盘分割成以圆心为公共顶点的扇形（图 5）；每个扇形愈狭，它愈来愈像一个三角形，它的底边可看成扇形的弧；因此它的面积等于弧长与半径之半的乘积；如果对这些面积求和，则圆盘面积等于其圆周长乘以其半径之半．

球和其他旋转体的体积计算同样简单；然而，正

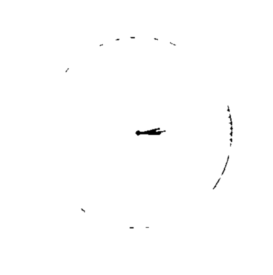


图 5

是这种简单性是有疑问的（如 Kepler 自己承认的）且事实上是产生很多错误的原因．为了消除这样的疑问，Kepler 证明他关于圆面积的推理是正当的，如下所述：组成圆盘的扇形可以做得如此小，使得它们的底成为单独一个点，且扇形的个数变成无穷；这些无穷小扇形中的每一个于是将变成完全等于对应的三角形．显然，这没有证明任何东西，因为如果这个底变成单一的点，不再有扇形，而三角形就成为一条半径．这个推理的具体特征在于这样的事实，即 Kepler 自觉地或下意识地倾向于采用把圆盘静止地分解成无穷多个实在的无穷小扇形（半径），而不是采用连续增多个数的连续减小项的潜无穷；按这种形式，过程的无限继续进行就消失了．认为 Kepler 已经坚定地站在实在无穷这一边是不正确的；他事实上受 Archimedes 很大影响，他通晓其主要著作，但他对这问题的看法是折衷的．他的观点显示出是到 Cavalieri 观点的过渡．

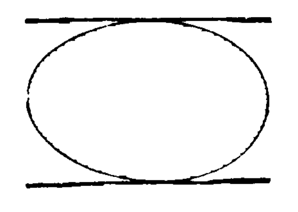


图 6．

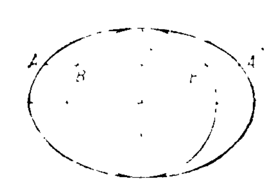


图 7．

Cavalieri 的论文：《不可分量几何学》（Geometria indivisibilibus）（continuorum nova quadam ratione promota）（借助于连续不可分量以新方法揭示的几何学）发表于 1635 年．Cavalieri 为自己确定的任务与 Archimedes 所作相同——计算任意形状的图形的表面积和体积．Cavalieri 把平面图形看成是从一极端切线到另一极端切线延伸的一个平行直线段的集合（图 6），而把立体图形看成是其平面截面的集合．这些线段和平面截面按 Cavalieri 的方法称为"不可分量"（见**不可分量法**（indivisibles, method of））．面积和体积的测量是用比较两图形的不可分量来实现的．例如 Cavalieri 借助于以下推理计算椭圆的面积（图 7）．画一圆围绕椭圆的短轴（$2b$）且画（不可分的）弦平行于长轴（$2a$）．不难证明，由椭圆的定义，椭圆的每个

不可分元素与对应的圆的不可分元素之间的比为 a 比 b，即 $AA':BB'=a:b$. 因此，椭圆的所有不可分量之并(即椭圆的面积)与圆的不可分量之并(面积 πb^2)之间的比等于 $a:b$；因而椭圆的面积是 πab. Cavalieri 应用同样的方法去比较体积；Cavalieri 对有同样底面积和同样高的两棱锥等积的证明，在 Archimedes 的证明刚开始处即结束了. Cavalieri 的方法的通用性和简单性得出了 Archimedes 不能得到的结果. 然而，一个方法是简单的这一事实并不能保证其正确性，因此，Cavalieri 用几种独立的途径来处理他的每一个计算.

虽然 Cavalieri 的工作在证明其结果的严格性方面远不如 Archimedes 的工作，但是，不仅在确定所求面积和体积的具体问题的数目方面，而且在他对无穷小科学的未来潜力的理解方面，远远优于 Archimedes 和一般古代数学家. 跟解决个别问题一样，Cavalieri 得到了很多积分学的一般公式，尽管仅仅是按不严格的几何的形式.

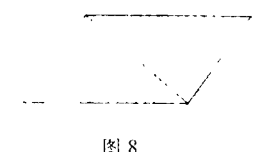


图 8

例如，Cavalieri 断言图 8 中组成平行四边形的不可分量的平方和等于包含于组成此平行四边形的两个三角形中每一个的不可分量的平方和的三倍，这实质上正好是公式

$$\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^a a^2dx=\frac{a^3}{3}.$$

Cavalieri 采用类似方法去表示等式

$$\int_0^a x^ndx=\frac{a^{n+1}}{n+1},$$

对直到包括 9 在内的 n 的值.

17 世纪的数学家也研究上面指出的第三类问题. 在 R. Descartes (1596－1650) 创立解析几何学之后，一个自然产生的问题是确定曲线 $y=f(x)$ 的切线的角系数，即确定导数. 几乎同时力学的发展需要计算一个点的任意运动的瞬时速率，即仍是确定导数的问题. 由于当时极限理论以及即使对极限过程的明确理解是缺乏的，所以试图计算导数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

作为实在的无穷小增量 dy 和 dx 之比

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

无穷小量作为趋向于零的变量，以及导数作为无穷小增量之比的极限的现代概念是由 I. Newton (1642－1727) 提出的，虽然不完全严格，但在 A. L. Cauchy (1789－1857) 后成为严格地确立了. 微分作为增量主部的现代概念必须归功于 J. L. Lagrange (1736－1831)，而最后由 Cauchy 所确定；后者也给出了积分作为和的极限的严格定义.

现代微分和积分学的典型特征是这样的事实，即在其基本思想已用取极限的方法严格地建立以后，它可用纯代数算法(在算法本身不再包含明显的取极限运算的意义下)给出范围很广的各种各样问题的解. 作为一个结果，现代微积分学把数学严格性与简单明晰性成功地综合起来.

参考文献

[1] Heiberg, I. L. (ed.), Archimedes: Opera Omnia, Wissenschaft. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972.

[2] Dyck, W. von and Casper, M. (eds.), J. Kepler: Gesammelte Werke, C. H. Beck, 1937.

[3] Cavalieri, B., Geometria indivisibilibus (continuorum nova quadam ratione promota), Bologna, 1635.

БСЭ-2 撰

【补注】 关于 Euclid 的《几何原本》见 **Euclid 的《几何原本》**(Elements of Euclid).

参考文献

[A1] Becker, G., Das mathematische Denken der Antike, Göttingen, 1966.

[A2] Boyer, C. B., The history of the calculus and its conceptual development, Dover, 1959 (中译本：C. B. 波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977).

[A3] Edwards, C. H., The historical development of the calculus, Springer, 1979 (中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987).

[A4] Stamatis, E. S. (ed.), Euclides: Elementa, Leipzig, 1969.

[A5] Heath, T. L. (ed.), The thirteen books of Euclid's elements, Dover, reprint, 1956.

[A6] Euler, L., Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, reprint, 1983 (译自拉丁文).

[A7] Knorr, W. R., The evolution of the Euclidean elements, Reidel, 1975.

[A8] Robinson, A., Nonstandard analysis, North-Holland, 1966.

[A9] Schneider, I., Archimedes, Wissenschaft. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

葛显良 译

无穷小联络 [infinitesimal connection: инфинитезимальная связность]

纤维空间上微分几何结构的原名称，后来它被简称为**联络**(connection).

Ю. Г. Лумисте 撰 沈一兵 译

无穷小形变 [infinitesimal deformation 或 infinitely small

deformation; **бесконечно малое изгибание**]

首先出现于描述三维 Euclid 空间中曲面 F 形变时的一个概念，在这种形变下，F 上曲线长度的变分，与这些曲线上点之间空间距离的变化相比，是一个低阶的量．事实上，无穷小形变理论涉及向量场及其相关的量，它们定义在 F 的点上并满足表示 F 形变方程线性化的方程．

这样，若 $x(u,v,t)$ 是曲面 $F=F_0$ 的形变 F_t 的位置向量，则 F 的无穷小形变被（初始）形变率，即向量场

$$z(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=0}$$

所表征，它满足方程

$$(dx\ dz)=0$$

或

$$(x_u\ z_u)=(x_v\ z_v)=(x_u\ z_v)+(x_v\ z_u)=0, \quad (1)$$

其中 $x=x(u,v,0)$ 是 F 的位置向量．向量场 z 也即熟知的无穷小形变的速率场或弯曲场．可以唯一地定义向量场 y 使得 $dz=[ydx]$．位置向量 y 所描绘的空间点集称为无穷小形变的旋转图．亦见 **Darboux 曲面**（Darboux surfaces）．

对于更一般的情况，嵌入在 Riemann 空间 V^n 中的流形 M^k 的无穷小形变表示嵌入 $i:M^k\to V^n$ 的一个等距变分，即沿嵌入的一个向量场

$$Z\in\tau(V^n),$$

其中 $\tau(V^n)$ 是 V^n 的切丛，使得在 M^k 上 Z 满足方程

$$g(\nabla_X Z, Y)+g(X,\nabla_Y Z)=0, \quad (1')$$

这里 $X,\ Y\in i^*\tau(M^k)$ 是与嵌入相切的向量场，$g(\cdot,\cdot)$ 是 V^n 的 Riemann 度量，∇_X 是关于 V^n 上 g 所对应的 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection）的共变导数．向量场 Z 唯一地确定沿嵌入的（1，1）型反对称张量场 K_Z，$K_Z X=\nabla_X Z$，它满足方程

$$\nabla_X K_Z Y-\nabla_Y K_Z X+K_Z[X,Y]=R(X,Y)Z,$$

其中 R 是 V^n 的 Riemann 曲率算子．

若 Z 由 **Killing 向量**（Killing vector）场 $\xi\in\tau(V^n)$ 所诱导，即 $Z=\xi\cdot i$，则对应的无穷小形变（及 Z 本身）称为平凡的（trivial）．若 M^k 仅容许平凡的无穷小形变，则 M^k 称为刚性的（rigid）．（见**刚性**（rigidity）．）

在**测地映射**（geodesic mapping）$F:V^n\to\widetilde{V}^n$ 下，具向量场 Z 的 $M^k\subset V^n$ 的一个无穷小形变唯一地对应着具向量场 $\widetilde{Z}=F^*(Z)$ 的 $F(M^k)\subset\widetilde{V}^n$ 的一个无穷小形变，并且

$$\widetilde{g}(\widetilde{Z},F^*(Y))=\psi g(Z,Y),$$

其中 ψ 是映射 F 的势．特别地，在 Euclid 空间的射影变换（Darboux-Sauer 定理（Darboux-Sauer theorem））和 Euclid 空间到常曲率空间的测地映射（Погорелов 变换（Pogorelov transformation））下，存在着这种对应．

对应于高阶等距变分的高阶无穷小形变，不像上面讨论的一阶无穷小形变那样，只得到主要是关于旋转曲面的个别结果．

无穷小形变理论在数学和力学中有许多应用，特别地它用于沿单参数的延拓方法的等距嵌入问题，壳体刚性问题中常曲率空间的等距曲面的研究（见 **Cohn-Vossen 变换**（Cohn-Vossen transformation）），等等．

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Качественные вопросы теории деформаций поверхностей,《Успехи матем. наук》. 3 (1948), 2 (24), 47－158.

[2] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969（英译本：Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1972）.

[3] Blaschke, W., Einführug in die Differentialgeometrie, Springer, 1950.

[4] Векуа, И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959（英译本：Vekua, I. N., Generalized analytic functions, Pergamon, 1962）.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Efimow, N. W. (N. V. Efimov), Flachenverbiegung im Grossen, Akademie Verlag, 1957（译自俄文）.

沈一兵 译

无穷小算子 [infinitesimal operator; инфинитезимальный оператор]

一些线性算子的名称，它们是一定类型映射的微分(differential)．这样，在一个微分流形上，一个无穷小算子或者无穷小变换(infinitesimal transformation)就是一个**向量场**(vector field)；在(算子或者变换的)半群理论中，就是一个(无穷小)生成算子(见**半群的生成算子**(generating operator of a semi-group))．

М. И. Войцеховский 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

无穷小结构 [infinitesimal structure; инфинитезимальная структура]

n 维微分流形 M^n 上的一种结构，它被 M^n 上 r 阶标架主丛的可微结构群 D_n^r 到它的某个 Lie 子群 G 的约化所确定，D_n^r 即从以 $0\in\mathbf{R}^n$ 为原点的 $\mathbf{R}^n$ 到

M^n 的可逆 r 次射流群. 换言之, 若在 M^n 上 r 阶标架主丛关于 Lie 子群 $G \subset D_n^r$ 的商丛中指定某一截面,则 M^n 上给出了一个无穷小结构. 对于 $r=1$, 无穷小结构也称为 M^n 上的 G 结构 (G-structure), 而对于 $r>1$, 它也称为高阶 G 结构 (G-structure of higher order). 若 D_n^r 被射影微分群 PD_n^r (D_n^{r+1} 的某个商群) 所代替, 则对应的无穷小结构称为射影无穷小结构 (projective infinitesimal structure).

结构方程是研究无穷小结构的工具. 无穷小结构研究中的基本问题是: 寻找具有某个无穷小结构的流形 M^n 的拓扑特征; 区分出能作为某个低阶无穷小结构的扩张的无穷小结构; 一个无穷小结构的可积性问题等.

参考文献

[1] Лаптев, Г. Ф., 《Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ》, т. 1, 1966, 139 - 189.

[2] Chern, S.S., The geometry of G-structure, *Bull. A. M. S.*, **72** (1966), 2, 167 - 219.

Ю.Г. Лужисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

沈一兵 译

无穷 [infinity; бесконечность]

在多种数学分支中出现的一个概念, 主要作为有限性概念的反意词. 在分析和几何理论中无穷的概念用来表示"反常"或"无穷远"元素. 无穷的概念用于集合论和数理逻辑 ——"无穷集"的研究中, 也用于其他数学分支中.

1) 无穷小和无穷大变量 (variable magnitude) 的概念是数学分析中的基本概念. 在无穷小概念的现代处理方法出现之前的思想是这样的, 有限量是由无穷多个无穷小的"不可分量"组成的, 这里的不可分量不是作为变量而是作为比任何有限量都小的常量 (见**不可分量法** (indivisibles, method of)). 这种思想的例子之一是从有限到无穷的非常规的分解: 唯一有意义的过程是把一个有限量划分成个数无限增加而大小无限减小的组成部分.

2) 无穷也以"反常"的即无穷远几何映象的形式在完全不同的数学领域出现 (见**无穷远元** (infinitely-distant element)). 例如, 直线 a 上的无穷远点被看成是"附加"到通常的诸有限点中的一个特殊的不变的对象. 然而, 在这里也能看到有限和无穷之间的不可分离的联系: 考虑从不在直线 a 上的点为中心的投影, 通过中心且与直线 a 平行的直线就对应于无穷远点.

具有相似特点的是用两个"反常"的数 $+\infty$ 和 $-\infty$ 而得到的实数系的完全化, 这种完全化适合分析和实变函数论中的许多要求. 用**超限数** (transfinite number) $\omega, \omega+1, \cdots, 2\omega, 2\omega+1, \cdots$ 而得到的自然数序列 $1, 2, \cdots$ 的完全化也是如此. 一方面是无穷小和无穷大变量, 另一方面是被看成常量的"反常"的无穷大数, 它们之间的区别产生了"潜无穷"(表示前者) 和"实无穷"(表示后者) 的概念. 如果只限于考虑这种原始的概念 (至于另外一个现代概念参见下面), 则可认为潜无穷和实无穷的拥护者之间的争论平息了. 无穷小和无穷大量是导数 (作为无穷小量的商) 和积分 (作为无穷多个无穷小量之和) 定义的基础, 因此它们与数学分析的概念相关, 应认为是"潜在的". 同时, 数学的逻辑框架中相当合理地包含"实无穷"大的"反常"数 (甚至用一些不同的观点来引入这些数: 在集合论中的数量的和次序的超限数, 在实数系中的反常元素 $+\infty$ 和 $-\infty$ 等等).

在数学中通常遇到两种添加无穷的"反常"元素到数系中的方法:

a) 从投影的观点出发, 直线上有一个"无穷远点". 在通常的度量坐标系中, 自然设定这一点的横坐标为 ∞. 数系中加入一个不带符号的无穷在复变函数论中是必需的 (亦见 **Riemann 球面** (Riemann sphere)). 在初等分析中, 在研究有理函数 $f(x)=P(x)/Q(x)$ 时 (这里 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式), 在 $Q(x)$ 取值为零且零点阶数高于 $P(x)$ 的零点阶数的点 x 处, 自然令 $f(x)=\infty$.

对于反常数 ∞, 数学运算的规则是如下定义的:

如果 a 是有限的, 那么 $\infty + a = \infty$;

$\infty + \infty$ 无意义;

如果 $a \neq 0$, 那么 $\infty \cdot a = \infty$;

$\infty \cdot 0$ 无意义.

不考虑含 ∞ 的不等式; ∞ 是否比有限数 a 大或小的问题是无意义的.

b) 在研究实变量的实函数时, 用两个反常元 $+\infty$ 和 $-\infty$ 使实数系完全化可以假定对于任意的有限数 a, $-\infty < a < +\infty$ 并且在扩充的数系中不等式的基本性质不变. 对于 $+\infty$ 和 $-\infty$ 设置如下的算术运算规则:

如果 $a \neq -\infty$, 那么 $(+\infty)+a=+\infty$;

如果 $a \neq +\infty$, 那么 $(-\infty)+a=-\infty$;

$(+\infty)+(-\infty)$ 无意义;

如果 $a>0$, 那么 $(+\infty)\cdot a=+\infty$;

如果 $a<0$, 那么 $(+\infty)\cdot a=-\infty$;

如果 $a>0$, 那么 $(-\infty)\cdot a=-\infty$;

如果 $a<0$, 那么 $(-\infty)\cdot a=+\infty$;

$(+\infty)\cdot 0$ 和 $(-\infty)\cdot 0$ 无意义.

3) 在数学上研究无穷的主要兴趣或主要困难是数学对象的无穷集 (infinite set) 的本质的问题. 特别是, 应该牢牢地记住的是现有的无穷小和无穷大变量理论

的全部抽象性和完全性只意味着此理论的全部困难已被转化为数论基础中的一个问题，而数的无穷系统的概念是其内在的部分. 只有说清楚作为变量 x 的函数的 y 的变化本性，说 y 是无穷小才有意义；例如，如果对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 满足：若 $|x-a|<\delta$，则 $|y|<\varepsilon$，那么称当 $x\to a$ 时 y 是无穷小. 这个定义本身基于如下的假设，即函数 $y=f(x)$ 在 x 值的一个无穷集（infinite set）上（例如，对于所有充分接近 a 的实数 x）有定义.

在集合论中，"实"和"潜"无穷的概念通常具有深刻的含意，这与把无穷基数说成是"实际上的无穷数"毫无关系. 这是因为数学对象的无穷系统（比如自然数系或实数系）不可能象对象的有限系统那样通过简单的枚举来定义. 通过一个接一个地数出所有自然数来构造自然数集的想法显然是荒谬的. 事实上，研究自然数集是建立在元素的从 n 过渡到 $n+1$ 的构成过程的基础上的. 至于实数的**连续统**（continuum），甚至对于一个元素——实数——的研究都要研究一个接一个的逼近值的形成过程，而对于整个实数集的研究涉及研究它的元素的形成过程的一般性质. 在这种意义下；自然数系和实数系的无穷性可以认为是单纯的"潜"无穷. 与潜无穷相反的一种观点认为无穷集是"实际"定义的，而不管它们的形成过程. 这种将无穷集自身和它们的形成过程分离开来的正确性以及在何种条件下这种抽象在研究无穷集时是合理的这些问题尚未解决. 亦见**实无穷抽象**（abstraction of actual inifinity）和**潜在可实现性抽象**（abstraction of potential realizability）.

A. H. Колмогоров 撰

【补注】 关于处理无穷大数和可逆无穷小的一种尝试见[A5]和**非标准分析**（non-standard analysis）.

在早期的分析中有过幂零无穷小量（它们在本世纪集论建立以后销声匿迹），最近幂零无穷小量又在所谓的综合微分几何中复活（[A3]）.

亦见**无穷小演算**（infinitesimal calculus）；**无穷大函数**（infinitely-large function）；**无穷小函数**（inifinitely-small function）.

参考文献

[A1] Edwards, C. H., The historical development of the calculus, Springer, 1979（中译本：C. H. 爱德华，微积分发展史，北京出版社，1987）.

[A2] Euler, L., Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, 1983（译自拉丁文）.

[A3] Kock, A., Synthetic differential geometry, Cambridge Univ. Press, 1981.

[A4] Robert, A., Nonstandard analysis, Wiley, 1985.

[A5] Robinson, A., Non-standard analysis, North-Holland, 1966（中译本：A. 鲁宾逊，非标准分析，科学出版社，1980）.

朱建平 译

无穷公理 [infinity, axiom of; бесконечности аксиома]

形式理论或者具有解释的理论（主题理论）中的一条公理，它确保在该理论中存在无穷对象. 因此，**公理集合论**（axiomatic set theory）的某个公理系统中的无穷公理确保存在无穷集. 例如，用 Zermelo-Fraenkel 公理系统的语言，无穷公理通常写成如下的形式：

$$\exists X(\phi\in X\,\&\,\forall Z(Z\in X\supset Z\cup\{Z\}\in X))$$

（即存在一个集合 X，满足 $\phi\in X$ 且对于任何属于 X 的 Z，集合 $Z\cup\{Z\}$ 也属于 X）.

鉴于对理论的语言的特殊的限制，在简单**类型论**（types, theory of）中用另一种形式表示无穷公理：存在一个关系，它在个体集上定义一个没有最大元的全序. 在许多理论中使用所谓的 Dedekind 无穷公理（Dedekind axiom of infinity）是很方便的：存在这样的集合，它可以一一地映入它的某个真子集. 借助于**选择公理**（axiom of choice），易知 Dedekind 无穷公理等价于上述的无穷公理的其他形式. 但是，已知不用选择公理这种等价性是不可能用通常的集合论工具证明的.

在集合论中也假设基数很大的集合的存在性，即所谓的高阶无穷公理（axiom of higher infinity）：可达基数存在公理，可测基数存在公理等等.

在直谓逻辑中，只能在无穷模型中成立的公式称为无穷公理，用**证明论**（proof theory）的观点来看，这种公式的断言通常比公理集合论中的无穷大公理要少：它们确保存在无穷多个研究对象，但不保证有一个无穷的研究对象. 人们已经发现存在无穷多个互不等价的直谓逻辑的无穷公理.

A. Г. Драгалин 撰

【补注】 关于弱和强不可达基数以及可测基数的概念见**基数**（cardinal number）.

参考文献

[A1] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978, Chapt. 5.

[A2] Schoenfield, J. R., Axioms of set theory, in J. Barwise (ed.): Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, 321 – 344.

[A3] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

朱建平 译

非形式公理方法 [informal axiomatic method; неформальный аксиоматический метод]

一种**公理方法**（axiomatic method），它不严格固定能应用的语言，因而也不固定对一个对象的有意义的理解的范围，但是需要关于给定研究对象的所有特殊概念的公理化定义. 这个术语没有单一的普遍接受的解释.

公理方法的历史发展以不断增加的形式化程度为特征. 非形式公理方法是这个过程中的一个阶段.

Euclid 的原始的几何学公理结构以表述的演绎性质为其特征，而表述中定义（解释）和公理（明显的论断）处于基础地位．从它们出发，依赖于常识和明显性，演绎出推论．在演绎过程中，有时不言明地用了一些没有放在公理中的几何性质的命题，特别是关于空间中的运动以及线和点的相互配置．结果，几何概念出现了，与公理一样，使它们的应用规则化，它们为 Euclid 及其追随者不言明地使用．这里产生了问题：是否所有的公理在事实上已被发现？回答这个问题的指导原则曾由 D．Hilbert 阐明："人们在任何时候都必须能够说：代替点、直线和平面——桌子、椅子和啤酒杯．"如果一个证明在这样的替换后仍使人信服，则事实上用于这个证明的所有特殊命题在公理中是确定的．在这种方法中能够达到的形式化的程度是用来刻画非形式公理方法的形式化水平．这里 Hilbert 的经典工作可以作为一个标准．

非形式公理方法不只是能够应用于对一个特定理论的公理化阐述给予一定的完全性．它是数学研究的一个真正的工具．当在研究一个对象系统时没有用到它们的专门的特征和"性质"，则所证明的命题可扩大到满足问题中公理的任何对象系统．按照非形式公理方法，公理是原始概念的隐式定义（而不是"明显真理"）．研究的对象是什么是不重要的．必须知道的有关它们的每一件事都放在公理中．一个公理化理论的研究对象是它的任何一种**解释**（interpretation）．

非形式公理方法，除了所有特殊概念的必不可少的公理化定义之外，还有另外一个特征性质．这就是不受公理的约束和根据一种有意义的理解，对观念和概念的自由运用，只要它们能被应用到任何合理的解释而不管其内容．特别地，集合论的和逻辑的概念和原理广泛地被应用，还有与计数思想相联系的概念，以及其他基于有意义的理解和常识，而非基于公理的推理到公理化方法的渗透，来源于用来陈述和证明公理地给定的对象系统的性质的非固定的语言．把语言固定就导致形式公理系统观念（见**公理方法**（axiomatic method）），并且为可容许的逻辑原理的阐明和精确描述，为集合论的和其他一般的概念或对那些论域不明确的概念的控制使用建立了物质基础．如果在这语言中对集合论概念的传输没有办法（词），那么这就排除了基于使用这种办法的所有证明．如果这语言有办法表示一定的集合论概念，则它们在证明中的使用能够限制于确定的规则或公理．

以不同方式确定语言的结果是产生基本研究对象的不同理论．例如，对群论考虑狭义谓词演算的语言，得到群的一个初等理论，其中不能陈述关于所有子群总体的任何论断．如果扩充到二阶谓词演算的语言，那么，考虑其中出现作用在子群概念上的量词的性质就成为可能的了，转移到带有其公理系统的 Zermelo-Fraenkel 系统的语言，可作为群论中的非形式公理方法的一种形式化．

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913（中译本：D．希尔伯特，几何基础，科学出版社，1987）．

[2] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1－2, Springer, 1968－1970.

В．Н．Гришин 撰　葛显良 译　鲁世杰 校

信息梯度［**informant；информант**］

对数似然函数的梯度．信息梯度的概念出现在数理统计的所谓参数问题中．设有先验信息：被观测随机现象由分布族 $\{P^t, t\in\Theta\}$ 中的概率分布描绘，其中 t 是数值或向量参数，但其真值未知．对现象所作的观测（一系列独立观测）产生结局 ω（一系列结局 $\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(N)}$）．要求根据观测结局估计参数 θ．假设分布族 $\{P^t\}$ 由关于测度 $\mu(d\omega)$ 的密度 $p(\omega;t)$ 给出，其中 $\mu(d\omega)$ 定义在现象所有结局的空间 Ω 上．当 Ω 离散时，$p(\omega;t)$ 可以采用结局的概率 $P^t(\omega)$．对于固定的 ω，密度 $p(\omega;t)$ 作为参数 $t=(t_1,\cdots,t_m)$ 的函数称为似然函数（likelihood function），而它的对数称为*对数似然函数*（logarithmic likelihood function）．

对于光滑分布族，宜把信息梯度定义为向量

$$\operatorname{grad}_t \ln p(\omega;t)=$$

$$=\left[\frac{1}{p(\omega;t)}\ \frac{\partial p(\omega;t)}{\partial t_1},\cdots,\frac{1}{p(\omega;t)}\ \frac{\partial p(\omega;t)}{\partial t_n}\right];$$

与对数似然函数不同，它不依赖于测度 μ 的选择．信息梯度包含参数 θ 的估计问题的全部重要信息：既包含由观测得来的，又包含事先已知的．此外，它是可加的：对于独立观测，即当

$$p(\omega^{(1)},\cdots,\omega^{(N)};t)=\sum_{k=1}^{N} p_k(\omega^{(k)};t)$$

时，信息梯度相加：

$$\operatorname{grad}\ \ln p(\omega^{(1)},\cdots,\omega^{(N)};t)=\sum_{k=1}^{N}\operatorname{grad}\ \ln p_k(\omega^{(k)};t).$$

在统计估计理论中，信息梯度作为随机向量函数其性质是重要的．假设对数似然函数是正则的：二次可微，其导数可积，对参数的微分与对结局的积分可交换，那么有如下恒等式：

$$\mathsf{E}_t\ \frac{\partial \ln p(\omega;t)}{\partial t_k}\ =$$

$$=\int_\Omega \frac{\partial \ln p(\omega;t)}{\partial t_k}\ p(\omega;t)\,d\mu=0,\ \forall k;$$

$$-\mathsf{E}_t\ \frac{\partial^2 \ln p(\omega;t)}{\partial t_j\,\partial t_k}\ =$$

$$= I_{jk}(t) = \mathrm{E}_t \frac{\partial \ln p}{\partial t_j} \frac{\partial \ln p}{\partial t_k}, \quad \forall j, k.$$

协方差矩阵 $\| I_{jk}(t) \|_{j,k=1}^m$ 称为**信息矩阵**(information matrix). 通过此矩阵可以得信息不等式，后者给出参数 θ 的统计估计之精度的界限.

在用**最大似然法**(maximum-likelihood method)估计参数 θ 时，被观测到的结局 ω(或一系列结局 $\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(N)}$)对应于最大似然的、即使似然函数和对数似然函数达到最大的 $t = \theta^*(\omega)$ 值. 在极大值点上，信息梯度应该等于 0. 不过，所得似然方程

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega; t) = 0$$

除 $t = \theta^*$ 之外还可能有多余的根，后者对应于对数似然函数的局部极大(或极小)值，应将其舍去. 假如在值 $t = 0$ 的某邻域内

$$\det \| I_{jk}(t) \| \neq 0,$$

则由信息梯度的上述性质可知，当所作独立观测次数 N 无限增大时，最大似然估计 θ_N^* 具有渐近最优性.

参考文献

[1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

Н. Н. Ченцов 撰 周概容 译

信息[information; информация]

控制论(cybernetics)的一个基本概念. 在控制论中，人们仅仅从机器和生物吸收给予它们的信息、在“记忆介质”上存储信息、在**通信信道**(communication channel)上传输信息和将信息转变成“信号”的能力方面去研究机器和生物. 在控制论中，人们研究包含在某种数据中的某些量或现象的相关信息的直观图象.

在某些情形下，人们自然地通过所含的信息来比较两组不同的数据，就像通过“面积”来比较平面图形似的：不依赖于测量面积的方式，人们能够证明图形 A 的面积不会大于图形 B 的面积，如果图形 A 完全被包含于图形 B 中(见下面例 1－3). 人们能够将面积用一个数来表达，从而能够比较各种形状的图形，这是一门范围很广的数学理论的一个深刻结论. 信息论中也有类似的基本结论，在确定的且范围很广的假设下，人们能够忽略信息的性质特性，而用一个数来表示它的量. 这个数仅仅描述了在通信信道上传输信息和在具有记忆的机器上存储信息的可能性.

例 1. 给出在力场中运动的粒子的位置和速度提供了它在将来任意时刻的位置的信息，而且这个信息是完全的：它的位置完全被确定. 给出一个粒子的能量也提供了信息，但显然这个信息是不完全的.

例 2. 等式

$$a = b \tag{1}$$

提供了变量 a 和 b 之间关系的信息. 等式

$$a^2 = b^2 \tag{2}$$

提供的信息比(1)式少(因为(1)可以推出(2)，但两者不等价). 最后，等式(对实数)

$$a^3 = b^3 \tag{3}$$

等价于(1)，且提供相同的信息，即(1)和(3)是给出相同信息(same information)的两种不同形式.

例 3. 一些物理量的测量结果会含有某种差错，这些测量结果提供了精确值的信息. 人们通过增加测量次数来改变这个信息.

例 3a. 测量结果的算术平均值也含有被测量的量的某些信息，数理统计学的知识表明，如果差错具有正态分布，且方差已知，则算术平均值含有所有的信息.

例 4. 设测量结果是一个随机变量 ξ, ξ 通过通信信道传输后会出现“失真”，因此人们在信道的接收端得到变量

$$\eta = \xi + \theta,$$

这里 θ 与 ξ 相互独立(概率论意义). “输出” η 提供了“输入” ξ 的信息. 因为 θ 具有“发散”值，因此人们自然地假设这个信息较少.

在上述每个例子中，我们从提供信息的完全程度的角度来比较数据. 在例 1－3 中，这种比较的意义很清楚，且导致等价和非等价关系的分析. 在例 3a 和例 4 中，这种意义还需要弄得更清楚. 数理统计学和信息论使我们做到了这一点(在这两门学科中，这些例子是典型的).

C. Shannon 在 1948 年提出了作为信息论基础的一个定义，即一个随机事物(事件，变量，函数等)相对于另一个随机事物所含的信息量的度量. 这个定义用一个数来表示信息量. 最简单的情形是随机事物为取有限个值的随机变量，这时我们能够很好地解释这个定义. 设 ξ 为一个取值 $x_1, \cdots, x_n$ 的随机变量，相应概率为 $p_1, \cdots, p_n$. η 为一个取值 $y_1, \cdots, y_m$ 的随机变量，相应概率为 $q_1, \cdots, q_m$. 则 ξ 相对 η 所含的信息量 $I(\xi, \eta)$ 定义为

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{p_i q_j}, \tag{4}$$

这里 p_{ij} 为 $\xi = x_i, \eta = y_j$ 出现的概率，对数以 2 为底. $I(\xi, \eta)$ 有一系列性质，这些性质是作为信息量的一个度量所自然要求满足的. 因此，$I(\xi, \eta) \geqslant 0$，等号成立，当且仅当 $p_{ij} = p_i q_j$ 对所有 i, j 成立，即当且仅当 ξ, η 是相互独立随机变量(independent ran-

dom variables). 更进一步，$I(\xi, \eta) \leqslant I(\eta, \eta)$，等号成立，当且仅当 η 是 ξ 的一个函数（例如 $\eta = \xi^2$ 等等）. 更惊奇的事实是 $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$.

$H(\xi) = I(\xi, \xi) = \sum_i p_i \log_2(1/p_i)$ 称为 ξ 的**熵**(entropy). 熵是信息论的一个基本概念. 信息量与熵之间的关系为

$$I(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta). \qquad (5)$$

这里 $H(\xi, \eta)$ 为随机向量 (ξ, η) 的熵，即

$$H(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 \frac{1}{p_{ij}}.$$

已经证明，熵为鉴别（或描述）一个随机变量的可能取值所必需的二元符号数目的平均值. 这使得人们能够理解 (4) 定义的信息量在具有“记忆”的机器中存储信息方面所起的作用. 如果 ξ 和 η 是相互独立的随机变量，则人们需要平均 $H(\xi)$ 个二元符号来记录 ξ 的值，平均 $H(\eta)$ 个二元符号来记录 η 的值，平均 $H(\xi) + H(\eta)$ 个二元符号来记录 (ξ, η) 的值. 如果 ξ 和 η 是相关的随机变量，则记录 (ξ, η) 的值所需要的二元符号数目的平均值小于 $H(\xi) + H(\eta)$，这是因为 $H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - I(\xi, \eta)$.

通过应用较深刻的定理，人们能够说明 (4) 定义的信息量在通信信道的信息传输问题中所起的作用. 信道的信息论的基本特征，所谓信道容量 (capacity)（见**信道传输速率** (transmission rate of a channel)）是通过“信息”的基本概念定义的.

如果 ξ 和 η 取无限个值，则通过极限变换由 (4) 得到

$$I(\xi, \eta) = \int\int p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)q(y)} \, dx dy. \qquad (6)$$

这里 p, q 表示相应的概率密度. 在这种情形下，熵 $H(\xi)$ 和 $H(\eta)$ 不存在，但是类似于 (5)，我们有公式

$$I(\xi, \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\xi, \eta). \qquad (7)$$

这里

$$h(\xi) = \int p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)} \, dx$$

是 ξ 的**微分熵** (differential entropy)（$h(\eta)$ 和 $h(\xi, \eta)$ 同样定义）.

例 5. 设在例 4 的条件下随机变量 ξ 和 θ 具有正态概率分布，均值都为 0，方差分别为 σ_ξ^2 和 σ_θ^2，则从 (6) 或 (7) 知道 $I(\eta, \xi) = I(\xi, \eta) = (1/2)\log_2(1 + \sigma_\xi^2/\sigma_\theta^2)$. 因此，当“噪声”$\theta$ 的水平增加时（即 $\sigma_\theta^2 \to \infty$），“接收信号”$\eta$ 相对“传送信号”ξ 的信息量趋于零；当“噪声”消失时（即 $\sigma_\theta^2 \to 0$），它趋于无穷大.

例 4 或例 5 中的随机变量 ξ 和 η 为随机函数（或称为随机过程）$\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，这些例子分别描述了信道的输入端和输出端的某个量的变化过程. 人们对这种情形特别感兴趣. 给定一个噪声水平（声学术语），$\eta(t)$ 相对 $\xi(t)$ 的信息量可以作为信道本身质量的一个标准.

在数理统计学的问题中，人们也常常用到信息的概念（见例 3 和例 3a）. 然而无论是正式的定义，还是给出的名称，它们都与信息论给出的定义不同. 统计学处理大量的观察结果，且常常将这些结果的完全排列替换成联合特征量（称为统计量）. 这种替换有时损失了信息，但在某种条件下，联合特征量含有完整数据的所有信息（下面例 6 的结尾部分说明了这一点）. R. A. Fisher 在 1921 年将信息的概念引入统计学中.

例 6. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为某个量的 n 个独立观察结果，具有正态分布，概率密度函数为

$$p(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

这里参数 a 和 σ^2（均值和方差）未知，必须通过观察结果来估计. 这时充分统计量 (sufficient statistics)（即观察结果的函数，含有未知参数的所有信息）为算术平均值

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

和所谓经验方差

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

如果 σ^2 已知，则 $\bar{\xi}$ 本身是一个充分统计量（见例 3a）.

术语“完全信息”的意义可以由下面的方法来阐明：我们有未知参数的一个函数 $\varphi = \varphi(a, \sigma^2)$，$\varphi^* = \varphi^*(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为它的一个估计量，且没有系统误差. 设估计量的质量（精确度）由 $(\varphi^* - \varphi)$ 的方差来度量（在数理统计学问题中，人们常常这样做），则存在另一个估计量 φ^{**}，只依赖于 $\bar{\xi}$ 和 σ^2，而与 ξ_i 无关，它不比 φ^* 差（在上述标准意义下）. Fisher 也提出了度量一个观察结果相对未知参数所含（平均）信息量的一个方法. 这个概念也出现在统计估计理论中.

参考文献见**信息传输** (information, transmission of).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, *Bell. System Techn. J.*, **27** (1948), 379 – 423; 623 – 656.

[A2] Shannon, C. E. and Weaver, W., The mathematical theory of communication, Univ. of Illinois Press, 1949.

[A3] Berger, T., Rate distortion theory, Prentice-Hall, 1970.
符方伟 沈世镒 译

信息量 [information, amount of; информации количество]

一个随机变量相对另一个随机变量所含有的信息的信息论度量. 设 ξ 和 η 为定义于**概率空间** (probability space) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$ 上的随机变量, 分别取值于**可测空间** (measurable space) $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ 和 $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$. 设 $p_{\xi\eta}(C)$ $(C \in S_{\mathfrak{X}} \times S_{\mathfrak{Y}})$ 为联合概率分布; $p_\xi(A)$ $(A \in S_{\mathfrak{X}})$ 和 $p_\eta(B)$ $(B \in S_{\mathfrak{Y}})$ 为边际概率分布. 如果 $p_{\xi\eta}(\cdot)$ 相对直积测度 $p_\xi \times p_\eta(\cdot)$ 是绝对连续的, 记 $a_{\xi\eta}(\cdot)$ 为 $p_{\xi\eta}(\cdot)$ 相对 $p_\xi \times p_\eta(\cdot)$ 的 (Radon-Nikodým) 密度, $i_{\xi\eta}(\cdot) = \log a_{\xi\eta}(\cdot)$ 为信息密度 (这里对数通常取 2 或 e 为底), 则信息量定义为

$$I(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} i_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy)$$

$$= \int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} a_{\xi\eta}(x, y) \log a_{\xi\eta}(x, y) p_\xi(dx) p_\eta(dy).$$

如果 $p_{\xi\eta}(\cdot)$ 相对 $p_\xi \times p_\eta(\cdot)$ 不绝对连续, 则定义 $I(\xi, \eta) = +\infty$.

如果随机变量 ξ 和 η 只取有限个值, 则 $I(\xi, \eta)$ 的表示形式为

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j},$$

这里 $\{p_i\}_{i=1}^n$, $\{q_j\}_{j=1}^m$, $\{p_{ij}: i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m\}$ 为 ξ, η 和 (ξ, η) 的概率分布. (特别地,

$$I(\xi, \xi) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = H(\xi)$$

为 ξ 的**熵** (entropy)). 如果 ξ 和 η 为随机向量, ξ, η 和 (ξ, η) 的密度函数 $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ 和 $p_{\xi\eta}(x, y)$ 存在, 则

$$I(\xi, \eta) = \int p_{\xi\eta}(x, y) \log \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x) p_\eta(y)} \, dx dy.$$

一般地,

$$I(\xi, \eta) = \operatorname{Sup} I(\varphi(\xi), \psi(\eta)).$$

这里上确界是对所有取有限个值的可测函数 $\varphi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 取的. 信息量的概念主要用于信息传输理论.

参见**信息传输** (information, transmission of) 的参考文献 [1], [2], [4].

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰 符方伟 沈世镒 译

信息相关系数 [information correlation coefficient; информационный коэффициент корреляции]

两个随机变量 X 和 Y 相依性的一种度量, 定义为一个随机变量中关于另一个随机变量的信息量的函数:

$$R(X, Y) = \sqrt{1 - e^{-2I(X,Y)}},$$

其中 $I(X, Y)$ 是**信息量** (information, amount of).

作为相依性的度量, 信息相关系数的性质完全决定于信息量 $I(X, Y)$ 的性质, 而后者本身是随机变量 X 和 Y 的相依性特征. 作为普通**相关系数** (correlation coefficient) ρ 的类似, 信息相关系数 R 用来做相依性的一种独立度量的根据是, 对于任意随机变量, 它比 ρ 优越. 因为由信息的性质, 知 $R(X, Y) = 0$, 当且仅当 X 和 Y 是独立的 (independent). 如果 X 和 Y 有联合正态分布, 则两种相关系数相同, 因为这时有

$$I(X, Y) = -\frac{1}{2} \ln(1 - \rho^2).$$

利用信息相关系数实际研究相依性, 相当于特征的列联表型表中信息量的分析. R 的样本类似是系数

$$\hat{R} = \sqrt{1 - e^{-2\hat{I}}},$$

它是通过信息统计量 $\hat{I}$ 来求的, 而

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \frac{n_{ij}}{n} \ln \frac{n n_{ij}}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}},$$

其中 n 是观测次数, s 和 t 分别是按两个特征所划分的组数, n_{ij} 属于 (i, j) 组的观测结果的频数, $n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}, n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} n_{ij}$. 这样, 样本信息相关系数的分布问题归结为样本信息的分布问题. 作为相依性度量的样本信息, 其分析之所以困难, 是因为 $\hat{I}$ 与观测结果的分组密切相关.

参考文献

[1] Linfoot, E., An informational measure of correlation, *Information and Control*, **1** (1957), 1, 85–89.

[2] Kullback, S., Information theory and statistics, Wiley, 1959.
А. В. Прохоров 撰 周概容 译

信息距离 [information distance; информационное расстояние]

概率分布集合上的一种度量或伪度量, 用以表征这些分布所描绘的随机现象的"不相似程度". 在根据观测结果区分 P 和 Q 的问题中, 最感兴趣的是与试验的信息量度量有关的信息距离 $\rho(P, Q)$.

在任何具体统计问题中, 在对观测资料进行处理之后, 应作出关于所观测现象的推断. 由于观测结果的随机性, 这些推断一般并不完全准确. 直观上清楚, 每一个样本都含有一定量的有用信息, 并且, A)

在对观测结果进行处理时只可能丢失信息；B）由独立信息源(例如，独立样本)所提供的信息可以相加．这样，如果把每次观测中的平均信息量定为一次试验的信息量（informativity of an experiment（亦见**信息量**(information, amount of)），则它满足公理A)和B)．虽然信息的概念是直观的，有时仍可给出满足公理A)和B)且在观测次数不断增大的问题中渐近地描述推断的平均准确度的量 I，故可以将其定义为信息量．信息量可以是数量，也可以是矩阵量．分布律参数估计问题中的**信息矩阵**(information matrix)就是一个重要例子．

根据公理B)，信息量像长度的平方一样是可加的，即合理的信息距离应该具有可加性．最简单的信息距离是：变差距离(distance in variation)：

$$\rho_V(P,Q)=\int|P(d\omega)-Q(d\omega)|,$$

和基于不变 Riemann 度量的 Fisher 距离(Fisher distance in an invariant Riemannian metric)：

$$\rho_F(P,Q)=2\arccos\int\sqrt{P(d\omega)Q(d\omega)}\ .$$

后者不具备可加性并且没有恰当的统计意义．

根据 Neyman-Pearson 理论，关于区分结局 ω 的一般空间 Ω 上概率分布 $P(d\omega)$ 和 $Q(d\omega)$ 的全部有用信息，都包含在似然比或者它的对数

$$\ln p(\omega)-\ln q(\omega)=\ln\frac{dP}{dQ}\ (\omega)$$

中，而此式精确到在零概率结局集上的值有定义．数学期望

$$I(P:Q)=\int_\Omega\left[\ln\frac{p(\omega)}{q(\omega)}\right]P(d\omega)=$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\ln\frac{P(d\omega)}{Q(d\omega)}\right]Q(d\omega)$$

称为(按照 Kullback)区分相对 Q 有利于 P 的(平均)信息((average) information)，亦称为相对熵(relative entropy)，或信息离差(information deviation)．非负(可能无穷)量 $I(P,Q)$ 满足公理A)和B)．它表征 P 对 Q 的单侧区分的准确性，决定随独立观测次数 N 增大第二类错误(即当 P 不正确时错误地接受它)的概率 β_N 减小的最高阶数：

$$\beta_N\sim\exp\{-N\cdot I(P:Q)\},$$

这时假设显著性水平(第一类错误概率) α_N 固定，$0<a_0\leqslant\alpha_N\leqslant a_1<1$．

类似的量 $I(Q:P)$，当 $0<b_0\leqslant\beta_N\leqslant b_1<1$ 时决定 α_N 减小的最高阶数．"相似"关系(包括随机现象的"相似性")不对称，因而一般 $I(P:Q)\neq I(Q:P)$．$I(P:Q)$ 的几何解释——它是从 Q 到 P 的不对称距离的平方的一半，在一系列统计学问题中是自然的．对于这样的信息距离，三角形不等式不成立．但是类似 Pythagor 定理的一个不对称的等式成立，即

$$I(R:P)=I(R:Q)+I(Q:P),$$

只要

$$\int_\Omega\left[\ln\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right]Q(d\omega)=\int_\Omega\left[\ln\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right]R(d\omega).$$

当用极小化极大方法检验 P 和 Q 时，出现 P 和 Q 的相似程度的对称特征．对于最优检验，有

$$\alpha_N=\beta_N\sim\ \exp[-NI_{PQ}],$$

$$I_{PQ}=-\ln\min_{0<u<1}\int_\Omega|P(d\omega)|^u|Q(d\omega)|^{1-u}=$$

$$=\min_R\ \max\{I(R:P),I(R:Q)\}.$$

与信息离差相联系的还有若干其他信息距离(见[1],[2])．对无限接近的 P 和 Q，信息离差的主部与任何合理信息离差的平方一样，可以精确到常因数 $c(I)$ 由 Fisher 二次型给出．对于信息离差，

$$c(I)=\frac{1}{2}\ .$$

另一方面，任何信息离差满足公理A)，只要诱导拓扑强于(上面定义的)变差距离诱导的拓扑(见[3]，[4])．

参考文献

[1] Kullback, S., Information theory and statistics, Wiley, 1959.

[2] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М. 1972(英译本：Čentsov, N. N. [N. N. Chentsov], Statistical decision rules and optimal inference, Amer. Math. Soc., 1982).

[3] Csiszar, I., On topological properties of f-divergences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **2**(1967), 329－339.

[4] Morozova, E. A. and Čentsov, N. N. [N. N. Chentsov], Markov maps in noncommutative probability theory and mathematical statistics, in Yu. V. Prokhorov. et al. (ed.): Probability theory and mathematical statistics, VNU, 1987, 287－310.

Н. Н. Ченцов 撰 周概容 译

信息复制精确度[information, exactness of reproducibility of；сообщений точность воспроизведения]

信息传输的质量的一种度量，信息量从一个**信息源**(information, source of)通过一个**通信信道**(communication channel)传输给接收器(终端)的．信息复制精确度的相关标准通常是通过下述统计方法来描述的：设信息源产生的通信信号 ξ 取值于**可测空间**(measurable space) $(\mathfrak{X},S_{\mathfrak{X}})$，接收器接收的通信信

号 $\tilde{\xi}$ 取值于可测空间 $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. 给出 $(\xi, \tilde{\xi})$ 的联合概率分布的适应集 W, W 为乘积空间 $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ 上概率测度集合的子集. 信息复制精确度通常通过一个失真度量 $\rho(x, \tilde{x})$, $x\in\mathfrak{X}$, $\tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{X}}$ 来定义, 这里 $\rho(x, \tilde{x})$ 为 x 和 $\tilde{x}$ 的一个非负可测函数, 因此适应通信集 W 由下面公式给出

$$\mathsf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leqslant \varepsilon, \tag{1}$$

这里 $\varepsilon > 0$ 为一个给定常数.

特别地, 当 $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}}) = (X^n, S_{X^n})$, $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}}) = (\tilde{X}^n, S_{\tilde{X}^n})$ 时, 人们通常采用分量相加来定义信息复制精确度, 即

$$\rho(x^n, \tilde{x}^n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_0(x_k, \tilde{x}_k).$$

这里 $x^n = (x_1, \cdots, x_n)\in X^n$, $\tilde{x}^n = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)\in\tilde{X}^n$, $x_k\in X$, $\tilde{x}_k\in\tilde{X}$ $(k = 1, \cdots, n)$, 且 $\rho_0(x, \tilde{x})$ $(x\in X, \tilde{x}\in\tilde{X})$ 是一个非负可测函数. 在这种情形下, 人们有时不采用条件 (1), 而采用下面的条件:

$$\mathsf{E}\rho_0(\xi_k, \tilde{\xi}_k) \leqslant \varepsilon, \text{ 对所有 } k = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

如果 $X = \tilde{X}$, 且

$$\rho_0(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{如果 } x \neq \tilde{x}, \end{cases}$$

则条件 (1) 和 (2) 就分别转变成对通信分量的平均或最大**译码错误概率** (erroneous decoding, probability of) 的限制. 如果信息源是连续的 (例如 Gauss 信息源), 人们通常假设 $\rho_0(x, \tilde{x}) = (x - \tilde{x})^2$.

参考文献

[1] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

[2] Berger, T., Rate distortion theory, Prentice Hall, 1971.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Csiszar, I. and Körner, J., Information theory-coding theorems for discrete memoryless systems, Akad Kaido, Budapest, 1981.

符方伟 沈世镒 译

信息矩阵 [**information matrix; информационная матрица**], Fisher 信息 (Fisher information)

信息 (information) 的**协方差阵** (covariance matrix). 对于具有依赖向量 (包括数量) 参数 $t = (t_1, \cdots, t_m)\in\Theta$ 的充分光滑密度 $p(\omega; t)$ 的受控概率分布族 $P^t(d\omega)$ (见**概率分布密度** (density of a probability distribution)), 当 $t = \theta$ 时, 信息矩阵的元素定义为

$$I_{jk}(\theta) = \\ = \int_{\Omega}\frac{\partial\ln p(\omega; t)}{\partial t_j}\frac{\partial\ln p(\omega; t)}{\partial t_k}\bigg|_{t=\theta}p(\omega; \theta)d\mu, \tag{1}$$

其中 $j, k = 1, \cdots, m$. 对于数量参数 t, 信息矩阵可以用一个数——信息梯度的**方差** (dispersion) 表示.

信息矩阵决定一非负微分二次型

$$\sum_{j,k} I_{jk}(\theta)dt_j dt_k = \Delta_\theta, \tag{2}$$

它赋予分布族 $\{P^t\}$ 以 Riemann 度量. 如果结局 ω 的空间 Ω 有限, 则

$$\Delta_p = \sum_j\frac{(dp_j)^2}{p_j}\ ;\ p_j = P(\omega_j),\ \forall\omega_j\in\Omega.$$

Fisher 微分二次型 (2) 是关于统计判决规则范畴不变的, (精确到常数因子) 唯一的微分二次型. 因此它在许多统计规律性的表述中出现.

结局空间 Ω 的任何可测映射 f 可以诱导出新的光滑分布族 $Q^t = P^t f^{-1}$, 其信息矩阵为 $I^Q(\theta)$. 这时, 对于任意 $z_1, \cdots, z_m$, 信息矩阵单调不增:

$$\sum_{j,k} I_{jk}^Q z_j z_k \leqslant \sum_{j,k} I_{jk}^P z_j z_k.$$

信息矩阵还具有可加性. 如果 $I^{(i)}(\theta)$ 是密度为 $p_i(\omega^{(i)}; t)$ 的分布族的信息矩阵, 则分布族

$$p(\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(N)}; t) = \prod_{i=1}^{N} p_i(\omega^{(i)}; t)$$

的信息矩阵为 $I_N(\theta) = \sum_i I^{(i)}(\theta)$. 特别地, 对于 N 次独立同分布试验, $I_N(\theta) = NI(\theta)$. 在分布律的参数估计问题中, 可以用信息矩阵表征判决规则的统计精度. 对于数量参数 t 的任何无偏估计量 $\tau = \tau(\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(N)})$ 的方差, 有

$$\mathsf{D}_\theta\tau \geqslant [NI(\theta)]^{-1}.$$

对于向量参数的估计量, 其信息有类似的矩阵不等式, 其数量推论

$$\mathsf{E}_\theta\sum_{j,k=1}^{m}[\tau_j(\omega) - \theta_j][\tau_k(\omega) - \theta_k]I_{jk}(\theta) \geqslant mN^{-1} \tag{3}$$

表明, 无偏估计量在任何情形下也不可能非常精确. 对于任意估计量, 后者不成立. 不过有些约束仍然成立, 例如对平均精度的约束:

$$\mathfrak{M}_{\Theta'}\mathsf{E}_\theta\langle\tau - \theta|I(\theta)|\tau - \theta\rangle \geqslant mN^{-1} + o(N^{-1}), \tag{4}$$

其中 (3) 左侧的平均 $\mathfrak{M}$ 是在任一紧子域 $\Theta'\subset\Theta$ 上来求,

$$dV(\theta) = \sqrt{\det I(\theta)}\ d\theta_1\cdots d\theta_m;$$

余项依赖于 Θ' 的维数. 不等式 (4) 是渐近精确的, 并且在此意义下最大似然估计是渐近最优的.

在退化点上 $\det I(\theta) = 0$, 参数的联合估计是困难的; 如果在某个区域内 $\det I(\theta) = 0$, 则联合估计一般不可能. 这样, 仿效 R. Fisher ([1]), 可以相当谨慎地

说，信息矩阵描绘包含在随机样本中的有关分布律参数的平均**信息量**（information, amount of）.

参考文献

[1] Fisher, R. A., Theory of statistical estimation, *Trans. Combridge Philos. Soc.*, **22** (1925), 700 – 725.

[2] Barra, J. R., Notions fondamentales de statistique mathématique, Dunod, 1971.

[3] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие иравила и оптимальные выводы, М. 1972 (英译本: Čencov, N. N. [N. N. Chentrsov], Statistical decision rules and optimal inference, Amer. Math. Soc., 1982).

Н. Н. Ченцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965 (中译本: C. R. 劳, 线性统计推断及其应用，科学出版社，1985).

周概容 译

信息的量化 [information, quantization of; сообщений квантование]

具有下述性质的一种划分：将**信息源**（information, source of）产生的通信值集合划分成有限个（有时是可数个）不相交子集 A_i，使得每一类的信息可以在给定的**信息复制精确度**（information, exactness of reproducibility of）内由某一个选择元 $a_i \in A_i$ 来表示．一个给定的信息量化对应一种信息源编码方法，编码函数定义为 $\varphi(x) = a_i$，$x \in A_i$．信息量化使得人们能够将一个连续信号的发送转化成一个离散信号的发送，且不影响关于信息复制精确度的某些条件.

参考文献

[1] Харкевич, А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

[2] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, *Bell Systems Techn. J.*, **27** (1948), 379 – 423; 623 – 656.

[3] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

[4] Berger, T., Rate distortion theory, Prentice Hall, 1971.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Csiszar, I. and Körner, J., Information theory - coding theorems for discrete memoryless systems, Akad. Kaido, Budapest, 1981.

符方伟 沈世镒 译

信息产生率 [information, rate of generation of; сообщений скорость создания]

刻画单位时间内信息源发送出的**信息量**（information, amount of）的一个量．设离散时间信息源 u 产生通信信号 $\xi = (\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots)$，这里 $\{\xi_k: k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为一列取值于有限集 X 上的随机变量，信息源 u 的信息产生率由下面方程定义

$$\bar{H}(u) = \lim_{n-k\to\infty} \frac{1}{n-k} H(\xi_k^n), \qquad (*)$$

如果这个极限存在．这里 $H(\xi_k^n)$ 是随机变量 $\xi_k^n = (\xi_k, \cdots, \xi_n)$ 的**熵**（entropy）．（*）式定义的 $\bar{H}(u)$ 也称为信息源的熵率.

在某些情形下，人们能够成功地证明（*）式中的极限存在，并且直接计算出来，例如平稳信息源．对于平稳 Марков 信息源和 Gaussian 信息源，人们已经得到了 $\bar{H}(u)$ 的直接计算公式．信息产生率的概念与信息源的**冗余度**（redundancy）的概念有密切的联系.

如果 u 是一个具有有限个状态的平稳遍历信息源，则下述渐近一致分布性质（property of asymptotic uniform distribution）（McMillan 定理（McMillan theorem），[1]）成立．设 $P(x^L) = \mathrm{P}\{\xi^L = x^L\}$，这里 $x^L = (x_1, \cdots, x_L)$ 为 L 长信息源段 $\xi^L = (\xi_1, \cdots, \xi_L)$ 的取值．对任意 $\varepsilon, \delta > 0$，存在 $L_0(\varepsilon, \delta)$，使得当 $L \geqslant L_0(\varepsilon, \delta)$ 时,

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{-\log P(x^L)}{L} - \bar{H}(u)\right| > \delta\right\} < \varepsilon.$$

参考文献

[1] Wolfowitz, J., Coding theorems of information theory, Springer, 1961.

[2] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

[3] Feinstein, A. A., Foundations of information theory, McGraw-Hill, 1958.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Csiszar, I. and Körner, J., Information theory - coding theorems for discrete memoryless systems, Akad. Kaido, Budapest, 1981.

[A2] Rényi, A., A diary on information theory, Akad. Kaido & Wiley, 1987.

符方伟 沈世镒 译

信息集 [information set; информационное множество], 对策论中的

对局中人已知的对策在给定时刻的所有可能的形势（位置、状态）的集合．这个集合包含当前形势．信息集刻画了一个局中人对以往的形势以及他自身的选择（记忆）和其他局中人的选择（信息）的知识．面对一个信息集，局中人需要作出他的决策（选择信息集的一个替换（alternative），即选择一个信息集中所有位置的同时替换），它作为位置的一个替换仅在现时表演的对策中具体化．

И. Н. Врублевская 撰

【补注】

参考文献

[A1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1953 (中译本: 约翰·冯·诺意曼, 奥斯卡·摩根斯特恩, 竞赛论与经济行为, 科学出版社, 1963).

[A2] Rapoport, A., N-person game theory, Univ. of Michigan Press, 1970.

[A3] Szép, J. and Forgó, Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.

史树中 译

信息源 [information, source of; источник сообщений]

一个产生能在**通信信道** (communication channel) 上传输的信息的物体. 信息源 U 产生的信息是一个**随机变量** (random variable) ξ, 这个随机变量定义于**概率空间** (probability space) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, 取值于**可测空间** (measurable space) $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$, 具有概率分布 $p(\cdot)$. 通常

$$(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}}) = \prod_{t\in\Delta}(X_t, S_{X_t}),$$

这里 (X_t, S_{X_t}) 都等于可测空间 (X, S_X), $\prod$ 为当 t 取遍集合 Δ 时 (X_t, S_{X_t}) 的直积. 一般 Δ 为实轴上某一个区间 (有限、半无限、双无限), 或某一个离散子集 (通常 $\Delta=\{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 或 $\Delta=\{1, 2, \cdots\}$). 对于第一种情形, 称为连续时间信息源 (continuous-time source of information); 对于第二种情形, 称为离散时间信息源 (discrete-time source of information); 对于其他情形, 随机过程 $\xi=\{\xi(t): t\in\Delta\}$ 表示信息源产生的信息, 这里 $\xi(t)$ 取值于 (X, S_X). 在应用中, $\xi(t)$ 称为信息源在时刻 t 产生的信息. 随机变量 $\xi_t^T=\{\xi(s): t<s\leqslant T\}$ 称为信息段 (segments of information) $(t, T]$.

信息源可以根据产生的信息 (即随机过程 $\xi(t)$) 的种类来分类. 例如, 如果 $\xi(t)$ 是一个独立同分布的随机过程, 或平稳过程, 或遍历过程, 或 Markov 过程, 或 Gauss 过程等等, 则信息源分别称为无记忆信息源 (source of information without memory), 平稳信息源 (stationary source), 遍历信息源 (ergodic source), Марков 信息源 (Markov source), Gauss 信息源 (Gaussian source) 等等.

信息传输 (information, transmission of) 理论的研究问题之一是信息源编码问题. 它分为定长信息源编码, 变长信息源编码和具有某种精确度条件的信息源编码等等 (在应用中, 一些编码问题称为信息量化, 信息压缩等等). 例如, 设 U 为一个离散时间无记忆信息源, 产生信息 $\xi=(\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots)$, 分量 ξ_k 取值于有限集 (字母表) X. 设 $\widetilde{X}$ 为另一个有限集 (复制信息 $\widetilde{\xi}=(\cdots, \widetilde{\xi}_{-1}, \widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}_1, \cdots)$ 的分量 $\widetilde{\xi}_k$ 的取值集合). 长为 L 的信息段 $\xi^L=(\xi_1, \cdots, \xi_L)$ 的一个体积为 M 的编码 (encoding) 定义为一个从 X^L 到 $\widetilde{X}^L$ 的一个含有 M 个元的子集的映射. 设 $\widetilde{x}^L(x^L)$ 为 $x^L\in X^L$ 在这个映射下的像 (X^L 为 L 个 X 的直积). 更进一步假设**信息复制精确度** (information, exactness of reproducibility of) 由一个非负实函数 $\rho(x, \widetilde{x})$ $(x\in X, \widetilde{x}\in\widetilde{X})$ 即失真度量 (measure of distortion) 给出. 编码的平均失真度量为

$$\bar{\rho}_L=\frac{1}{L}\,\mathsf{E}\rho_L(\xi^L, \widetilde{x}^L(\xi^L)),$$

这里

$$\rho_L(x^L, \widetilde{x}^L)=\sum_{k=1}^{L}\rho(x_k, \widetilde{x}_k),$$

其中 $x^L=(x_1, \cdots, x_L)$, $\widetilde{x}^L=(\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_L)$. 无记忆信息源的 ε **熵** (ε-entropy) 为

$$\bar{H}_\varepsilon(U)=\inf I(\xi_1, \widetilde{\xi}_1),$$

这里 $I(\cdot, \cdot)$ 是**信息量** (information, amount of), 下确界是对随机变量对 $(\xi_1, \widetilde{\xi}_1)$ 的适应分布集取的, 这里要求 ξ_1 取值于 X, $\widetilde{\xi}_1$ 取值于 $\widetilde{X}$, ξ_1 的分布与 U 的每一个分量的分布相同, 且

$$\mathsf{E}\rho(\xi_1, \widetilde{\xi}_1)\leqslant\varepsilon.$$

信息源编码定理 (encoding theorem for a source of information). 设 $\bar{H}_\varepsilon(U)$ 为离散无记忆信息源 U 的 ε 熵, 有限失真度量为 $\rho(\cdot, \cdot)$; 令 $M=e^{LR}$, 则 1) 对任意的 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $R>\bar{H}_\varepsilon(U)$, 和所有充分大的正整数 L, 存在信息段长度为 L, 体积为 M 的编码, 使得平均失真度量 $\bar{\rho}_L$ 满足不等式 $\bar{\rho}_L\leqslant\varepsilon+\delta$; 2) 如果 $R<\bar{H}_\varepsilon(U)$, 则对任意信息段长度为 L, 体积为 M 的编码, 其平均失真度量 $\bar{\rho}_L>\varepsilon$. 这个编码定理能够推广到一类更广的信息源, 例如, 分量的取值空间 X 为连续的信息源. 在这种情形下, 人们不再称体积为 M 的编码, 而是称为信息源体积的量化 (quantization of volume of the source of information). 必须指出的是, 在信息源编码定理中, 如果取 $\varepsilon=0$, $X=\widetilde{X}$, 失真度量为

$$\rho(x, \widetilde{x})=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=\widetilde{x},\\ 1, & \text{如果 } x\neq\widetilde{x},\end{cases}$$

则 ε 熵 $\bar{H}_\varepsilon(U)$ 为信息源的**信息产生率** (information, rate of generation of).

参考文献

[1] Shannon, C., A mathematical theory of communication, I－II, *Bell. Systems Techn. J.*, **27** (1948), 379－423; 623－656.

[2] Добрушин, Р. Л., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 6, 3－104.

[3] Gallager, R., Information theory and reliable commu-

nication, Wiley, 1968.
[4] Berger, T., Rate distortion theory, Prentice-Hall, 1971.
Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰 符方伟 沈世镒 译

信息论 [information theory; информации теория]

应用数学和控制论的一个分支，研究信息的传输、存储、处理、分类的数学模型和质量估计．“信息论”的术语出现在本世纪五十年代，但一直到现在（1988 年）（目前可分为经典信息论和“广义”信息论），还没有一种确定且被人们普遍接受的解释．在不同的领域，人们定义的信息论的内容不尽相同．逻辑上讲，人们需要将传统上不属于信息论的一些学科归纳到信息论中．归纳与信息论相关的各个学科的一个重要特征是这些学科广泛使用了统计方法．这是因为信息的处理过程与减少一些事物的不确定性程度有关，而通常人们用一个事件的概率去度量这个事件的不确定性程度．

无论从何种观点来看，**信息传输**（information, transmission of）理论是信息论最重要的组成部分．通常，特别是在纯数学的文章中，“信息论”术语被理解为“信息传输理论”的同义词．信息传输理论主要研究信息传输的最优和拟优方法，这时信息是在**通信信道**（communication channel）上进行传输的，且假设人们可以在很广的范围内选择将消息元转变成输入信号的编码方法和将输出信号转变成消息元的译码方法．

信息传输理论的诞生应该归功于 C. Shannon，他在 1948 年解决了信息传输理论的基本问题：在传输误差概率充分小的情况下，确定最优**编码和译码**（coding and decoding）方法所能达到的信息传输速率．这个最优传输速率，称为信道容量（见**信道传输速率**（transmission rate of a channel）），可以由信息量的术语来描述，**信息量**（information, amount of）是由 Shannon 引入的．信息量的术语非常重要，且在信息传输理论和信息论的其他分支中有着许多重要的应用．

信息存储的最优方法在原理上与信息传输的最优方法是一致的，这是因为信息存储可以理解为信息在时间上的传送，而信息传输是信息在空间的传送．

信息传输理论的基本定理具有存在性定理的特征．这些定理说明了最优编码和译码方法的存在性，但是没有给出构造或技术实现这些最优编码和译码的方法．因此，编码理论紧接着得到了充分的发展．在编码理论中，人们试图构造具体和相对简单的编码和译码算法去尽量接近信息传输理论中已经证明存在的最优算法．编码理论具有自己的特色，它除了应用统计学方法外，还要用到很深的代数和组合学知识去构造具体的码．

通常，所有应用统计方法和理论去描述通信信道的输入和输出信号的变换方法的研究，也被人们认为属于信息论的范畴．从数学的观点看，这些研究正是数理统计（主要是随机过程统计）、平稳随机过程的预测和滤波理论、博奕论等的应用．因此，信息论的这个分支同其他应用概率论的分支一样，在它的发展过程中没有用到其他特别的数学工具和方法．

模式识别（pattern recognition）理论通常也被人们认为属于信息论的范畴．它研究事物分类的分布算法，这些事物只有直观的描述而没有清晰的数学描述．这样的算法通常包含一个关于人们先前已经分类的一系列事物的学习过程．

人们试图确定信息论的范畴，首先给出信息论的普遍可以接受的定义，然后将词汇上使用了信息这个名词的所有数学分支归纳进信息论的范畴，但这种期望至少在现阶段将导致信息论的概念的不合理的扩充．特别值得指出的是数理统计研究信息的采集问题，算法理论研究信息的处理问题，形式语言研究信息的描述问题等等．

信息论的概念很多，而且应用非常广泛．到目前为止（1996 年），总体上说，信息科学由一些独立的学科组成，每一个学科研究信息概念的一个方面．尽管人们付出了许多努力去统一这些学科，但是相对来说进展很慢，创立一个包罗万象的信息论还是一件很遥远的事情．

参考文献

[1] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.
[2] Колмогоров, А. Н., 《Пробл. передачи информ.》, 1 (1965), 1, 3 – 11.
[3] Харкевич, А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.
[4] Brillouin, L., Science and information theory, Acad. Press, 1956.
[5] Cherry, C., On human communication, M. I. T., 1957.
[6] Яглом, А. М., Яглом, И. М., Вероятность и информация, 3 изд., М., 1973.
[7] Wosencraft, J. and Jacobs, I., Principles of communication engineering, Wiley, 1965.
[8] Левин, Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., М., 1974.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【译注】

参考文献

[B1] Cover, T. M. and Tomas, J. A., Elements of information theory, Wiley, 1991.
[B2] Blahut, R. E., Principles and practice of information theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.

符方伟 沈世镒 译

信息传输 [**information, transmission of; информации передача**]

信息论 (information theory) 的一部分，研究信息从信息源向接收器（终端）传输的过程，见**信息源** (information, source of). 在信息传输理论中，人们研究信息传输的最优和拟优方法，这时信息是在一个**通信信道** (communication channel) 上进行传输的，且假设人们可以在很广的范围内选择将消息元转变成输入信号的编码方法和将输出信号转变成消息元的译码方法（见**编码和译码** (coding and decoding)).

信息传输系统的一般机制，首先由 C. Shannon ([1]) 提出，可以描述如下. 信息源产生消息，这个消息通过通信信道由信息源向接收器传输. 一般假设消息是一个随机变量，定义于**概率空间** (probability space) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$，取值于**可测空间** (measurable space) $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$，**概率分布** (probability distribution) 为 $p(\cdot)$. 通常 $\xi=\{\xi(t): t\in\Delta\}$（这里 Δ 为参数 t 的取值集合）为一个分量取值于可测空间 (X, S_X) 的离散或连续时间的随机过程. 例如，在离散时间情形下，$\xi=\{\xi_k: k=1, 2, \cdots\}$ 或 $\xi=\{\xi_k: k=\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$；随机变量 ξ_k 取值于 (X, S_X)，称为输入消息的分量，常常作为信息源在时刻 k 产生的消息. 随机变量 $\xi^n=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，取值于 (X, S_X) 的 n 重直积集合 (X^n, S_{X^n})，称为 n 长输入消息. 相应的概念可以类似地定义于消息为连续时间随机过程的情形.

接收器接收的输出消息也是一个随机变量 $\widetilde{\xi}$，定义于相同的概率空间 $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$，取值于可测空间 $(\widetilde{\mathfrak{X}}, S_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$（一般不同于 $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$）. 当 $\widetilde{\xi}$ 是一个离散或连续时间随机过程时，人们类似地引入输出消息的分量的取值空间 $(\widetilde{X}, S_{\widetilde{X}})$ 和 n 长输出消息的取值空间 $(\widetilde{X}^n, S_{\widetilde{X}^n})$ 的概念.

信息复制精确度作为消息在通信信道中传输的质量的度量（见**信息复制精确度** (information, exactness of reproducibility of)). 一般如果传输是在具有噪声的通信信道中进行，即使 $\mathfrak{X}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{X}}$ 相同，人们也不可能达到完全精确，即发送和接收的消息完全相同. 反映精确度的要求通常是通过如下统计方法来描述的：引入发送和接收消息对 $(\xi, \widetilde{\xi})$ 的联合概率分布的适应集 W，W 为乘积空间 $(\mathfrak{X}\times\widetilde{\mathfrak{X}}, S_{\mathfrak{X}}\times S_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$ 上概率测度集合的子集. W 通常由一个非负可测函数 $\rho(x, \widetilde{x})$ $(x\in\mathfrak{X}, \widetilde{x}\in\widetilde{\mathfrak{X}})$ 和一个数 $a>0$ 来表示：$(\xi, \widetilde{\xi})$ 的概率分布属于 W 的充要条件为

$$\mathsf{E}\rho(\xi, \widetilde{\xi})\leqslant a. \tag{1}$$

因此，人们通过接收消息与发送消息的差别量来给出复制精确度的条件.

信息源产生的消息通过一个通信信道来传送. 一个**信道** (channel) (Q, V) 由下列元素组成：两个可测空间 $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$，$(\widetilde{\mathfrak{Y}}, S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}})$；一个转移函数 $Q(y, A)$ $(y\in\mathfrak{Y}, A\in S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}})$，固定 $A\in S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}}$，$Q(y, A)$ 关于 σ 代数 $S_{\mathfrak{Y}}$ 可测，固定 $y\in\mathfrak{Y}$，$Q(y, A)$ 是 $(\widetilde{\mathfrak{Y}}, S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}})$ 上一个概率测度；$(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$ 上概率测度构成的集合的一个子集 V. 空间 $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$，$(\widetilde{\mathfrak{Y}}, S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}})$ 分别称为信道的输入信号和输出信号集合，V 是输入信号分布的限制. 两个随机变量 η 和 $\widetilde{\eta}$（定义于概率空间 $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$）称为通过信道 (Q, V) 相连接，如果它们分别取值于 $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$ 和 $(\widetilde{\mathfrak{Y}}, S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}})$，对任意 $A\in S_{\widetilde{\mathfrak{Y}}}$，下面等式以概率 1 成立：

$$\mathsf{P}\{\widetilde{\eta}\in A\mid\eta\}=Q(\eta, A), \tag{2}$$

且 η 的概率分布属于 V. 一般 V 由一个可测函数 $\pi(y)$ $(y\in\mathfrak{Y})$ 和一个数 $b>0$ 来表示：η 的概率分布属于 V 的充要条件为

$$\mathsf{E}\pi(\eta)\leqslant b. \tag{3}$$

在离散信道情形下，V 一般取为所有概率分布构成的集合，即没有限制.

实际上 $\mathfrak{Y}$ 为发送机的传送信号集合，$\widetilde{\mathfrak{Y}}$ 为接收机的接收信号集合（在应用中 $\mathfrak{Y}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{Y}}$ 通常相同）. 如果输入信号随机变量 η 已知，则由 (2) 式可知输出信号的条件分布. 引入限制 V 是因为在许多应用中输入信号的分布不能随意选取（通常假设输入信号的平方的均值（能量）不能超过一个给定常数）. 输入和输出信号为离散或连续时间随机过程的情形在应用中是重要的，这时 $\eta=\{\eta(t)\}$ 和 $\widetilde{\eta}=\{\widetilde{\eta}(t)\}$ 定义于实轴上一个有限或无限（半无限或双无限）区间，分别取值于可测空间 (Y, S_Y) 和 $(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$. 例如，如果 $\eta=\{\eta_1, \eta_2, \cdots\}$ 和 $\widetilde{\eta}=\{\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2, \cdots\}$ 为随机变量列，则以 η 和 $\widetilde{\eta}$ 为输入和输出信号的通信信道通常被看成一列信道（上述意义下）. 这些信道称为给定信道的段，这些信道段的输入和输出信号为 $\eta^n=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ 和 $\widetilde{\eta}^n=(\widetilde{\eta}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$.

为了将输入消息转变成通信信道上的传送信号和将信道终端的接收信号转变成输出消息，有必要对消息进行编码和译码运算. 一个编码 (encoding) 是一个取值于 $\mathfrak{Y}$ 的函数 $f(x)$ $(x\in\mathfrak{X})$，一个译码 (decoding) 是一个取值于 $\widetilde{\mathfrak{X}}$ 的函数 $g(\widetilde{y})$ $(\widetilde{y}\in\widetilde{\mathfrak{Y}})$. 集合 $\{f(x): x\in\mathfrak{X}\}$ 称为一个码 (code)，集合中每一个元素称为码字 (code words). 使用编码 $f(x)$ 和译码 $g(\widetilde{y})$ 意味着，如果消息元为 $x\in\mathfrak{X}$，则我们在信道中传送 $y=f(x)$；如果在信道终端接收到 $\widetilde{y}\in\widetilde{\mathfrak{Y}}$，则将它译码成输出消息 $\widetilde{x}=g(\widetilde{y})$. 在信息传输理论中，人们常常采用随机编码 (random encodings) 方法，即码字是按照

一个概率分布随机选取的.

信息源产生一个消息，具有概率分布 $p(\cdot)$，它能够在信道 (Q, V) 上传送，这时编码为 $f(\cdot)$，译码为 $g(\cdot)$，复制精确度由 W 表出. 如果能够构造 **Марков** 链 (Markov chain) $\xi, \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$，使得 ξ 的概率分布为 $p(\cdot)$，$(\xi, \tilde{\xi})$ 的概率分布属于 W，$(\eta, \tilde{\eta})$ 通过 (Q, V) 相连接，且

$$\eta = f(\xi), \tilde{\xi} = g(\tilde{\eta}). \tag{4}$$

$\xi, \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ 形成 Markov 链等价于给定 ξ 和 η 的值，$\tilde{\eta}$ 的**条件概率** (conditional probability) 只依赖于 η，即输出信号只依赖于输入信号，而与被编码成这个输入信号的消息元无关.

信息传输理论研究的基本问题可以描述如下：给定一个产生具有概率分布 $p(\cdot)$ 的消息的信息源；一个通信信道 (Q, V)；一个复制精确度条件 W. 在什么条件下存在一个编码 $f(\cdot)$ 和一个译码 $g(\cdot)$，使得信息源产生的消息能够在给定条件 W 下在信道 (Q, V) 上进行传输？ 各种假设下这个问题的答案统称为编码定理或 Shannon 定理. 另外一个自然提出的问题是，当传输是可能的时候，怎样构造最简单和最有效的编码和译码方法.

Shannon ([1]) 引入了一些量，使得人们能够回答提出的第一个问题. 信息量，或简称为信息，$I(\cdot, \cdot)$ 是这些量中最重要的量 (见**信息量** (information, amount of)). 如果

$$C = C(Q, V) = \operatorname{Sup} I(\eta, \tilde{\eta}) \tag{5}$$

为信道 (Q, V) 的容量 (见**信道传输速率** (transmission rate of a channel))，这里上确界是对所有通过 (Q, V) 相连接的随机变量对 $(\eta, \tilde{\eta})$ 取的. 设

$$H_W(p) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}) \tag{6}$$

为消息的 W 熵 (见**熵** (entropy))，这里下确界是对联合概率分布属于 W 的所有随机变量对 $(\xi, \tilde{\xi})$ 取的. 则下面 Shannon 定理 (逆编码定理) 成立：如果具有概率分布 $p(\cdot)$ 的一个消息能够在复制精确度条件 W 下在信道 (Q, V) 上进行传输，则

$$H_W(p) \leqslant C(Q, V). \tag{7}$$

信息能够进行传输的充分条件很难得到. (7) 式只是在某种渐近意义下才是充分的. 这种渐近意义的主要假设为 $H_W(p) \to \infty$. 因此，粗略地说，(7) 式只是在大信息量传输问题中才是充分必要条件. 其他的必要假设是一些正则条件，对于具体的情形，这些性质通常是满足的. 为了精确地给出能够进行传输的充分条件，我们还必须引入一些辅助概念.

一列随机变量对 $\{(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)\}_{t=1}^{\infty}$ 称为信息稳定的，如果 $0 < I(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t) < \infty$，且在依概率收敛意义下

$$\lim_{t \to \infty} \frac{i_{\zeta^t \tilde{\zeta}^t}(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)}{I(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)} = 1. \tag{8}$$

这里 $i_{\zeta^t \tilde{\zeta}^t}(\cdot, \cdot)$ 为 $(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)$ 的信息密度 (见**信息量** (information, amount of)). 一列信道 $\{(Q^t, V^t)\}_{t=1}^{\infty}$，$C(Q^t, V^t) < \infty$，称为信息稳定的，如果存在一列信息稳定的，且通过 (Q^t, V^t) 相连接的随机变量对 $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$，使得

$$\lim_{t \to \infty} \frac{I(\eta^t, \tilde{\eta}^t)}{C(Q^t, V^t)} = 1. \tag{9}$$

一列消息具有概率分布 $p^t(\cdot)$，精确度条件 W^t，$H_{W^t}(p^t) < \infty$ $(t = 1, 2, \cdots)$，我们称这列消息为信息稳定的，如果存在一列随机变量对 $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$，使得 ξ^t 的概率分布为 $p^t(\cdot)$，$(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ 的联合概率分布属于 W^t，且

$$\lim_{t \to \infty} \frac{I(\xi^t, \tilde{\xi}^t)}{H_{W^t}(p^t)} = 1. \tag{10}$$

设 V_ε 为满足将 b 换成 $b + \varepsilon$ 后的 (3) 式的概率分布集合，W_ε 为将 a 换成 $a + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ 后的 (1) 式给出的精确度条件. 下面的编码定理 (Shannon) 成立：给定一列信息稳定的消息，具有概率分布 $p^t(\cdot)$，精确度条件 W^t，和一列信息稳定的信道 (Q^t, V^t)，使得函数 $\pi^t(\cdot)$ 和 $p^t(\cdot, \cdot)$ 关于 t 一致有界. 设 $H_{W^t}(p^t) \to \infty$ $(t \to \infty)$，且

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{C(Q^t, V^t)}{H_{W^t}(p^t)} > 1, \tag{11}$$

则对任意 $\varepsilon > 0$，存在充分大的 t_0，使得当 $t \geqslant t_0$ 时，具有概率分布 $p^t(\cdot)$ 的消息能够在复制精确度条件 W_ε^t 下在信道 (Q^t, V_ε^t) 上传输.

上述正编码定理的表述是很一般的. $\pi^t(\cdot)$ 和 $\rho^t(\cdot, \cdot)$ 关于 t 是一致有界的假设能够进一步弱化. 在大量感兴趣的实际特例中，消息或信道列的信息稳定性是满足的. 最后需要指出的是，在某种条件下，定理表述中的 W_ε^t 能够换成 W^t，V_ε^t 能够换成 V^t.

在实际问题的描述中，人们更感兴趣的情形是定理中所考虑的信道列为一个固定信道的段构成的列，消息列为一个具有许多分量的固定信息源产生的段构成的列. 这种情形下反映了一个通信系统的机制随着时间的变化过程. 下面给出这种情形的一些正编码定理和逆编码定理，表达形式与前面有所不同. 特别我们将考虑离散平稳信息源和无记忆通信信道.

设一个离散平稳信息源 U 产生消息 $\xi = \{\xi_k: \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$，这里每个分量 (消息字母) ξ_k 取值于有限字母表 X，X 含有 M 个元. 信息源在单位时

间段内产生一个字母．设终端接收的消息为 $\tilde{\xi}=\{\tilde{\xi}_k: \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$，分量取值于同一个字母表 X（即 $\tilde{X}=X$）．更进一步设我们使用一个离散**无记忆信道**（memoryless channel），信道在时间间隔 t 内传送一个符号．设信道的输入信号分布没有限制．$L=L_N$ 长消息段 $\xi^L=(\xi_1, \cdots, \xi_L)$ 在 $N=[L/t]$（这里 $[x]$ 为 x 的整数部分）长信道段上进行传输，这里采用前述的编码和译码方法．设 $\tilde{\xi}^L=(\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_L)$ 为终端接受的消息段，$\hat{P}_e$ 为平均信息源字母差错概率，定义为

$$\hat{P}_e=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathrm{P}\{\tilde{\xi}_l\neq\xi_l\}, \tag{12}$$

则下面的定理成立．

逆编码定理（converse of the coding theorem）：设 $H(U)$ 为给定离散平稳信息源的消息生成率，C 为无记忆信道的传输率（关于传送符号），则对所有的 L，下面的不等式成立．

$$\hat{P}_e\log(M-1)+h(\hat{P}_e)\geqslant H(U)-\frac{1}{\tau}C, \tag{13}$$

这里

$$h(x)=-x\log x-(1-x)\log(1-x).$$

因此，如果消息生成率 $H(U)$ 大于 C/τ（单位信息源字母的信道传输率），则平均信息源字母差错概率不小于一个非零常数，这个常数与 L 和编、译码方法无关．因此，当 $L\to\infty$ 时，这个概率不趋于零．

为了表达正编码定理，需要下面的量

$$R_N=\frac{\log_2 M^{L_N}}{N}. \tag{14}$$

当 $M=2$ 且 L_N/τ 为一个整数时，我们有 $R_N=\tau$，即 R_N 为在信道传送一个符号的时间内信息源产生的二元符号数目，单位为**比特**（bit）．更进一步，如果消息分量是独立同分布的，则 R_N 等于 $H(U)$．信息源的单错概率和一个分组中的平均单错概率分别定义为

$$P_{e,x^L}=P_{x^L}\{\tilde{\xi}^L\neq\xi^L\}, \tag{15}$$

$$\overline{P}_e=\sum_{x^L}P\{\xi^L=x^L\}P_{e,x^L}, \tag{16}$$

这里 $P_{x^L}(\cdot)$ 为条件 $\xi^L=x^L\in X^L$ 下的条件概率．下面的编码定理（coding theorem）成立：对所有 N 和任意的 $R<C$，存在编码和译码方法，使得 $R_N\leqslant R$，且对所有 $x^L\in X^L$，

$$P_{e,x^L}\leqslant e^{-NE(R)} \tag{17}$$

（这个不等式对 $\overline{P}_e$ 也成立）．更进一步，在区间 $0\leqslant R<C$ 内，函数 $E(R)$ 是凸的，非负和单减的（见**译码错误概率**（erroneous decoding, probability of））．因此，这个定理也说明对所有 $R<C$，当 $N\to\infty$ 时，单错概率以指数速度趋于零．

Shannon 定理可以推广到所谓复合信道和具有独立参数的消息的情形．人们之所以对这种推广感兴趣，是因为在实际中人们不可能完全知道信息源和信道的统计参数，因为这些参数有时能够在传输过程中变化．因此，人们预先假设，信息源和通信信道属于某一类可能的信息源和信道．更进一步，人们引入极大极小准则来估计传输质量，这时我们在信息源是最优的，且信道属于某一给定类的假设下来估计某一给定传输方法的质量．

Shannon 定理也可以推广到在**有反馈信道**（channel with feedback）进行信息传输的情形．完全反馈意味着在时刻 t 信道的发送端（即输入端）知道所有 $t'<t$ 时刻信道输出信号的精确值．特别地，对于有反馈的**无记忆信道**（memoryless channel），基本结论是尽管反馈可能大量减少编码和译码设备的复杂性，但是它不能提高信道的传输率．

值得指出的其他推广有具有差错同步的信道的信息传输理论，因为输入和输出信号的一一对应所引起的干扰，随机同步是可能的．另外一个推广为**多方向信道**（channel with multiple directions）的信息传输理论，这时通信系统有几个信息源和信息接收器，信息传输可以同时在几个方向上进行．

参考文献

[1] Shannon, C., A mathematical theory of communication, *Bell Systems Techn. J.*, **27** (1948), 379－423; 623－656.

[2] Добрушин, Р. Л., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 6, 3－104.

[3] Wolfowitz, J., Coding theorems of information theory, Springer, 1964.

[4] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

[5] Feinstein, A., Foundations of information theory, McGraw-Hill, 1968.

[6] Fano, R. M., Transmission of information. Statistical theory of communications, M.I.T., 1963.

[7] Харкевич, А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

[8] Wosencraft, J. and Jacobs, I., Principles of communication engineering, Wiley, 1965.

[9] Колмогоров, А. Н., 《Пробл. передачи информ.》, 1 (1965), 1, 3－11.

[10] Пинскер, М. С., в сб.: Проблемы передачи информации, в. 7, 1960, М., 1－201（英译本：Pinsker, M. S., Information and informational stability of random variables and process, Holden-Day, 1964）.

[11] Левин, Б. Р.. Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., М., 1974.

[12] Колмогоров, А. Н., в кн.: Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. 15 – 20 октября 1956 г. Т. 1. Пленарные заседания, М., 1957, 66 – 99.
[13] Slepian, D. (ed.), Key papers in the development of information theory, IEEE, 1974.
[14] Proc. 1975 IEEE-USSR Joint Workshop Inform. Theory Moscow, 15 – 19, Dec. 1975, IEEE, 1976.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰 符方伟 沈世镒 译

信息传输速率 [information, transmission rate of; информации скорость передачи]

单位时间内**通信信道** (communication channel) 的输出信号相对输入信号所含有的**信息量** (information, amount of). 如果

$$\eta=\{\eta(t):\ -\infty<t<\infty\},$$
$$\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t):\ -\infty<t<\infty\}$$

为离散或连续时间随机过程，它们分别为通信信道的输入和输出信号，则

$$R=\lim_{T-t\to\infty}\frac{1}{T-t}I(\eta_t^T,\tilde{\eta}_t^T) \qquad (*)$$

为信息传输速率 (如果极限存在). 这里 $I(\cdot,\cdot)$ 为信息量，$\eta_t^T=\{\eta(s):\ t<s\leqslant T\}$ 为 η 在时间 $(t,T]$ 内的分段，$\tilde{\eta}_t^T$ 同样定义. 已经证明 (*) 式的极限对很大的一类信道存在，在这类信道中，信号 η 和 $\tilde{\eta}$ 为平稳和相对平稳随机过程. 对于某些信道，特别是**无记忆信道** (memoryless channel) 和 **Gauss 信道** (Gaussian channel)，信号 η 和 $\tilde{\eta}$ 是 Gauss 平稳过程，且 $(\eta,\tilde{\eta})$ 形成一个联合 Gauss 平稳过程，信息传输速率为

$$R=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left[1-\frac{|f_{\eta\tilde{\eta}}(\lambda)|^2}{f_{\eta\eta}(\lambda)f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)}\right]d\lambda$$

这里 $f_{\eta\eta}(\lambda)$ 和 $f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)$ 分别为 η 和 $\tilde{\eta}$ 的谱密度，$f_{\eta\tilde{\eta}}(\lambda)$ 为 η 和 $\tilde{\eta}$ 的联合**谱密度** (spectral density).

参考文献

[1] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.
[2] Пинскер, М. С., в сб.: Проблемы передачи информации, в. 7, М., 1960, 1 – 201 (英译本: Pinsker, M. S., Information and informational stability of random variables and process, Holden-Day, 1964).

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【译注】

参考文献

[B1] Cover, T. M. and Tomas, J. A., Elements of information theory, Wiley, 1991.
[B2] Blahut, R. E., Principles and practice of information theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.

符方伟 沈世镒 译

准桶型空间 [infra-barrelled space; инфрабочечное пространство]

一种局部凸**线性拓扑空间** (linear topological space)，其中每一个吸收任何有界集的桶集 (barrel，即吸收的凸闭**平衡集** (balanced set)) 是零的邻域. **桶型空间** (barreled space) 是准桶型空间中重要的一类.

准桶型空间的归纳极限和任意积是准桶型的. 一个空间是准桶型的，当且仅当每一个有界下半连续**半范数** (semi-norm) 是连续的，或者在对偶空间 (见**伴随空间** (adjoint space)) 中每一个强有界子集是等度连续的 (见**等度连续性** (equicontinuity)). 特别地，每一个有界型空间 (bornological space，即其中每一个有界半范数是连续的空间) 是准桶型空间. 在序列完全的线性拓扑空间中，准桶型性蕴涵桶型性; 如同桶型空间一样，准桶型空间可用它到 Banach 空间中的映射来刻画其特征性质: 局部凸线性拓扑空间 X 是准桶型的，当且仅当对任何 Banach 空间 Y，每一个从 X 到 Y 中的具有闭图象的且把有界集映成有界集的线性映射是连续的. 亦见**超桶型空间** (ultra-barrelled space).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).
[2] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

В. М. Тихомиров 撰

【补注】 准桶型空间也称为拟桶型空间 (quasi-barrelled space).

参考文献

[A1] Janchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

葛显良 译 鲁世杰 校

初始条件 [initial conditions; начальные условия]

当表述微分方程的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 时所加的一些条件. 对于形如

$$u^{(m)}=F(t,u,u',\cdots,u^{(m-1)}) \qquad (1)$$

的常微分方程，初始条件是导数值 (Cauchy 数据 (Cauchy data)):

$$u(t_0)=u_0,\cdots,u^{(m-1)}(t_0)=u_0^{(m-1)}, \qquad (2)$$

其中 $(t_0,u_0,\cdots,u_0^{(m-1)})$ 是函数 F 的定义域中的任意固定点，这一点称为所要求的解的初始值 (initial value). Cauchy 问题 (1), (2) 通常称为初值问题 (initial value problem).

对于对指定的变量 t 写出的正规形式的偏微分方程

$$Lu=\frac{\partial^m u}{\partial t^m}-F\left[x,t,\frac{\partial^{\alpha+k}u}{\partial x^\alpha\partial t^k}\right]=0,$$

$|\alpha|+k\leqslant N$, $0\leqslant k<m$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 初始条件是所要求的解 $u(x,t)$ 在超平面 $t=0$ (初始条件的支集 (support of initial conditions)) 上的导数值 (Cauchy 数据)

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\quad k=0,\cdots,m-1.$$

А. П. Солдатов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[A2] Mizohata, S., The theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press, 1973.

张鸿林 译

初始集 (连续统 K 的) [initial set (of a continuum K); инициальное множество]

使 K 在该处成为**光滑连续统** (smooth continuum) 的那些点的集合. А. А. Мальцев 撰 胡师度、白苏华 译

内射 [injection 或 injective mapping; **инъекция**], 集合 A 到集合 B 的

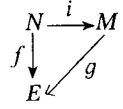
一个映射 $F:A\to B$, 它使得 A 中不同的元素映到 B 中不同的元素上. 内射有时也称为由 A 到 B 中的嵌入 (imbedding) (或包含 (inclusion)).

О. А. Иванова 撰

【补注】 在**范畴** (category) 论中, 一个**态射** (morphism) F 也称为一个内射, 如果对所有的态射 G 及 H, 若 $F\circ G=F\circ H$, 则 $G=H$. 王 驹 译

内射模 [injective module; инъективный модуль]

在一个有单位元的结合环 R 上 (右) 模范畴中的内射对象, 即一 R 模 E, 使得对任何 R 模 M,N 及任一单一同态 $i:N\to M$ 以及任一同态 $f:N\to E$, 存在一同态 $g:M\to E$ 使下图交换:



此处及后面所有的 R 模都假定是右 R 模. 对于 R 模 E, 下面条件与内射性等价: 1) 对任一**正合序列** (exact sequence):

$$0\to N\to M\to L\to 0$$

诱导列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(N,E)\to\mathrm{Hom}_R(M,E)\to\mathrm{Hom}_R(L,E)\to 0$$

是正合的; 2) 任何 R 模正合序列

$$0\to E\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}L\to 0$$

是分裂的, 即子模 $\mathrm{Im}\,\alpha=\mathrm{Ker}\,\beta$ 是 M 的直和分量; 3) 对所有 R 模 C, $\mathrm{Ext}^1_R(C,E)=0$; 4) 对任一 R 的右理想 I, R 模同态 $f:I\to E$ 可以扩充为 R 模同态 $g:R\to E$ (Baer 准则 (Baer criterion)). 在 R 模范畴中有"足够多"的内射对象: 每个 R 模 M 可嵌入到一内射模中, 进一步, 每个模有一个内射包 (injective hull) $E(M)$, 即包有 M 的内射模, 且 $E(M)$ 的每个非零子模与 M 的交非空. 任一模 M 到内射模 E 的嵌入可以扩张为 $E(M)$ 到 E 中的嵌入. 每个 R 模 M 有内射分解 (injective resolution)

$$0\to M\to E_0\to E_1\to\cdots,$$

即是模的正合序列, 其中每个模 $E_i\,(i\geqslant 0)$ 是内射模. 最短的内射分解的长度称为该模的内射维数 (injective dimension) (亦见**同调维数** (homological dimension)).

内射模的直积是内射模. 对于 $r\in R$ 且 r 非为 R 的左零因子, 内射模 E 与 Er 相等, 即内射模是可除的. 特别地, 一个 Abel 群是 $\mathbf{Z}$ 上的内射模, 当且仅当它是可除的. 设 R 是交换 Noether 环, 则其上的内射模是形如 R/P 的模的内射包的直和, P 是 R 中素理想.

内射模在各类环的描述中被广泛应用 (见**环的同调分类** (homological classification of rings)). 这样, 一环上所有模是内射的, 当且仅当环是半单的. 下列条件等价: R 是右 Noether 环; 任意内射 R 模的直和是内射模; 任一内射 R 模可分解为不可分解的 R 模的直和. 环 R 是右 Artin 环, 当且仅当每个内射模是单模内射包的直和. 环 R 是右遗传的, 当且仅当 R 模任一内射模得到的商模都是内射模, 也当且仅当任一 R 模的两个内射子模之和是内射模. 若环 R 是右遗传且右 Noether, 则每个 R 模包有一个极大内射子模. 所有内射 (投射) R 模的投射性 (内射性) 等价于 R 是**拟 Frobenius 环** (quasi-Frobenius ring).

模 R_R 的内射包在分式环论中起了重要作用. 例如, 设环 R 中右奇异理想为零, 又设 E 是模 R_R 的内射包, $\Lambda=\mathrm{Hom}_R(E,E)$ 是 E 的自同态环, 则 R 模 Λ_R 和 E_R 同构, E 和 Λ 环同构, 且 E 是 R 的极大右分式环, $\Lambda\cong E$ 是自内射右**正则环 (在 von Neumann 意义下)** (regular ring (in the sense of von Neumann)).

与广义模同态的各种问题有关, 某些与内射模相近的一类模也被人们考虑. 这就是: 拟内射模 (quasi-injective modules) (若 $0\to N\to M$ 且 $f:N\to M$, 则 f 可以扩充为 M 的自同态); 伪内射模 (pseudo-injective modules) (若 $0\to N\to M$, $f:N\to M$ 是单一同态, 则 f 可扩充为 M 的自同态); 小内射模 (small-injective mo-

dules)(所有子模的自同态可扩充为 M 的自同态). 模 M 的拟内射性等价于在 M 的内射包的自同态下 M 的不变性.

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S.. Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[3] Faith, C.. Lectures on injective modules and quotient rings, Springer, 1967.

[4] Sharpe, D. W. and Vamos, P., Injective modules, Cambridge Univ. Press, 1972.

А. В. Михалев, А. А. Туганбаев 撰

【补注】 一个环称为右遗传的(right hereditary), 是指其每个右理想是投射的, 或等价地, 它的右整体维数 ≤1. 如果每个有限生成的右理想为投射的, 则称为半右遗传的(semi right hereditary). 交换遗传整环是 Dedekind 环; 交换半遗传整环称为 Prüfer 环(Prüfer ring). 右遗传环不一定也是左遗传的(left hereditary).

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, Springer, 1973.

[A2] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative noetherian rings, Wiley, 1987.

冯绪宁 译

内射对象[injective object; инъективный объект]

一个 **Abel 范畴**(Abelian category) C 中一个对象 I, 使对任何单态射 $\alpha: A' \to A$, 映射

$\mathrm{Hom}_C(A, I) \to \mathrm{Hom}_C(A', I)$, 其中 $\varphi \mapsto \varphi \circ \alpha$,

都是满的. 一个对象 A 的每一个内射子对象 I 都是 A 的一个收缩. 内射对象的积是一个内射对象. 如果在 C 中每一个对象都同构于 C 中一个内射对象的一个子对象, 就说 C 是一个具有足够内射对象的范畴(category with enough injective objects)(例如 **Grothendieck 范畴**(Grothendieck category)就具有此性质). 在这样的范畴中, 一个对象是内射的当且仅当它是包含它的任一对象的直和项. 对于这种范畴的对象, 可以构造由内射对象所组成的分解式(内射分解(injective resolutions)). 这就使得可在这些范畴中发展同调代数.

在局部 Noether 范畴(见**拓扑化的范畴**(topologized category))中, 内射对象的直和也是一个内射对象, 而且每一个内射对象都同构于不可分解的内射对象的直和. 而且此表示式是唯一的([3]). 如果 C 是一个 Noether 交换环 Λ 上的模范畴, 那么, 不可分解的内射模就是商环 $\Lambda/\mathfrak{p}$ 的分式域的内射包, 这里 $\mathfrak{p}$ 是 Λ 中任意的一个素理想([4]).

例 1) Abel 群的范畴有足够内射对象, 这些对象就是完全(可除)群.

2)右 Λ 模的范畴 C_Λ 包含足够的内射对象(见**内射模**(injective module)).

3)在一个戴环拓扑空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上的模的层的范畴包含着足够的内射对象. 这种对象的例子是这样的层 F, 其所有的茎 F_x 都是内射 $\mathcal{O}_{X,x}$ 模. 如果 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个**概形**(scheme), 对于拟凝聚 $\mathcal{O}_{X,x}$ 模, 其逆也真: 一个内射层的每一个茎都是一个内射 $\mathcal{O}_{X,x}$ 模.

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[2] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohôhu Math. J., **9** (1957), 119 – 221.

[3] Gabriel, P., Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 323 – 448.

[4] Matlis, E., Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 511 – 528.

И. В. Долгачев 撰

【补注】 内射对象可以在非 Abel 范畴中研究(这常常是很重要的). 例如 Sikorski 定理(Sikorski theorem)[A1]刻画完全 Bool 代数为 Bool 代数与 Bool 同态的范畴中的内射对象(而 MacNeille 完全化构造(见(**偏序集中的**)**MacNeille 完全化**(completion, MacNeille))在这个范畴中提供了内射包). 在一个**拓扑斯**(topos)中, 一个对象是内射的, 当且仅当它恰好是某幂对象的一个收缩, 而内射对象在相应的层函子的研究(见[A2])中是用到的.

参考文献

[A1] Sikorski, R., A theorem on extensions of homomorphisms, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **21** (1948), 332 – 335.

[A2] Freyd, P. J., Aspects of topoi, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **7** (1972), 1 – 76.

周伯埙 译

内自同构[inner automorphism; внутренний автоморфизм], 群 G 的

由某个固定元素 $g \in G$ 按下式定义的**自同构**(automorphism) φ

$$\varphi(x) = g^{-1}xg.$$

G 的所有内自同构的集合在 G 的全部自同构的群中形成正规子群; 这子群同构于 $G/Z(G)$, 这儿 $Z(G)$ 是 G 的中心(见**群的中心**(centre of a group)). 不是内自同构的自同构称为外自同构(outer automorphism).

其他有关的概念, 包括幺半群的内自同构(inner automorphism of a monoid)(具有单位元的半群), 环的内自同构(inner automorphism of a ring), 都是用可逆元以类似的方法引进的.

В. Н. Ремесленников 撰

【补注】 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数, $x \in \mathfrak{g}$ 是使 $\mathrm{ad}(x)$: $y \mapsto$

$[x, y]$ 为幂零变换的元，则

$$\exp(\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{id} + \mathrm{ad}(x) + \frac{1}{2!}\mathrm{ad}(x)^2 + \cdots$$

定义了 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 这样的自同构称为 $\mathfrak{g}$ 的内自同构（inner automorphism）. 更一般地，由它们生成的群 $\mathrm{int}(\mathfrak{g})$ 中的元称为内自同构，该群是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 的正规子群.

若 G 为具有半单 Lie 代数的实或复 **Lie 群**（Lie group），则内自同构恰好构成 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的单位连通分支.

参考文献

[A1] Hall, Jr., M., The theory of groups, Macmillan, 1959（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1982）.

[A2] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972（中译本：J. E. 汉弗莱斯，李代数及其表示理论导引，上海科学技术出版社，1981）.

[A3] Serre, J. P., Algèbres de Lie semi-simple Complexes, Benjamin, 1966.

【译注】

参考文献

[B1] 严志达，许以超，Lie 群及其 Lie 代数，高等教育出版社，1985.

石生明 译 许以超 校

内积 [**inner product**; **скалярное произведение**]，标量积（scalar product），点积（dot product）

两个非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的内积 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是此两向量的长度与两者之间夹角 φ 的余弦之积:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi;$$

φ 取两向量之间不超过 π 的夹角. 当 $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 是零向量时，其内积取作零. 内积 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的标量平方（scalar square）（见**向量代数**（vector algebra））.

两个实 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ 的内积由

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

给出；在复的情形则由

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 \bar{b}_1 + \cdots + a_n \bar{b}_n$$

给出.

赋予一个内积且关于此内积为完全的无穷维**向量空间**（vector space）称为 **Hilbert 空间**（Hilbert space）.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 更一般地说，实向量空间上的一个内积是一个对称**双线性型**（bilinear form）f 且 f 是正定的，即对一切 $x \neq 0$ 有 $f(x, x) > 0$. 复向量空间上的(酉)内积类似地定义为一个 Hermite（即满足 $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$）**半双线性型**（sesquilinear form），它以复共轭为自同构且是正定的. 在有限维空间中总能求出一组标准正交基，使得 f 对于这组基取标准形式 $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$（对应地，$\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$）.

在三维空间中，除内积（它可对任意维数情形定义）外，还可定义**向量积**（vector product）.

参考文献

[A1] Istrătescu, V. I., Inner product structures, Reidel, 1987.

沈永欢 译

内接形与外接形，内切形与外切形 [**inscribed and circumscribed figures**; **вписанные и описанные фигуры**]

一个**多边形**（polygon）称为内接于（inscribed）一条凸曲线，而该曲线称为外接（circumscribe）此多边形，如果此多边形的所有顶点都位于该曲线上（图1）.

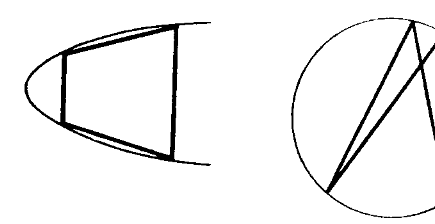


图 1.

一个多边形称为外切于（circumscribed）一条凸曲线，而该曲线称为内切（inscribe 或 escribe）此多边形，如果此多边形的所有边（必要时可加以延长）都切于该曲线. 这种情形考虑得最多的曲线是圆. 例如，任何三角形有一个外接圆和四个内切圆，其中有三个是外部内切的（图 2）.

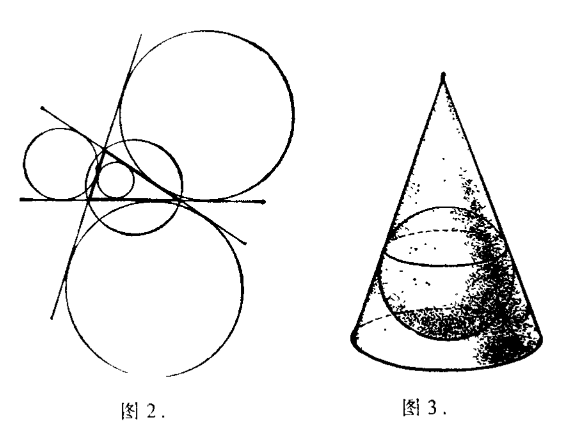


图 2. 图 3.

也可以在空间中考虑内接形与外接形、内切形与外切形. 此时用**多面体**（polyhedron）代替多边形，用凸曲面（通常是球面）代替凸曲线. 于是就可以说一个锥面内接于一个球面，一个球面内切一个锥面，等等（图 3）.

参考文献

[1] Перепелкин, Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1－2, М.-Л., 1948－1949. А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 科学出版社, 第一卷, 1987, 第二、三、四卷, 1989, 第五卷, 1991).

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961, p. 11, 258.

[A3] Coxeter, H. S. M., Unvergängliche Geometrie, Birkhäuser, 1981, 25, 313.

沈永欢 译

内接角 [inscribed angle; вписанный угол]

一个角，其顶点位于一平面曲线上，其边为该曲线的弦. 如果此曲线是圆，则内接角等于对应的圆心角 (central angle) 之半. 沈永欢 译

内接折线 [inscribed broken line; вписанная ломаная]

由有限的 n 个直线段 $A_0A_1, \cdots, A_{n-1}A_n$ 组成的一条线 L，其端点 $A_i(i=0, \cdots, n)$ 处于一条给定的平面或空间曲线上，点 A_i 是按曲线上参数增加的顺序来取的. 例如，内接折线当 $n=2$ 时的特殊情况是内接角 (inscribed angle). 亦见**内接形与外接形** (inscribed and circumscribed figures).

М. И. Войцеховский 撰 张鸿林 译

瞬时状态 [instantaneous state; мгновенное состояние]

可数状态齐次 **Марков 链** (Markov chain) 的一种状态，例如 i，它的转移概率密度

$$a_{ii}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}$$

等于 $-\infty$，其中 $p_{ii}(h)$ 是从 i 出发在时刻 h 到达 i 的转移概率. 在相反的情形下，称状态 i 为非瞬时的或延迟的.

参考文献

[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (中译本: И. И. 基赫曼, 随机过程论, 科学出版社, 1986).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Williams, D., Diffusions, Markov processes and martingales, 1, Wiley, 1979.

[A2] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1967.

[A3] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Springer, 1965).

[A4] Freedman, D., Brownian motion and diffusion, Holden-Day, 1971.

刘秀芳 译

整数 [integer; целое]

见数 (number).

【补注】整数是整数环 (ring of integers) $\mathbf{Z}=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 中的一个元素. 环 $\mathbf{Z}$ 是包含由自然数 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$ 组成的半环的最小的环. 见**自然数** (Natural number). 关于 $\mathbf{N}$ 的公理化刻画，见**数** (Number).

在代数数论中，术语整数也用来表示代数**数域** (number field) 中在 $\mathbf{Z}$ 上为整的元素，即若 $k/\mathbf{Q}$ 是一个代数的域扩张，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数域 —— $\mathbf{Z}$ 的分式域，则 k 中的整数就是 $\mathbf{Z}$ 的整闭包在 k 中的元素，见**环的整扩张** (integral extension of a ring).

代数数域 $\mathbf{Q}(i)$ $(i^2+1=0)$ 中的整数是元素 $a+bi$ $(a, b\in\mathbf{Z})$，称为 Gauss 整数 (Gaussian integers).

设 p 是素数. p 进整数是 $\mathbf{Z}_p$——$\mathbf{Z}$ 在 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$ 中的闭包——中的元素，域 $\mathbf{Q}_p$ 是域 $\mathbf{Q}$ 关于 $\mathbf{Q}$ 上的 p 进拓扑的拓扑完全化，p 进拓扑由非 Archimedes 赋值

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p=p^{v_p(b)-v_p(a)}, a, b\in\mathbf{Z}$$

来定义，其中 $v_p(a)=r$，若 a 被 p^r 整除，但不能被 p^{r+1} 整除，以及 $|0|_p=0$.

参考文献

[A1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich. Z. I., Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press. 1975).

潘承彪 译 戚鸣皋 校

整数规划 [integer programming; целочисленное программирование]

数学规划 (mathematical programming) 的一个分支，它研究有关一系列方程和 (或) 不等式的以及满足整值性条件的多变量函数的最优化 (最大化或最小化) 问题. (另外的术语是离散规划 (discrete programming)，离散最优化 (discrete optimization).) 整数规划问题来源于技术、经济和国防.

变量取整数值的条件形式上反映: a) 对象的物理上不可分性 (例如在企业的分布或战斗行动的选定问题中); b) 在其上处理最优化的可行变更集的有限性 (例如，排序问题中的置换集); c) 逻辑条件的出现，它们的成立或不成立在问题的目标函数和约束的形式中行使着一种变化.

研究最广和用处最大的整数规划是整数线性规划问题 (integer linear programming problem): 最大化

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

条件为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \cdots, m,$$

其中 $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, n$, 对于 $j = 1, \cdots, p$, $p \leqslant n$, x_j 是整数, a_{ij}, b_i 和 c_j 是给定的整数, x_j 是变量.

整数规划问题的解法（**松弛法**（relaxation method），割平面法，**动态规划**（dynamic programming）法，“分支 - 界限”法以及其他）都基于可行解总体的约化．“朴素”的求解整数规划的途径是完全枚举所有可行解（如果它们只有有限多个），这需要大量的计算，且随着变量个数的增加而指数增长，以至变为不实际．在整数规划问题的求解中引起的理论和数值问题的复杂性可由所谓 Fermat 大定理来解释，后者可用下列等价形式提出：最小化

$$(x_1^t + x_2^t - x_3^t)^2$$

条件为

$$x_1 \geqslant 1, \ x_2 \geqslant 1, \ x_3 \geqslant 1, \ t \geqslant 3,$$

其中 t, x_1, x_2, x_3 是整数．如果用某种整数规划方法得到的回答肯定目标函数的最小值是正值，那么这将是 Fermat 定理的一个构造证明，如果回答是 0，那么它将是一个否定．

在整数规划中的中心理论问题是：在求解整数规划问题中，是否可以避免完全枚举？这个问题的数学陈述之一是：类 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{NP}$ 是否重合？类 $\mathscr{P}$（或 $\mathscr{NP}$）是由所有可用确定的（不确定的）Turing 机以多项式时间来判定的问题所组成，这里多项式时间是指计算次数作为一个多项式依赖于问题的所谓“输入尺度”．类 $\mathscr{NP}$ 包括可行解个数（相对于问题的“输入尺度”）是指数函数的所有的整数规划问题的判定形式．问题“$\mathscr{P} = \mathscr{NP}$?”至今（1996）没有解决．

参考文献

[1] Гольштейн, Е. Г., Юдин, Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966.

[2] Корбут, А. А., Финкельштейн, Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969.

[3] Garey, M. R. and Johnson, D. S., Computers and intractability: a guide to the theory of $\mathscr{NP}$-completeness, Freeman, 1979.

[4] Nemhauser, G. L. and Wolsey, L. A., Integer and combinatorial optimization, Wiley, 1988.

Е. Г. Гольштей, Е. В. Левнер 撰

【补注】 有关 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{NP}$ 的进一步信息见**复杂性理论**（complexity theory）．

除非 $\mathscr{P} = \mathscr{NP}$，一般的整数规划问题以多项式时间是不可解的，而一般的**线性规划**（linear programming）问题以多项式时间是可解的．

在本文中提到的解法也见[4]和[A1]，它们包括了这一领域．

参考文献

[A1] Schrijver, A.. Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986.

史树中 译　韩继业 校

可积函数 [integrable function; интегрируемая функция]

见**积分**（integral）.

可积表示 [integrable representation; интегрируемое представление]

局部紧**幺模群**（unimodular group）G 在 Hilbert 空间 H 中的连续不可约**酉表示**（unitary representation）π，它满足，对某个非零向量 $\xi \in H$，函数 $g \mapsto (\pi(g)\xi, \xi)$, $g \in G$，对于 G 上 **Haar 测度**（Haar measure）是可积函数．这时，π 是平方可积表示且存在 H 的稠密的向量子空间 H'，使得对所有 $\xi, \eta \in H'$，函数 $g \mapsto (\pi(g)\xi, \eta)$ 对 G 上 Haar 测度是可积函数．若用表示 π 的酉等价类 $\{\pi\}$ 来标记 G 的对偶空间 $\hat{G}$ 的对应元，则含 $\{\pi\}$ 的单元集在**正则表示**（regular representation）的支集 $\hat{G}_r$ 中既是开集又是闭集．

А. И. Штерн 撰

【补注】 通常文献中是遇到平方可积表示（square-integrable representation）而不是可积表示．设 π 和 π' 是平方可积表示；则下列正交性关系成立：

$$\int_G (\pi(g)\xi, \eta)\,\overline{(\pi'(g)\xi', \eta')}\,dg =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{若 } \pi \text{ 与 } \pi' \text{ 不等价}, \\ d_\pi^{-1}(\xi, \xi')\overline{(\eta, \eta')}, & \text{若 } \pi = \pi', \end{cases}$$

其中积分是对于 Haar 测度的．标量 d_π 称为 π 的形式次数或形式维数．它依赖于 Haar 测度 dg 的规范化．若 G 是紧的，则每个不可约酉表示 π 平方可积且为有限维的，若 Haar 测度已规范化为 $\int_G dg = 1$，则 d_π 是它的维数．

平方可积表示恰都是 $L_2(G)$ 上左（或右）正则表示的子表示，且作为离散的直和因子出现．

参考文献

[A1] Wanner, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, 1, Springer, 1972, Sect. 4. 5. 9.

[A2] Gaal, S. A., Linear analysis and representation theory, Springer, 1973, Chapt. Ⅶ.

[A3] Кириллов, А. А., Элемент теории представлений, М., 1972（英译本：Kirillov, A. A., Elements on theory of representations, Springer, 1976, p. 138）.

石生明 译　许以超 校

可积系统 [integrable system; интегрируемая система]

一个 n 维**微分流形**（differentiable manifold）M^n 上的一个 p 维微分系统（见**对合分布**（involutive distribu-

tion)），它在每一点 $x\in M^n$ 的一个邻域中都有一个含 $(n-p)$ 个参数的 p 维**积分流形**（integral manifold）族．这个情况时常称为完全可积系统；它的准确的定义如下：设在每一点 $x\in M^n$ 处从该点的切空间 $T_x(M^n)$ 中都可以分出一个 p 维子空间 $D(x)$，使得在 M^n 上给出 p 维 C^r $(r\geqslant 1)$ 类微分系统，亦即分布 (distribution) D．系统 D 称为完全可积的，若对每一点 $a\in M^n$，均有一个坐标系 (U,φ)，$x\in U$，$\varphi(x)=(x^1,\cdots,x^n)$，而对任意常数 c^j $(p<j\leqslant n)$，流形 $U_c=\{x\in U; x^j=c^j\}$ 都是积分子流形，即其在任意点的切空间均为 $D(x)$．其解析的充分必要条件见**对合分布**（involutive distribution）．　　Ю.Г.Лумисте 撰

【补注】 亦见 **Pfaff 方程** (Pfaffian equation)．可积系统 (integrable system) 一语也指完全可积的 Hamilton 方程或方程组，即 $2n$ 维相空间中具有 n 个**对合积分** (integrals in involution) (包括 Hamilton 函数本身) 的 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）．　　齐民友 译

积分 [**integral**; **интеграл**]

数学分析乃至整个数学领域中的最重要的概念之一．它的产生与以下两类问题有关：由一个函数的导数求这个函数（例如，已知质点沿直线运动的速度，求其运动规律的问题）；计算函数 f 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的图形与 x 轴所界定的区域的面积（计算一个力在时间 $a\leqslant t\leqslant b$ 内所做的功的问题以及许多其他问题都可归结为这类问题）．

上述两类问题导致积分的两种形式：不定积分和定积分．对这两种相关的积分形式的性质和计算的研究构成了**积分学**（integral calculus）的课题．

在数学发展的历程中，在自然科学和技术需要的影响下，不定积分和定积分的概念已经历了一系列推广和修改．

不定积分（indefinite integral）．自变量 x 的函数 f 在区间 $a<x<b$ 上的原函数（primitive function）是任何一个这样的函数 F，在此区间每一点 x 上它的**导数**（derivative）等于 f．显然，如果 F 是 f 在区间 $a<x<b$ 上的原函数，则 $F_1=F+C$ 也是 f 的原函数，其中 C 为任意常数．其逆命题也成立：同一函数 f 在区间 $a<x<b$ 上的任何两个原函数只相差一个常数．因此，如果 F 是 f 在区间 $a<x<b$ 上的一个原函数，则 f 在这个区间上的任何原函数都具有形式 $F+C$，其中 C 为常数．f 在区间 $a<x<b$ 上的全体原函数，称为 f（在此区间上）的不定积分，表示为

$$\int f(x)\,dx.$$

根据积分学基本定理，对于区间 $a<x<b$ 上的每个连续函数 f，在此区间上都存在一个原函数，因此也就存在一个**不定积分**（indefinite integral）．

定积分（definite integral）．定积分概念可按两种方式引入：或者定义为积分和的极限（见 **Cauchy 积分**（Cauchy integral）；**Riemann 积分**（Riemann integral）；**Lebesgue 积分**（Lebesgue integral）；**Stieltjes 积分**（Stieltjes integral）)，或者当给定的函数 f 定义在某一区间 $[a,b]$ 上并在此区间上具有原函数 F 时，定义为 F 在区间两端点之值的差，即 $F(b)-F(a)$．函数 f 在 $[a,b]$ 上的定积分表示为 $\int_a^b f(x)\,dx$．把定积分定义为积分和的极限，对于连续函数的情况，是 A．L．Cauchy 于 1823 年提出的．B．Riemann（1853）对任意函数的情况进行了研究．定积分理论中的一个实质改进是 G．Darboux（1879）完成的，他引入了上、下 Riemann 和的概念（见 **Darboux 和**（Darboux sum））．不连续函数 Riemann 可积的必要和充分条件的最终形式是 H．Lebesgue 于 1902 年给出的。

在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 的定积分的定义与这个函数的不定积分（或原函数）的定义之间存在下述联系：1）如果 F 是 f 的任何原函数，则 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

成立；2）对于区间 $[a,b]$ 中的任何 x，连续函数 f 的不定积分可以写成下列形式：

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(t)\,dt+C,$$

其中 C 是任意常数．特别是，具有可变上限的定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

是 f 的一个原函数．

为了引入在 Lebesgue 意义下函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，把 y 值的集合划分为一些子区间，分点为 $\cdots<y_{-1}<y_0<y_1<\cdots$，把区间 $[a,b]$ 中满足 $y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i$ 的一切 x 值的集合记为 M_i，把 Lebesgue 意义下集合 M_i 的测度记为 $\mu(M_i)$（见 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure））．函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分和（Lebesgue integral sum）定义为

$$\sigma=\sum_i \eta_i\,\mu(M_i), \tag{2}$$

其中 η_i 是区间 $[y_{i-1},y_i]$ 中的任意数．

函数 f 称为在区间 $[a,b]$ 上是 Lebesgue 可积的（Lebesgue integrable），如果区间 (y_{i-1},y_i) 的最大宽度趋于零时积分和（2）的极限存在且有限，即存在一个实数 I，使得对任何 $\varepsilon>0$ 可找到 $\delta>0$，使得在单一条件 $\max(y_i-y_{i-1})<\delta$ 下不等式 $|\sigma-I|$ 成立．极限值 I 就称为 f 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 定积分（definite Lebesgue integral）．

代替区间$[a, b]$，也可考虑关于某非负完全可数可加测度可测的任一集合．Lebesgue 积分的另一种引入法可给出如下：起初在所谓的简单函数（simple function）（即至多取可数多个值的可测函数）的集合上定义这种积分，然后对可表成简单函数一致收敛序列的极限的任何函数用取极限过程来引入该积分（见 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral））．

每一个 Riemann 可积的函数是 Lebesgue 可积的．其逆不真，因为存在在一正测度集上不连续的 Lebesgue 可积函数（例如，**Dirichlet 函数**（Dirichlet function））．

一个有界函数为 Lebesgue 可积的必要充分条件是此函数属于**可测函数**（measurable function）类．在数学分析中遇到的函数通常是可测的．这意味着 Lebesgue 积分所具有的一般性对分析的需要而言是足够的．

Lebesgue 积分也包含了绝对收敛的**反常积分**（improper integral）的情况．

Lebesgue 积分的定义所达到的一般性在现代数学分析的许多问题中是绝对重要的（如广义函数理论，微分方程广义解的定义，Hilbert 空间 L_2 和 l_2 的同构，它等价于三角级数或任意正交级数理论中的所谓 **Riesz-Fischer 定理**（Riesz-Fisher theorem）；所有这些理论只有借助于取 Lebesgue 意义下的积分才成为可能的）．

Lebesgue 意义下的原函数自然地用方程（1）来定义，其中的积分按 Lebesgue 意义取．在此情况下关系式 $F' = f$ 除了一个零测度集之外处处成立．

积分概念的其他推广．1894 年 T．J．Stieltjes 给出 Riemann 积分的另一种推广（它被命名为 Stieltjes 积分），它在应用上是重要的，其中考虑定义在某区间$[a, b]$上的一个函数f关于定义于同一区间上第二个函数的可积性．f 关于函数 U 的 Stieltjes 积分（Stieltjes integral）用符号

$$I = \int_a^b f(x)\,dU(x) \tag{3}$$

表示．如果 U 具有有界的 Riemann 可积的导数 U'，则 Stieltjes 积分由公式

$$\int_a^b f(x)\,dU(x) = \int_a^b f(x)\,U'(x)\,dx$$

化成 Riemann 积分．特别地，当 $U(x) = x + C$ 时，Stieltjes 积分（3）即是 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\,dx$．

然而，应用上有兴趣的情况是当函数 U 没有导数时．这样的 U 的一个例子是谱分解研究中的**谱测度**（spectral measure）．

沿着由方程 $x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$，定义的曲线 Γ 的**曲线积分**（curvilinear integral）

$$\int_\Gamma f(x, y)\,dx$$

是 Stieltjes 积分的一种特殊情形，因为它可以写成以下形式

$$\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\,d\varphi(t).$$

积分概念的进一步推广是由任意多个变量的空间中任意集合上的积分而得出．在最一般的情况下，可方便地把积分看成为在其上作积分的集合 M 的一个函数（见**集函数**（set function）），具有形式

$$F(M) = \int_M f(x)\,dU(x),$$

其中 U 是 M 上的一个集函数（它的测度作为一个特殊情况）且点属于在其上进行积分的集合 M．这种类型积分的特殊情况是**多重积分**（multiple integral）和**曲面积分**（surface integral）．

积分概念的另一种推广是**反常积分**．

1912 年，A．Denjoy 引入了一种积分概念（见 **Denjoy 积分**（Denjoy integral）），它可应用于每一个这样的函数 f，只要 f 是某函数 F 的导数．这可以把积分的构造性定义推广到这样的一般性程度，使得完全地回答了寻求在原函数意义下的不定积分的问题．

参考文献

[1] Ильин，В．А．，Позняк，Э．Г．，Основы математического анализа，ч．1－2，М．，1971－1973（英译本：Il'in，V．A．and Poznyak，E．G．，Fundamentals of mathematical analysis，1－2，Mir，1971－1973）．

[2] Колмогоров，А．Н．，Фомин，С．В．，Элементы теории функций и функционального анализа，4 изд．，М．，1976（中译本：А．Н．柯尔莫果洛夫，С．В．佛明，函数论与泛函分析初步，上、下册，高等教育出版社，1992）．

[3] Кудрявцев，Л．Д．，Математический анализ，т．1－2，2 изд．，М．，1973．

[4] Никольский，С．М．，Курс математического анализа，т．1－2，2 изд．，1975（中译本：С．М．尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷一、二分册，第二卷一、二分册，高等教育出版社，1982 － 1992）．

[5] Смирнов，В．И．，Курс высшей математики，т．5，М．，1959（中译本：В．И．斯米尔诺夫，高等数学教程，第五卷一、二分册，人民教育出版社，第二版，1963－1964）．

[6] Lebesgue，H．，Leçons sur l' intégration et la récherche des fonctions primitives，Gauthier-Villars，1928．

В．А．Ильин 撰

【补注】 关于上面提到的简单函数：每一个实值**可测函数**（measurable function）是简单函数的一致收敛序列的极限．然而，这种函数不必是 Lebesgue 可积的．

除了 Riemann 和 Lebesgue 积分外，有很多其他类型的积分，例如见 **A 积分**（A-integral）；**Bochner 积分**（Bochner integral）；**Boks 积分**（Boks integral）；**Burkill 积分**（Burkill integral）；**Daniell 积分**（Daniell integral）；**Darboux 和**（Darboux sum）；**Колмогоров 积分**（Kolmo-

gorov integral); **Perron 积分** (Perron integral); **Pettis 积分** (Pettis integral); **Radon 积分** (Radon integral); **累次积分** (repeated integral); **强积分** (strong integral); **Wiener 积分** (Wiener integral).

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A2] MacShane, E. J., Integration, Princeton Univ. Press, 1944.

[A3] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974(中译本: W. 卢丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1982).

[A4] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952(译自波兰文).

[A5] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A6] Weir, A. J., Lebesgue integral and measure, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A7] Zaanen, A. C., Integration, North-Holland, 1967.

[A8] Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., Integral, measure and derivative, Prentice-Hall, 1966.

[A9] Pesin, I. N., Classical and modern integration theories, Acad. Press, 1970(译自俄文).

[A10] Diestel, J. and Uhl, J. J., Vector measures, Amer. Math. Soc., 1977.

葛显良 张鸿林 译

整自同构 [**integral automorphism**; **интегральный автоморфизм**]

同**特殊自同构** (special automorphism), 由一个**测度空间** (measure space) (X, μ) 上的自同构 T 与一个函数 F (定义在该空间上, 取值为正整数) 构造而成. "整自同构"一词主要用于非俄语的文献中.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 设 X^F 是测度空间 $X^F = \{(x, j) \in X \times \mathbf{N} \cup \{0\}: 0 \leqslant i < F(x)\}$, 其测度为

$$\mu^F(A) = \frac{\mu(A)}{\int_X F(x) d\mu},$$

则相应于 T 和 F 的整自同构 T^F 是定义为 X^F 的自同构: 当 $i+1 < F(x)$ 时, $T^F(x, i) = (x, i+1)$; 当 $i+1 = F(x)$ 时, $T^F(x, i) = (Tx, 1)$. 其细节见 [A1] 与**特殊自同构** (special automorphism).

参考文献

[A1] Cornfeld, I. P. [I. P. Kornfel'd], Fomin, S. V. and Sinai, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982, Chapt. 1, Sect. 5.

刘建明 译 苏维宜 校

积分学 [**integral calculus**; **интегральное исчисление**]

数学的一个分支, 其中研究**积分** (integral) 概念, 它的性质和计算方法. 积分学是与**微分学** (differential calculus) 密切相关的, 且与它一起构成数学分析的基础. 积分学的起源可追溯到数学发展的早期且它与由古希腊数学家发展的**穷竭法** (exhaustion, method of) 有关. 这个方法是在解决关于计算平面图形和曲面面积、立体体积的问题时, 以及在解决静力学和流体动力学中的某些问题时产生的. 它是基于用最简单平面图形或特殊立体 (长方形、平行六面体、柱体等等) 组成的阶梯形图形或立体去逼近所考虑的对象. 在这个意义下, 穷竭法可以看成一种早期的积分法. 在早期, 穷竭法的最大发展在 Eudoxus (公元前 4 世纪) 和特别在 Archimedes (公元前 3 世纪) 的著作中得到. 它后来的应用和完善是与 15 世纪到 17 世纪的几位学者的名字联系在一起的.

积分学和微分学的基本概念和理论, 首先是微分法和积分法之间的关系, 以及它们对解决实际问题的应用, 在 17 世纪末在 P. de Fermat, I. Newton 和 G. Leibniz 的著作中得到了发展. 他们的研究工作是数学分析深入发展的开始. L. Euler, Jacob Bernoulli, Johann Bernolli 和 J. L. Lagrange 的工作在 18 世纪数学分析的创建中起了重要作用. 在 19 世纪, 与极限概念的出现相联系, 积分学达到了逻辑上完满的形式 (在 A. L. Cauchy, B. Riemann 及其他人的工作中). 在 19 世纪末和 20 世纪, 积分学理论和方法的发展与**测度** (measure) 理论的研究同时进行.

借助于积分学用统一方法解决很多理论和应用问题成为可能的了, 包括以前还未被认为已解决的新问题, 和以前需要特殊的人为技巧的老问题. 积分学的基本概念是两个密切相关的积分概念, 即不定积分和定积分.

在实轴上一个区间上给定的实值函数的不定积分 (indefinite integral) 定义为在该区间上它的所有原函数即其导数是给定函数的那些函数的集体. 函数 f 的不定积分表示为 $\int f(x) dx$. 如果 F 是 f 的某一个原函数, 则它的任何其他原函数具有形式 $F + C$, 其中 C 是一个任意常数; 因此写成

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

求不定积分的运算称为积分法 (integration). 积分法是微分法的逆运算:

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad d\int f(x) dx = f(x) dx.$$

积分法运算是线性的: 如果在某区间上不定积分

$$\int f_1(x) dx \text{ 和 } \int f_2(x) dx$$

存在, 则对任何实数 λ_1 和 λ_2, 下面的积分在这区间上存在:

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] dx$$

且等于

$$\lambda_1\int f_1(x)dx+\lambda_2\int f_2(x)dx.$$

对不定积分，**分部积分法**（integration by parts）公式成立：如果两个函数 u 和 v 在某区间上可微且设积分 $\int v\,du$ 存在，则积分 $\int u\,dv$ 也存在，且下面的公式成立：

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

变量变换公式（formula for change of variables）成立：如果对两个分别定义在一定的区间上的函数 f 和 φ，复合函数 $f\circ\varphi$ 有意义且函数 φ 是可微的，则积分

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

存在且等于（见**代换积分法**（integration by substitution））

$$\int f(x)dx.$$

在某有界区间上连续的一个函数在该区间上有原函数，因而其不定积分存在．由于一个初等函数的不定积分一般不是初等函数这一事实，实际上求一指定函数的不定积分的问题是复杂的．已经知道很多函数类，对它们证明可以用初等函数来表示其不定积分．其中最简单的例子是从基本初等函数的导数表得到的积分（见**微分学**（differential calculus））：

1）$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1;$

2）$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

3）$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ a>0,\ a\neq1;$ 特别地，$\int e^x dx=e^x+C;$

4）$\int\sin x\,dx=-\cos x+C;$

5）$\int\cos x\,dx=\sin x+C;$

6）$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C;$

7）$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{cotan} x+C;$

8）$\int\sinh x\,dx=\cosh x+C;$

9）$\int\cosh x\,dx=\sinh x+C;$

10）$\int\frac{dx}{\cosh^2 x}=\tanh x+C;$

11）$\int\frac{dx}{\sinh^2 x}=-\operatorname{cotanh} x+C;$

12）$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=$

$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotan}\frac{x}{a}+C';$

13）$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

14）$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=$

$=-\arccos\frac{x}{a}+C',\ |x|<|a|;$

15）$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

（当 x^2-a^2 是在平方根号下时，假定 $|x|>|a|$）．

如果被积函数的分母在某点为零，则这些公式仅对其内部分母不为零的那些区间成立（见公式 1，2，6，7，11，13，15）．

有理函数在任何分母不为零的区间上的不定积分是有理函数、反正切和自然对数的复合．求有理函数的不定积分的代数部分能用 **Остроградский 法**（Ostrogradski method）．下面类型的积分可以用代换法和分部积分法化成有理函数的积分：

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right]dx,$$

其中 $r_1,\cdots,r_m$ 是有理数；形如

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

的积分（见 **Euler 代换**（Euler substitutions））；二项式微分的积分的某些情形（见**二项式微分**（differential binomial）；关于二项式微分的积分的 **Чебышев 定理**（Chebyshev theorem））；形如

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,\ \int R(\sinh x,\cosh x)dx$$

的积分（其中 $R(y_1,\cdots,y_n)$ 是有理函数）；积分

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,\ \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx,$$

$$\int x^n\cos\alpha x\,dx,\ \int x^n\sin\alpha x\,dx,$$

$$\int x^n\arcsin x\,dx,\ \int x^n\arccos x\,dx,$$

$\int x^n\arctan x\,dx,\ \int x^n\operatorname{arc\,cotan} x\,dx,\ n=0,1,\cdots$，和许多其他积分．相反地，例如，积分

$$\int\frac{e^x}{x^n}dx,\ \int\frac{\sin x}{x^n}dx,\ \int\frac{\cos x}{x^n}dx,$$

$$n=1,2,\cdots,$$

不能用初等函数表示．

定义在一个区间 $[a,b]$ 上的函数 f 的定积分（definite integral）

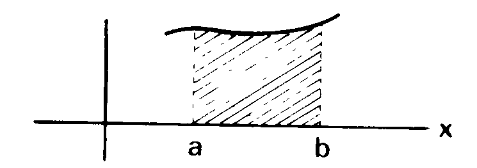
$$\int_a^b f(x)dx$$

是一种特定类型积分和的极限(见 **Cauchy 积分**(Cauchy integral);**Riemann 积分**(Riemann integral);**Lebesgue 积分**(Lebesgue integral);**Колмогоров 积分**(Kolmogorov integral);**Stieltjes 积分**(Stieltjes integral);等等). 如果这个极限存在,则 f 称为 Cauchy, Riemann, Lebesgue, 等等可积的(integrable).

积分的几何意义是与面积概念联系在一起的:如果函数 $f \geqslant 0$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,则积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的值等于由这函数的图象构成的曲线梯形的面积,即其边界由 f 的图象、线段 $[a, b]$ 和使这图形封闭的直线 $x=a$ 和 $x=b$ 的两线段(它可以退化成点)组成的集合的面积(见图).



实践中遇到的很多量的计算可化成计算积分和的极限的问题;换言之,化成求定积分的问题;例如,图形和曲面的面积,物体的体积,力所作的功,重心的坐标,各种物体惯性矩的值,等等.

定积分是线性的:如果两个函数 f_1 和 f_2 在一区间 $[a, b]$ 上可积,则对任何实数 λ_1 和 λ_2,函数

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

在这区间上也可积且

$$\int_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \\ = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

函数在一区间上的积分具有单调性质:如果函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积且设 $[c, d] \subset [a, b]$,则 f 在 $[c, d]$ 上也可积. 积分关于在其上作积分的区间也是加性的:如果 $a<c<b$ 且函数 f 在区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积,则它在 $[a, b]$ 上可积,且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

如果 f 和 g 是 Riemann 可积的,则它们的积也是 Riemann 可积的. 如果在 $[a, b]$ 上 $f \geqslant g$,则

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

如果 f 在 $[a, b]$ 上可积,则当 $-\infty<a<b<\infty$ 时绝对值 $|f|$ 也在 $[a, b]$ 上可积,且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

按定义令

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

且

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,\ a<b.$$

对于积分,中值定理成立. 例如 f 和 g 在一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的,如果 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a, b]$,又设 g 在 $[a, b]$ 上不改变符号,即它在这整个区间上或者是非负的或者是非正的,则存在一个数 μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

如果再假设 f 在 $[a, b]$ 上连续,则在 (a, b) 内存在一点 ξ,对它有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

特别地,如果 $g(x) \equiv 1$,则

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\,(b-a).$$

带可变上限的积分. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的,则由

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ a \leqslant x \leqslant b$$

定义的函数 F 在这区间上连续. 此外,如果 f 在一点 x_0 连续,则 F 在这点可微且 $F'(x_0)=f(x_0)$. 换言之,在一个函数的连续点上下面的公式成立:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

因此,这公式对区间 $[a, b]$ 上的每一个 Riemann 可积函数成立,或许一个 Lebesgue 测度为零的点集除外,因为如果一个函数在某区间上是 Riemann 可积的,则它的不连续点的集合具有测度零. 这样、如果函数 f 在 $[a, b]$ 上连续,则由

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

定义的函数是 f 在这区间上的一个原函数. 这个定理表明微分法运算是取带可变上限的定积分运算的逆运算,于是在定积分与不定积分之间建立了关系式

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

这个关系式的几何意义是求曲线的切线问题和平面图形面积的计算在以上意义下是互逆运算.

以下的 Newton-Leibniz 公式(Newton-Leibniz

formula）对区间 $[a, b]$ 上可积函数 f 的任何原函数 F 成立：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

它表明在某区间上的连续函数的定积分等于它的任何原函数在这区间两端点的值之差．这公式有时可作为定积分的定义．然后证明了这样引进的积分 $\int_a^b f(x)dx$ 等于对应的积分和的极限．

对定积分，变量替换和分部积分法公式成立．例如，设函数 f 在区间 (a, b) 上连续且 φ 连同它的导数 φ' 在区间 (α, β) 上连续，而 (α, β) 被 φ 映入 (a, b) 中：对 $\alpha < t < \beta$, $a < \varphi(t) < b$，所以复合 $f \circ \varphi$ 在 (α, β) 中有意义．于是，对 α_0, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$，以下的变量变换（change of variables）公式成立：

$$\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\varphi(\beta_0)} f(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

分部积分法公式（formula for integration by parts）是：

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)du(x),$$

这里函数 u 和 v 在 $[a, b]$ 上具有 Riemann 可积的导数．

Newton-Leibniz 公式把定积分的计算化成求其原函数的值．因为求原函数问题本质上是一困难问题，求定积分的其他方法极为重要，其中必须提到残数法（见**解析函数的残数**（residue of an analytic function）；**复积分法**（complex integration, method of））和**依赖于参数的积分**（parameter-dependent integral）中的对参数的微分与积分方法．对积分近似计算的数值方法也已经有了发展．

推广积分概念到无界函数的情形和到无界区间的情形导致**反常积分**（improper integral）的概念，它是再多用一次极限过程定义的．

不定积分和定积分概念能扩展到复值函数．把任何单复变数的全纯函数表示成围道上的 **Cauchy 积分**（Cauchy integral）的形式在解析函数论的发展中起重要作用．

一元函数定积分概念到多元函数情形的推广导致**多重积分**（multiple integral）的概念．

对多元的无界集和无界函数，和一维情形一样，可导出反常积分概念．

积分学的实际应用的扩大使得需要引入**曲线积分**（curvilinear integral），即沿一曲线的积分，**曲面积分**（surface integral），即在一曲面上的积分，和更一般地，在流形上的积分等概念，这些积分在某种意义下可化为定积分（曲线积分化成某区间上的积分，曲面积分化成某（平面）区域上的积分，n 维流形上的积分化成 n 维区域上积分）．流形上的积分，特别是曲线和曲面积分在多元函数积分学中起着重要作用；用这种方法可以建立一区域上的积分与其边界上的积分之间，或一般情形下，流形上的积分与其边界上的积分之间的关系．这种关系由 **Stokes 公式**（Stokes formula）（亦见 **Остроградский 公式**（Ostrogradski formula）；**Green 公式**（Green formula））建立，它是 Newton-Leibniz 公式到多维情形的一种推广．

多重积分、曲线积分和曲面积分在数学物理，特别在场论中，得到了直接应用．多重积分及与它们有关的概念广泛地用于解具体的应用问题．**求体积公式**（cubature formula）的理论为了多重积分的数值计算已经得到发展．

有限个实或复变数的实值或复值函数的积分学理论和方法可扩展到更一般的对象．例如，取值在赋范线性空间中的函数、定义在拓扑群上的函数、广义函数、无穷多个变量的函数的积分理论（轨道上积分）．最后，积分学中一个新的方向是与构造数学的出现与发展有关的．

积分学应用于数学的很多分支（在微分方程和积分方程理论中，在概率论和数理统计中，在最优过程理论中，等等），也用于数学的应用中．关于参考文献亦见**微分学**（differential calculus）的 [1]－[24]．

参考文献

[1] Heiberg, I. L. (ed.), Archimedes: Opera Omnia, Wissenschaft. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972.

[2] Dyk, W. von and Caspar, M. (eds.), J. Keppler: Gesammelte Werke, C. H. Beck, 1937.

[3] Cavalieri, B., Geometria indivisibilus (continuorum nova quadam ratione promota), Bologna, 1935.

[4] Euler, L., Integralrechnung, Berlin, 1770.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见**无穷小演算**（infinitesimal calculus）．

参考文献

[A1] Valiron, G., Théorie des fonctions, Masson, 1948.

[A2] Apostol, T. M., Calculus, 1-2, Blaisdell, 1969.

[A3] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1963.

[A4] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974（中译本：W. 卢丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1981）.

[A5] Zaanen, A. C., Integration, North-Holland, 1967.

[A6] Priestley, W. M., Calculus: a historical approach, Springer, 1979.

【译注】

参考文献

[B1] Boyer, C. B., The concept of the calculus, Hafner Pub. Co., 1949（中译本：C. B. 波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977）.

[B2] Edwards, C. H., The historical development of the calculus, Springer-Verlag, 1979 (中译本: C. H. 爱德华, 微积分发展史, 北京出版社).

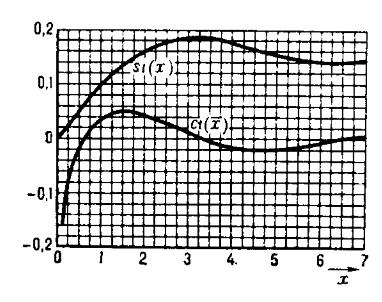
葛显良 译

积分余弦 [**integral cosine**; **интегральный косинус**]

对于实数 x, 由下式定义的特殊函数:

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = c + \ln x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt,$$

其中 $c = 0.5772\cdots$ 是 **Eular 常数** (Eular constant). 积分余弦的图形为



函数 $y = \mathrm{ci}(x)$ 和 $y = \mathrm{si}(x)$ 的图形.

与积分余弦有关的一些积分是

$$\int_0^\infty e^{-pt}\mathrm{Ci}(qt)\,dt = -\frac{1}{2p}\ln\left[1+\frac{p^2}{q^2}\right],$$

$$\int_0^\infty \cos t\,\mathrm{Ci}(t)\,dt = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\infty \mathrm{Ci}^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ci}(t)\mathrm{si}(t)\,dt = -\ln 2,$$

其中 $\mathrm{si}(t)$ 是**积分正弦** (integral sine).

对于小的 x,

$$\mathrm{Ci}(x) \approx c + \ln x.$$

对于大的 x, 渐近表示为

$$\mathrm{Ci}(x) = \frac{\sin x}{x}P(x) - \frac{\cos x}{x}Q(x),$$

$$P(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(2k)!}{x^{2k}}$$

$$Q(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k(2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

积分余弦具有级数表示

$$\mathrm{Ci}(x) = c + \ln x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} - \cdots + $$

$$+ (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!2k} + \cdots. \qquad (*)$$

作为复变量 z 的函数, 由 $(*)$ 定义的 $\mathrm{Ci}(x)$ 是在沿负实半轴剪开的 z 平面内 ($-\pi < \arg z < \pi$) 的单值解析函数. 这里, $\ln z$ 的值取为 $\pi < \mathrm{Im}\,\ln z < \pi$. 在裂缝附近 $\mathrm{Ci}(x)$ 的性态由下列极限来决定:

$$\lim_{\eta\downarrow 0}\mathrm{Ci}(x \pm i\eta) = \mathrm{Ci}(|z|) \pm \pi i, \ x < 0.$$

在积分余弦和**积分指数函数** (integral exponential function) $\mathrm{Ei}(z)$ 之间存在下列关系:

$$\mathrm{Ci}(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(iz) + \mathrm{Ei}(-iz)].$$

有时也用记号 $\mathrm{ci}(x) \equiv \mathrm{Ci}(x)$.

亦见 **Si-ci 螺线** (Si-ci-spiral).

参考文献

[1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里等编, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957, 1958).

[2] Kratzer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akad. Verlag, 1960.

[3] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

[4] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963 (英译本: Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Prentice-Hall, 1965).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 函数 Ci 也称为余弦积分 (cosine integral). 当然, 它能够在 $\mathbf{C}\setminus\{x\in\mathbf{R}: x \leqslant 0\}$ 中由积分来定义 (如上).

张鸿林 译

积分曲线 [**integral curve**; **интегральная кривая**]

正规常微分方程组

$$y' = f(x, y), \ y\in\mathbf{R}^n$$

的解 $y = y(x)$ 的图象. 例如, 方程

$$y' = -\frac{x}{y}$$

的积分曲线是圆 $x^2 + y^2 = c^2$, 其中 c 是任意常数. 常常认为积分曲线与解没有区别. 标量方程

$$y' = f(x, y) \qquad (*)$$

的积分曲线的几何意义如下所述. 方程 $(*)$ 定义了平面上的一个**方向场** (direction field), 即一个方向向量场, 使在每个点 (x, y) 处向量对 x 轴倾角的正切等于 $f(x, y)$. 于是 $(*)$ 的积分曲线就是在其上各点处的切线与在该点处的方向场的向量重合的曲线. 方程 $(*)$ 的积分曲线族填满满足下述条件的整个区域: 函数 $f(x, y)$ 在该区域内满足保证 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 解的存在性和唯一性条件; 这些曲线互不相交也互不相切.

参考文献

[1] Петровский, И. Г., Лекции по теории обыкновенных

дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程讲义，高等教育出版社，1957). Н. Н. Ладис 撰

【补注】 正规微分方程组 (normal system of differential equations) 是形如

$$\frac{d^{n_k} x_k}{d t^{n_k}} = F_k\left(x_1, \frac{d x_1}{d t}, \cdots; x_2, \frac{d x_2}{d t}, \cdots; x_m, \frac{d x_m}{d t}, \cdots\right) \quad k = 1, \cdots, m$$

的微分方程组，其中函数 F_k 只依赖于 $d^j x_i / d t^j$，$j < n_i$，$i = 1, \cdots, m$.

参考文献

[A1] Birkhoff, G., Rota, G.-C., Ordinary differential equations, Ginn, 1962.

[A2] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956. 沈永欢 译

整环 [**integral domain** 或 integral ring; **область целостности**]

有幺元的没有零因子(见**因子**(divisor))的**交换环**(commutative ring). 任一域都是整环，含于域中的有幺元的环亦然. 反之，任一整环都可嵌入一个域中，此嵌入可由分式域的构作给出(见**分式环**(fractions, ring of)).

如果 A 是整环，则 A 上的多项式环 $A[x]$ 和形式幂级数环 $A[[x]]$ 亦是整环. 如果 A 是有幺元的交换环，I 是 A 的任一理想，则环 A/I 是整环，当且仅当 I 是**素理想**(prime ideal). 没有幂零元的环 A 是整环，当且仅当 A 的谱是不可约拓扑空间(见**环的谱**(spectrum of a ring)).

在整环的定义中有时不要求 A 的交换性. 体以及体的含有幺元的子环是非交换整环(non-commutative integral domain)的例子. 但是，一般说来，任一非交换整环可以嵌入到体中这一论断是不正确的(见[2]和**环的嵌入**(imbedding of rings)).

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1965.

[2] Cohn, P. M., Free rings and their relations, Acad. Press, 1985.

[3] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1, Springer, 1973. Л. В. Кузьмин 撰 赵春来 译

积分方程 [**integral equation**; **интегральное уравнение**]

积分号下包含未知函数的方程. 积分方程可分成两大类: 线性和非线性积分方程(亦见**线性积分方程**(linear integral equation); **非线性积分方程**(non-linear integral equation)).

线性积分方程具有形式

$$A(x)\varphi(x) + \int_D K(x, s)\varphi(s) ds = f(x), \ x \in D. \quad (1)$$

这里 A, K, f 是已给定的函数，称 A 为此积分方程的系数(coefficient)、K 为核(kernel)(见**积分算子的核**(kernel of an integral operator))，而 f 为自由项(free term)(或右边(right-hand side))，D 是一维或高维 Euclid 空间中一个有界或无界区域，x, s 是这个空间的点，ds 是体积元，而 φ 是未知函数. 要求确定 φ，使得对 D 中所有的(或者几乎所有的，如果积分是按 Lebesgue 意义下取的) x，(1) 式成立. 在 (1) 中，如果 A, K 是矩阵而 f, φ 是向量函数，则 (1) 称为线性积分方程组. 如果 $f = 0$，则此积分方程称为齐次的(homogeneous)，否则称为非齐次的(inhomogeneous).

线性积分方程有三种不同的类型，取决于系数 A. 如果对所有的 $x \in D$, $A(x) = 0$，则 (1) 称为第一类方程(equation of the first kind); 如果对所有的 $x \in D$, $A(x) \neq 0$，则称为第二类方程(equation of the second kind); 而如果 $A(x)$ 在 D 的某一非空真子集上为零，则称为第三类方程(equation of the third kind).

为简单起见，只讨论一维情形的积分方程，而 D 是有限区间 $[a, b]$. 在这种情形下，第一类和第二类线性方程可分别表成以下形式:

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s) ds = f(x), \ x \in [a, b], \quad (2)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s) ds = f(x), \ x \in [a, b]. \quad (3)$$

常数 λ 称为积分方程的参数(parameter). 在数学物理中，第二类方程是最常见的. 如果 K 是一个 **Fredholm 核**(Fredholm kernel)，即如果方程 (2)，(3) 中的积分算子是完全连续的(也称为紧的，见**完全连续算子**(completely-continuous operator))，则积分方程 (2) (分别地，(3))称为第一(第二)类 Fredholm 方程(Fredholm equation). Fredholm 方程的一个重要的例子是其中的核满足条件

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds < \infty \quad (4)$$

的方程，而右边和未知函数 φ 是平方可积函数.

方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s) ds = 0, \ x \in [a, b], \ (5)$$

称为对应于非齐次积分方程 (3) 的齐次积分方程. 对应于方程 (2) 的齐次积分方程类似地定义. 齐次积分

方程总有解 $\varphi=0$，称为零解（zero solution）（或平凡解（trivial solution））．使（5）有非零解 φ 的那些参数 λ 的值称为核 K 或积分方程（5）的特征（characteristic）（或基本（fundamental）或本征（eigen））值（values）（或数（numbers）），而这非零解 φ 称为 K 或积分方程（5）的属于（belonging）（或对应于（corresponding））给定本征值 λ 的特征（characteristic）（基本（fundamental），本征（eigen））函数（function）．如果 λ 不是一个本征值，则称为正则值（regular value）（正则数（regular number））．

复核 K 称为 Hermite 的（Hermitian），如果

$$\overline{K(x,s)}=K(s,x), \tag{6}$$

这里上横表示复共轭．在实核的情形下，（6）有形式 $K(x,s)=K(s,x)$．这样的核称为对称的（symmetric）．

一个 Fredholm 核不必有本征值（例如，**Volterra 核**（Volterra kernal）的情形，见下文）．如果核是对称的，不几乎处处为零，则它至少有一个本征值且它的所有本征值是实的．

如果核 K 当 $s>x$ 时为零（所谓 Volterra 核），则方程（2）和（3）有形式

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\ a\leqslant s\leqslant x\leqslant b, \tag{7}$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\ a\leqslant s\leqslant x\leqslant b. \tag{8}$$

这些方程分别称为第一和第二类 **Volterra 方程**（Volterra equation）．在 19 世纪上半叶，积分方程的一些特殊情形开始出现．在 **Laplace 方程**（Laplace equation）的 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的解化为第二类线性积分方程的研究以后，积分方程成为数学家特别注意的对象．线性积分方程一般理论的构造始于 19 世纪末．这个理论的奠基人被认为是 V. Volterra（1896），E. Fredholm（1903，[5]），D. Hilbert（1912，[6]）和 E. Schmidt（1907，[7]）．甚至在这些研究工作之前，对构造一个积分方程解的逐次逼近法已经提出（亦见**序列逼近法**（sequential approximation, method of））．这种方法最初在 J. Liouville（1838），L. Fuchs（1870），G. Peano（1888）和其他人的工作中应用于与研究常微分方程相联系的 Volterra 型（按现代术语）非线性方程的求解；也被 C. Neumann（1877）用于构造一个第二类积分方程的解．逐次逼近法的一般形式应归于 E. Picard（1893）．

在研究振动膜方程中，H. Poincare（1896）提出了在方程（3）中引入可变的数值参数 λ 的主意．他然后猜想（由振动膜的情况类推）（3）的解是 λ 的亚纯函数．这个猜想被 Fredholm 证明（1900－1903）．Volterra 研究（7），（8）形积分方程的工作（1896－1897）先于 Fredholm 的工作．Volterra 证明了：如果核和右边是连续的，则对任何有限值 λ，（8）恰好有一个连续解，它可以用逐次逼近法构造出来．方程（3）在假设它的核、它的右边和未知函数分别是正方形 $[a,b]\times[a,b]$ 和区间 $[a,b]$ 上连续函数的情况下，由 Fredholm 作了研究．追随 Volterra，Fredholm 把（3）中的积分换成 Riemann 积分和并且把积分方程（3）作为有限的线性代数方程组的极限情形（见 **Fredholm 方程**（Fredholm equation））．用形式的极限过渡方法 Fredholm 得到了一个给出（3）的解的公式；他证明了除了参数 λ 的值的一个有限或可数集外这公式是（3）的解，且证明了关于（3）的可解性的定理．对方程（3）的 Fredholm 理论推广到了积分方程组的情形，也推广到了弱奇性核的情形（见**积分算子**（integral operator））．方程组的解可以化为其核有平行于坐标轴的不连续线的单个方程的解．

Hilbert（1904）指出，Fredholm 定理能够严格地应用极限过渡过程来加以证明，并且根据无穷多变量的线性型和双线性型理论构造了线性方程的一般理论．Schmidt（[7]）给了 Hilbert 的研究工作一个更简单且稍为更一般的表述．他不依赖于 Fredholm 理论，用把核表成一个退化核和一个"小"核的和的办法构造了具有实对称核的线性积分方程的一种理论（见**具有对称核的积分方程**（integral equation with symmetric kernel））．在实对称核情况的第二类积分方程理论中，I. Carleman 实现了在实质上减弱加在数据和未知元上的限制．他把 Fredholm 的方法（见[8]）推广到当（3）的核满足条件（4）的情形．在 F. Riesz（1918）和 J. Schauder（1930）的文章中，Fredholm 的定理推广到 Banach 空间中某一类线性算子方程．

研究第一类积分方程的基本方法是所谓**正则化方法**（regularization method）（亦见**不适定问题**（ill-posed problems））．第三类积分方程是 H. Bateman（1907），Picard（1910），G. Fubini（1912）和 Ch. Platrier（1912）作了特别探讨的对象．

如果一个线性积分方程不是 Fredholm 方程，则它称为奇异方程（singular equation）（见**奇异积分方程**（singular integral equation））．Hilbert 的无穷多个变量的二次型的一般理论在这情形下也提供了得到许多重要结果的可能性．对某些特定的奇异积分方程类，考虑到这些方程的特征性质，求其解的特殊方法已有所发展．例如，对奇异积分方程和**卷积型积分方程**（integral equation of convolution type），两个互为转置的齐次积分方程有同样个数线性无关解的 Fredholm

定理不成立.

平行于线性方程，对非线性积分方程也已作了研究. 其中，未知函数可以带有 n 次幂 ($n>1$)，例如，在方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi^n(s)ds=f(x),\ x\in[a,b]$$

中. 未知函数也可以以更一般的形式进入，例如在方程

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,s,\varphi(s))ds$$

中 (见 **Hammerstein 方程** (Hammerstein equation); **非线性积分方程** (non-linear integral equation)).

参考文献

[1] Привалов, И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.-Л., 1937.

[2] Михлин, С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959 (英译本: Mikhlin, S. G., Linear integral equations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960).

[3] Tricomi, F. G., Integral equations, Interscience, 1957.

[4] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974(中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一分册, 人民教育出版社, 1962).

[5] Fredholm, E., Sur une classe des équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365 − 390.

[6] Hilbert, D., Grundzuge einer allegemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953.

[7A] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 1. Entwicklung willküriger Funktionen nach Systeme vorgeschriebener, *Math. Ann.*, **63** (1907), 433 − 476.

[7B] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 2. Auflösung der allgemeiner linearer Integralgleichung, *Math. Ann.*, **64** (1908), 162 − 174.

[7C] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 3. Ueber die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen, *Math. Ann.*, **65** (1908), 370 − 399.

[8] Carleman, T., Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, *Math. Z.*, **9** (1921), 196 − 217.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Anderssen, R. S., The application and numerical solution of integral equations, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[A2] Colton, D. L. and Kress, R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley, 1983.

[A3] Fenyö, S. and Stolle, H., Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, 1 − 4, Birkhaüser, 1982 − 1984.

[A4] Groetsch, C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Pitman, 1984.

[A5] Hochstadt, H., Integral equations, Wiley, 1973.

[A6] Smithies, F., Integral equations, Cambridge Univ. Press, 1959.

[A7] Widom, H., Lectures on integral equations, Amer. Book. Comp., 1969.

[A8] Zabreyko, P. P. [P. P. Zabreĭko], et al., Integral equations — a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).

[A9] Gohberg, I. and Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhaüser, 1981.

[A10] Jörgens, K., Lineare Integraloperatoren, Teubner, 1970.

[A11] Prössdorf, S., Einige Klassen singulärer Gleichungen, Akad. Verlag, 1974.

葛显良 译 鲁世杰 校

卷积型积分方程 [**integral equation of convolution type**; **интегральное уравнение типа свертки**]

在卷积变换的积分号下包含未知函数的积分方程 (见**积分算子** (integral operator)). 卷积型积分方程的独特性是这种方程的核依赖于自变量的差. 最简单的例子是方程

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\ -\infty<t<\infty, \tag{1}$$

这里 k 和 f 是给定的函数而 φ 是未知函数. 设 $k,f\in L_1(-\infty,\infty)$ 且在同一类中寻求解. 为了 (1) 可解，必要充分条件是

$$1-K(\lambda)\neq 0,\ -\infty<\lambda<\infty, \tag{2}$$

这里 K 是 k 的 **Fourier 变换** (Fourier transform). 当 (2) 成立时，方程 (1) 在类 L_1 中有唯一的解，用公式

$$\varphi(x)=f(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)f(t)dt \tag{3}$$

表示，这里 $k_1\in L_1(-\infty,\infty)$ 是由其 Fourier 变换

$$K_1(\lambda)=1-[1-K(\lambda)]^{-1}$$

唯一确定的. 半直线上卷积型方程 (**Wiener-Hopf 方程** (Wiener-Hopf equation))

$$\varphi(t)-\int_0^{\infty}k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\ 0\leqslant t<\infty, \tag{4}$$

在研究各种具有理论和实用特征的问题中产生 (见[1], [4]).

设右边 f 和未知函数 φ 属于 $L_p(0,\infty)$ ($1\leqslant p\leqslant\infty$), 核 $k\in L_1(-\infty,\infty)$ 且

$$\alpha(\lambda) = 1 - K(\lambda) \neq 0, \ -\infty < \lambda < \infty. \quad (5)$$

函数 $\alpha(\lambda)$ 称为方程(4)的象征(symbol). 方程(4)的指标(index)是数

$$\kappa = \operatorname{ind}\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg\alpha(\lambda). \quad (6)$$

如果 $\kappa = 0$, 则由方程

$$1 + K_\pm(\lambda) = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\alpha(\lambda) \pm \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln a(\tau)}{\tau-\lambda}d\tau\right] \quad (7)$$

定义的函数 K_+, K_- 分别是函数 $k_+, k_- \in L_1(-\infty, \infty)$ 的 Fourier 变换, 使得对 $t<0$, $k_+(t) = k_-(-t) = 0$. 在上面的条件下, 方程(4)有唯一解, 它可以用公式

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^\infty r(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad (8)$$

表示, 这里

$$r(t, \tau) = k_+(t-\tau) + k_-(t-\tau) + + \int_0^\infty k_+(t-s)k_-(s-\tau)ds.$$

如果 $\kappa < 0$, 方程(4)的所有解用公式

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{|\kappa|} c_k t^{k-1} e^{-t} + + \int_0^\infty r_0(t, \tau)\left[f(\tau) + \sum_{k=1}^{|\kappa|} c_k \tau^{k-1} e^{-\tau}\right] d\tau \quad (9)$$

给出, 这里 c_k 是任意常数,

$$r_0(t, \tau) = k_+^{(0)}(t-\tau) + k_-^{(1)}(t-\tau) + + \int_0^\infty k_+^{(0)}(t-s)k_-^{(1)}(s-\tau)ds, \quad (10)$$

且函数 $k_+^{(0)}$, $k_-^{(1)} \in L_1(-\infty, \infty)$ 是由它们的 Fourier 变换:

$$1 + K_-^{(1)}(\lambda) = [1 + K_0^{(0)}(\lambda)](\lambda + i)^\kappa (\lambda - i)^{-\kappa}, \quad (11)$$

$$1 + K_\pm^{(0)}(\lambda) = = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln b(\lambda) \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln b(\tau)}{\tau-\lambda}\right],$$

$$b(\lambda) = [1 - K(\lambda)]\left[\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right]^\kappa$$

唯一决定的.

当 $\kappa < 0$ 时, 对应于(4)的齐次方程恰有 $|\kappa|$ 个线性无关解 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{|\kappa|}$, 它们在任何有界区间上是绝对连续函数; 可以选取这些解, 使得对 $k = 1, \cdots, |\kappa| - 1$, $\varphi_{k+1}(t) = \varphi_k'(t)$, $\varphi_k(0) = 0$, 而 $\varphi_{|\kappa|}(0) \neq 0$.

如果 $\kappa > 0$, 这方程可解仅当以下条件成立:

$$\int_0^\infty f(t)\psi_j(t)dt = 0, \ j = 1, \cdots, \kappa, \quad (12)$$

这里 $\psi_1, \cdots, \psi_\kappa$ 是(4)的转置齐次方程:

$$\psi(t) - \int_0^\infty k(\tau - t)\psi(\tau)d\tau = 0 \quad (13)$$

的一个线性无关解系. 在这些条件下, 这(唯一的)解由公式

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^\infty r_1(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (14)$$

给出, 这里

$$r_1(t, \tau) = k_+^{(1)}(t-\tau) + k_-^{(0)}(t-\tau) + + \int_0^\infty k_+^{(1)}(t-s)k_-^{(0)}(s-\tau)ds,$$

而函数 $k_-^{(0)}(t)$, $k_+^{(1)}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ 的 Fourier 变换 $K_-^{(0)}(\lambda)$ 和 $K_+^{(1)}(\lambda)$ 由方程

$$1 + K_+^{(1)}(\lambda) = [1 + K_+^{(0)}(\lambda)]\left[\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right]^\kappa$$

和方程(11)定义. 对方程(4), Noether 的定理成立(见**奇异积分方程**(singular integral equation)).

方程(4)的理论中第一批有意义的结果在[11]中得到, 其中为了解对应于(4)的齐次方程, 给出了一个有效方法(所谓 Wiener-Hopf 法(Wiener-Hopf method)), 该法要求假设核和所求解满足条件: 对某对 $0 < \alpha < a$ 同时有

$$k(t) = O(e^{-a|t|}) \text{ 和 } \varphi(t) = O(e^{\alpha t}).$$

Wiener-Hopf 方法的主要点是一个在带形 $|\operatorname{Im}\lambda| < a$ 内全纯的函数 $h(\lambda)$ 的因式分解(factorization of a function)的想法, 即把 $h(\lambda)$ 表成积 $h_-(\lambda) \cdot h_+(\lambda)$ 的可能性, 其中 h_-, h_+ 分别是半平面 $\operatorname{Im}\lambda < a$ 和 $\operatorname{Im}\lambda > -a$ 上的全纯函数, 且满足一定的附加要求. 这些结果已经得到发展和增强(见[4]).

已经发展了一种把方程(4)化成线性识别的边值问题的方法. 按这种方法, 方程(4)在以下假设下已有解: $k \in L_{1,2}(-\infty, \infty)$, $K \in \operatorname{Lip}_\alpha(-\infty, \infty)$ $(0 < \alpha < 1)$, $K(\lambda) = O(|\lambda|^{-\beta})$ $(\beta > 0)$, 当 $|\lambda| \to \infty$, 且 $1 - K(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$.

除此之外, 数 $\operatorname{ind}(1 - K(\lambda))$ 在解(4)中的作用已经阐明. 在较早的文章中, 一个带形上的解析函数 $1 - K(\lambda)$ 的零点的个数起着类似的作用.

为了 Noether 的定理对方程(4)成立、条件(5)既是必要的又是充分的. 上面给出的方程(4)的解在许多实际上重要的情形下可以简化. 对特殊的右端已经得到了解的渐近法(见[4]).

对方程(4), 当 $k \notin L_1(-\infty, \infty)$ 和核 $k(t)$

的 Fourier 变换 $K(\lambda)$ 有第一类间断点 (见 [5]) 或是**殆周期函数** (almost-periodic function) (见 [2]) 的情况，也已作了研究. 在这些情形下，条件 (5) 对 Noether 定理的成立原来是不充分的.

上面列出的极大部分结果对型 (4) 的方程组的有效性也已经建立; 然而，与单个方程的情形不同，卷积型积分方程组在一般情况下不能用求积法显式地求解 (见 [6]).

也与卷积型积分方程有关的是成对方程 (paired equations) (或对偶方程 (dual equations))

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ t>0,$$
$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ t<0, \tag{15}$$

和它们的转置方程，所谓具有两个核的卷积型积分方程:

$$\varphi(t) - \int_{0}^{\infty} k_1(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau + \tag{16}$$
$$-\int_{-\infty}^{0} k_2(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ -\infty<t<\infty.$$

方程 (15) 在 [3] 中已用求积法显式地获解，而方程 (16) 在 [10] 中获解.

一个在有界区间上的卷积型积分方程,

$$\varphi(t) - \int_{0}^{T} k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ 0\leqslant t\leqslant T<\infty, \tag{17}$$

其中 $k\in L_1(-T,T)$，称为 **Fredholm 方程** (Fredholm equation) (见 [7], [9]).

卷积型积分方程，当其象征在有限个点上为零且这些零点的阶数为整数时，可用求积法得到显式解 (见 [8], [12]).

参考文献

[1] Noble, B., Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, Pergamon, 1988.

[2] Гохберг, И. Ц., Фельдман, И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971 (英译本: Gohberg, I. C. [I. Ts. Gokhberg] and Feld'man, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, Amer. Math. Soc., 1974).

[3A] Рапопорт, И. М., 《Докл. АН СССР》, **59** (1948), 8, 1403 – 1406.

[3B] Рапопорт, И. М., 《Сб. тр. ин-та матем. АН УССР》, 1949, 12, 102 – 117.

[4] Крейн, М. Г., 《Успехи матем. наук》, **13** (1958), 5, 3 – 120.

[5] Дудучава, Р. В., 《Math. Nachr.》, **65** (1975), 1, 59 – 82.

[6] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., 《Успехи матем. наук》, **12** (1957), 2, 44 – 118.

[7] Ганин, М. П., 《Изв. ВУЗов. Математика》, 1963, 2, 31 – 43.

[8] Гахов, Ф. Д., Смагина, В. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **26** (1962), 3, 361 – 390.

[9] Симоненко, И. Б., 《Изв. ВУЗов. Математика》, 1959, 2, 213 – 226.

[10] Черский, Ю. И., 《Уч. зап. Казанск. ун-та》, **113** (1953), 10, 43 – 56.

[11] Wiener, N. and Hopf, E., Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Sitz. Ber. Akad. Wiss. Berlin*, **30/32** (1931), 696 – 706.

[12] Prössdorf, S., Einige Klassen singulärer Gleichungen, Birkhäuser, 1974.

Р. В. Дудучава, Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 作为例子，亦见 **Abel 积分方程** (Abel integral equation).

一般地，型 (4) 的方程组不能显式地求解. 当象征 $a(\lambda)$ 为有理矩阵函数时是例外. 在这种情形下 $a(\lambda)$ 可以写成形式 $a(\lambda)=I+C(\lambda-A)^{-1}B$，这里 I 是单位矩阵，A 是 m 阶方阵，譬如说没有实本征值，而 B 和 C (可能非方) 是适当大小的矩阵. 这样一种表示来自数学系统理论，称为 $a(\lambda)$ 的实现 (realization). Wiener-Hopf 方程组现在可以分解成项 A, B, C. 这个分解产生解的显式公式，犹如对 Wiener-Hopf 因式分解的显式公式一样. 把 (4) 解释成包含矩阵核 k 和 L_p 向量函数 f 和 φ 的方程组，通过这个途径得到的主要结果之一叙述如下. 对 $L_p(0,\infty)$ 中的每一个 f，方程 (4) 有 $L_p(0,\infty)$ 中的唯一解 φ，当且仅当 $A-BC$ 无实本征值且 $\mathbf{C}^m$ 是 M 和 $M^{\times}$ 的直和，这里 M 和 $M^{\times}$ 是分别对应于 A 和 $A-BC$ 位于上半和下半平面的本征值的谱子空间. 此外，在这种情形下，象征 $a(\lambda)$ 有一个 (典型 Wiener-Hopf) 因式分解 ((canonical Wiener-Hopf) factorization) $a(\lambda)=a_-(\lambda)a_+(\lambda)$，其中

$$a_-(\lambda)=I+C(\lambda-A)^{-1}(I-\Pi)B,$$

$$a_+(\lambda)=I+C\Pi(\lambda-A)^{-1}B,$$

$$a_-(\lambda)^{-1}=I-C(I-\Pi)(\lambda-A+BC)^{-1}B,$$

$$a_+(\lambda)^{-1}=I-C(\lambda-A+BC)^{-1}\Pi B,$$

且 (4) 的预解核 $r(t,\tau)$ 由

$$r(t,\tau)=\begin{cases}-iCe^{-it(A-BC)}\Pi e^{i\tau(A-BC)}B, & \tau<t,\\ iCe^{-it(A-BC)}(I-\Pi)e^{i\tau(A-BC)}B, & \tau>t\end{cases}$$

给出，这里 Π 是 $\mathbf{C}^m$ 沿 M 到 $M^{\times}$ 上的投影. 象征

是自伴的情形有特别的意义（见[A11]）. 更进一步的详情及更多的结果（也关于非典型 Wiener-Hopf 因式分解（non-canonical Wiener-Hopf factorization））见[A1]，[A2]，[A7] 和 [A9]. 到某些非有理象征类的推广是可能的. 对这些类，实现涉及无限维的，可能无界的算子（见[A3]，[A4] 和 [A9]）. 关于对迁移方程和抽象动力理论的应用，见[A2]，[A8] 和 [A10]；关于对 H^{∞} **控制理论**（control theory）的应用，见[A6].

亦见 **Fredholm 算子**（Fredholm operator）.

参考文献

[A1] Bart, H., Transfer functions and operator theory, *Linear Alg. Appl.*, **84** (1986), 33 − 61.

[A2] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorization of matrix and operator functions, Birkhaüser, 1979.

[A3] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Fredholm theory of Wiener-Hopf equations in terms of realization of their symbols, *Integr. Eq. Oper. Theory*, **8** (1985), 590 − 613.

[A4] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Wiener-Hopf factorization, inverse Fourier transforms and exponentially dichotomous operators, *J. Funct. Anal.*, **68** (1968), 1 − 42.

[A5] Clancey, K. and Gohberg, I., Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhaüser, 1981.

[A6] Francis, B. A., A course in H_{∞} control theory, Lecture notes in control inform. sci., 88, Springer, 1987.

[A7] Gohberg, I. and Kaashoek, M. A. (eds.), Constructive methods of Wiener-Hopf factorization, Birkhaüser, 1986.

[A8] Greenberg, W., Mee, C. van der and Protopopescu, V., Boundary value problems in abstract kinetic theory, Birkhaüser, 1987.

[A9] Kaashoek, M. A., Minimal factorization, linear systems and integral operators, in S. S. Power (ed.), Operators and function theory, Reidel, 1985, 41 − 86.

[A10] Kaper, H. G., Lekkerkerker, C. G. and Hejtmanek, J., Spectral methods in linear transport theory, Birkhaüser, 1982.

[A11] Ran, A. C. M., Minimal factorization of selfadjoint rational matrix functions, *Integr. Eq. Oper. Theory*, **5** (1982), 850 − 869.

[A12] Ramm, A. G., Theory and applications of some new classes of integral equations, Springer, 1980.

[A13] Ziolkowski, A., Deconvolution, Reidel, 1984.

葛显良 译　鲁世杰 校

具有对称核的积分方程[integral equation with symmetric kernel; интегральное уравнение с симметричным ядром]

具有实对称核（见**积分算子的核**（kernel of an integral operator））

$$K(x, s) = K(s, x)$$

的积分方程.

具有实对称核的线性方程理论首先是由 D. Hilbert（1904）模仿对称二次型理论并从有限个变量过渡到无穷多个变量而建立起来的. 稍后，E. Schmidt（1907）用一种更初等的方法证明了 Hilbert 的结果. 由于这个原因，具有对称核的积分方程理论也称为 Hilbert-Schmidt 理论. 把在这个理论中加在数据和未知元上的限制作有重要意义的减弱是由 T. Carleman 实现的（见下文）.

考虑一个具有实对称核的第二类积分方程：

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x),\ x \in [a, b]. \tag{1}$$

在建立具有对称核的积分方程理论中，只需假设对称核 K 在正方形 $[a, b] \times [a, b]$ 上可测且

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dxds < \infty, \tag{2}$$

而自由项 f 和未知函数 φ 是 $[a, b]$ 上平方可积函数（积分认为是 Lebesgue 意义下的）.

具有对称核积分方程理论的发展开始于研究齐次对称积分方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = 0,\ x \in [a, b] \tag{3}$$

的本征值和本征函数的许多一般性质. 这样证明了：方程（3）至少有一个本征值（当 K 是几乎处处非零时）；对应于不同本征值的本征函数是正交的；本征值是实的；因为这核是实的，不失一般性可假设本征函数是实的；在参数 λ 的值的任何有限区间上只有有限多个本征值.

（3）的本征值的集合称为方程的谱. 这个谱是一个非空的有限或可数的数集 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots\}$；对谱中每一个 μ_n，有一个线性无关的本征函数的有限集与之对应. 本征值和本征函数能排成两个序列：

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \\ \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

使得本征值的绝对值是非减的：$|\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}|$，且每一个本征值按照对应于它的本征函数个数重复多次. 这本征函数系 $\{\varphi_k\}$ 可假设是规范正交的. 序列（4）称为对称核 K 或方程（3）的一个本征值和本征函数系

(或一个本征系(eigen system)). 这个系的确定等价于齐次对称积分方程(3)的完全解.

核 $K(x, s)$ 作为 s 的函数关于规范正交系 $\{\varphi_k(s)\}$ 的 Fourier 级数是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \quad (5)$$

这个由对称核 K 的本征系构成的级数称为 K 的双线性级数, 或 K 按本征函数的双线性展开. 这个级数平均收敛于 K, 即

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b\int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right] dx\,ds = 0.$$

此外, 如果双线性级数(5)一致收敛, 则

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

特别地, 如果核只有有限个本征值, 则后面这个等式总成立. 在这种情形下, 核 K 称为退化的(见**退化核**(degenerate kernel)).

逆命题也成立: 一个退化对称核有有限个本征值(且因而有本征函数的有限集). 在正方形 $[a, b]\times[a, b]$ 上连续的且有正本征值的核的双线性级数一致收敛.

由本征系(4)的知识使得能够构造非齐次方程(1)的解. 以下诸定理成立.

如果 λ 不是 K 的一个本征值, 则对称积分方程(1)有唯一解 φ, 由公式

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) \quad (6)$$

给出, 这里 λ_k 是本征值而 f_k 是 f 关于核的本征函数的正交系 $\{\varphi_m\}$ 的 Fourier 系数, 换句话说,

$$f_k = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds, \ k = 1, 2, \cdots.$$

设 $\lambda = \lambda_1$ 是 K 的一个本征值, 那么对称积分方程(1)可解, 当且仅当以下条件成立:

$$f_k = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds = 0, \ k = 1, \cdots, q,$$

这里 $\varphi_1, \cdots, \varphi_q$ 是对应于 λ_1 的本征函数. 如果这些条件满足, 则(1)的所有解用公式

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x) \quad (7)$$

表示, 这里 $c_1, \cdots, c_q$ 是任意常数.

如果 K 有无穷多个本征值, 且因而在公式(6), (7)的右边是无穷级数, 则这些级数平均收敛. 如果此外还要求 K 满足

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leqslant \text{常数}, \ x\in[a, b],$$

则上述级数绝对且一致收敛.

公式(6)和(7)称为 Schmidt 公式(Schmidt formulas). 带对称核积分方程的理论的极大部分容易推广到复值函数. 在这种情形下, 类似于实对称核的是 Hermite 核(Hermitian kernel): $\overline{K(x, s)} = K(s, x)$.

如果一个对称核 K 的本征系(4)已知, 则容易研究第一类对称 Fredholm 方程

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x), \ x\in[a, b]. \quad (8)$$

仍假设方程(8)的对称核 K 在正方形 $[a, b]\times[a, b]$ 上平方可积, 且右边 f 和未知函数 φ 是 $[a, b]$ 上平方可积函数.

对称核称为完全的, 如果它的本征函数系 $\{\varphi_n\}$ 是完全的(封闭的)(见**完全函数系**(complete system of function)).

Picard 定理(Picard theorem). 设 $K(x, s)$ 是完全核, 那么方程(8)可解, 当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k|^2$$

收敛, 这里 f_k 是 f 的 Fourier 系数. 当这条件成立时, 这(唯一的)解可表成形式

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(x), \quad (9)$$

且这级数平均收敛.

Carleman ([5])已在对称核 K 比之 Hilbert 和 Schmidt 在较少的限制条件下建立了一种理论. 这些条件如下: 1) 对所有 $x \neq x_i$(这里 $\{x_i\}$ 是某一有有限个极限点的点列), $\int_a^b K^2(x, s)ds$ 在 Lebesgue 意义下存在, 且

$$\lim_{y\to x} \int_a^b [K(y, s) - K(x, s)]^2 ds = 0;$$

2) 存在有限点集 $s_1, \cdots, s_n \in \{x_i\}$, 在这些点的某一邻域中函数

$$\sigma^2(x) = \int_a^b K^2(x, s)ds$$

不可积, 但是在从区间 $[a, b]$ 除掉区间 $(s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 所得的集合 Δ_ε 上必定可积, 这里 ε 是任意小正数.

设 $K_\varepsilon(x, s)$ 是在使 $|x - s_i| \leqslant \varepsilon$, $|s - s_i| \leqslant \varepsilon$ $(i = 1, \cdots, n)$ 的点集 $\{(x, s)\}$ 上为零, 而在 $[a, b]\times[a, b]$ 除此集合以外的点集上等于方程(1)的核 K 的函数. Carleman 方法的思想如下:

代替方程(1)考虑具有核 K_ε 的第二类线性积分方程. 研究这方程的谱和解, 然后通过当 $\varepsilon \to 0$ 时的

极限研究方程(1)的谱和解.

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Chelsea, reprint, 1953.

[2A] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 1. Entwicklung willküriger Funktionen nach Systeme vorgeschriebener, *Math. Ann.*, **63** (1907), 433 – 476.

[2B] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 2. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, *Math. Ann.*, **64** (1907), 162 – 174.

[2C] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 3. Ueber die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen, *Math. Ann.*, **65** (1908), 370 – 399.

[3] Wiarda, G., Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen, Teubner, 1930.

[4] Михлин, С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959 (英译本: Mikhlin, S. G., Linear integral equations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960).

[5] Carleman, T., Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symmétrique, Uppsala, 1923.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 $[a, b] \times [a, b]$ 上具有正本征值的连续核的双线性级数一致收敛这一事实通常称为 **Mercer 定理** (Mercer theorem).

公式(9)表明第一类积分方程的不适定性. 因为当 $k \to \infty$ 时 $|\lambda_k| \to \infty$, f 中一个任意小的误差结果能造成 φ 中一个任意大的误差, 如果前者出现于带充分大 k 的 Fourier 分量 f_k 中(见**不适定问题** (ill-posed problems)).

另外的参考文献见**积分方程** (integral equation). 关于对称性条件亦见 **Hermite 核** (Hermitian kernel).

参考文献

[A1] Carlemann, T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, in Verh. Internat. Mathematiker Kongress. Zürich, 1932, Vol. 1, O. Füssli, 1932, 138 – 151.

[A2] Tricomi, E., Integral equations, Dover, reprint, 1985.

葛显良 译 鲁世杰 校

积分方程的数值方法 [**integral equations, numerical methods; интегральное уравнение, численные методы решения**]

求积分方程近似解的方法.

需要求一维第二类 **Fredholm 方程** (Fredholm equation)

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x) \qquad (1)$$

的解, 这里 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, λ 是数值参数且 $K(x, s)$ 在 $a \leqslant x, s \leqslant b$ 上连续.

假设 λ 不是 $K(x, s)$ 的本征值. 那么方程(1)有唯一解 $\varphi(x)$, 它在 $[a, b]$ 上连续. 在这些条件下为得到近似解可给出以下诸方法.

第一方法 设 a 和 b 是有限数. (1)中的积分换成网格 $\{s_j\}$ $(j = 0, \cdots, n)$ 上的积分和, 而变量 x 取值 $x_1, \cdots, x_n$, 然后得到关于 φ_j 的一个线性代数方程组,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\varphi_j = f_i,\ i = 1, \cdots, n, \qquad (2)$$

这里 $A_{ij} = 1 - \lambda C_j K(x_i, x_j)$, 而 C_j 是借以用积分和取代(1)中积分的求积公式的系数. 对充分大的 n, 组(2)有唯一解 $\{\overline{\varphi}_j\}$. 可取函数

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j K(x, x_j)\overline{\varphi}_j$$

作为(1)的一个近似解, 因为当 $n \to \infty$ 且 $\Delta_n = \max_i\{|x_{i+1} - x_i|\} \to 0$ 时, 函数 $\widetilde{\varphi}_n(x)$ 的序列在 $[a, b]$ 上一致收敛于所要求的方程(1)的解, 见 [1] – [4].

当把积分换成求积公式时, 应当牢记所用求积公式精确度愈高, 核和解(且因而 $f(x)$)所需的光滑性也愈高.

当积分域 (a, b) 是无限的情况, 借助于关于所求解 $\overline{\varphi}(x)$ 对大的 $|x|$ 的值的性状的先验信息, 用有限区间 (a_1, b_1) 代替 (a, b). 这样得到的方程然后用以上方法近似地求解. 或者, 用积分变量替换把积分域化成有限域. 作为另外一种选择, 可应用对无限域的求积公式.

第二方法. 在方程(1)中核 $K(x, s)$ 用一个逼近它的退化核:

$$K_1(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s)$$

来代替, 其中函数组 $\{a_i(x)\}$ 是线性无关的. 按这种方式得到的方程

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (3)$$

有一个解 $\hat{\varphi}(x)$ 形如

$$\hat{\varphi}(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) + f(x),$$

其中常数

$$C_i = \int_a^b \hat{\varphi}(s)b_i(s)ds$$

待定. 把函数 $\hat{\varphi}(x)$ 代入方程(3)并比较函数 $a_i(x)$ 的系数, 得到一个关于 C_i 的线性代数方程组:

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}C_j = \beta_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

这里

$$\alpha_{ij}=\int_a^b a_j(s)b_i(s)ds,\ \beta_i=\int_a^b f(s)b_i(s)ds.$$

从以上的方程组确定 C_i 后把它代入 (4) 就得到函数 $\hat{\varphi}(x)$, 它被取作 (1) 的近似解, 因为用一个退化核对核 $K(x, s)$ 充分好的逼近, 方程 (3) 的解与所要求解 $\varphi(x)$ 在任何区间 $[a_1, b_1]\subset(a, b)$ 相差任意小的量, 当 (a, b) 是有限区间的情况, 在 $[a, b]$ 上也是如此 (见 [1], [4]).

第三方法. 取根据公式

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi_n(s)ds+f(x),\quad n=0, 1, \cdots,$$

$\varphi_0(x)=f(x)$, 迭代而得到的函数 $\varphi_n(x)$ 作为近似解; 如果 $|\lambda|<1/M(b-a)$, 其中 $M=\sup_{x,s}|K(x, s)|$, 则当 $n\to\infty$ 时序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛于所要求的解. 对带有可积奇性的核 $\{\varphi_n(x)\}$ 到精确解的收敛性也成立 (见 [1]). 这些方法的误差估计在 [1] - [7] 中给出. [8] 中的问题是考虑为了得到积分的有规定精度的近似值所需的算术运算的最小次数. 这个问题的解等价于在规定的算术运算次数下求问题的近似解的极小误差的大小.

为了解第一类 Fredholm 积分方程需要应用特殊的方法, 因为这些问题是不适定的. 如果在方程 (1) 中 λ 是核 $K(x, s)$ 的本征值之一, 则求 (1) 的解的问题是不适定的且需要特殊的方法 (见**不适定问题** (ill-posed problem)).

第二类非线性方程常用迭代法近似地求解 (见 [3]).

为了得到线性和非线性方程的近似解, 也常用 **Галеркин 方法** (Galerkin method).

为了得到第二类多维 Fredholm 积分方程的近似解也能用类似的方法. 然而, 其数值实施更为复杂. 对多重积分近似计算的求体积公式及其误差估计见 [5] - [10]. 多重积分近似数值计算的一种**蒙特卡罗方法** (Monte-Carlo method) 在 [10] 中作了讨论.

参考文献

[1] Петровский, И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 积分方程论讲义, 高等教育出版社, 1954).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, 1966 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[4] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.-Л., 1962 (中译本: Л. В. 康托洛维奇, В. И. 克雷洛夫, 高等分析近似方法, 上, 科学出版社, 1966).

[5] Мысовских, И. П., 《Сиб. матем. ж.》, **5** (1964), 3, 721 - 723.

[6] Мысовских, И. П., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **12** (1972), 2.

[7] Мысовских, И. П., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **15** (1975), 6.

[8] Емельянов, К. В., Ильин, А. М., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 7 (1967), 4, 905 - 910.

[9] Соболев, С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

[10] Соболь, И. М., Многомерные кубатурные формулы и функции Хаара, М., 1969.

В. Я. Арсенин 撰

【补注】 Fredholm 方程 (1) 称为第一类的 (如果 f 为零), 否则称为第二类的 (亦见 **Fredholm 方程, 数值方法** (Fredholm equation, numerical methods)). 它是带可变积分限的更一般的积分方程:

$$\varphi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, s)\varphi(s)ds+f(x)$$

的特殊情形. 上面的方程通常称为 Andreoli 积分方程 (Andreoli integral equation). 如果 $a(x)=a$ 和 $b(x)=x$, 这方程化成一个第二类 ($f\neq 0$) 或第一类 ($f=0$) Volterra 积分方程 (见 **Volterra 方程** (Volterra equation)).

在积分方程 (也包括 Fredholm 和 Volterra 方程) 的数值分析中, 对上面指出的 $K_1(x, s)$ 形式的核用术语 (n 阶) **退化核** (degenerate kernel) 或 Pincherle-Goursat 核 (Pincherle-Goursat kernel). 在非线性情形下, 当 (1) 中被积函数是 $K(x, s, \varphi)$ 形式时, 可以用项 $a_i(x)b_i(s, \varphi)$ 的有限和逼近 K. 这种类型的核称为可分的 (separable) 或有限可分解的 (finitely decomposable).

对第二类线性积分方程数值方法的全面讨论包括 Fortran 程序可在 [A2] 中找到; 亦见 [A3]. 正文中的 "第一方法" 常称为 Nyström 法 (Nyström method). 对线性和非线性积分方程两者的数值方法的泛函分析基础是集体紧算子理论 ([A1]). 对第一类积分方程的数值方法是所谓 "**正则化方法**" (regularization method) ([A4]).

参考文献

[A1] Anselone, P. M., Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations, Prenctice-Hall, 1971.

[A2] Atkinson, K. E., A survey of numerical methods for

the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM, 1976.

[A3] Baker, C. T., The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977.

[A4] Groetsch, C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Pitman, 1984.

[A5] Walsh, J. L., Delver, L. M., Numerical solution of integral equations, Oxford Univ. Press, 1974.

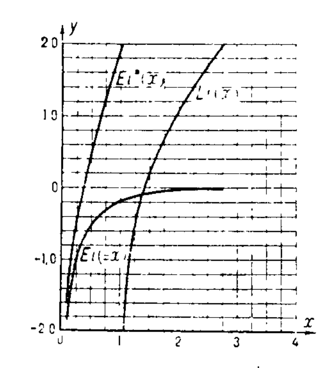
葛显良 译　鲁世杰 校

积分指数函数 [integral exponential function; интегральная показательная функция]

对于实数 $x \neq 0$, 由下式定义的特殊函数:

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt=-\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

积分指数函数的图形如下图所示:



函数 $y=\mathrm{Ei}(-x)$, $y=\mathrm{Ei}^*(x)$ 和 $y=\mathrm{Li}(x)$ 的图形

当 $x>0$ 时, 函数 e^t/t 在 $t=0$ 处具有无限间断性, 积分指数函数在积分的主值意义下来理解:

$$\mathrm{Ei}=\lim_{r\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{r}\frac{e^t}{t}\,dt+\int_{r}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt\right\}.$$

积分指数函数可以表示为下列级数:

$$\mathrm{Ei}(x)=c+\ln(-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!k},\ x<0, \tag{1}$$

和

$$\mathrm{Ei}(x)=c+\ln(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!k},\ x>0, \tag{2}$$

其中 $c=0.5772\cdots$ 是 **Euler 常数** (Euler constant).

存在渐近表示式

$$\mathrm{Ei}(-x)\approx\frac{e^{-x}}{x}\left[1-\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}-\frac{3!}{x^3}+\cdots\right],\quad x\to\infty.$$

作为复变量 z 的函数, 积分指数函数

$$\mathrm{Ei}(z)=c+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!k},\ |\arg(-z)|<\pi,$$

是沿正实半轴剪开的 z 平面 $(0<\arg z<2\pi)$ 上的单值解析函数; 这里 $\ln(-z)$ 值的选取, 使得 $-\pi<\mathrm{Im}\ \ln(-z)<\pi$. $\mathrm{Ei}(z)$ 接近于裂缝时的性状可由下列极限关系描述:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\eta\downarrow 0}\mathrm{Ei}(z+i\eta)&=\mathrm{Ei}(z)-i\pi,\\ \lim_{\eta\downarrow 0}\mathrm{Ei}(z-i\eta)&=\mathrm{Ei}(z)+i\pi,\end{aligned}\right\}\ z=x+iy.$$

在区域 $0<\arg z<2\pi$ 中的渐近表示为

$$\mathrm{Ei}(z)\sim\frac{e^z}{z}\left[\frac{1!}{z}+\frac{2!}{z^2}+\cdots+\frac{k!}{z^k}+\cdots\right],\quad |z|\to\infty.$$

积分指数函数与**积分对数** (integral logarithm) $\mathrm{li}(x)$ 由下列公式相联系:

$$\mathrm{Ei}(x)=\mathrm{li}(e^x),\ x<0,$$
$$\mathrm{Ei}(\ln x)=\mathrm{li}(x),\ x<1;$$

而与**积分正弦** (integral sine) $\mathrm{Si}(x)$ 和**积分余弦** (integral cosine) $\mathrm{Ci}(x)$ 则由下列公式相联系:

$$\mathrm{Ei}(\pm ix)=\mathrm{Ci}(x)\pm i\,\mathrm{Si}(x)\mp\frac{\pi i}{2},\ x>0.$$

微分公式为

$$\frac{d^n\mathrm{Ei}(-x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-x}e^x e_{n-1}(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

有时也用到下列公式:

$$\mathrm{Ei}^+(z)=\mathrm{Ei}(z+i0),\ \mathrm{Ei}^{-1}(z)=\mathrm{Ei}(z-i0),$$
$$\mathrm{Ei}^*(z)=\overline{\mathrm{Ei}(\bar{z})}=\mathrm{Ei}(z)+\pi i.$$

参考文献

[1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里等编, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957, 1958).

[2] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

[3] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.

[4] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963 (英译本: Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Prentice-Hall, 1965).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 函数 Ei 通常称为指数积分 (exponential integral).

对于复数值 z (x 不为正实数), 函数 $\mathrm{Ei}(z)$ 可以不

用级数表示式而用积分来定义（如同对于实数 $x\neq 0$）；因为被积函数是解析的，所以在区域 $\mathbf{C}\setminus\{x\in\mathbf{R}: x\geqslant 0\}$ 中积分与路径无关．

公式（1）当其中的 x 由 z 代替时，对 $|\arg(-z)|<\pi$ 仍然成立，由（2）定义的函数（当 $x>0$ 时）也称为变形指数积分（modified exponential integral）

张鸿林 译

环的整扩张 [**integral extension of a ring**; **целое расширение кольца**]

具有幺元的交换环 A 的扩张 B，其每个元素 $x\in B$ 都是在 A 上整的（integral），即 x 满足形如

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

的方程，即所谓整性相关方程（equation of integral dependence），其中 $a_i\in A$．

一个元素 x 在 A 上是整的，当且仅当下述二等价条件之一被满足：1）$A[x]$ 是有限型的 A 模；2）存在一个忠实的 $A[x]$ 模，它是有限型的 A 模．整元素在 A 上是代数的．如果 A 是域，则反之亦然．复数域 $\mathbf{C}$ 中在 $\mathbf{Z}$ 上整的元素称为代数整数（algebraic integer）．如果环 B 是 A 上的有限型模，则每个元素 $x\in B$ 在 A 上是整的（反过来不一定正确）．

设 $R\supset A$ 是一个交换环，又设 x 和 y 是 R 中在 A 上整的元素，则 $x+y$ 和 xy 在 A 上也是整的，所以 R 中所有在 A 上整的元素的集合构成一个子环，称之为 A 在 R 中的整闭包（integral closure）．以下考虑的所有的环都假定是交换的．

如果 B 在 A 上是整的，A' 是某个 A 代数，则 $B\otimes A'$ 在 A' 上是整的．如果 B 是 A 的整扩张并且 S 是 A 的某个乘性子集，则环 $S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上是整的．一个整环 A 称作整闭的（integrally closed），如果 A 在它的分式域中的整闭包是 A．**因子分解环**（factorial ring）是整闭的．一个环是整闭的，当且仅当对于每个极大理想 $\mathfrak{p}\subset A$，局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的．

设 B 是 A 的整扩张，又设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的**素理想**（prime ideal），则 $\mathfrak{p}B\neq B$ 且在 B 中存在立于 $\mathfrak{p}$ 上的素理想 $\mathfrak{P}$（即 $\mathfrak{P}$ 满足 $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap A$）．$\mathfrak{P}$ 是极大的，当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大的．如果 L 是环 A 的分式域的有限扩张，B 是 A 在 L 中的整闭包，则在 B 中仅存在有限多个素理想是立于 A 中给定的素理想之上的．

设 $C\supset B\supset A$，则 $C\supset A$ 是整扩张，当且仅当 $C\supset B$ 和 $B\supset A$ 都是整扩张．

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）．

Л. В. Кузьмин 撰 赵春来 译

积分通道 [**integral funnel**; **интегральная воронка**]，对微分方程 $dx/dt=f(t,x)$ 一点 $P(t_0,x_0)$ 的

过点 P 的**积分曲线**（integral curve）上所有点的集合．（方程可以指用向量记号 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示的方程组．）如果只有一条积分曲线过 P，则积分通道由这一条曲线组成．在 $n=1$ 情形，即 x 是数量时，积分通道由满足 $x_*(t)\leqslant x\leqslant x^*(t)$ 的点 (t,x) 组成，这里 $x^*(t)$ 和 $x_*(t)$ 为上解和下解，即过 P 的最大解和最小解．

如果函数 $f(t,x)$ 是连续的（或满足 Carathéodory 存在定理的条件），则积分通道是一闭集．进而，如果过 P 的所有解在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上存在，则通道的这一段（由不等式 $a\leqslant t\leqslant b$ 定义的积分通道的一部分）和积分通道与任一平面 $t=t_1\in[a,b]$ 的截面都是连通紧集．积分通道边界上的任何点都可以通过位于该积分通道边界上的一条积分曲线与 P 相连．如果点列 P_k，$k=1,2,\cdots$，收敛到 P，则点列 P_k 的通道段在下述意义上收敛到 P 的通道段：对任意 $\varepsilon>0$，当 $k>k_1(\varepsilon)$ 时，它们包含在 P 的通道段的 ε 邻域中．在关于集合 $F(t,x)$ 的特定假设下，**微分包含**（differential inclusion）

$$x\in F(t,x)$$

的积分通道有着类似的性质．

参考文献

[1] Kamke, E., Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. II, *Acta Math.*, **58** (1932), 57–85.

[2] Бокштейн, М. Ф., 《Уч. зап. МГУ, сер. матем.》, **15** (1939), 3–72.

[3] Pugh, C. C., Funnel sections, *J. Differential Eq.*, **19** (1975), 2, 270–295.

А. Ф. Филиппов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Filippov, A. F., Differential equations with discontinuous righthand sides, Kluwer, 1988.

唐 云 译

积分几何学 [**integral geometry**; **интегральная геометрия**]

一个空间子流形集上（关于空间到自身的连续变换群）的不变测度理论．这些子流形包括直线、平面、测地线，或者凸曲面等等；换句话说，是那些在所考虑的变换群作用下类型不改变的子流形．许多空间，主要首先是 Euclid 空间、射影空间和齐性空间上的积分几何学理论已经建立起来．

积分几何学研究**不变测度**（invariant measure）的引入，它们彼此间的关系及其几何应用．它的产生与**几何概率**（geometric probability）问题的精确化陈述有关．

为了引进不变测度，首先要考虑与所考察的空间的坐标有关的函数，该函数在空间某区域上的积分在属于某个特定 **Lie 群**（Lie group）的任意的连续坐标变换下保持不变．这就需要寻找一个 Lie 群的**积分不变量**（integral invariant）．后者可看成是下述偏微分方程组的解：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [\xi_h^i(x)F(x)] = 0, h = 1, \cdots, r, \quad (1)$$

其中 $F(x)$ 是所求的积分不变量，x 是空间（具有维数 n）的一点，ξ_h^i 是该 Lie 群的无穷小变换的系数，r 是变换所含参数的个数．积分几何学中具有重要意义的是可测 Lie 群，即（在相差一个常数因子意义下）有且仅有一个不变量的群．特别地，可迁单群属于这一类型．

积分几何学中接下来的问题就是要在一个连续变换群下保持类型不变的流形集合上确定一个测度．该测度由积分

$$\int_{A_\alpha} |F(\alpha^1, \cdots, \alpha^q)| d\alpha^1 \wedge \cdots \wedge d\alpha^q \quad (2)$$

给出，其中 A_α 是 Lie 群的参数空间中的点组成的集合，F 是该 Lie 群的一个积分不变量（由方程（1）确定）或者是测度的密度．积分（2）也称为该流形集合的一个**基本测度**（elementary measure）．这测度的特定的选取可以和几何概率基本问题建立完全的对应．事实上，一个流形集合具有性质 A_1 的几何概率是该集合做为一个具有更一般性质 A 的流形集合的子集时所占的一个比例数．问题归结为分别地建立具有性质 A 的流形集合与它的具有性质 A_1 的子集上的测度，然后计算它们的比值，就得到了所求的几何概率．

对于多维齐性空间，流形（例如点、直线、超平面、超平面对、超球面、二阶超曲面）集合的测度（在差一个常数因子意义下）由积分

$$\int_X dH = [\omega_1, \cdots, \omega_h] \quad (3)$$

唯一地定义，其中 $\{\omega_i\}_{i=1}^h$ 是一个给定的可迁 Lie 群 G_2 的相对分量．这些相对分量的常系数的线性组合是与所考察的流形集合相应的 Pfaff 方程组的左端．测度（3）称为其上给定变换群的齐性空间的**运动学测度**（kinematic measure）．它是所谓的 **Poincaré 运动学测度**（Poincaré kinematic measure）的推广．（以下，所有的测度均在差一个常数因子意义下给出．）

在 Euclid 平面 E^2 上的积分几何学中，人们通常只考虑一种连续变换群，即**运动群**（不包含反射）．对于一个点集，其积分不变量为 1；对于直线集，如果将直线的参数取为法式方程参数 p 和 φ，其积分不变量仍为 1．任一曲线的长度等于 $\int n\,dp\,d\varphi/2$，其中 n 是一直线与该曲线的相交次数，积分在所有与该曲线相交的直线组成的集合上来做．对于由与两个凸图形（卵形线）相交的直线组成的集合，其测度等于这两个凸图形两内公切线长与两外公切线长的差（如图 1）．

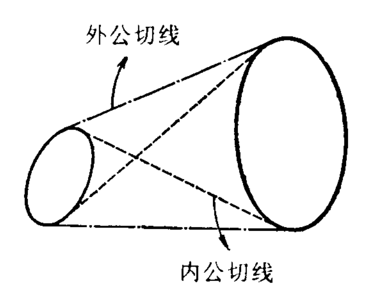
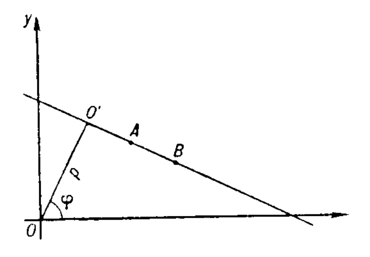


图 1

对于将两卵形线划分开来的所有直线组成的集合，其测度等于这两条卵形线的两内公切线长减去两卵形线的周长．对于点对组成的集合，其测度由下式给出

$$\int |t_2 - t_1| dp \wedge d\varphi \wedge dt_1 \wedge dt_2$$

其中 p，φ 是过点对的直线的法式方程的参数，t_1, t_2 是直线上点对到该直线上离原点最近的点的距离（如图 2）．



$|\overline{O'A}| = t_1$，$|\overline{O'B}| = t_2$，$|\overline{OO'}| = p$

图 2

对于直线对组成的集合，其测度等于

$$\int |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)| dx \wedge dy \wedge d\alpha_1 \wedge d\alpha_2,$$

其中 x 和 y 是该直线对交点的坐标，α_1 和 α_2 为这些直线与其中一条坐标轴的夹角（如图 3）．

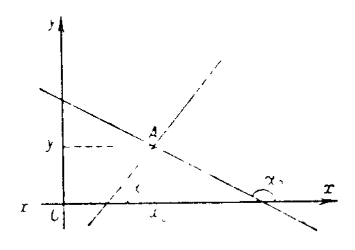


图 3

对于与一条卵形线相交的直线对组成的集合，其测度等于卵形线周长平方的一半减去卵形线面积的 π 倍 (Crofton 公式 (Crofton formula)). 将运动学测度应用于与给定卵形线相交的所有全等的卵形线组成的集合，就得到一个等周不等式，即经典的 **Bonnesen 不等式** (Bonnesen inequality). 如果令

$$I_n=\int_G \sigma^n dp\,d\varphi,\ J_n=\int_H r^n|t_2-t_1|dp\wedge d\varphi\wedge dt_1\wedge dt_2,$$

其中 σ 是 Jordan 卵形线 H 的长，G 是与其相交的直线集，r 是卵形线内部两点间的距离，则

$$J_n=\frac{2I_{n+3}}{(n+2)(n+3)},$$

这使得人们能够用一种简捷的方法确定卵形线内部两点间的平均距离. 对于由一些几何图形组成的集合，其运动学测度就是全等于指定的某图形的所有图形所组成的集合上的测度. 它等于

$$\int_X dx\wedge dy\wedge d\varphi,$$

其中 X 为图形上的点集，x,y 是其上一固定点的坐标，φ 是该图形的旋转角. 运动学测度可以看成活动标架集上的测度. 如果移动固定标架，而同时固定活动标架，则相应于同样的变换集合，运动学测度将保持不变 (运动学测度的对称性). 如果给一个全等图形集合中的每个图形另外配备一个活动标架，则运动学测度仍不变. 对于与某曲线的给定弧段相交的任一曲线的有限条全等弧段组成的集合，其测度等于这些弧段长度的导数的四倍 (Poincaré 公式 (Poincaré formula)). 与一卵形线相交的具有定长 l 的线段数等于 $2\pi F_0+2lL_0$，其中 F_0 和 L_0 分别为卵形线的面积与周长. 如果将卵形线换成一条不封闭曲线，则 $F_0=0$，相交数等于 $2lL_0$. 对于与一给定卵形线全等的卵形线集，其测度等于 $2\pi(F_0+F)+L_0L$, 其中 F_0 和 F 分别是相应的面积，L_0 和 L 分别是卵形线的周长.

Euclid 空间 E^3 上的积分几何学与 E^2 上积分几何学的建立方法类似. 对于点集，其积分不变量仍为 1. 如果一直线集合由两射影平面的方程组的集合

$$x=kz+a,\ y=hz+b$$

给出，则相应于平行移动和绕轴旋转集合的积分不变量等于 $(k^2+h^2+1)^{-2}$. 特别地，对于与一凸闭曲面 (卵形面) 相交的直线集，其测度等于该卵形面表面积的一半.

用类似于 E^2 的方法引入点对集合的测度后，就可以计算出卵形面的弦长四次方的平均值，它等于 $12V/\pi S$, 其中 V 和 S 分别为卵形面的体积与表面积. 对于由两射影平面的方程组

$$x=k_1z+a-k_1c;\ y=h_1z+b-h_1c$$

和

$$x=k_2z+a-k_2c;\ y=h_2z+b-h_2c$$

定义的相交直线对集 (其中 a, b 和 c 是直线交点的坐标)，其测度等于

$$[(k_1^2+h_1^2+1)\ (k_2^2+h_2^2+1)]^{-3/2}.$$

对于两个移动的卵形面的交集形成的几何体的表面组成的集合，其测度与交集形成的几何体本身组成的集合的测度满足同样的关系. 对于由截距式方程给出的平面，其积分不变量等于

$$(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-2},$$

其中 a,b,c 是截距长. 对于与一面积为 S 的曲面相交的平面的集合，其测度等于 $\pi^2S/2$, 而卵形面与平面集的交线的平均长度等于 $\pi S^2/2\bar{H}$, 其中 $\bar{H}$ 是全平均曲率.

平面对组成的集合其积分不变量等于平面集积分不变量的乘积. E^3 中的运动学测度等于不同有向平面集的测度与该有向平面上初等运动学测度的乘积. 相应于空间图形的具有一个不动点的旋转的积分不变量等于

$$1+l_1^2+l_2^2+l_3^2,$$

其中 $l_i=\alpha_i\tan(\varphi/2)$, $i=1,2,3$, α_i 是旋转轴的方向余弦，φ 是该旋转与转轴的夹角. 对于具有一个公共点，且仅相差一个空间中的旋转的几何体的集合，其测度等于 π^2.

曲面上的积分几何学通过定义测地线集上的测度为沿整个集合的曲面上外微分形式的积分而建立起来. 由此，外微分形式成为测地线集的密度，因为它不依赖于曲面上曲线坐标系以及定义测地线上点的位置的参数的选取. 在测地极坐标下，密度具有形式

$$dG=\left[\frac{\partial\sqrt{g(\rho,\theta)}}{\partial\rho}\right][d\theta d\rho].$$

特别地，对于球面，$dG=\cos\rho[d\theta d\rho]$; 而对于伪球面，$dG=\cosh\rho[d\theta d\rho]$. 对于与一光滑或者逐段光滑曲线相交的测地线集，其密度 $dG=|\sin\varphi|[d\varphi ds]$, 其中 φ 是交角，s 是该曲线的弦长. 运动学测度的密度 (运动学密度) $dK=[dPdV]$, 其中 dP 是曲面的面积元，V 是测地线与极半径的夹角. E^2 上积分几何学的许多结果可以推广到齐性曲面的情形. 一个集合的测度密度是其运动学密度，由此得到 E^2 上 Poincaré 公式的推广. 测地线对的集合，以及点对的集合上的测度可以用与 E^2 同样的方法获得.

根据 П. К. Рашевский 创立的所谓多度量几何学

(polymetric geometry)(见[4])，任意齐性曲面上积分几何学的结果可以推广到更广泛的一类曲面．这种推广可以藉助于 Рашевский 的双度量系统来得到．首先，用两种方法在带有两个参数的平面曲线集上引入测度，则所有对于平面（看作线元的集合）成立的结论都可推广到任意曲面上的具有常测地曲率的曲线的情形．

射影平面 P^2 上的积分几何学（integral geometry on the projective plane P^2）．相应于 P^2 上射影变换

$$x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+1},\ y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+1} \quad (4)$$

构成的完全群的积分不变量仅对三点组才存在，且等于以这三点为顶点的三角形的面积倒数的三次方．对于点对及相应的的幺模仿射变换群

$$\left.\begin{aligned}x'&=a_1x+b_1y+c_1,\\ y'&=a_2x+b_2y+c_2,\\ a_1b_2&-a_2b_1=1,\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

积分不变量为 1，而相应于仿射变换群点对集合的积分不变量等于 $(x_1y_2-x_2y_1)^{-2}$，这里 x_1,y_1 以及 x_2,y_2 是点对的坐标．

射影平面中的直线集是不可测集，但对于"点-线"对，以及相应的射影变换（4）的整个群，积分不变量等于 $(x_0\alpha+y_0\beta+1)^{-3}$，其中 x_0，y_0 为点的坐标，直线由方程 $\alpha x+\beta y+1=0$ 给出．对于由方程

$$\left.\begin{aligned}\alpha_ix+\beta_iy+1&=0\\ \gamma_i(\alpha_ix+\beta_iy)+1&=0\end{aligned}\right\},\ i=1,2$$

（其中 $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq0$）给出的平行四边形集，它在仿射变换群

$$\left.\begin{aligned}x'&=a_1x+b_1y+c_1\\ y'&=a_2x+b_2y+c_2\\ a_1b_2&-a_2b_1\neq0\end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

下的测度的密度为

$$[(\gamma_1-1)^2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2]^{-1}.$$

对于 P^2 上由方程

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$$

给出的圆的集合，极大变换群是相似变换

$$x=ax'+by'+c,\ y=bx'+ay'+d$$

构成的群．其测度的密度由 $(\gamma-\alpha^2-\beta^2)^{-2}$ 给出．在此基础上，可以计算出与一给定曲线相交的（中心位于某一区域的）圆的集合的测度．对于 P^2 上圆的集合，其测度等于相应于由平移变换和位似变换生成的变换群的运动学测度．

对于圆锥截线（不变量 $\Delta\neq0$）组成的集合，其极大不变量群是射影群

$$x=\frac{\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}}{\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+1},\ y=\frac{\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}}{\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+1},$$

其中 $\det|\alpha_{ij}|\neq0$，$i,j=1,2,3$，其测度的密度等于 Δ^{-2}．对于双曲线集，其极大不变量群是仿射群（6），其测度的密度等于 $a^{-1}\Delta^{-2}\sqrt{b^2-ac}$，其中 a,b,c 是双曲线一般方程的系数．类似地，椭圆集的极大不变量群也可测，但抛物线集的极大不变量群不可测，对于抛物线集，只有其极大不变量群的子群可测，如幺模仿射变换群与中心仿射变换群．射影变换群（4）的初等运动学测度等于 Δ^{-3}，其中 Δ 是变换的行列式．

中心仿射平面上的直线集是可测集，其测度的密度等于 p^{-3}，其中 p 是直线法式方程的自由项．非中心仿射平面上变换群 (5) 的运动学测度等于 a^{-1}．如果 $\Delta=\Delta(\varphi)$ 为一卵形线的宽度，则 Δ^{-2} 是其相应于幺模仿射变换群的测度的密度．

射影空间 P^3 上的积分几何学．带有 Descartes 直角坐标系的射影空间 P^3 上的运动群仅对四点组组成的集合是可测的．在此情形下，测度的密度等于 Δ^{-4}，其中 Δ 是以四点组为顶点的四面体的体积．对于点对和三点组，只有幺模仿射变换群是可测的，其测度的密度为 1．对于三点组组成的集合，中心仿射变换群也可测（如果这三点不共线的话）．P^3 中的直线集以完全运动群为其极大不变量群，但该群对于该集合是不可测的（仅仅是它的某个子群可测）．"直线对"集上完全变换群可测．对于平面集，不存在相应于 P^3 的完全变换群的测度；对于平面集，只有它的正交变换子群可测，平面对组成的集合上有一个相应于幺模中心仿射变换群的测度．平行六面体集上有相应于仿射变换子群的测度．"点-面"对集上有相应于 P^3 的完全变换群的测度．P^3 的球面集上存在相应于相似变换群的测度，其密度等于 R^{-4}，其中 R 是球面的半径．二阶曲面集上存在相应于 P^3 上完全变换群的测度，其密度是 Δ^{-5}，其中 Δ 是曲面的不变量．P^3 中圆周集容许相应于相似变换群的测度，其密度等于 R^{-4}，其中 R 是圆的半径．P^3 中完全变换群的运动学测度等于 Δ^{-4}，其中 Δ 为其行列式．三维幺模中心仿射空间上点集的测度的密度为 1．（射影）空间中平面集也是可测的，其密度为 p^{-4}，这里 p 为平面法式方程参数．

常曲率曲面 V^2 上的积分几何学．V^2 中具有正的常曲率的曲线族以 $G_3^+(x)$ 为极大不变量群．特殊类型的（三参数的，两参数的或者单参数的）曲线族具有相应于极大不变量群（$G_3^+(x)$ 的无穷小变换群）的测度密度．而单参数的曲线族还具有相应于 $G_1(x)$ 的测度密度．

当 V^2 具有负常曲率时，上述性质仍成立．具有三个参数的特殊类型的曲线族有相应于极大不变量群 $G_3^-(x)$ 的测度密度，且它等于 1．对具有两个或一个参数的特殊类型的曲线族，测度也存在．在这两种情形，曲线族 $F_q(x)$ 具有相应于极大不变量群 $G_2(x)$ 的测度的条件是伴随群 $H_2(\alpha)$ 是可测的空间可迁群．

积分几何学的推广．前面所述的性质都属于传统意义下的积分几何学，即将积分几何学看作是关于各种空间上，主要是齐性空间上几何对象的集合上不变测度的理论．如果将积分几何学看作是关于把某空间上一定几何对象集合上的函数变为同一空间上另一几何对象集合上函数的变换的理论，则该空间上点函数沿空间上某些几何对象积分的逆问题就成了基本的问题．例如，若将 n 维仿射空间一个函数 f 的积分变换（一个 **Radon 变换**（Radon transform））看成是它在超曲面上的积分，则相应的逆问题就是用 f 在超曲面上的积分来表示 f，即寻求 Radon 逆变换．类似地，关于四维复空间上二阶直纹面上函数的恢复问题（构成该直纹面的直线上函数的积分已知），以及实的或虚的 Лобачевский 空间上用函数在极限球面上的积分将该函数恢复的问题，都已被提出，并被解决．

参考文献

[1] Blaschke, W., Vorlesungen über Integralgeometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1955.

[2] Santaló, L A., Introduction to integral geometry, Hermann, 1953.

[3] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Виленкин, Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962（英译本：Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Vilenkin, N. Ya., Integral geometry and representation theory, Acad. Press, 1965).

[4] Рашевский, П. К., Полиметрическая геометрия, в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, в. 5, М.-Л., 1941, 21 – 147.

[5] Stoka, M. I., Géométrie intégrale, Gauthier-Villars, 1968.

[6] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970, 157–191.

С. Ф. Шушурин 撰

【补注】文献[A1]是到 1976 年为止关于经典积分几何学的一个相当完全的综述．积分几何学的一部分较新近的进展实质上是在 H. Federer 的一篇重要论文[A2]影响下得到的；Federer 将经典的运动学公式以及 Crofton 相交公式推广到曲率测度和正可达集．与曲率测度有关的一些积分几何学的更新结果在[A3]、[A4]这两篇综述性文章中有描述．在**随机几何学**（stochastic geometry）的最新发展中，积分几何学扮演了必不可少的角色．例如[A5]中关于 R. E. Miles 的，[A6]中 G. Matheron 的以及另外一些人的工作．运动学公式在随机几何学的曲率测度中的应用见文献[A7]和[A8]．

积分几何学的另一新的分支是 R. V. Ambartzumian 创立的组合积分几何学（combinatorial integral geometry）([A9])．该理论以某些几何对象集合上测度间的组合关系为主要对象，而且不假定必须具有不变性性质，因此它可应用于随机几何学，同时与 Hilbert 第四问题（Hilbert fourth problem）有着有趣的联系．

要得到关于该条目正文中称之为“积分几何学推广”这一分支全貌的一个印象，可以参看会议文集[A10]中的论文和文献[A11]．

参考文献

[A1] Santaló, L. A., Integral geometry and geometric probability, Addison-Wesley, 1976.

[A2] Federer, H., Curvature measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93**(1959), 418 – 491.

[A3] Weil, W., Kinematic integral formulas for convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.), Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 60 – 76.

[A4] Schneider, R. and Wieacker, J. A., Random touching of convex bodies, in R. Ambartzumaian and W. Weil (eds.): Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Teubner, 1984, 154 – 169.

[A5] Miles, R. E., Some new integral geometric formulae, with stochastic applications, *J. Appl. Prob.*, **16**(1979), 592 – 606.

[A6] Matheron, G., Random sets and integral geometry, Wiley, 1975.

[A7] Weil, W., Stereology: A survey for geometers, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.): Convexity and its applications, Birkhäuser, 1983, 360 – 412.

[A8] Weil, W., Point processes of cylinders, particles and flats, *Acta. Applic. Math.*, **9**(1987), 103 – 136.

[A9] Ambartzumian, R. V., Combinatorial integral geometry, Wiley, 1982.

[A10] Bryant, R. L., Guillemin, V., Helgason, S. and Wells, Jr., R. O. (eds.), Integral geometry, Amer. Math. Soc., 1987.

[A11] Ambartzumian, R. V. (ed.), Stochastic and integral geometry, *Acta. Applic. Math.*, **9**(1987), no, 1–2.

成 斌 译

积分双曲余弦 [integral hyperbolic cosine; интегральный гиперболический косинус]

对实数 x，由下式定义的特殊函数：

$$\mathrm{Chi}(x) = c + \ln x + \int_0^x \frac{\cosh t - 1}{t}\, dt = \mathrm{Ci}(ix) + i\frac{\pi}{2},$$

其中 $c = 0.5772\cdots$ 是 **Euler 常数**（Euler constant），$\mathrm{Ci}(x)$ 是**积分余弦**（integral cosine）．积分双曲余弦能够表示为下列级数：

$$\mathrm{Chi}(x) = c + \ln x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} + \cdots.$$

有时积分双曲余弦由 $\chi(x)$ 来表示．

关于参考文献、见**积分余弦**（integral cosine）.

А. В. Иванов 撰

【补注】 这个函数很少使用，由于它与余弦积分的关系，所以又称为双曲余弦积分（hyperbolic cosine integral）. 当然，它能够对 $z\in\mathbf{C}\setminus\{x\in\mathbf{R}: x\leqslant 0\}$ 来定义．

存在关系式 $\mathrm{Chi}(x)+\mathrm{Shi}(x)=\mathrm{Li}(e^x)$，其中 Shi 是**积分双曲正弦**（integral hyperbolic sine），Li 是**积分对数**（integral logarithm）.

张鸿林 译

积分双曲正弦 [**integral hyperbolic sine**; **интегральный гиперболический синус**]

对于实数 x，由下式定义的特殊函数：

$$\mathrm{Shi}(x)=\int_0^x \frac{\sinh t}{t}\,dt = i\,\mathrm{Si}(ix),$$

其中 $\mathrm{Si}(x)$ 是**积分正弦**（integral sine）. 积分双曲正弦能够表示为下列级数：

$$\mathrm{Shi}(x)=x+\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}+\cdots.$$

积分双曲正弦与**积分双曲余弦**（integral hyperbolic cosine）之间存在下列关系：

$$\mathrm{Chi}(x)+\mathrm{Shi}(x)=\mathrm{Li}(e^x),$$

其中 Li 是**积分对数**（integral logarithm）.

有时积分双曲正弦用 $\mathrm{shi}(x)$ 来表示．

关于参考文献，见**积分余弦**（integral cosine）.

А. В. Иванов 撰

【补注】 这个函数很少使用，由于它与正弦积分的关系，所以又称为双曲正弦积分（hyperbolic sine integral）. 当然，它能够对 $z\in\mathbf{C}$ 来定义．

张鸿林 译

整理想 [**integral ideal**; **целый идеал**]

完全位于环 A 中的域 Q 关于 A 的理想（这里 Q 是 A 的分式域，见**分式环**（fractions, ring of））. 整理想是 A 中的理想. 反过来，A 的每个理想是 A 的分式域 Q 的整理想.

О. А. Иванова 撰

【补注】 域 Q 的关于一个环 $A\subset Q$ 的理想是 A 模 Q 的 A 子模．这种理想也称为**分式理想**（fractional ideal）.

参考文献

[A1] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.

赵春来 译

积分不变量 [**integral invariant**; **интегральный инвариант**]，光滑动力系统的 k 次（阶）的

1) 绝对积分不变量（absolute integral invariant）是一个 k 次外**微分形式**（differential form）φ，而由此动力系统生成的变换将它变为自身．

2) 相对积分不变量（relative integral invariant）也是一个 k 次外微分形式，其外微分是一个 $(k+1)$ 次绝对积分不变量．

通常要谈到由一个常微分方程组 $\dot{x}=f(x)$ 定义的**流（连续时间动力系统）**（flow(continuous-time dynamical system)）$\{S_t\}$ 的积分不变量，f 是 Euclid 空间中（或一个流形上）的某区域上的光滑向量场．用坐标（在流形情况下是局部坐标）来表示，此动力系统可以写为

$$\dot{x}_i=f(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

体积形式 $\varphi(x)=\rho(x)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$（$\rho(x)$ 是一个正的局部可积的（时常甚至是连续或光滑的）坐标函数）是积分不变量的重要例子．对于光滑的 ρ，如果

$$\mathrm{div}(\rho f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\rho f_i)}{\partial x_i}=0,$$

则此形式是（1）的绝对不变量．这时、流有**不变测度**（invariant measure）$\mu(A)=\int_A\varphi$，在坐标（局部坐标）下，它可以用密度 $\rho(x)$ 来表示（用语随便一点，也常将 $\rho(x)$ 称为积分不变量）.

具有（广义）动量 p_i 和（广义）坐标 q_i $(i=1,\cdots,m)$ 的 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）有一相对积分不变量

$$\psi=\sum p_i\,dq_i$$

和一绝对积分不变量

$$\omega=\sum dp_i\wedge dq_i.$$

可以用这个事实为基础来定义 Hamilton 系统并展开其理论，因为这个系统的许多特定性质都与这些积分不变量直接相关（见 [4], [5]）．对任意 Hamilton 系统，外幂 ω^k（包括体积形式 ω^m）都是绝对积分不变量，而积 $\psi\wedge\omega^k$ 则为相对积分不变量．所以它们称为 Hamilton 系统的万有积分不变量（universal integral invariants）．除相差一个乘子外、Hamilton 系统的所有的万有积分不变量都可以化为其中的某一个（见 [4], [7]）.

若（1）有一 k 次绝对积分不变量 φ，则对任意光滑的 k 维链 c（例如一个光滑的 k 维流形），

$$\int_c\varphi=\int_{S_t(c)}\varphi. \tag{2}$$

若（1）有一相对积分不变量 φ，则一般说来（2）只当此链是某个 $k+1$ 维链的边缘时成立．有时，相对积分不变量也用较强的条件，即（2）对一切闭链 c 成立来定义．H. Poincaré 一开始就把积分不变量定义为当积分域在流的作用下变动时保持不变的这种类型的积分．

以上所说，全都容易推广到非自治系统 $\dot{x}=f(x,t)$. E. Cartan 所作的修正（见 [3]）是最本质的．这就是转变到扩充相空间（把时间加到通常的相坐标中）中去（甚至对自治系统），这时所考虑的微分方程组的**积分曲线**（integral curve）形成一族曲线（见**线汇**（congruence of lines））. Cartan 要求一形式 φ 在链 c（若讨论相对积分不变量则为闭链）上的积分，当每一点 $(x,t)\in c$ 沿过

此点的积分曲线变动时，其值不变；各点运动方式可以不同，只要是构成 c 的光滑变形即可 .(例如，在新的意义下并非 ψ 为Hamilton系统的相对积分不变量，而是极为有用的 Cartan-Poincaré 积分不变量 $\sum p_i dq_i - Hdt$ 则是，其中 H 是 Hamilton 函数，见[3]—[5]) . [6]中给出了一个有关的定义 .

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur le problème des trois corpses et les équations de la dynamique, *Acta. Math.*, **13**(1890), 1—270 .

[2] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3, Gauthier-Villars, 1899 .

[3] Cartan, E., Leçons sur les invariantes intégraux, Hermann, 1922 .

[4] Гантмахер, Ф. Р., Лекции по аналитической механике, М., 1960 .

[5] Арнольд, В.И., Математические методы классической механики, М., 1974(中译本：阿诺尔德，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1993) .

[6] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969 .

[7] Lee, Hwa-Chung (李华宗), The universal invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser. A*, **62**(1947), 237 — 246.

Д.В. Аносов 撰 齐民友 译

积分对数 [integral logarithm; интегральный логарифм]

对于正实数 $x(x \neq 1)$ 由

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

定义的特殊函数；对于 $x > 1$，被积函数在 $t = 1$ 处呈无穷间断性，此时积分对数取为主值：

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{r \downarrow 0} \left\{ \int_0^{1-r} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+r}^x \frac{dt}{\ln t} \right\} .$$

积分对数的图象在条目**积分指数函数** (integral exponential function) 中给出 . 对于小的 x 有

$$\mathrm{li}(x) \approx \frac{x}{\ln(1/x)} .$$

对于正实数 x，积分对数有级数表示式

$$\mathrm{li}(x) = c + \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k!k} , \ x > 0, \ x \neq 1 ;$$

其中 $c = 0.5772\cdots$ 是 **Euler 常数** (Euler constant) . 作为复变量 z 的函数，

$$\mathrm{li}(z) = c + \ln(-\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln z)^k}{k!k}$$

是沿实轴从 $-\infty$ 到 0 与从 1 到 $+\infty$ 割开的复 z 平面上的单值解析函数 (其中对数虚部取在 $-\pi$ 与 π 之间) . $\mathrm{li}\, x$ 沿 $(1, +\infty)$ 的性态由下式描述:

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \mathrm{li}(x \pm i\eta) = \mathrm{li}\, x \mp \pi i, \ x > 1 .$$

积分对数与**积分指数函数** (integral exponential function) $\mathrm{Ei}(x)$ 由

$$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x), \ x < 1 ; \ \mathrm{Ei}(x) = \mathrm{li}(e^x), \ x < 0 .$$

相联系 . 对于 $x > 0$，有时用记号

$$\mathrm{Li}(x) = \begin{cases} \mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x) & \text{当 } 0 < x < 1, \\ \mathrm{li}(x) + \pi i = \mathrm{Ei}^*(\ln x) & \text{当 } x > 1 . \end{cases}$$

关于参考文献，见**积分余弦** (integral cosine) .

А. Б. Иванов 撰

【补注】 函数 li 更多地称为对数积分 (logarithmic integral) . 对于 $z \in \mathbf{C} \setminus \{x \in \mathbf{R} : x \leqslant 0 \text{ 或 } x \geqslant 1\}$，它当然可由上述积分来定义 .

也称条中对于正数 $x(x \neq 1)$ 的级数表示式定义了修正对数积分 (modified logarithmic integral)，它是 $\mathrm{li}(x + i\eta) \pm \pi i \ (x > 1, \ \eta \to 0)$ 的边界值 . 对于 $x > 1$, $\mathrm{li}(x)$ 的值是小于 x 的素数个数 $\pi(x)$ 的很好近似值 (见 **de la Vallée-Poussin 定理** (de la Vallée-Poussin theorem)；**素数分布** (distribution of prime numbers)；**素数** (prime number)) .

沈永欢 译

积分流形 [integral manifold; интегральное многообразие]

方程组

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \qquad (*)$$

的相空间 ((t, x) 空间) 中布满该系统的**积分曲线** (integral curve) 的点的集合 S_t，它对所有 $t \in R$ 有定义，并且形成 (t, x) 空间中的一个流形 . S_t 过平面 $t =$ 常数的截面的维数通常称为积分流形 S_t 的维数 . 在积分流形定义中，所要求的流形有时用可通过方程

$$x = f(t, C)$$

解析表示的集合 S_t 来代替，其中函数 f 对 $\mathbf{R}$ 中所有的 t 和某个区域 D 中的 $C = (C_1, \cdots, C_m)$ 有定义，且对于 $t, C \in R \times D$，有着关于 t, C 的特殊的光滑性 . 这个积分流形则称为 m 维的 (m-dimentioal) 且同函数 f 有着同样的光滑性 .

例 系统 $(*)$ 的周期解的积分曲线，即周期积分曲线；由系统 $(*)$ 的拟周期解族组成系统 $(*)$ 的积分曲线族，当 $t = 0$ 时充满 x 空间中的一个 m 维环面，即 m 维环面积分流形；等等 .

研究最广泛的积分流形是环面流形 (toroidal manifold)，即对任何固定的 $t \in \mathbf{R}$，集合 S_t 都为环面 . 这种流形广泛地出现在描述振荡过程的 $(*)$ 型系统中 .

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Львов, 1945 .

[2] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., в

кн.: Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. т. 1, К., 1963, 93 – 154.
[3] Боголюбов, Н. Н., в кн., Тр. 4, Всесоюзного математического съезда, т. 2, Л., 1964, 432 – 437.
[4] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Самойленко, А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, К., 1969 (英译本: Bogolyubov, N. N., Mitropol'skiĭ, Yu. A. and Samoĭlenko, A. M., The method of accelerated convergence in non-linear mechanics, Springer, 1976).
[5] Митропольский, Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, М., 1964 (英译本: Mitropol'skiĭ, Yu. A., Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations, Davey, 1965).
[6] Митропольский, Ю. А., Лыкова, О. Б., Интегральные многообразия в нелинейной механике, М., 1973.
А. М. Самойленко 撰

【补注】 现在积分流形通称不变流形（invariant manifold）. 不变流形在扰动下保持持久性的基本定理是：1) Fenichel 定理（Fenichel theorem）、假定 Ляпунов 指数（见 Ляпунов 特征指数（Lyapunov characteristic exponent））沿着与该流形相横截的方向绝对值大于沿着平行于该流形的方向，见[A1]，和 2) 关于可积 Hamilton 系统扰动中拟周期解持久性的 Колмогоров-Арнольд-Moser 定理（Kolmogorov-Arnol'd-Moser theorem）（见**可积系统**（integrable system）；**Hamilton 系统**（Hamiltonian system）；[A2]）.

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Pugh, C. and Shub, M., Invariant manifolds, Springer, 1977.
[A2] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978, Appendix 8 (中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992, 附录 8).
[A3] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.
唐 云 译

范畴的整对象 [**integral object of a category**; **целый объект категорий**]

【补注】 由 S. MacLane 为范畴的一种特殊的生成元（见**范畴的生成元**（generator of a category））而起的名字（现在基本上不用了）. 明显地说，一个整对象是一个**生成元**（generator），它是“最小的”，意思是它没有非平凡的幂等自同态. 这个名字是由下述事实引导出来的，在 Abel 群范畴中，其唯一的整对象就是整数群.

参考文献

[A1] MacLane, S., Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1960), 485–516.
周伯埙 译

微分方程的积分 [**integral of a differential equation**; **интеграл дифференциального уравнения**]

微分方程的解. 微分方程的一个积分首先指的是形如 $\Phi(x, y)=0$ 的一个关系式，它作为自变量 x 的隐函数确定常微分方程

$$F(x, y, y^1, \cdots, y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

的一个解 y. 此时的解也称为特积分（particular integral），与之相对的是方程 (1) 的通积分（general integral），即这样的关系式

$$\Phi(x, y, C_1, \cdots, C_n)=0, \qquad (2)$$

通过适当选取常数 $C_1, \cdots, C_n$ 可由它得到 (1) 的位于 (x, y) 平面的某个给定区域 G 中的任一**积分曲线**（integral curve）. 如果从方程 (2) 和把 (2) (y 看作 x 的函数) 对 x 逐次微分所得的 n 个关系式消去任意常数 $C_1, \cdots, C_n$，则得到方程 (1). 在积分方程 (1) 的过程中出现的含有直到 $k(1\leqslant k<n)$ 阶导数和 $n-k$ 个任意常数的形如

$$\Phi(x, y, y^1, \cdots, y^{(k)}, C_1, \cdots, C_{n-k})=0 \qquad (3)$$

的关系式，有时称为方程 (1) 的中间积分（intermediate integral）. 如果知道方程 (1) 的一个中间积分 (3)，则解 n 阶方程 (1) 化为解 k 阶方程 (3). 如果 (3) 恰含有一个任意常数即如果 $k=n-1$，则它称为 (1) 的一个首次积分（first integral）. 此方程恰有 n 个独立的首次积分；知道这些首次积分后，就能通过从这 n 个积分中消去 $y^1, \cdots, y^{(n-1)}$ 得到 (1) 的通解.

如果考虑一阶常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \cdots, x_n),\ i=1, \cdots, n, \qquad (4)$$

则其通积分指的是一组关系式

$$\Phi_i(t, x_1, \cdots, x_n)=C_i,\ i=1, \cdots, n, \qquad (5)$$

其中 C_i 是任意常数；这组关系式以隐函数的形式描述了方程组 (4) 在 $(t, x_1, \cdots, x_n)$ 空间的某个区域 G 中所有的解. (5) 中每个关系式都称为方程组 (4) 的一个首次积分. 方程组 (4) 的首次积分更通常是指具有下述性质的一个函数 $u(t, x_1, \cdots, x_n)$：它沿方程组 (4) 在区域 G 中的任一解均取常值. 方程组 (4) 恰有 n 个独立的首次积分. 知道了这些首次积分，不通过积分所给方程组就能求出其通解；而知道 k 个独立的首次积分就能把解 n 阶方程组 (4) 化为解 $n-k$ 阶方程组. 光滑函数 $u(t, x_1, \cdots, x_n)$ 是具有光滑右端的方程组 (4) 的首次积分，当且仅当它满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0.$$

类似的术语有时也用于一阶偏微分方程理论．于是，微分方程

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})=0 \quad (6)$$

的一个积分或一个特积分（particular integral）指的是此方程的一个解（一个**积分曲面**（integral surface））．（6）的一个完全积分（complete integral）指的是依赖于两个任意常数的一族解 $\Phi(x, y, z, a, b)=0$．方程（6）的通积分（general integral）是含有一个任意函数的一个关系式，并对此函数的每种选取均给出所给方程的一个解．

参考文献

[1] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959（中译本：В．В．史捷班诺夫，微分方程教程，高等教育出版社，1955）.

Н．Х．Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rektorys, K., Survey of applicable mathematics, Iliffe, 1969, Sects 17.2, 17.8, 17.18, 17.20.

[A2] Ince, E. L., Integration of ordinary differential equations, Oliver & Boyd, 1956.

沈永欢 译

积分算子 [**integral operator**; **интегральный оператор**]

一个映射 $x \mapsto Ax$，其对应规则 A 由一个积分给定．积分算子有时称为积分变换（integral transformation）．例如，对于 Урысон 积分算子（见 **Урысон 方程**（Urysohn equation））$\varphi \mapsto A\varphi$，其对应规则 A 由积分

$$A\varphi(t)=\int_D P(t, \tau, \varphi(\tau))d\tau, \ t\in D \quad (1)$$

给定（或此算子 $\varphi \to A\varphi$ 由该积分生成），其中 D 是一个有限维空间中给定的具有有限 Lebesgue 测度的可测集，而 $P(t, \tau, u)$ $(t, \tau\in D, -\infty<u<\infty)$ 是给定的可测函数；假定函数 P 和 φ 满足保证（1）中的积分在 Lebesgue 意义下存在的条件．如果 $P(t, \tau, u)$ 对于 u 是非线性函数，则（1）就是非线性积分算子（non-linear integral operator）的一个例子．另一方面，如果 $P(t, \tau, u)=K(t, \tau)u$，则（1）的形式为

$$A\varphi(t)=\int_D K(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau, \ t\in D. \quad (2)$$

由（2）中的积分所生成的算子，或简单地说算子（2），称为线性积分算子（linear integral operator），而函数 K 称为该算子的核（kernel）（亦见**积分算子的核**（kernel of an integral operator））．

如果对应于 K 的算子（2）是从一个给定的函数空间 E 到另一函数空间 E_1 中的全连续（紧）算子，则称核 K 为 **Fredholm 核**（Fredholm kernel）．此时算子（2）称为 E 到 E_1 中的 Fredholm 积分算子（Fredholm integral operator）．

常在下列函数空间中考虑线性积分算子：有界闭集 D 上连续函数的空间 $C(D)$；D 上其 p 次幂为可积的函数的空间 $L_p(D)$．在前一种情形，如果 K 在 $D\times D$ 上连续（于是 K 称为连续核（continuous kernel）），则（2）称为 $C(D)$ 中（即从 $C(D)$ 到 $C(D)$ 中）的 **Fredholm 算子**（Fredholm operator）．如果 K 在 $D\times D$ 上可测且

$$\int_D\int_D |K(t, \tau)|^2 dt d\tau<\infty, \quad (3)$$

则算子（2）称为 $L_2(D)$ 中（从 $L_2(D)$ 到 $L_2(D)$ 中）的 Fredholm 算子；满足上述条件的核称为 L_2 核（L_2-kernel）．

复函数空间 $L_2(D)$ 中且其核满足条件（3）的算子（2）的伴随算子（adjoint operator）是积分算子

$$A^*\varphi(t)=\int_D \overline{K(\tau, t)}\varphi(\tau)d\tau, \ t\in D, \quad (4)$$

其中上加横线表示转为复共轭．如果 K 是 Hermite（对称）核（即满足 $\overline{K(\tau, t)}=K(t, \tau)$），则相应的 Fredholm 算子（2）与其伴随算子（4）相同．具有这种性质的算子称为自伴的（self-adjoint）（见**自伴算子**（self-adjoint operator））．具有对称核的 Fredholm 算子称为 **Hilbert-Schmidt 积分算子**（Hilbert-Schmidt integral operator）．

以 $|t-\tau|$ 表示 n 维 Euclid 空间中两点 t 与 τ 之间的距离，若 $B(t, \tau)$ 是 $D\times D$ 上的有界可测函数，则形如

$$K(t, \tau)=\frac{B(t, \tau)}{|t-\tau|^m} \quad (0<m<n) \quad (5)$$

的核称为位势型核（kernel of potential type），而具有这样的核的算子（2）称为位势型积分算子（integral operator of potential type）．核（5）也称为极核（polar kernel）或弱奇异性核（kernel with weak singularity），而相应的算子（2）称为弱奇异性积分算子（integral operator with weak singularity）．

如果 $B(t, \tau)$ 是 $D\times D$ 上的连续函数，则相应的弱奇性积分算子在 $C(D)$ 中是全连续的；如果 $B(t, \tau)$ 是 $D\times D$ 上的有界可测函数，则相应的算子在 $L_2(D)$ 中是全连续的．

如果核 K 和 m 维集合 D 使得积分（2）在 Lebesgue 意义下不存在，但在 Cauchy 主值意义下存在，则积分（2）称为 m 维**奇异积分**（singular integral）．由这样的积分生成的算子称为 m 维奇异积分算子（singular integral operator）；或当 $m=1$ 时，称为一维奇异积分算子，当 $m>1$ 时，称为多维奇异积分

算子.

如果曲线 D 位于复 t 平面上，则当 D 是简单闭曲线时，

$$A\varphi(t)=\int_D \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ t\in D \qquad (6)$$

(其中积分理解为 Cauchy 主值意义)生成满足 Hölder 条件的函数的空间中的连续积分算子 $\varphi\mapsto A\varphi$，而当 D 是 Ляпунов 曲线(亦见 **Ляпунов 曲面和曲线**(Lyapunov surfaces and curves))时生成 $L_p(D)$ $(1<p<\infty)$ 中的连续积分算子. 算子(6)称为奇异 Cauchy 算子(singular Cauchy operator).

设在实轴上给定了两个 Lebesgue 可测函数 g 和 φ，如果对几乎所有 $t\in(-\infty,\infty)$，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\tau)|\,|g(\tau-t)|d\tau$$

存在，则能定义函数

$$(g*\varphi)\ (t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau-t)\varphi(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

它称为 g 与 φ 的卷积(convolution). 如果固定 g，则(7)定义了一个算子

$$T\varphi(t)=(g*\varphi)\ (t), \qquad (8)$$

称为具有核 g 的卷积积分算子(convolution integral operator)或卷积积分变换(convolution integral transform)(亦见**卷积变换**(convolution transform)).

如果 $g\in L_r(-\infty,\infty)$ 且 $(1/p)-(1/q)=(1/r)-1$, $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$，则(8)是从 $L_q(-\infty,\infty)$ 到 $L_p(-\infty,\infty)$ 中的连续算子，也可在相应条件下在半轴或有限区间上应用卷积积分算子.

除上述积分算子外，还研究了各类具体的积分算子，例如 Fourier 积分变换，Laplace 积分变换，Bessel 积分变换、Mellin 积分变换，Hilbert 积分变换，等等.

参考文献

[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959(中译本: В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第五卷，人民教育出版社，1959).

[2] Забрейко, П. П., ит. д., Интегральные уравнения, М., 1968(справочная матем. б-ка)(英译本: Zabreyko P. P. [P. P. Zabreĭko], et al., Integral equations—a reference text, Noordhoff, 1975).

[3] Красносельский, М. А. идр., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966(英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A., et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff, 1976).

[4] Диткин, В. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., 1961 (Справочная матем. б-ка).

[5] Мусхелишвили, Н. И., Сингурярные интегральные уравнения …, 3 изд., М., 1968(中译本: Н. И. 穆斯海里什维里，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966).

[6] Михлин, С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962(英译本: Mikhlin, S. G., Multi-dimensional singular integrals and integral equations, Pergamon, 1965).

[7] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

[8] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications., Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I., Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhäuser, 1981.

[A2] Halmos, P. R., Sunder, V. S., Bounded integral operators on L^2 spaces, Springer, 1978.

[A3] Jörgens, K., Lineare Integraloperatoren, Teubner, 1970.

[A4] Zaanen, A. C., Linear analysis, North-Holland, 1956.

沈永欢 译

轨道积分[integral over trajectories; интеграл по траекториям]，连续积分(continual integral)，泛函积分 functional integral)，路径积分(path integral)

用某个函数空间作为其积分域的一个积分. 一个轨道积分更经常地定义为一个泛函的寻常 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)，这个泛函定义于(可能是广义)函数空间上，相对于这个空间中某个(或许复)测度. 当积分的 Lebesgue 构造被证明为不适用时，在那些情况下，要考虑泛函积分的其他方法. 例如，代替测度，可以应用**准预测度**(pre-measure)(或拟测度(quasi-measure))，也就是说，在函数空间的所有柱子集的代数上所定义的一个加性集函数，使得其限制于具有固定支集的柱集的任何 σ 子代数时已经是一个测度(包络为"加性集函数"). 有时将轨道积分定义为(相对于 $\mathbf{R}^n$ 中 Lebesgue 测度所计算的) n 重积分当 $n\to\infty$ 时的极限，它作为适当近似的结果而出现: 函数空间(积分域)用 n 维空间来近似，而被积泛函用 n 元函数来近似. 轨道积分的这些定义和其他定义，各适用于其本身的特殊泛函类; 当这些定义全适用的那些情况下，它们一般会导致积分的不同值. 最后，物理学文献中所遇到的轨道积分，有时并不具有严格意义，而被认为是形式表达式，人们对它们像对寻常积分那样运算(变量变换，优化，相对于参数微分，极限过渡，等等); 即使如此，通过这个方法经常能获得重要的和具启发性的有价值结果.

轨道积分，它最初出现在随机过程理论中，然后

被用作群

$$\exp\{itH\},\ t\in\mathbf{R}^1,$$

以及算子

$$\exp\{-tH\},\ t>0$$

的半群的表示，其中 H 是 $\mathbf{R}^n$ 空间中的 **Sturm-Liouville 算子** (Sturm-Liouville operator)(量子粒子系统的能量算子). 随后获得对算子 H 的更广类的相似表示(每个这样的表示通常称为 Feynman-Kac 公式 (Feynman-Kac formula)), 而且已经是研究这些算子的性质(谱界的估计, 本征值的渐近线, 散射性质, 等等, [3]) 的恰当手段.

关于轨道积分在数理物理中的应用(主要根据 Feynman-Kac 公式), 结果发现其中最深刻的应用是它们在量子统计物理([4])和量子场论([5], [6])的问题中的应用. 在某种程度上, 测度理论的一般问题和无限维空间中的积分的发展是与轨道积分有关的([7]-[9]).

参考文献

[1] Feynman, R. and Hibbs, A., Quantum mechanics and integrals over trajectories, McGraw-Hill, 1965.

[2] Kac, M., Probability and related problems in physical sciences, Interscience, 1959.

[3] Гельфанд, И. М., Яглом, А. М., 《Успехи матем. наук》, 11 (1956), 1, 77-114.

[4] Genibre, J., Statistical mechanics and quantum field theory, New York, 1971.

[5] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957 (英译本: Bogolyubov, N. N. and Shirkov, D. V., Introduction to the theory of quantized fields, Wiley, 1958).

[6] Simon, B., The $P(\varphi)_2$-model of Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[7] Смолянов, О. Г., Фомин, С. В., 《Успехи матем. наук》, 31 (1976), 4, 3-56.

[8] Schwartz, L., Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford Univ. Press, 1973.

[9] Glimm, J. and Jaffe, A., Quantum physics: a functional-integral point of view, Springer, 1981.

P. A. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schulman, L. S., Techniques and applications of path integration, Wiley, 1981.

[A2] Popov, V. N., Functional integrals in quantum field theory and statistical physics, Reidel, 1983.

[A3] Albeverio, S. A. and Høegh-Krohn, R. J., Mathematical theory of Feynman path integrals, Springer, 1976.

[A4] Antoine, J.-P. and Tirapegui, E. (eds.), Functional integration. Theory and applications, Plenum, 1980.

徐锡申 译

整数部分 [**integral part**, 或 entier, 或 integer part; **антье**, 或 целая часть], (实)数 x 的

不超过 x 的最大整数; 记作 $[x]$ 或 $E(x)$. 由整数部分的定义得 $[x]\leqslant x<[x]+1$. 如果 x 是整数, 则 $[x]=x$. 例: $[3.6]=3$; $[1/3]=0$; $[-13/3]=-5$. 整数部分可用于数的分解, 例如对 $n!=1\cdots n$, 有

$$n!=\prod_{p\leqslant n}p^{\alpha(p)},$$

其中乘积取遍所有不超过 n 的素数 p, 而

$$\alpha(p)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots.$$

变量 x 的函数 $y=[x]$ 是分段连续的(阶梯函数), 在整数点处具有跳跃. 用整数部分可定义数 x 的小数部分 (fractional part), 它由 $x-[x]$ 给定, 记作 $\{x\}$; $0\leqslant\{x\}<1$. 函数 $y=\{x\}$ 是周期的和分段连续的.

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, М., 8 изд., 1972 (中译本: И. М. 维诺格拉多夫, 数论基础, 商务印书馆, 1952).

Б. М. Бредихин 撰 沈永欢 译

整点 [**integral point**; **целая точка**]

在一个 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中具有整数坐标的点. 在数论中人们研究确定区域如二维圆盘和三维球体中的整点的个数问题(见**圆问题** (circle problem)), 以及整点在曲面上例如在三维球面上或椭球面上一致分布的条件问题. 这方面最强的结果是运用三角和方法及代数数论与几何数论的方法所获得的. Б. М. Бредихин 撰

【补注】 整点又称为格点 (lattice point), 因为集合 $\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{R}^n$ 也被看作一个格.

关于格点的更多的几何问题和结果, 见**数的几何** (geometry of numbers). 格点的概念在结晶学编码、数值分析、解析数论、Diophantos 逼近、计算几何学、图论、积分几何学、及其他一些领域也是重要的, 见 [A1].

参考文献

[A1] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.

[A2] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A3] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packing, lattices and groups, Springer, 1988.

杨路、曾振柄 译

整点的分布 [**integral points, distribution of**; **целых точек**

распределение]

解析数论中对于算术函数的某些渐近公式，它们可以转化为在某些流形中，首先是在 $\mathbf{R}^n$ 空间中的同伦扩张域中的**整点**(integral point)个数问题.

圆问题(circle problem)(C.F.Gauss)和**除数问题**(divisor problems)(P.G.L.Dirichlet)以及它们的许多推广是典型的问题(出发点).

参考文献

[1] Fricker, F., Einfürung in die Gitterpunktlehre, Birkhäuser, 1981.

[2] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzykl. Math. Wissenschaft. mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil 1.(中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).

[3] Walfisz, A. Z., Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, PWN, 1957.

A. B. Малышев 撰

【补注】整点也叫**格点**(lattice points).

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987, Sect. (iv).

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

积分关系方法 [**integral-relation method**; **интегральных соотношений метод**], **带法**(strip method).

求解偏微分方程组的一种方法，这种方法基于将一偏微分方程近似地简化为一个常微分方程组. 它可应用于各种类型的微分方程. 此法是作为直线方法的一个推广而被 A. A. Дородницын([1])引入的，伴随着被光滑的函数的引入，此种推广在[2]中给出. 而在[3]中对此方法作了详述且有进一步发展.

设有一散度形式的偏微分方程组

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, u_1, \cdots, u_k) + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, u_1, \cdots, u_k) = F_i(x, y, u_1, \cdots, u_k),$$
$$i = 1, \cdots, k, \qquad (1)$$

其中 P_i, Q_i, F_i 是自变量 x, y 及未知变量 $u_1, \cdots, u_k$ 的给定函数. 进一步假设(1)的解是在边界为 $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=\Delta(x)$ 的曲线矩形内. 在此边界上提出 $2k$ 个条件，其中 k 个条件提在 $x=a$ 和 $x=b$ 上. 若函数 $\Delta(x)$ 事先未知，人们仅需一个附加条件. 若边界包含奇点，则代替相应的边界条件而用正则性条件.

在第 N 次近似中，积分区域用 N 条线 $y=y_n(x)=n\Delta(x)/N$ $(n=1, \cdots, N)$ 分解为 N 个带形. 对每个 N，选取由 N 个线性无关函数 $f_n(y)$ 组成的一个封闭组. 用 $f_n(y)$ 乘(1)中每个原始的方程、然后关于 y 跨越所有带形进行积分，人们就可得到 kN 个形如

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)P\,dy - \Delta'(x)f_n(\Delta(x))P|_{y=\Delta(x)} + $$
$$+ f_n(\Delta(x))Q|_{y=\Delta(x)} - f_n(0)Q(0) +$$
$$-\int_0^{\Delta(x)} f_n'(y)Q\,dy = \int_0^{\Delta(x)} f_n(y)F\,dy$$

的积分关系式.

积分号下的函数 P, Q, F 用它们在带形的边界上的值 P_n, Q_n, F_n 的插值公式去近似. 于是积分关系式中的积分有形式

$$\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)P\,dy \approx \Delta(x)\sum_{n=0}^{N} C_n P_n y_n(x),$$

其中 C_n 是依赖于插值公式的选取和 $f_n(y)$ 的形式的数值系数. 这样就产生一个关于 x 的常微分方程组，它是关于未知函数 u_n 在带形的整个边界上的 $K(N+1)$ 个值的方程组. 这个组由 $y=0$ 及 $y=\Delta(x)$ 处 k 个边界条件所封闭.

函数 $f_n(y)$ 可以较为任意地选取. 选取 $f_n(y)=\delta(y-y_n)$ $(n=1, \cdots, N)$ (δ 是 Dirac 函数)后就可得到直线方法. 其中关于 y 的导数用对应于所选的插值公式的差分表示式代替. 当用阶梯函数

$$f_n(y) = \begin{cases} 0, & y < y_{n-1}, \\ 1, & y_{n-1} \leqslant y \leqslant y_n, \\ 0, & y > y_n, \end{cases}$$

$(n=1, \cdots, N)$ 时，人们简单地讲它是积分关系方法，且原始方程跨越每个带形被求积了. 并且，对由(1)所选的守恒律，可写成关于带形的下述积分关系式

$$\frac{d}{dx}\int_{y_{n-1}}^{y_n} P\,dy - y_n' P(y_n) + y_{n-1}' P(y_{n-1}) +$$
$$+ Q(y_n) - Q(y_{n-1}) = \int_{y_{n-1}}^{y_n} F\,dy.$$

关于拟线性双曲型方程组，人们已讨论了积分关系方法的收敛性和误差([4]). 在[4]中还建立了这样的结果，此结果表明积分关系方法有超过直线方法的优越性. 新近的一些论文对椭圆型方程已讨论了类似的结果.

积分关系方法的优点在于：在顾及到解的性态的情况下选取插值公式和函数 $f(y)$ 的可能性；关于变量中一个变量的精确积分(这是由于原始方程的发散方式的表示法的结果)；计算算法的简单性；以及当在计算机上运算时相对小量的计算存储. 在积分关系方法中可用一积分去近似：由于余项系数的约简，从

而增加了近似的精确性；此积分是比被积函数更光滑的函数，于是可以缩减插值节点的数目．若被积函数有第一类间断性，则此积分是连续函数．当解能伴随着对少量的带形使之有好的精确性而得到时，积分关系方法是最有效的．

关于积分关系方法对两个变量时的近似能推广到三个变量的方程的情形．二个变量的近似同样能被用于处理二维情形（积分区域不是分为带形而是分为子区域）；于是近似方程组是一个非线性代数或超越方程组．积分关系方法的原理还被用于其他数值方法，例如在**大质点方法**（large-particle method）中．

积分关系方法大部分用于气体动力学中，在这里许多在实践中很重要的问题已用它解决．此时积分关系方法有三种方案已被考虑：1）用通过物体及冲击波的曲面的曲线去划分积分区域（图 a）；2）用通过对称轴及边界特征的曲线去划分积分区域（图 b）；3）用二族相交曲线划分为子区域（图 c）．

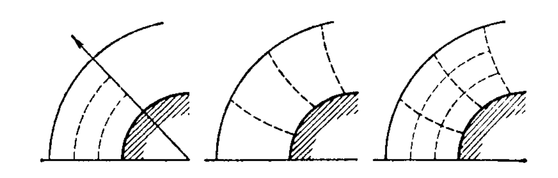


图 a　　图 b　　图 c

关于围绕具传播的冲击波的钝头前部的超音速流的计算而使用的积分关系方法在［5］中建立了，在其中首次得到了以直接的公式表示的方式阐述此问题的数值解．关于最一般情况下的解也已找到（各种形式的物体；空间流；在平衡及不平衡的物理-化学变化及辐射下实际的气体流；非稳定运动；以及粘性气体流（［6］））．这个方法同样已被用到计算气体的位势流（［7］），以及用以解某些混合问题：喷气口的亚音速及跨音速部分中的流（［8］）．还考虑了在机翼的一个与超音速区域相接触的角的地方，围绕此机翼的处于临界前的流（［9］）．超音速锥的气体流已用积分关系方法阐明清楚．

积分关系方法用在边界层理论中计算粘性气体流时有广阔的应用．在分层的不可压缩情况中，解已得到且可直到间断点（［2］）．进而，对顾及爆破或吸入，辐射或热传导的气体中的分层边界层也已计算了．用积分关系方法已得到在顾及反向压力（counter-pressure）的气体中一维间断性的点的非稳定问题的解（［10］），同样在具有存在于磁场中的无限传导性的气体中以及在可燃气体中，上述情况的解也已得到．

参考文献

［1］Дородницын, А. А., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда. 1956, т. 3, М., 1958, 447－453.

［2］Дородницын, А. А., 《Ж. прикл. матем. и техн. физ.》, 1960, 3, 111－118.

［3］Белоцерковский, О. М., Чушкин, П. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **2**（1962）, 5, 731－759.

［4］Бобков, В. В., Крылов, В. И., 《Дифференциальные уравнения》, **1**（1965）, 2, 230－243.

［5］Белоцерковский, О. М., 《Докл. АН СССР》, **113**（1957）, 3, 509－512.

［6］Белоцерковский, О. М., и др., Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретические и экспериментальные исследования, 2 изд., М., 1967.

［7］Чушкин, П. И., 《Вычисл. математика》, 1957, 2, 20－44.

［8］Алихашкин, Я. И., Фаворский, А. П., Чушкин, П. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》 **3**（1963）, 6, 1130－1134.

［9］Tai, T. C., Transonic inviscid flow over lifting airfoils by the method of integral relations, *J AIAA*, **12**（1974）, 798－804.

［10］Коробейников, В. П., Чушкин, П. И., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **87**（1966）, 4－34.

Ю. М. Давыдов 撰　仇庆久 译

解析函数的积分表示［integral representation of an analytic function；интегральное представление аналитической функции］

以依赖于一个参数的积分表示解析函数．解析函数的积分表示一般地作为显式表示微分方程解析解和研究这些解的渐近性态及其解析延拓的适当工具，起源于函数论和数学分析发展的早期．稍后发现，解析函数的积分表示可应用于**解析函数论的边值问题**（boundary value problems of analytic function theory）和**奇异积分方程**（singular integral equation）的解、各种类型解析函数内部性态和边界性态的研究以及数学分析中其他一些问题的解．在函数论发展进程中，研究解析函数的一些最重要的单个积分表示的性质，构成了函数论的独立篇章（例如，见 **Cauchy 积分**（Cauchy integral）；**Poisson 积分**（Poisson integral）；**Schwarz 积分**（Schwarz integral））．

用于获得和研究微分方程解析解的一类广泛的解析函数的积分表示，可由一般公式

$$f(z)=\int_L K(z,\zeta)v(\zeta)d\zeta \qquad (1)$$

描述，其中 $K(z,\zeta)$ 是积分表示的核，$v(\zeta)$ 是它的密度，L 是复平面中的围道（或围道组），而变量 z 和 ζ 两者都在复平面上变动．从成功地应用解析函数

积分表示方法的观点来看，对于表示给定的函数 $f(z)$（或给定的函数类），选取核 K，密度 v 和围道 L 这三个互相关联的问题的适当的、尽可能简单的解，成为决定性的因素．反过来，表示（1）的性态又本质上依赖于核 $K(z,\zeta)$ 是否为复变量 z,ζ 的整函数或它是否为奇异的即是否具有某些奇点．一般地说，解析函数积分表示的核并不必须是变量 z,ζ 的解析函数；$f(z)$ 的解析性可由密度的特殊性质得到确保．还有，一般地说，公式（1）中的积分不必一定是单积分；也有一些解析函数积分表示的类型，其中用的是累次积分．

为得到作为某些常微分方程 $\mathfrak{L}_z[f](z)=0$ 的解的特定函数 $f(z)$ 的积分表示，其一般纲要主要可归结如下．适当选取（通常总取非奇异的）核 K，使得关于算子 $\mathfrak{L}_z$ 的作用的下述公式成立：

$$\mathfrak{L}_z[f](z)=\int_L \mathfrak{L}_z[K](z,\zeta)v(\zeta)d\zeta=$$
$$=\int_L \mathfrak{M}_\zeta[K](z,\zeta)v(\zeta)d\zeta=$$
$$=\int_L K(z,\zeta)\widetilde{\mathfrak{L}}_\zeta[v](\zeta)d\zeta+P(v,K),\quad(2)$$

这就是说，核又必须满足尽可能简单的偏微分方程 $\mathfrak{L}_z[K]=\mathfrak{M}_\zeta[K]$，这样就能逐次进行分部积分，其目的是还原到核的早先形式，并把算子 $\mathfrak{L}_z$ 的作用转换为所得伴随算子 $\widetilde{\mathfrak{L}}_\zeta$ 作用于密度 v 上．得到（2）型公式后，选取满足伴随方程 $\widetilde{\mathfrak{L}}_\zeta[v](\zeta)=0$ 的相当简单的密度 v 和围道 L，以保证项 $P[v,K]$ 等于零．必须记住，围道 L 的选取确定原先方程 $\mathfrak{L}_z[f](z)=0$ 的一个特解．最常用的是下面这些核：

$$K(z,\zeta)=e^{z\zeta} \text{ 或 } K(z,\zeta)=e^{iz\zeta},$$
$$K(z,\zeta)=z^\zeta$$

和

$$K(z,\zeta)=(z-\zeta)^\alpha,$$

有时分别称为 Laplace-Fourier 核（Laplace-Fourier kernel），Mellin 核（Mellin kernel）和 Euler 核（Euler kernel）．各种变量替换导致这些核改变形式．按上面写出的形式，解析函数的积分表示同积分变换方法紧密相联（见**积分变换**（integral transform））.

用这种方法，可以得到例如 Bessel 函数的熟知的积分表示：

$$J_p(z)=\frac{\Gamma(1/2-p)}{2i\pi^{3/2}}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_L e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{p-1/2}d\zeta,\quad(3)$$

其中围道 L 取包围点 -1 和 $+1$ 的水平放置“8”字形．表示式（3）是独特的：一方面，其密度 $v(\zeta)=(\zeta^2-1)^{p-1/2}$ 比起被表示的超越函数 $J_p(z)$ 简单得多；另一方面，它使人们得以相当简单地考察函数 $J_p(z)$ 的性态，尤其是研究其渐近性态．

通过适当改变围道 L 就能得到解析延拓，即得到适用于整个存在域的积分表示．例如，第二类 Euler 积分（Euler integral of the second kind）

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,\quad \operatorname{Re}z>0,$$

对 $\operatorname{Re}z>0$ 表示 **Γ 函数**（gamma-function）$\Gamma(z)$，而如果取积分围道 L_1 为一条回路（如图 1），则得到积分表示

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_{L_1}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta,$$

它对除点 $z=-1,-2,\cdots$ 外的所有 z 成立，而在这些点处 $\Gamma(z)$ 具有单极点．类似地，对于 $\operatorname{Re}z>0$，

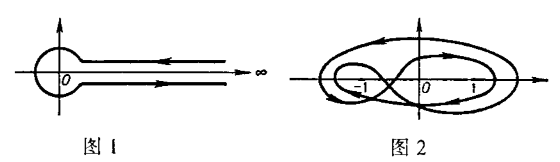


图 1　　图 2

$\operatorname{Re}w>0$ 表示 **B 函数**（beta-function）$B(z,w)$ 的第一类 Euler 积分（Euler integral of the first kind）

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt,\ \operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Re}w>0$$

也有解析延拓，它可通过沿双回路形围道 L_2（如图 2）的积分来得到．

对于特殊函数的积分表示（见 [1]，[2]）以及非常广泛的函数类的同积分变换相联系的积分表示（[7]），都已得到研究．

解析函数论中具有普适特征的是奇异 Cauchy 核（Cauchy kernel）

$$K(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{(\zeta-z)}$$

以及相应的积分表示，即 **Cauchy 积分**（Cauchy integral）

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.\qquad(4)$$

在例如 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D\cup L$ 上连续的情形，这个积分表示表达了由简单闭围道（或这样的围道构成的围道组）L 围成的区域 D 内单值解析函数 $f(z)$ 的值；在补域 $C\bar{D}$（$\infty\in C\bar{D}$）内，（4）式右边的积分恒等于零．表示式（4）在解析函数论中的基本作用基于这样的事实，即 Cauchy 积分是 $f(z)$ 同 Cauchy-Riemann 算子

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

的基本解 $1/(2\pi i z)$ 的卷积，因此解析函数的所有基本性质都能从表示式（4）得到．从解析函数积分表示的一般性质的观点来看，Cauchy 积分的独特性在于它的核具有特别简单的结构，还在于它的密度 $v(\zeta)=(\zeta)$ 在围道 L 上与要表示的函数取值相同．如果用在闭域 $\bar{D}$ 上关于 z 为单值解析且在点 $z=\zeta$ 处有残数为 1 的单极点的任一函数 $K(z,\zeta)$ 代替（4）中积分号下的 Cauchy 核 $1/2\pi i(\zeta-z)$，则上述最后一个性质仍然成立．Cauchy 核是这类函数 $K(z,\zeta)$ 中最简单的，但上述选择 Cauchy 积分中核的方法在解边值问题时常常用到．

密度 $v(\zeta)$ 与解析函数 $f(z)$ 的边界值 $f(\zeta)$ 相同这一事实本质上只是表示解析性性态的一种形式．当使用具有事先任意给定的密度 $v(\zeta)$ 的积分表示（4）时，就得到一个 Cauchy 型积分，对此密度与边界值之间的关系通过沿围道 L 的奇异积分以一种更加复杂的方式来表达．

在解析函数论的边值问题中，Cauchy 型积分及其变形对于解奇异积分方程具有特殊重要的作用（见[5]，[6]）．

在研究各种类型解析函数的内部和边界性态中，用到比（1）更一般的解析函数的积分表示，其形式为依赖于一个参数的关于某个 Borel 边界测度（boundary measure）μ 的积分

$$f(z)=\int_L K(z,\zeta)d\mu(\zeta), \qquad (5)$$

这里 μ 通常为复测度，集中于包围 D 的围道 L 上，并能由所表示的函数 $f(z)$ 通过这种或那种过程来表示．

例如，所有在单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内正则且具有正实部（即 $\mathrm{Re} f(z)>0$）的函数 $f(z)$ 可由它的称为 Herglotz 公式（Herglotz formula）的表示所刻画：

$$f(z)=\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)+ic,\ \mathrm{Im}\,c=0,$$

其想法本质上源于 **Schwarz 积分**（Schwarz integral）．公式中的 μ 是集中于圆周 $L=\{\zeta:|\zeta|=1\}$ 上的任一正测度．很多种类型（5）的其他解析函数积分表示在单叶函数论中有重要应用；它们也称为参数表示或结构公式（structural formulas）（见**单叶函数的参数表示**（parametric representation of a univalent function））．例如，对于圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的典型实函数（typically-real function）$f(z)=z+c_2z^2+\cdots$（即满足当 $-1<x<1$ 时有 $\mathrm{Im} f(x)=0$，当 $\mathrm{Im}\,z\neq 0$ 时有 $\mathrm{Im} f(z)\cdot \mathrm{Im}\,z>0$ 的函数 $f(z)$）组成的类，一种典型的表示是

$$f(z)=\int \frac{z\,d\mu(\zeta)}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta})},$$

其中 μ 是集中于圆周 L 上且由条件 $\|\mu\|=\int d\mu(\zeta)=1$ 规范化的任一正测度．也常使用表示（5）的形如

$$f(z)=\varphi\left\{\int K(z,\zeta)d\mu(\zeta)\right\}$$

的变形，其中 $\varphi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 是特别选取的尽可能简单的函数，例如 $\varphi(z)=\exp z$．

把测度 μ 看作一个泛函，表示式（5）就可解释为泛函 μ 作用于核 $K(z,\zeta)$ 上的值 $\langle \mu_\zeta, K(z,\zeta)\rangle$．于是，解析函数的积分表示方法就发展为广义函数的解析表示，即广义函数 V 在核 $K(z,\zeta)$ 上取的值

$$\hat{V}(z)=\langle V_\zeta, K(z,\zeta)\rangle. \qquad (6)$$

这里函数 $\hat{V}(z)$ 在 V 的支集的补集中是解析的（假定 $K(z,\zeta)$ 对 $z\neq\zeta$ 关于 z 是解析的）．形如（6）的表示在数学物理中有重要应用（见[10]，[11]）．

在关于多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)\,(n\geqslant 1)$ 的解析函数 $f(z)$ 的理论中，积分表示就其最简单的形式可表示为下述一般公式：

$$f(z)=\int v(\zeta)\,\omega(z,\zeta), \qquad (7)$$

其中 $v(\zeta)$ 是在某种程度上同 $f(z)$ 相联系的密度，$\omega(z,\zeta)$ 是变量 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$，$\bar{\zeta}=(\bar{\zeta}_1,\cdots,\bar{\zeta}_n)$ 的微分形式，其系数依赖于参数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，$\bar{z}=(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$，积分展布在 $f(z)$ 的定义域 D 的整个边界 ∂D 或其某个部分上．也要用到形如（7）的积分的线性组合这样的表示．例如，在多圆柱型区域 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ 内全纯、在闭包 $\bar{D}$ 上连续的函数 $f(z)$ 在整个 D 中可通过 Cauchy 积分表示：

$$f(z)=\int f(\zeta)\,\omega(z,\zeta),$$

这里微分形式 ω 具有非常简单的形状：

$$\omega(z,\zeta)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\,\frac{d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}=K(z,\zeta)d\zeta,$$

而积分展布在 D 的骨架 $\Gamma=\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ 上（见 **Bergman-Weil 表示**（Bergman-Weil representation）；**Leray 公式**（Leray formula）；**Bochner-Martinelli 表示公式**（Bochner-Martinelli representation formula）；亦见[8]，[9]）．

如同单复变量情形那样，积分表示（7）的进一步发展是形如

$$f(z)=\langle V_\zeta, K(z,\zeta)\rangle$$

或

$$f(z)=\langle V_\zeta, \omega(z,\zeta)\rangle$$

的表示，它们以泛函 V 在核 $K(z,\zeta)$ 或核形式 $\omega(z,\zeta)$ 上的值的形式表示了某个区域中的解析函数 $f(z)$，

这里 V 分别解释为某个确定的函数空间上的广义函数或某个确定的微分形式空间上的动形.

参考文献

[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, 6 изд., М. 1956 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第三卷第二分册, 人民教育出版社, 1958).

[2] Kratzer, A., Franz, W., Transzendente Funktionen, Akad. Verlag, 1960.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М. - Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[4] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[5] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966).

[6] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1976 (英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).

[7] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

[8] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

[9] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

[10] Bremermann, H., Distributions, complex variables and Fourier transforms, Addison-Wesley, 1965.

[11] Владимиров, В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976 (英译本: Vladimirov, V. S., Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1977).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 多复变量函数的积分表示理论在迅猛发展中, 见 [A1]−[A3].

亦见**核函数** (kernel function); **Bergman 核函数** (Bergman kernel function) 及 [A4].

关于单变量领域的理论, 例如见 [A5], [A6].

把广义函数看作解析函数的 (广义) 边界值导致**超函数** (hyperfunction) 概念.

参考文献

[A1] Henkin, G. M. [G. M. Khenkin], Leiterer, J. [Yu. Leĭterer], Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1984.

[A2] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several variables, Springer, 1986.

[A3] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley (Interscience), 1982.

[A4] Bergman, S., The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc., 1950 (中译本: 施梯芬 · 柏格曼, 核函数和共形映照, 科学出版社, 1958).

[A5] Carathéodory, C., Theory of functions of a complex variable, Chelsea, reprint, 1954 (中译本: C. Carathéodory, 复变函数论, 第一卷, 高等教育出版社, 1985).

[A6] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1978 (中译本: L. V. 阿尔福斯, 复分析, 上海科学技术出版社, 1984).

沈永欢 译

积分分离条件 [integral separation condition; интегральной разделенности условие]

线性微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbf{R}^n$$

(A 是映射 $\mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 使 $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|A(t)\| < \infty$) 的一个条件, 它要求该方程组有解 $x_i(t)$, $i = 1, \cdots, n$, 对某些 $a, d > 0$, 不等式

$$|x_i(t)| \cdot |x_i(\tau)|^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant d e^{a(t-\tau)} \cdot |x_{i-1}(t)| \cdot |x_{i-1}(\tau)|^{-1}$$

对所有的 $i = 2, \cdots, n$ 和 $t \geqslant \tau \geqslant 0$ 成立.

满足积分分离条件的系统的集合是系统空间

$$\dot{x} = A(t)x,\ \sup_{x\in\mathbf{R}} \|A(t)\| < +\infty$$

在度量

$$\rho(A(t), B(t)) = \sup_{t\in\mathbf{R}} \|A(t) - B(t)\|$$

下所有 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent) 的连续性集之内部.

参考文献

[1] Изобов, Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, М., **12** (1974), 71 − 146 (英译本: Izobov, N. A., Linear systems of ordinary differential equations, *J. Soviet Math.*, **5** (1976), 1, 46 − 96).

В. М. Миллионщиков 撰 唐云 译

积分正弦 [integral sine; интегральный синус]

对于实数 x, 由

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

定义的特殊函数. 对于 $x > 0$, 有

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

有时使用记号

$$\mathrm{si}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\equiv\mathrm{Si}(x)-\frac{\pi}{2}.$$

某些特殊值是

$$\mathrm{Si}(0)=0,\ \mathrm{Si}(\infty)=\frac{\pi}{2},\ \mathrm{si}(\infty)=0.$$

某些特殊关系是

$$\mathrm{Si}(-x)=-\mathrm{Si}(x);\ \mathrm{si}(x)+\mathrm{si}(-x)=-\pi;$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{si}^2(t)dt=\frac{\pi}{2};\int_0^{\infty}e^{-pt}\mathrm{si}(qt)dt=-\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{q};$$

$$\int_0^{\infty}\sin t\,\mathrm{si}(t)dt=-\frac{\pi}{4};\int_0^{\infty}\mathrm{Ci}(t)\mathrm{si}(t)dt=-\ln 2,$$

其中 $\mathrm{Ci}(t)$ 是**积分余弦**（integral cosine）. 对于小的 x，有

$$\mathrm{Si}(x)\approx x.$$

对于大的 x,渐近表示是

$$\mathrm{Si}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\cos x}{x}P(x)-\frac{\sin x}{x}Q(x),$$

其中

$$P(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{x^{2k}},$$

$$Q(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

积分正弦具有级数表示

$$\mathrm{Si}(x)=x-\frac{x^3}{3!3}+\cdots+$$

$$+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}+\cdots.\qquad(*)$$

作为复变量 z 的函数，由 $(*)$ 定义的 $\mathrm{Si}(z)$ 是 z 平面上 z 的整函数.

积分正弦与**积分指数函数**（integral exponential function）$\mathrm{Ei}(z)$ 之间的关系是

$$\mathrm{si}(z)=\frac{1}{2i}[\mathrm{Ei}(iz)-\mathrm{Ei}(-iz)].$$

亦见 **Si-ci 螺线**（Si-ci-spiral）.

关于参考文献和积分正弦的图形，见**积分余弦**（integral cosine）. А. Б. Иванов 撰

【补注】 这个函数最好称为正弦积分（sine integral）.

张鸿林 译

积分和 [integral sum; интегральная сумма]

见**积分**（integral）；**积分学**（integral calculus）.

【补注】 积分和也称为 Riemann 和（Riemann sum）（见 **Riemann 积分**（Riemann integral））. 在建立 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral）时，往往使用 Lebesgue（积分）和（Lebesgue（integral）sum）这一名称.

积分曲面 [integral surface; интегральная поверхность]

在 $(n+1)$ 维空间内由这样的方程 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 所确定的曲面，使得此函数 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个偏微分方程的解. 例如，考虑线性齐次一阶方程

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0,\qquad(*)$$

此处 u 是未知的，$X_1,\cdots,X_n$ 是自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的给定函数. 假设在 n 维空间的某区域 G 内，$X_1,\cdots,X_n$ 连续可微且不同时为零. 又设 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)$ 是对称形式的常微分方程组

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

在 G 内函数无关的首次积分，则 $(*)$ 在 G 内的每个积分曲面的方程可表示为

$$u=\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}),$$

其中 Φ 是一个连续可微的函数. 对 **Pfaff 方程**（Pfaffian equation）

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+$$

$$+R(x,y,z)dz=0,$$

它在三维空间的某区域 G 内完全可积且在 G 内没有一个奇点，G 的每一点均包含在一积分曲面之中. 这些积分曲面从不相交，它们在任意一点处也两两互不相切.

参考文献

[1] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959（中译本：В. В. 史捷班诺夫，微分方程教程，高等教育出版社，1956）.

Н. Н. Ладис 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[A2] Rektorys, K., Survey of applicable mathematics, Iliffe, 1969, Sect. 18.7.

仇庆久 译

积分变换 [integral transform; интегральное преобразование]

函数的形如

$$F(x)=\int_C K(x,t)f(t)dt\qquad(1)$$

的变换，其中 C 是复平面上的有限或无穷围道，$K(x, t)$ 是积分变换的核（见**积分算子的核**(kernel of an integral operator)）．在大多数情况下，考虑满足 $K(x, t) = K(xt)$ 的积分变换，且 C 是实轴或实轴的一部分 (a, b)．如果 $-\infty < a, b < \infty$，则称所考虑的积分变换是有限的(finite)．可以从已知的 F 重新求出函数 f 的公式，称为所考虑的积分变换的反演公式(inversion formula)．

积分变换的例．

Bochner 变换(Bochner transform)：

$$[Tf](r) = 2\pi r^{1-n/2}\int_0^\infty J_{n/2-1}(2\pi r\rho)\rho^{n/2}f(\rho)d\rho,$$

其中 $J_\nu(x)$ 是 ν 阶第一类 **Bessel 函数**(Bessel function)，ρ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的距离．反演公式是 $f = T^2F$．Parseval 恒等式是

$$\int_0^\infty |[Tf](r)|^2 r^{k-1}dr = \int_0^\infty |f(\rho)|^2\rho^{k-1}d\rho.$$

Weber 变换(Weber transform)：

$$F(u, a) = \int_a^\infty c_\nu(tu, au)tf(t)dt,\ a \leqslant t \leqslant \infty,$$

其中 $c_\nu(\alpha, \beta) = J_\nu(\alpha)Y_\nu(\beta) - Y_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)$，$J_\nu$，$Y_\nu$ 分别是第一类和第二类 Bessel 函数．反演公式是：

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{c_\nu(xu, au)}{J_\nu^2(au) + Y_\nu^2(au)}\,uF(u, a)du.$$

当 $a \to 0$ 时，Weber 变换转化为 Hankel 变换(Hankel transform)：

$$F(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt}\ J_\nu(xt)f(t)dt,\ 0 < x < \infty.$$

当 $\nu = \pm 1/2$ 时，这个变换转化为 Fourier 正弦和余弦变换．反演公式如下：如果 $f \in L_1(0, \infty)$，在点 $t_0 > 0$ 的一个邻域内为有界变差且 $\nu \geqslant -1/2$，则

$$\frac{f(t_0+0) + f(t_0-0)}{2} = $$

$$= \int_0^\infty \sqrt{t_0 x}\ J_\nu(t_0 x)F(x)dx.$$

Parseval 恒等式：如果 $\nu \geqslant -1/2$，函数 $f, g \in L_1(0, \infty)$，设 F, G 分别是 f, g 的 Hankel 变换，则

$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt = \int_0^\infty F(x)G(x)dx.$$

Hankel 变换的另一些形式是：

$$\int_0^\infty J_\nu(xt)tf(t)dt,\quad \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt})f(t)dt.$$

Weierstrass 变换(Weierstrass transform)：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{4}\right]f(t)\,dt;$$

它是**卷积变换**(convolution transform)的特殊情形．

累次变换(repeated transform)．令

$$f_{i+1}(x) = \int_0^\infty f_i(t)K_i(xt)dt,\ i = 1, \cdots, n,$$

其中 $f_{n+1}(x) = f_1(x)$．这样的积分变换序列称为积分变换链．对于 $n = 2$ 的累次积分变换常称为 Fourier 变换(Fourier transform)．

多重(多维)积分变换(multiple (multi-dimensional) integral transform)是当 $t, x \in \mathbf{R}^n$，C 是复 n 维 Euclid 空间中某个区域时的变换(1)．

广义函数的积分变换可由下述基本方法构造：

1) 构造含有所考虑的积分变换 T 的核 $K(x, t)$ 的测试函数空间 U．对任一广义函数 $f \in U'$，其变换 Tf 定义为 f 按下述公式作用于测试函数 $K(x, t)$ 上的值：

$$T[f(t)](x) = \langle f, K(x, t)\rangle.$$

2) 构造测试函数空间 U，在其上已定义经典积分变换 T，它把 U 映射到某个测试函数空间 V 上．广义函数 $f \in V'$ 的积分变换 $T'f$ 由方程

$$\langle T'f, \varphi\rangle = \langle f, T\varphi\rangle,\ \varphi \in U$$

定义．

3) 所需的积分变换通过已对广义函数定义的另一积分变换来表示．

亦见**卷积变换**(convolution transform)；**Euler 变换**(Euler transform)；**Fourier 变换**(Fourier transform)；**Gauss 变换**(Gauss transform)；**Gegenbauer 变换**(Gegenbauer transform)；**Hardy 变换**(Hardy transform)；**Hermite 变换**(Hermite transform)；**Jacobi 变换**(Jacobi transform)；**Конторович-Лебедев 变换**(Kontorovich-Lebedev transform)；**Mehler-Фок 变换**(Mehler-Fock transform)；**Meijer 变换**(Meijer transform)；**Mellin 变换**(Mellin transform)；**Stieltjes 变换**(Stieltjes transform)；**Watson 变换**(Watson transform)；**Whittaker 变换**(Whittaker transform)．

参考文献

[1] Диткин, В. А., Прудников, А. П., в сб.:《Итоги Науки. Математический анализ. 1966》, М., 1967, 7－82(英译本：Ditkin, V. A., Prudnikov, A. P., Operational calculus, Progress in Math. **1** (1968), 1－75).

[2] Брычков, Ю. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977 (英译本：Brychkov, Yu. A., Prudnikov, A. P., Integral

transforms of generalized functions, Gordon & Breach, 1989).

[3] Владимиров, B. C., Обобщенные функции в математической физике, M., 1976 (英译本: Vladimirov, V. S., Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979).

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sneddon, I. N., The use of integral transform, McGraw-Hill, 1972.

[A2] Zemanian, H., Generalized integral transformations, Interscience, 1968.

沈永欢 译

积分变换法 [**integral-transform method; интегральных преобразований метод**]

解给定边界值或初始条件的线性微分方程的一种方法，它把给定的方程转化为关于未知函数的积分变换的方程，而后一方程可能比较简单. 例如，假定要求出有限或无穷区间 (α, β) 上方程

$$a_0(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2(x)u = f(x) \tag{1}$$

具有边界条件 $u(\alpha) = u_\alpha$, $u(\beta) = u_\beta$ 的解，如果积分变换

$$\overline{u}(s) = \int_\alpha^\beta K(s, x)u(x)dx$$

的核 $K(s, x)$ 满足方程

$$\frac{d^2(a_0K)}{dx^2} - \frac{d(a_1K)}{dx} + a_2K = \lambda(s)K, \tag{2}$$

其中 $\lambda(s)$ 是 s 的函数，则当用 $K(s, x)$ 乘 (1) 并在 (α, β) 上分部积分后，就能得到方程

$$\overline{f}(s) - \left[a_0\left(K\frac{du}{dx} - u\frac{dK}{dx}\right) + \right.$$

$$\left. + (a_1 - a_0')uK\right]\Bigg|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \lambda(s)\overline{u}.$$

关于 $\overline{u}$ 解此方程，再用对于所给积分变换的反演公式，就可求出 $u(x)$. 类似的积分变换法也用于解偏微分方程.

这样，用积分变换法解微分方程由下列步骤组成:

1) 选取适当的积分变换.

2) 用所选积分变换的核乘所给方程和边界-初始条件，然后在适当范围内关于自变量 x 积分.

3) 在 2) 的积分过程中，用给定的边界-初始条件计算由积分限所产生的项.

4) 解所得辅助方程，求出未知函数的积分变换.

5) 通过反演公式确定未知函数.

参考文献

[1] Tranter, C. J., Integral transformations in mathematical physics, Wiley, 1966.

[2] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 1-2, Interscience, 1953-1962 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, 科学出版社, Ⅰ 1958, Ⅱ 1977).

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 在许多情形，积分区间是无穷区间. 积分路径有时也转移到复平面中.

涉及条中所述方法的应用广泛的积分变换是 **Fourier 变换** (Fourier transform) 和 **Laplace 变换** (Laplace transform)，见，例如，[A1]-[A3].

参考文献

[A1] Watson, E. J., Laplace transforms and applications, v. Nostrand-Reinhold, 1984.

[A2] Doetsch, G., Introduction to the theory and application of the Laplace transformation, Springer, 1974 (中译本: G. 窦志, 拉普拉斯变换的理论和应用, 科学出版社, 1966).

[A3] Bracewell, R., The Fourier transform and its applications, McGraw-Hill, 1965.

沈永欢 译

对合积分 [**integrals in involution; интегралы в инволюции**]

微分方程的这样一些解，它们的 **Jacobi 括号** (Jacobi brackets) 恒为零. 一个 $2n+1$ 个变量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, u, $p = (p_1, \cdots, p_n)$ 的函数 $G(x, u, p)$ 称为一阶偏微分方程

$$F(x, u, p) = 0, \tag{1}$$

$$u = u(x_1, \cdots, x_n),\ p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

的一个首次积分，是指若沿此方程的每个**特征** (characteristic)，它是常数. 所谓两个首次积分 $G_i(x, u, p)$ $(i = 1, 2)$ 是对合的，是指若它们的 Jacobi 括号关于 (x, u, p) 恒为零:

$$[G_1, G_2] = 0. \tag{2}$$

更一般地，对两个函数 G_1 和 G_2，若条件 (2) 成立，就称这两个函数是对合的. 方程 (1) 的任一首次积分 G 必与 F 为对合的; 后面的函数 F 本身是一个首次积分.

这些定义能被推广到方程组

$$F_i(x, u, p) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m \tag{3}$$

的情形. 在此，这个组的首次积分 $G(x, u, p)$ 可被视为具未知函数 G 的线性方程组

$$[F_i, G]=0,\ 1\leqslant i\leqslant m \tag{4}$$

的解.

若(3)是一个**对合方程组**(involutional system),则(4)是一个**完全系统**(complete system).若(3)中的函数 F_i 不依赖于 u,则它是对合的.

参考文献

[1] Гюнтер, Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.-М., 1934.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 2, Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Akad. Verlagsgesell., 1944(中译本:E.卡姆克,一阶偏微分方程手册,科学出版社,1983).

А. П. Солдатов 撰

【补注】 关于另外的文献可参见**完全系统**(complete system).一个对合组通常称为对合的组. 仇庆久 译

积分因子 [integrating factor; интегрирующий множитель]

一阶常微分方程

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{1}$$

的积分因子是具有下述性质的函数 $\mu=\mu(x, y)\not\equiv 0$:它使得

$$\mu(x, y)P(x, y)dx+\mu(x, y)Q(x, y)dy=0$$

是**全微分方程**(differential equation with total differential).例如,对于线性微分方程 $y'+a(x)y=f(x)$ 或者方程 $(a(x)y-f(x))dx+dy=0$,函数 $\mu=\exp\int a(x)dx$ 是一个积分因子.如果方程(1)在区域 D(使得 $P^2+Q^2\neq 0$)中有光滑**通积分**(general integral)$U(x, y)=C$,则它有无穷多个积分因子.如果 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在区域 D(使得 $P^2+Q^2\neq 0$)中具有连续偏导数,则偏微分方程

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]=0 \tag{2}$$

的任一非平凡特解都可取作积分因子,见[1].然而,不存在求(2)的解的一般方法,因此只在例外情形才对具体的方程(1)成功地求出积分因子,见[2].

参考文献

[1] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966(中译本:B.B.史捷班诺夫,微分方程教程,高等教育出版社,1955).

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1971(中译本:E.卡姆克,常微分方程手册,科学出版社,1977).

Н. Х. Розов 撰 沈永欢 译

积分法 [integration; интегрирование]

求**积分**(integral)的运算,积分法也可以理解为解微分方程. 张鸿林 译

分部积分法 [integration by parts; интегрирование по частям]

计算积分的一种方法,它把形如 $u(x)dv(x)$ 的表达式的积分表示为 $v(x)du(x)$ 的积分.关于**定积分**(definite integral)的分部积分公式是

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(b)v(b)-u(a)v(a)+\\ -\int_a^b v(x)du(x). \tag{1}$$

在 u, v 及其导数 u', v' 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续的假定下,此公式恒适用.

关于**不定积分**(indefinite integral),类似于(1)的公式是

$$\int u(x)dv(x)=\\ =u(x)v(x)-\int v(x)du(x). \tag{2}$$

关于**多重积分**(multiple integral),类似于(1)的公式是

$$\int_D u\frac{\partial v}{\partial x_k}dx=\oint_\Gamma uv\cos\angle(x_k, n)ds+\\ -\int_D v\frac{\partial u}{\partial x_k}dx. \tag{3}$$

这里 D 是 $\mathbf{R}^m$ 中具有光滑(或至少分片光滑)边界 Γ 的区域;$x=(x_1, \cdots, x_m)$;$\angle(x_k, n)$ 是 x_k 轴与 Γ 的外法线之间的夹角.如果 u, v 及其一阶偏导数在 $D\cup\Gamma$ 上连续,则公式(3)成立.如果把(3)中的积分理解为 Lebesgue 积分,则当 u, v 对任何满足 $p^{-1}+q^{-1}\leqslant 1+m^{-1}$ 的 $p, q\geqslant 1$ 属于 **Соболев 空间**(Sobolev space)即 $u\in W_p^1(D)$, $v\in W_q^1(D)$ 时,公式(3)成立.

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1-2, М., 1971-1973(英译本:Il'in, V. A., Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, ч. 1-2, М., 1970.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 1-2, М., 1973(中译本:C.M.尼柯尔斯基,数学分析教程,第一卷,人民教育出版社,第一分册 1980,第二分册 1981;第二卷第一分册,高等教育出版社,1992).

В. А. Ильин, Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 当 u 和 v 都在闭区间 $[a, b]$ 上绝对连续

(见**绝对连续性**(absolute continuity))时公式(1)仍成立.作此推广时积分必须取 Lebesgue 意义(见 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)).

关于另外的参考文献,亦见**反常积分**(improper integral).

参考文献

[A1] Hewitt, E., Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A2] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

沈永欢 译

代换积分法 [**integration by substitution**; **интегрирование подстановкой**], 积分中的变量变换 (change of variable in an integral)

计算积分的一种方法,通过转变为另一积分变量来变换所给积分.对于单元函数的**定积分**(definite integral),其公式为

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

此公式在下述假定下为真: f 在区间 $[a, b]$ 上连续; 函数 $x=\varphi(t)$ 定义于区间 $[\alpha, \beta]$ 上,它连同其一阶导数 φ' 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,其值域为 $[a, b]$,且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

对于**不定积分**(indefinite integral),类似于公式(1)的是

$$\int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

如果 $x=\varphi(t)$ 定义于某个区间 $\{t\}$ 上并在这个区间上可微, f 在 φ 的值域上具有原函数,则 $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ 在所给区间上也具有原函数,且公式(2)成立.

在计算 m 维有界闭可测区域 G 上多重 Riemann 积分(见**多重积分**(multiple integral))的情形,类似于公式(1)的是

$$\int_G f(x)dx = \int_{G'} f[\varphi(t)]\left|\frac{D(x_1, \cdots, x_m)}{D(t_1, \cdots, t_m)}\right|dt. \qquad (3)$$

在下述假定下,公式(3)成立:函数 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_m)$ 在 G 中连续;变换 $x_i=\varphi_i(t_1, \cdots, t_m)$ $(i=1, \cdots, m)$ 把变量 $t_1, \cdots, t_m$ 的空间中的区域 G' 一对一地映射到 G 上;函数 $x_i=\varphi_i(t_1, \cdots, t_m)$ 在 G' 中具有连续一阶偏导数,且其 **Jacobi 行列式**(Jacobian) $D(x_1, \cdots, x_m)/D(t_1, \cdots, t_m)$ 不等于零.在更一般的假定下,公式(3)也成立(不必要求 f 在 G 内连续,而 Jacobi 行列式也可在一个 m 维零测度集上等于零).

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1-2, М., 1971-1973 (英译本: Il'in, V. A., Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 1-2, М., 1970.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, М., 1973 (中译本: С. М. 尼柯尔斯基,数学分析教程,第一卷,人民教育出版社,第一分册 1980,第二分册 1981;第二卷第一分册,高等教育出版社,1992).

В. А. Ильин 撰

【补注】 关于使得(1)和(3)对 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)成立的非常一般的假定,见[A1].

关于另外的参考文献,亦见**反常积分**(improper integral).

参考文献

[A1] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

沈永欢 译

数值积分法 [**integration, numerical**; **интегрирование численное**]

通过数值方法求积分.数值积分法应用于下列情形:被积函数通过表格近似给出;或者虽然被积函数精确给出,但在给定的精确度范围内用数值积分法比用精确方法求出结果要快得多;或者最后,由于所给积分不能用已知函数表示,从而不可能用精确方法.对于数值积分法,已导出各种求面积(单变量情形)和求体积(计算多重积分)公式(见**求积公式**(quadrature formula);**求体积公式**(cubature formula)).亦见**计算数学中的插值法**(interpolation in numerical mathematics).

【补注】

参考文献

[A1] Dahlquist, G., Bjorck, A., Numerical methods, Prentice-Hall, 1974 (中译本: G. Dahlquist, A. Bjorck, 数值方法,高等教育出版社,1990).

[A2] Stoer, J., Burlirsch, R., Introduction to numerical analysis, Springer, 1980 (译自德文).

[A3] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987.

沈永欢 译

微分方程的闭形式积分 [**integration of differential equations in closed form**; **интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме**]

利用事先提供的函数和所给的数学运算而得到的微分方程解的代数表达式.

如果所取的函数是**初等函数**(elementary function)加上方程中出现的函数,而作为运算是有限次代数算子运算加上对所给函数的不定积分(求积(quadrature))运算,则称为用求积法求微分方程的积分(即解).**Bernoulli 方程**(Bernoulli equation)就是常微分方程可

以用求积法来积分的例子．J．Liouville（见[1]）最早指出了不能用求积法进行积分的方程．例如，方程

$$y'' + xy = 0 \qquad (*)$$

的解就不能表示成初等函数及其积分的形式（见[2]）．只有极少数的常微分方程可以用求积法积分．关于用求积法积分可能性的大多数深入的结果是在 S．Lie 的连续变换群理论（见[3]，[4]，[5]）的基础上得到的．当对微分方程闭形式积分时，**特殊函数**（special function），即通过收敛序列等表示的解，可用于求积法积分．任何具体的具有变系数的线性微分方程是闭形式可积的，只要含有有限个组成**基本解组**（fundamental system of solutions）的（通常是特殊的）函数加上一些容许函数．例如，若引进 **Bessel 函数**（Bessel function），则（*）的解的通式就可以通过这些函数给出．因此，微分方程是特殊函数的来源，而将特殊函数补充到容许函数中，可以使闭形式可积的方程种类扩大．但一般地来说，非线性方程的闭形式积分问题并不能归结为将有限个特殊函数补充到容许函数集合之中．

偏微分方程只能在极个别的特殊情形得到解的公式（例如，见 **d'Alembert 公式**（d'Alembert formula））．在这类方程的求解中，群论方法很重要（参见[5]）．

参考文献

[1] Liouville, J., *J. Math. Pures et Appl. Sér.* 1, **6** (1841).

[2] Kaplansky, I., An introduction to differential algebra, Hermann, 1957.

[3] Lie, S. and Scheffers, G., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Teubner, 1891.

[4] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[5] Овсянников, Л. В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосиб., 1962（英译本：Ovsiannikov, L. V., Group analysis of differential equations, Acad. Press, 1982）.

[6] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Akad. Verlagsgesellschaft, 1943（中译本：E．卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1977）.

[7] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 2. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion, Akad. Verlagsgesellschaft, 1944（中译本：E．卡姆克，一阶偏微分方程手册，科学出版社，1983）.

Н．Ф．Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Olver, P. J., Applications of Lie groups to differential equations, Springer, 1986.

[A2A] Vinogradov, A. M. (ed.), Symmetries of partial differential equations, I, *Acta. Applic. Math.*, **15** (1989), 1－2.

[A2B] Vinogradov, A. M. (ed.), Symmetries of partial differential equations, II－III, *Acta. Applic. Math.*, **16** (1989), 1－2.

唐 云 译

流形上的积分 [**integration on manifolds; интегрирование на многообразии**]

【补注】 令 M 为一有限维光滑流形．其切空间等给出了微分学的整体类似物．也有一种"流形上的积分学"．令 $\Delta_n=[0,1]^n\subset\mathbf{R}^n$ 为标准的 n 立方体．M 中的**奇异立方体**（singular cube）为一个光滑映射 $s:\Delta_k\to M$．令 ω 为 M 上的 k 形式（见**微分形式**（differential form））．于是 ω 在一奇异 k 立方体 s 上的积分定义为

$$\int_s \omega = \int_{\Delta_k} f, \qquad \text{(A1)}$$

其中 f 是使得在 Δ_k 上 $s^*\omega=f dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ 的唯一光滑函数，(A1) 的右方则是通常的 Lebesgue 积分．一**奇异 k 链**（singular k-chain）即奇异 k 立方体的系数在 $\mathbf{Z}$ 中的有限形式和 $c=\sum n_i s_i$．我们定义

$$\int_c \omega=\sum_i n_i\int_{s_i}\omega . \qquad \text{(A2)}$$

现令 M 为可定向的，而 $c=\sum n_i s_i$，$c'=\sum n_i s_i'$ 是两个奇异 k 链，且 $s_i(\Delta_k)=s_i'(\Delta_k)$ 对所有 i 成立，而且 s_i，s_i' 是保持定向的．于是 $\int_c\omega=\int_{c'}\omega$．特别地，若 s_i 拼在一起成为 M 的一个分片光滑的 k 维子流形 N，则积分 $\int_N\omega$ 也得到适当定义．

令 d 是**外形式**（exterior form）上的外微分，而 ∂ 是可定向(奇异)链上(明显的)边缘算子．这时有 **Stokes 定理**（Stokes theorem）

$$\int_c d\omega=\int_{\partial c}\omega, \qquad \text{(A3)}$$

其中 ω 是一 $(k-1)$ 形式，而 c 是一奇异 k 链．这是**微积分学基本定理**(fundamental theorem of calculus)的类比．

Green 定理（Green theorem）是一特殊推论：令 $M\subset\mathbf{R}^2$ 是一紧 2 维带边流形，而 $f,g:M\to R$ 可微．这时

$$\int_{\partial M}(f dx+g dy)=\iint_M\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy . \qquad \text{(A4)}$$

现令 M 为一个可定向 n 维 Riemann 流形，即对每一点 $x\in M$，T_xM 上均已给了一个**定向**(orientation)．这时在 M 上可定义**体积形式**（volume form）ω_n，使对

于 T_xM 在其已给的定向类中的一个(从而对于所有的)规范正交基均有 $\omega_M(x)(v_1,\cdots,v_n)=1$．一般 Stokes 定理(general Stokes theorem)(A3)的另一个推论是散度定理(divergence theorem)：

$$\int_M \operatorname{div}\psi \, dV = \int_{\partial M} \langle \psi, n \rangle \, dA. \tag{A5}$$

这里 ψ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个向量场，M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个三维可定向流形，$\operatorname{div}\psi=\sum_i \partial\psi_i/\partial x_i$，而 $\psi=\sum_i \psi_i \partial/\partial x_i$，$n$ 是 ∂M 的单位外法线向量，dV 与 dA 分别是 M 和 ∂M 的体积和面积元素．内积(inner product)是由 $\mathbf{R}^3$ 的标准内积诱导而得的．

最后还有经典 Stokes 公式(classical Stokes formula)：令 $M\subset\mathbf{R}^3$ 是一可定向的二维子流形，其边界是 ∂M．在 ∂M 上给一定向，使得再加上外法线向量后给回 M 之定向．令 s 将 ∂M 参数化，而 φ 为 ∂M 上的向量场，使得 $ds(\varphi)=1$ 在 ∂M 上处处成立．这时有公式

$$\int_M \langle \operatorname{curl}, \psi, n \rangle dA = \int_{\partial M} \langle \psi, \varphi \rangle ds, \tag{A6}$$

这里 $\mathbf{R}^3$ 上向量场 ψ 的旋度(curl of a vector field)的定义是：

$$\operatorname{curl}\psi = \left[\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right]\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{A7}$$

所有这些定理均有高维的类似公式．

参考文献

[A1] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin, 1965 (中译本：M．斯皮瓦克，流形上的微积分，科学出版社，1981)．

[A2] Hazewinkel, M., A tutorial introduction to differentiable manifolds and calculus on manifolds, in W. Schiehlen and W. Wedig (eds.): Analysis and estimation of stochastic mechanical systems, Springer, Wien, 1988, 316 – 340．

齐民友 译

积分微分方程 [**integro-differential equation**; **интегро-дифференциальное уравнение**]

在微分和积分两种运算符号下都包含未知函数的一个方程．积分方程和微分方程也是积分微分方程．

线性积分微分方程(linear integro-differential equation)．设 f 是给定的一个变量的函数，令

$$L_x[U] \equiv \sum_{i=0}^{l} p_i(x) U^{(i)}(x),$$

$$M_y[U] \equiv \sum_{j=0}^{m} q_j(x) U^{(j)}(y)$$

是带有 $[a, b]$ 上充分光滑的系数 p_i 和 q_j 的微分表达式，且设 K 是正方形 $[a, b]\times[a, b]$ 上充分光滑的一个已知函数．形如

$$L_x[U] = \lambda \int_a^b K(x, y) M_y[U] dy + f(x) \quad (1)$$

的一个方程称为线性积分微分方程；λ 是一个参数．如果(1)中当 $y > x$ 函数 $K(x, y) \equiv 0$，则(1)称为带可变积分限的积分微分方程；它可以写成

$$L_x[U] = \lambda \int_0^x K(x, y) M_y[U] dy + f(x) \quad (2)$$

的形式．对(1)和(2)可以提 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)(求满足 $U^{(i)}(\alpha) = c_i (i = 0, 1, \cdots, l-1)$ 的解，这里 c_i 是给定的数，l 是 $L_x[U]$ 的阶数，且 $\alpha\in[a, b]$)，以及各种边值问题(例如，周期解问题)．很多情况下(见[3]，[4])，对(1)和(2)的问题能够简化，或者甚至可分别地化成第二类 Fredholm 积分方程(见 **Fredholm 方程**(Fredholm equation))或 **Volterra 方程**(Volterra equation)．同时，对积分微分方程很多特殊现象产生了，而这些现象对微分或积分方程是不典型的．

最简单的非线性积分微分方程(non-linear integro-differential equation)有形式

$$U(x) = \lambda \int_a^b F(x, y, U(y), \cdots, U^{(m)}(y)) dy + f(x).$$

压缩映射原理(contracting mapping principle)，**Schauder 法**(Schauder method)，以及其他的非线性泛函分析方法，用于研究这种方程．

对积分微分方程，也可以研究解的稳定性，本征函数展开，按小参数的渐近展开等问题．偏积分微分方程和带重积分的积分微分方程在实践中经常遇到．Boltzmann 方程和 Колмогоров-Feller 方程是其中的例子．

参考文献

[1] Volterra, V., Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, Gauthier-Villars, 1913.

[2] Volterra, V., Una teoria matematica sulla lotta per l'esistenza, *Scienta*, **41** (1927), 85 – 102.

[3] Быков, Я. В., О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фр., 1957.

[4] Вайнберг, М. М., в кн., Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, 5 – 37.

[5] Филатов, А. Н., Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, Таш., 1974.

В. А. Треногин 撰

【补注】 常积分微分方程是有意义的，例如在人口动

力学中([A2]).偏积分微分方程，即作为积分和偏微分算子两者的自变量出现的多元函数的方程是有价值的，譬如在连续统力学中([A1],[A3]).

参考文献

[A1] Bloom, F., Ill-posed problems for integrodifferential equations in mechanics and electromagnetic theory, SIAM, 1981.

[A2] Cushing, J. M., Integrodifferential equations and delay models in population dynamics, Springer, 1977.

[A3] Grabmüller, H., Singular perturbation techniques applied to integro-differential equations, Pitman, 1978.

葛显良 译 鲁世杰 校

内分位数宽度 [**inter-quantile width; интерквантильная широта**], 内分位数距离 (inter-quantile distance), 内分位数间距 (inter-quantile range).

同一水平的上分位数与下分位数之差(见**分位数**(quantile)). 假设 $F(x)$ 是严格单调连续型分布函数, p 是区间 $0<p<1/2$ 中任一常数. p 水平内分位数宽度定义为差 $x_{1-p}-x_p$, 其中 x_p 和 x_{1-p} 相应为方程 $F(x_p)=p$ 和 $F(x_{1-p})=1-p$ 的解. 以一定方式选定的水平 p 的内分位数宽度，在数理统计和概率论中用作概率分布的散布特征. 例如，对应于值 $p=0.25$ 的差 $x_{0.75}-x_{0.25}$, 称做内四分位数距离 (inter-quartile distance), 而对于正态分布情形它等于 1.349σ (σ 是散布的自然度量，称做**标准差** (standard deviation)); 内四分位数(内十分位数)宽度的一半，称做**概差** (probable deviation)、可能误差 (probable error) 或半内四分位数距离 (semi-inter-quartile distance). 如果 $p=1/6$ 或 $p=1/10$, 则内分位数距离分别称做内六分位数距离 (inter-sixtile distance) 或内十分位数距离 (inter-tentile distance).

参考文献

[1] Yale, G. U., An introduction to the theory of statistics, Griffin, 1916.

Л. Н. Большев 撰 周概容 译

相互作用绘景 [**interaction, representation of** 或 interaction picture; **взаимодействия представление**]

量子力学中和量子场论中表示算子 A 和波函数 ψ 对时间 t 的依存关系的主要的可能(与 **Schrödinger 绘景** (Schrödinger representation) 和 **Heisenberg 绘景** (Heisenberg representation) 一起) 等价绘景中的一种. 量子系统，考虑到其各个部分之间(量子力学中)或其各个组分场之间(量子场论中)的相互作用，在 Schrödinger 绘景中可借助于 **Schrödinger 方程** (Schrödinger equation):

$$i\hbar\frac{\partial\psi_S(t)}{\partial t}=H\psi_S(t)=(H_0+H')\psi_S(t) \tag{1}$$

予以描述. 假定完全 **Hamilton 算子** (Hamilton operator) H 由自由(无互作用)粒子或场的 Hamilton 算子 H_0 和相互作用 Hamilton 算子 H' 组成. Hamilton 算子 H_0 和 H' 是对应于各种自由场的算子的不可对易函数(否则问题就会是平凡的，因为把 Hamilton 算子分成 H_0 和 H' 就会不再是有意义的)，而且它们在 Schrödinger 绘景中不依赖于时间 t. 酉变换

$$\psi_S(t)=e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\varphi_I(t) \tag{2}$$

实现向相互作用绘景的转变. 在相互作用绘景中，波函数满足方程:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi_I(t)}{\partial t}=H_I'(t)\varphi_I(t), \tag{3}$$

亦即 $\varphi_I(t)$ 对 t 的依存关系由该绘景中相互作用 Hamilton 算子

$$H_I'(t)=e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}H'e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} \tag{4}$$

确定. 同时，Schrödinger 绘景中算子 A 的平均值

$$\overline{A}\equiv\overline{A}_S=(\psi_S^*(t),A_S\psi_S(t))=$$

$$=\left[\varphi_I^*(t),e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}A_Se^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\varphi_I(t)\right], \tag{5}$$

也可理解为相互作用绘景中算子 $A_I(t)$,

$$A_I(t)=e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}A_Se^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}, \tag{6}$$

相对于波函数 $\varphi_I(t)$ 的平均值. 在相互作用绘景中，对应于动力学物理量的算子，像 Heisenberg 绘景中自由场的算子那样按(6)随时间变化，而波函数随时间 t 的变化由场之间的相互作用效应确定. 在量子系统的行为作为时间 t 的函数的描述中，相互作用绘景使得有可能把对自由场的 Hamilton 算子 H_0 的依存关系分出来，它通常比较容易确定，而把注意力集中在方程(3)和(4)的研究上，它们包含对场之间相互作用的完全信息. 当 H' 含有某个小参数时，相互作用绘景在应用中尤其方便，借助于微扰理论，可以求得各个解作为小参数的幂级数.

必须注意到平均值(5)的不变性，因而就酉变换(2)和(6)而论，它具有正是下面这样的物理意义: 相互作用绘景与 Schrödinger 绘景和 Heisenberg 绘景是等价的.

В. Д. Кукин 撰

【补注】 相互作用绘景 (interaction representation 或 interaction picture) 也称为 Dirac 绘景 (Dirac representation 或 Dirac picture).

参考文献

[A1] Källén, G., Quantum electrodynamics, Springer, 1972.

徐锡申 译

内部 [**interior; внутренность**]

拓扑空间 X 的子集 A 的满足下列条件的所有点 x

的集合：存在 X 中的开集 U_x，使 $x \in U_x \subset A$. 集合 A 的内部通常记为 $\mathrm{Int}\,A$，且表示含于 A 内的 X 中的最大开集. 等式 $\mathrm{Int}\,A = X \setminus [X \setminus A]$ 成立，这里 $[X]$ 表示 X 的闭包. 拓扑空间 X 中集合的内部是正则开(regular open)集或典范集(canonical set). 其典范开集构成拓扑基(base)的空间称为半正则的(semi-regular). 所有正则空间都是半正则的. 内部有时也称为集合的开核(open kernel of the set).

В. И. Пономарев 撰

【补注】 亦见**集合的内部**(interior of a set).

白苏华、胡师度 译

内微分算子 [**interior differential operator**; **внутренний дифференциальный оператор**], 关于曲面 Σ_m 的

一个这样的**微分算子**(differential operator) $L(u)$，使得对其有定义的任一函数 u，$L(u)$ 在点 $M \in \Sigma_m$ 之值仅由定义于空间 $E^n(m<n)$ 内的光滑曲面 Σ_m 上的该函数 u 之值就可算得. 一个内微分算子可以用在 Σ_m 的切空间中的方向 l 的导数去进行计算. 若人们引入坐标使 Σ_m 为 $x_{m+1} = x^0_{m+1}, \cdots, x_n = x^0_n$，则关于 Σ_m 是内微分的算子 $L(u)$，在适当的变换后、不包含关于变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 的导数(即所谓外导数(exterior derivatives)或外在导数(extrinsic derivatives)). 例如，算子

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

关于任一包含直线 $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0$ 的光滑曲面是一个内微分算子，且关于这些直线中任一根直线也是内微分的. 若算子 $L(u)$ 关于曲面 Σ_{n-1} 是一个内微分算子，则 Σ_{n-1} 称为是微分方程 $L(u)=0$ 的一个**特征**(characteristic).

对一个微分算子，若在曲面 Σ_m 的点处，外导数的最高阶的阶数比算子的阶数低，则有时也称此算子关于曲面 Σ_m 是内微分的.

Б. Л. Рождественский 撰 仇庆久 译

内蕴几何学 [**interior geometry** 或 intrinsic geometry; **внутренняя геометрия**], 又称内在几何学

几何学的一个分支，它涉及曲面或曲面上图形的仅与位于曲面上之曲线长度有关且无需借助它们的外围环境就可说清楚的那些性质，正则曲面的内蕴几何学包含这样一些概念，诸如曲线之间的角度，区域的曲面面积，曲面的 Gauss 曲率(或总曲率)，曲线的**测地曲率**(geodesic curvature)，以及 **Levi-Civita 联络**(Levi-Civita connection)等. 术语"内蕴几何学"也用于更一般的场合，表示一拓扑空间映射到另一空间时所诱导的一种结构(通常是**度量**(metric)或**联络**(connection))，后者空间已预先给定了类似的结构.

可以把内蕴几何学的对象看作曲面本身而不看作外围空间的性质，这就导致研究具有内蕴度量(见**内度量**(internal metric))的抽象空间，它们的性质与曲面的内蕴几何学相似(见 **Riemann 空间**(Riemannian space); **凸曲面**(convex surface); **有界曲率的二维流形**(two-dimensional manifold of bounded curvature)). 除内蕴方法以外，也能利用外在几何学性质来对浸入曲面和子流形分类. 这两个途径的对照构成了**等距浸入**(isometric immersion)和嵌入的问题. 在若干重要情况下，两种方法得出恒等的度量类. 例如，(C^r类，$r>3$) Riemann 度量的任何内蕴几何学可看作充分高维数的 Euclid 空间的某子流形的内蕴几何学、而任何非负曲率的二维完全内蕴度量的几何学可看作 E^3 中一凸曲面的内蕴几何学. 相反情况的一个经典例子是 **Hilbert 定理**(Hilbert theorem)，它断言不存在 Лобачевский 平面到 E^3 的正则等距浸入. 应用于这类抽象空间的术语"内蕴几何学"在确定理论框架下与外在几何学并列时才有意义. 搞清楚曲面的内蕴几何学与它们的外在几何学(extrinsic geometry)之间的联系是几何学中最有趣的问题之一. 除等距浸入问题外，也包括这样一些问题，诸如曲面的**形变**(deformation)，**无穷小形变**(infinitesimal deformation)，曲面被其度量的唯一确定性、以及度量光滑性对曲面光滑性的影响等. 在浸入叠加的情况下(曲面上的曲线，球面的极小子流形)，也研究外在与内蕴几何学之间的关系.

内蕴几何学的基础是由 C. F. Gauss([1])奠定的，对于高维情形是由 B. Riemann([2])发展的，对于非正则的情形是由 А. Д. Александров([3])发展的.

参考文献

[1] Gauss, C. F., Allgemeine Flächentheorie, W. Engelmann, Leipzig, 1900(译自拉丁文).

[2] Riemann, B., Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie Zugrunde liegen, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973.

[3] Александров, А.Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948(中译本：А.Д.亚历山大洛夫，凸曲面的内蕴几何学，科学出版社，1962).

Ю. Д. Бураго 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rinow, W., Die innere Geometrie der metrische Räume, Springer, 1961.

[A2] Gromov, M., Structures métriques des espaces Riemanniens, F. Nathan, 1981(译自俄文).

沈一兵 译 陈维垣 校

内映射(**interior mapping**; **внутреннее отображение**)

拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 $f: X \to Y$, 使得 X 中任何开集 U 的象也是 Y 中的开集，而且任意点 $y \in Y$ 的逆象 $f^{-1}(y)$ 都是全不连通的（即不包含不是点的连通分支）.

设 F 把某 **Riemann 曲面**（Riemann surface）R 映入球面 S^2, 则定向曲面 M 的同胚 $T: M \to R$ 诱导出拓扑等价（topologically equivalent）于 F 的映射

$$\widetilde{F} = F \circ T: M \to S^2.$$

解析函数 F 与某映射 $\widetilde{F}$ 拓扑等价的充分必要条件是，$\widetilde{F}$ 是一个内映射（于是存在一个同胚 T, 使得 $\widetilde{F} = F \circ T$)(Stoïlow 定理（Stoïlow theorem)).

内映射 $\widetilde{F}: \dot{M} \to \mathbf{R}^2$ 的局部结构可描述如下：对任意点 $a \in M$, 存在一个邻域 $U(a)$ 和把单位圆盘 $B = \{z \in \mathbf{R}^2: |z| < 1\}$ 映成 $U(a)$ 及同胚 $T_1: B \to U(a)$ 及同胚 $T_2: \widetilde{F}(U(a)) \to B$, 使得 $T_2 \circ \widetilde{F} \circ T_1 = z^n$.

参考文献

[1] Stoilow, S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1938.

В. А. Зорич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[A2] Whyburn, G. T., Topological analysis, Princeton Univ. Press, 1964.

白苏华、胡师度 译

集合 X 的内部（**interior of a set X; внутренность множества**），拓扑空间 Y 中的

集合 $X \subset Y$ 的内点的集合（见**集合的内点**（interior point of a set)．通常记为 $\operatorname{Int} X$．恒有 $\operatorname{Int} X = X \setminus [Y \setminus X] = X \setminus \operatorname{Fr} X$, 这里 $\operatorname{Fr} X$ 是 X 的边界．X 的内部也等于 X 的所有在全空间开的子集之并集．集合的内部有时称为开核（open kernel).

С. М. Сирота 撰　白苏华、胡师度 译

集合的内点［**interior point of a set; внутренная точка множества**］，拓扑空间中的

一个点，连同含有此点的某个开集均属于已知集合．若 x 是集合 A 的内点，则广义地称 A 为点 x 的邻域（neighbourhood of the point).

С. М. Сирота 撰　白苏华、胡师度 译

中间 Jacobi 簇［**intermediate Jacobian; промежуточный Якобиан**］

由一个复 Kähler 流形的奇数维上同调空间所确定的一族复环面中的任何一个，它的几何与这个流形的几何有着密切的联系．

设 $H^n(X,\mathbf{R})$（相应地、$H^n(X,\mathbf{Z})$）是复解析 **Kähler 流形**（Kähler manifold)X的实（相应地，整）系数 n 维上同调空间．当 n 为奇数时，在实环面

$$T^n = H^n(X,\mathbf{R}) / H^n(X,\mathbf{Z})$$

上可以用两种方法引入复结构：即借助于把复系数 n 维上同调空间表示成直和 $H^n(X,\mathbf{C}) = \oplus_{p+q=n} H^{p,q}$, 其中 $H^{p,q}$ 是 (p,q) 型调和形式的空间．设 $P_{p,q}: H^n(X,\mathbf{C}) \to H^{p,q}$ 是投影，设

$$C_W = \sum_{p+q=n} i^{p-q} P_{p,q} \text{ 及 } C_G = \sum_{p+q=n} i^{(p-q)/|p-q|} P_{p,q}$$

是把实系数上同调空间映到自身的算子．对任意的 $\omega \in H^n(X,\mathbf{R}), a, b \in \mathbf{R}$, 令

$$(a+ib)\omega = a\,\omega + b\,C_W(\omega) \text{ 及}$$
$$(a+ib)\omega = a\,\omega + b\,C_G(\omega),$$

就可在 $T^n(X)$ 上得到两个复结构．其中第一个复结构 $T^n_W(X)$ 称为 Weil 中间 Jacobi 簇（Weil intermediate Jacobian),第二个复结构 $T^n_G(X)$ 称为 Griffiths 中间环面（Griffiths intermediate torus)．当 X 是 **Hodge 簇**（Hodge variety）时，X 的 Hodge 度量可典范地确定 $T^n_W(X)$上的极化 Abel 簇（亦见**极化代数簇**（polarized algebraic variety); **Abel 簇**（Abelian variety)), 而这对于 $T^n_G(X)$未必正确．另一方面，流形 X 的全纯变更蕴含了中间环面 $T^n_G(X)$ 的全纯变更（[2]), 而 Weil 中间 Jacobi 簇未必有此性质．上积给出了空间 $H^n(X,\mathbf{R})$ 与 $H^{n-d}(X,\mathbf{R})$ 间的一个配对，其中 $d = \dim_{\mathbf{R}} X$, 也定义了环面 $T^n_G(X)$ 与 $T^{n-d}_G(X)$ 的复配对以及 Abel 簇 $T^n_W(X)$ 与 $T^{n-d}_W(X)$ 的一个对偶．若 $\dim_{\mathbf{C}} X = 2k+1$, 则 $T^{2k+1}_W(X)$ 是具有主极化的自对偶 Abel 簇．$T^{2k+1}_G(X)$ 是一个主环面．

中间 Jacobi 簇是 Kähler 流形的一个重要不变量．如果对两个流形 X 和 Y, 从 $T^n_W(X) = T^n_W(Y)$(或从 $T^n_G(X) = T^n_G(Y)$)可得 $X \simeq Y$,就称 Torelli 定理（Torelli theorem)对于 X和 Y成立．例如 Torelli 定理对代数曲线成立．射影空间 P^4 内三次超曲面的非有理性（参见[1])以及某些 **Fano 簇**（Fano variety）的非有理性都曾用中间 Jacobi 簇来证明．

参考文献

[1] Clemens, C. and Griffiths, Ph., The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann. of Math.*, **95** (1975), 281–356.

[2A] Griffiths, Ph., Periods of integrals on algebraic manifolds Ⅰ. Construction and properties of the modular varieties, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 568–626.

[2B] Griffiths, Ph., Periods of integrals on algebraic manifolds Ⅱ, Local study of the period mapping, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 805–865.

[3] Weil, A., On Picard varieties, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 865–894.

Вик. С. Куликов 撰

【补注】设 X 是光滑复射影簇，$Z_n^p(X)$表示 X上的同调于零的余维数 p 的**代数闭链**(algebraic cycle)的群，则有 Abel-Jacobi映射(Abel-Jacobi mapping)$\alpha: Z_n^{n-p}(X) \to T_G^{2p-1}(X), n=\dim(X)$，定义为 $\alpha(Z)=\int_\Gamma$，这里 Γ 是 X上的 $(2n-2p+1)$ 链，且 $\partial\Gamma=Z$. 代数等价于零的闭链在 α 下的象集是一个 Abel簇. 一般 **Hodge 猜想**(Hodge conjecture)将蕴含这是 $T_G^{2p-1}(X) \cong H^{2p-1}(X,\mathbf{C})/\oplus_{i>p-1}H^{i,2p-i}$ 的极大 Abel 子簇，它在 0 点的切空间包含于 $H^{p-1,p}$ 之中([A1]).

在退化族内 Griffiths 中间 Jacobi 簇的行为的分析可参见[A2],[A3].

参考文献

[A1] Lieberman, D., Intermediate Jacobians, in F. Oort (ed.): Algebraic Geometry, Oslo 1970, Wolters-Noordhoff, 1972, 125-139.

[A2] Zucker, S. M., Generalized intermediate Jacobians and the theorem on normal functions, *Invent. Math.*, **33** (1976), 185-222.

[A3] Clemens, C. H., The Néron model for families of intermediate Jacobians acquiring "algebraic" singularities, *Publ. Math. IHES*, **58** (1983), 5-18. 陈志杰 译

中间逻辑 [**intermediate logic**; **промежуточная логика**], 命题的，命题中间逻辑(propositional intermediate logic)

命题公式的满足下述要求的任意相容集合：对于**分离法则**(modus ponens)和**代换法则**(substitution rule)是闭的，且包含**直觉主义命题演算**(intuitionistic propositional calculus) I 的所有公理.

具体描述出中间逻辑的最自然的方式是中间命题演算(intermediate propositional calculi). 每个这样的演算系统都是给 I的公理集合增加若干条新公理而获得的. 这些新公理，通常都是在古典逻辑的意义下有效的命题公式.

在包含关系 $\subseteq$ 下，所有中间逻辑的集合形成一个格. 而所有可有限公理化的中间逻辑组成的集合，则形成该格的一个子格. 每一个有限的分配格都可以同构嵌入到该子格中.

任给某一个中间逻辑系统 L，如果存在一个算法，对任一命题公式 A，它都能判定 A 是否属于 L 的公理集，则 L 称为可解的(solvable). 古典逻辑系统及直觉主义的逻辑系统都是可解的. 一般说来，任一有限可逼近的(见下文)、可有限公理化的中间逻辑都是可解的. 可有限公理化但又不是可解的中间逻辑，是存在的(见[7]).

一个中间逻辑 L 称为析取的(disjunctive)，如果 $(A \vee B)\in L$，则一定有 $A\in L$ 或者 $B\in L$. 例如，直觉主义逻辑系统就具有这一性质，但古典逻辑系统则不具有. 存在无穷多个析取的中间逻辑系统.

称一个中间逻辑系统 L 具有插值性质(interpolation property)(Craig 定理(Craig theorem))，如果一个公式 $A\supset B$ 属于 L，则存在一公式 C，C 仅含在 A 及 B 中都出现的那些命题变元，使得 $(A\supset C)\in L$ 或 $(C\supset B)\in L$；若 A 及 B 无共同的命题变元，则 $\neg A\in L$ 或者 $B\in L$. 已经证明，存在且仅存在 5 个中间逻辑系统(不包括古典逻辑系统及直觉主义逻辑系统)，具有该插值性质(见[6]).

一个公式 A 称为在中间逻辑系统 L 中由公式 B_1, B_2, … 可表达的(expressible)，如果从公式 B_1, B_2, … 开始，通过有限次使用(L 中的)等价公式的替换，通过有限次以已获得的公式与命题变元的替代，就能得到 A. 一个由公式组成的序列 $\Sigma=\{B_1, B_2, \cdots\}$ 称为在 L 中函数完全的(functionally complete)，如果 L 中的任一公式都是由 Σ 可表达的. 对于直觉主义逻辑系统及某些其他的中间逻辑系统而言，关于识别任一公式序列的函数完全性的算法问题，是有解的. 还有另外一个算法问题：任给公式 A 及一公式序列 Σ，要识别 A 是否由 Σ 可表达，是否存在一个算法？该问题仅对若干中间逻辑系统已解决. 对直觉主义逻辑系统，它仍然是一个未解决的问题(1983).

另外一个给出具体的中间逻辑系统的办法是所谓的"语义"方法. 这里语义(semantics)指的是某些结构(模型)$\mathfrak{M}$ 组成的集合 S，对每一个 $\mathfrak{M}$，给定一个赋值 θ，对每一命题公式 A，真值关系 $\mathfrak{M}\vDash_\theta A$ 已定义.(一个赋值(valuation)θ 是由 A 中的命题变元到 $\mathfrak{M}$ 中的元素(值)的一个映射.)如果对任一赋值，公式 A 在 $\mathfrak{M}$ 中都是真的，则称 A 在 $\mathfrak{M}$ 中一般有效的(generally valid)，记为 $\mathfrak{M}\vDash A$. 如果 $S_1\subseteq S$，则中间逻辑系统 $L(S_1)$ 将定义为所有在每一个 $\mathfrak{M}\in S_1$ 中都全有效的命题公式的全体. 给定一个语义 S，Γ 是一公式集(或类)，可以自然地定义语义蕴涵(semantic implication)关系 $\Gamma\vDash_S A$：对任一 S 中的结构 $\mathfrak{M}$. 如果对所有 $B\in\Gamma$, $\mathfrak{M}\vDash B$，则 $\mathfrak{M}\vDash A$. 两个语义 S 及 S_1 称为等价的(equivalent)，如果 $\vDash_S$ 与 $\vDash_{S_1}$ 是相同的. 对一个语义的基本要求是它的正确性(correctness)：$\Gamma\vdash_I A$ 必须蕴涵 $\Gamma\vDash_S A$. 以下介绍的语义都具有正确性. 一个语义所需要的另一重要性质是完全性. 一个中间逻辑系统相对一个语义 S 是完全的，如果 $A\in L \Longleftrightarrow L\vDash_S A$.

一个代数语义 S_A 由一个**伪 Boole 代数**(pseudo-Boolean algebra)组成，该代数具如下形式：

$$\mathfrak{M}=(M, \bar{\&}, \bar{\vee}, \bar{\supset}, \bar{\neg}; 1, 0),$$

此处 $\bar{\neg}$ 是 M 上的一元运算，$\bar{\&}$, $\bar{\vee}$, $\bar{\supset}$ 是二元运算，对应于联结词 $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$; $(M, \bar{\&}, \bar{\vee})$

是一个**分配格**(distributive lattice); 0 与 1 是 M 中的极小元及极大元. 运算 $\supset$, $\neg$ 满足: 对任意的 $a, b, c \in M$,

$$a \leqslant (b \supset c) \Longleftrightarrow (a \& b) \leqslant c \text{ 且 } \neg a = (a \supset 0).$$

对于该语义, 关系 $\mathfrak{M} =_\theta A$ 意指对每个赋值 θ, A 在 $\mathfrak{M}$ 中取 1 为值.

相对于有限生成的伪 Boole 代数, 每一个中间逻辑系统都是完全的. 一个中间逻辑系统 L, 如果相对于某一个由有限伪 Boole 代数组成的集合(或者, 相对于一个有限伪 Boole 代数)是完全的, 则称 L 是有限可逼近的(finitely approximable)(相应地, 可表格化的(tabular)). 最简单的可表格化中介逻辑系统是古典逻辑系统. 析取式中间逻辑系统, 其中包括直觉主义逻辑系统, 都是不能表格化的.

一个 Kripke 语义(Kripke semantics) S_K 是一个 **Kripke 模型**(Kripke models), 该模型可写成 $(\mathfrak{M}, \theta)$ 的形式. 这里 $\mathfrak{M} = (M, \leqslant)$ 是一个**偏序集**(partially ordered set), 也称为框架(frame), 赋值 θ 的值域是 M 的一个子集, 满足对任意 $\alpha, \beta \in M$, 若 $\alpha \in \theta(p_i)$ 且 $\alpha \leqslant \beta$, 则 $\beta \in \theta(p_i)$. 语义 S_K 与语义 S_A 之间有紧密的联系(参见[5]); 然而它们并不等价. 具体地说, 存在一些中间逻辑系统, 相对于 S_K 并不是完全的(见[3]).

另一类语义称为结构式语义, 有 S_R 及 S_F. S_R 称为**可实现性**(realizability)语义(见[1]), S_F 是为解决有限问题而构造起来的. 甚至对直觉主义逻辑系统, 这些语义都不是完全的. 另外, 存在一些公式, 它们在 S_R 中基本上都是有效的, 但在 S_K 中不是, 反过来亦如此.

谓词演算的中间逻辑系统可仿命题演算的中间逻辑系统给出定义, 它们是古典谓词逻辑的一部分, 同时又是直觉主义谓词逻辑 LI 的扩充. 与命题中间逻辑明显不同的一点是, 所有的谓词中间逻辑都是不可解的. 谓词中间逻辑的语义也类似于命题中间逻辑的相应语义(见[2]).

参考文献

[1] Новиков, П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977.

[2] Драгалин, А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979 (英译本: Dragalin, A. G., Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory. Amer. Math. Soc., 1988).

[3] Кузнецов, А. В., в кн.: Логический вывод, М., 1979, 5 – 33.

[4] Кузнецов, А. В., 《Математические исследования》, **10** (1975), 2, 150 – 158.

[5] Эсакиа, Л. Л., в кн.: Логический вывод, М., 1979, 147 – 172.

[6] Maksimova, L. L., Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-Boolean algebras, *Algebra and Logic*, **16** (1977), 427 – 455. (*Algebra i Logika*, 16 (1977), 643 – 681).

[7] Шехтман, В. Б., 《Докл. АН СССР》, **240** (1978), 3, 549 – 552.

[8] Hosoi, T. and Ono, H., Intermediate propositional logics (a survey), *J. Tsuda College*, **5** (1973), 67 – 82.

С. К. Соболев 撰

【补注】 简言之, 一个中介逻辑是一个命题逻辑, 它介于古典逻辑及直觉主义逻辑之间.

关于可实现性, 可参见[A1], 关于 Kripke 语义, 可参见[A2], 关于伪 Boole 代数, 见[A3].

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.

[A2] Fitting, M. C., Intuitionist logic model theory and forcing, North-Holland, 1969.

[A3] Rasiowa, E. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk, 1963.

王 驹 译

内边界[**internal boundary** 或 inner boundary; **внутренняя граница**], Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中区域 D 的集合 $\partial D \setminus \partial(C\overline{D})$, 其中 ∂D 是 D 的边界而 $\partial(C\overline{D})$ 是闭区域 $\overline{D}$ 的补集的边界.

Е. Д. Соломенцев 撰 白苏华、胡师度 译

内度量[**internal metric**; **внутренняя метрика**]

对**度量空间**(metric space)中能用可求长曲线 $\gamma(x, y)$ 连接的任两点 x, y 定义的**度量**(metric) ρ, 并且

$$\rho(x, y) = \inf_{\gamma} s_\rho(\gamma(x, y)),$$

其中 s_ρ 是度量 ρ 下的曲线长度. 一个 Riemann 度量诱导一个内度量. 若在度量为 ρ 的空间中任两点均可用一可求长曲线连接, 则等式

$$\rho^*(x, y) = \inf_{\gamma} s_\rho(\gamma(x, y))$$

定义一内度量, 并且可作为在浸入于此度量空间的流形上诱导的内度量 ρ^* 的定义.

参考文献

[1] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948 (中译本: А. Д. 亚历山大洛夫, 凸曲面的内蕴几何学, 科学出版社, 1962).

Ю. Д. Бураго 撰

【补注】 内度量的更熟知的名称是内蕴度量(interior metric), 它近似于西方所用的短语"凸度量"; 关于原苏联采用的"凸度量"的(更强的)概念, 见**凸度量**(convex metric).

对于度量空间一般理论中采用的"内度量"的概念, 见**度量**(metric).

参考文献

[A1] Rinow, W., Die innere Geometric der metrischen Räume, Springer, 1961. 沈一兵 译

内变分方法 [internal variations, method of; внутренних вариаций метод]

单复变函数论中的一种方法，用以求解单叶和多叶解析函数类的极值问题．内变分方法的优点在于，在所选取的变分公式中，对函数在其定义域 D 的边界上的变化状态不作假设，同时这些变分公式本身是对该类函数在 D 的内部子集上以一种"一致方式"变分(修改)的结果．内变分方法是由 M. Schiffer([1])就圆盘 $E=\{z: |z|<1\}$ 内的单叶函数提出的，Г. М. Голузин([2])作了进一步的发展．他们建立了如下变分公式(variational formula)，它适用于 E 内全纯单叶函数 $f(z)=z+c_2z^2+\cdots$ 所组成的类 S:

$$f_*(z;\lambda)=f(z)+$$

$$+\lambda f(z)\sum_{k=1}^{n}\left\{2A_kH^2(z_k)\frac{f(z)}{f(z)-f(z_k)}+\right.$$

$$\left.+A_kK(z,z_k)+\bar{A}_kK\left[z,\frac{1}{\bar{z}_k}\right]\right\}+\gamma(z;\lambda),$$

其中

$$H(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\ K(z,\zeta)=H(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+1.$$

此处 $z_k(k=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots)$是 E 内固定点，A_k是任意复常数，而 $\gamma(z;\lambda)/\lambda$ 当 $\lambda\downarrow 0$ 时在 E 内的紧集上关于 z 一致地趋于零．换言之，在 S 类中(S不是线性空间)，对所有函数 $f(z)$ 均可确定一个单参数族 $f_*(z;\lambda)$, $\lambda>0$，它由同类函数组成，使得在 E 内任一闭集上由上述公式给出 $f_*(z;\lambda)$ 关于 λ 的乘幂的展开式．对于其他诸解析函数类也有类似的公式(具有在相应区域内的紧集上余项的无穷小阶的估计)．

内变分方法的突出特性是从变分公式可以得到关于边界或极值函数的微分方程．这种方程的研究，包括运用微分方程的解析理论，可以得到重要的定性结果，而且在许多场合还可以得到极值问题的完全解答．

此方法已被成功地运用于非交叠域问题，而且已成为所谓**变分参数法**(variation-parametric method)([3])的一个组成部分．

参考文献

[1] Schiffer, M., Variation of the Green function and the theory of *p*-valued functions, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 2, 341–360.

[2] Голузин, Г. М.,《Матем. сб.》, 1946, т. 19(61), в. 2, 203–236.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966(英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

И. А. Александров 撰

【补注】 由 Schiffer 提出的此方法亦称内变分(方法)，((method of) interior variation)，经 Голузин 推广后亦称 Голузин 变分(方法)((method of) Goluzin variation)．更详细的叙述和参考文献见[A1]．

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983, Sect. 10, 11. 杨维奇 译

内波 [internal waves; внутренние волны]

不同密度的两种或更多种重液体的分界面的振动．如果液体的密度分布是连续的，则将内波理解为等密度面的振动．

令密度 ρ_1厚度 h的液体层覆盖于密度为 ρ_2 深度无限的另一液体的表面上，$\rho_2>\rho_1$．液体的开放表面和两种液体的交界面可以形成两种类型的波长 $\lambda=2\pi/k$ 的驻波．第一类波的振动频率 σ 由下式给出:

$$\sigma^2=gk,$$

而第二类振动的频率由下式给出:

$$\sigma^2=gk\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2\operatorname{cotanh}kh}.$$

第二类波的一定波长下，振动频率是小量，如果两种液体的密度差为小量．振动交界面波的振幅比开放表面上的波的振幅要大数倍，并等于

$$\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}e^{kh}. \qquad (*)$$

第一类振动产生的行进波的传播速度为

$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}.$$

第二类驻波产生的行进波的传播速度要小得多:

$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2\operatorname{cotanh}2\pi h/\lambda}.$$

第二类行进波在交界面上的振幅要比在开放表面上传播波的大得多．

参考文献

[1] Kraus, W., Innere Waben, Leningrad, 1968(俄文，由德文译出). Л. Н. Сретенский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 1932, Chapt. Ⅸ. 沈青 译

插值 [interpolation; интерполирование]

在最简单的经典的意义上，某类函数中的一个函数用其在指定(给定)点上的已知值或导数值的构造性(或许为近似)的恢复．

假定在区间 $\Delta=[a,b]$ 上给定 $n+1$ 个点 $\{x_k\}_{k=0}^n$，这里 $a\leqslant x_0<\cdots<x_n\leqslant b$，同时给定一组 $n+1$ 个(不必相异的)值$\{y_k\}_{k=0}^n$．又假定至少在 Δ 上有定义的某个固定的函数类 K(如，$f\in\Pi_n$，其中 Π_n 为次数 $\leqslant n$ 的代数多项式集，或 $f\in C^{n+1}(\Delta)$)中的函数 f 满足条件

$$f(x)\in K;\ f(x_k)=y_k, k=0,\cdots,n. \qquad (\text{I}1)$$

在该处给出值 $f(x_k)=y_k$ 的那些点 x_k 称为 f 的**插值结点**((interpolation nodes)或(interpolation knots))．主要是由数值分析的要求，下述两个问题自然地提出了，它们曾是插值理论发展的出发点．人们会问，在 f 满足(I1)的情形下，如何在指定精度内得到 $f(x)$ 在下述两个范围内的性态的信息：1)在区间 (x_{k-1},x_k) $(k=1,\cdots,n)$ 内，即在结点 $x_k(k=0,\cdots,n)$ 之间(拉丁文：内部)；2)在包含所有结点$\{x_k\}_{k=0}^n$ 的区间 $[x_0,x_n]$ 外(拉丁文：外部)．拉丁词"内部"及"外部"分别导至这样的术语：称1)为对于函数 f 的内插问题，而称2)为外插问题；两者后来统称为插值问题(I1)．

作为精确的恢复函数的问题(I1)，例如，在类 $K=\Pi_n$ 中，具有唯一解．它在 Π_n 中的解就是 **Lagrange 插值多项式**(Lagrange interpolation polynomial)

$$L_n^f(x)=\sum_{k=0}^n y_k\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

但是，如果 f 属于一个在某种意义上比 Π_n "更为广泛"的类，那么问题(I1)一般说来便不再具有唯一解．虽然如此，如果认为

$$f(x)\approx L_n^f(x),\ x\in\Delta, \qquad (1)$$

那么多项式 $L_n^f(x)$ 仍然允许在一定程度上对 f 在 Δ 上的性态作出判断．

与此有关的是必须估计误差

$$R_n^f(x)=f(x)-L_n^f(x),\ x\in\Delta.$$

该误差主要地依赖于 f 所属的函数类 K，换句话说，$R_n^f(x)$ 依赖于 f 之预先所知道的性质．例如，若 $K=C^{n+1}(\Delta)$，则(I1)之余项具有形式

$$R_n^f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}A(x),$$

其中 $\alpha<\xi<\beta$，而

$$A(x)=\prod_{k=0}^n(x-x_k).$$

这里 α，β 分别表示诸数 x_0,x_n 及 x 之极小值和极大值．给定的余项公式属于 A.L. Cauchy，见[3]．量 $R_n^f(x)$ 主要依赖于插值结点$\{x_k\}_{k=0}^n$在 Δ 上的个数及其分布形式．与此相联系的自然须假定在 Δ 上取更多的插值结点且更"均匀"地分布，这样才会有更"精确"的关系式(1)．这导至与(I1)密切有关的一个更重要的插值问题．

假定 f 属于函数类 K，它定义于 Δ 上且对所有的 $n=0,1,\cdots$ 有 $\Pi_n\neq K$．设插值结点的集合 $\{x_k\}\subset\Delta$ $(x_k\neq x_j$ (若 $k\neq j$))为可数的；又设给定一列函数值 $\{y_k\}_{k=0}^\infty$．问题是：如何从给定的数据来恢复 f：

$$f\in K;\ f(x_k)=y_k,\ k=0,1,\cdots. \qquad (\text{I}2)$$

以这种方式提出的问题一般说来远非可解的，因而必须精确化．这将由下述方式来实施，不过现在仅给出一个解决(I2)的非常自然和重要的方法的描述．通常首先解其在 Π_n 中的"截"问题(I1)：

$$f(x_{k_j})=y_{k_j},\ j=1,\cdots,n+1.$$

设 $L_n^f(x)$ 为此截问题的插值多项式解，并将其写成 Lagrange 插值多项式．然后考虑实行这种或那种意义下的极限过程 $L_n^f(x)\to f(x)(n\to\infty)$的可能性(特别地，这等价于余项 $R_n^f(x)$ 当 $n\to\infty$ 时在所述意义下趋于零的问题的研究)．解问题(I2)之方法的这种描述对于插值过程的收敛性(及发散性)理论来说是基本的(见**插值过程**(interpolation process))．这是解插值问题的基本方法之一，它不仅在纯粹数学的许多分支中(例如，数论，见[3])，而且在数值方法中(见**计算数学中的插值**(interpolation in numerical mathematics)及[1])都有应用．

在后一情形下，在研究上述类型并由最简单的泛函 $f(x_k)$ 所定义的插值问题的同时，人们也已开始研究其他问题，例如，指定导数值 $f^{(m)}(x_k)(m=0,\cdots,n_k)$ 或更复杂的泛函．在解这些问题时人们利用下述插值函数集来代替 Π_n，例如，次数 $\leqslant n$ 的三角多项式类 T_n，有理函数类 $\Pi_{m,n}$(形如 p_m/q_n，其中 $p_m\in\Pi_m$，而 $q_n\in\Pi_n$，$q_n\not\equiv 0$)，特殊类型的整函数类，等等．亦见**插值公式**(interpolation formula)．

插值问题的一般形式可叙述如下．设 X,Y 为两个非空集；假定给定一族映射 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ $(f_\alpha:X\to Y,\ \alpha\in\mathfrak{A})$，又设$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$为一已知的元素的集合(不必相异)，它属于 Y．那么自然会提出这样的问题：确定 $x\in X$之集合，它满足

$$f_\alpha(x)=y_\alpha\ \ 对所有\ \alpha\in\mathfrak{A}. \qquad (\text{I}3)$$

一般说来，并不是每一个预先给定的集合$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$都使(I3)有解 $x\in X$．因此，所描述的问题需要更精确地给出．其作法如下．

1) 刻画集$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$的集合 $E=E(X,f_\alpha)$ 的特征，对于它方程组(I3)(可以包含无穷多个方程)具有至少一个解 $x\in X$．换言之，要求对于一个给定的固定映射族$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$给出所有允许集$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$的集合 E 的结构性描述，它使(I3)在 X 中总有解．

2) 设$\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$为 Y 中(I3)的一个固定的允许集(即属于 1)中的集合 E)．要求找出(I3)的所有解 $x\in X$ 的集合．

当解 1) 或 2) 时，回答下述更特殊的问题是重要的．

3) 什么子集 $X_1\subset X$ 使(I3)对于每一个 X_1 的允许集$\{y_\alpha\}$ ($\{y_\alpha\}\in E(X_1,f_\alpha)$)都有唯一解?

4) 设 E_1 为 E 的一个子集，它通常仅由某些限制性质给出．要求给出(I3)的解 $x\in X$ 的集合的结构性特征，使得(I3)之右端项"历遍" E_1．

指定集合 X,Y 及映射族$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ ($f_\alpha:X\to Y$ 对所有 $\alpha\in\mathfrak{A}$)，再加上问题 1) 和 2) (以及常常有相关的问题 3)，或有时 4))确定了插值问题(I3)．这种类型的问题类称为直接插值问题 (direct interpolation problems) 类．

上述问题 1)－4) 中的每一个本身都具有科学价值．问题 1)具有"多面性"：它在数论、泛函分析、函数论等中都有研究．例如，假定 x 为实数，$x\in\mathbf{R}$，而$\{x\}$为它的小数部分．映射族 $f_n:X\to Y$，$n\in\mathbf{N}$ 给定如下：$X\subset\mathbf{R}$，$Y=[0,1)$，$f_n(x)=\{x^n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，考虑插值问题(I3)的下述具体的变型：

$$f_n(x)=\{x^n\}=y_n,\quad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

对于某些子集 $X\subset\mathbf{R}$，人们对问题(2)已经研究了 1) 到一定程度．问题(2)作为整体来说是困难的：例如，一直到目前(1978)为止，数 e 的幂的小数部分$\{e^n\}$的分布问题尚未解决．对(2)来说这仅是 1)的一个很特殊的子问题．关于 1)与各种函数空间中的元素组的基本问题间的关系已经例如在[9]中讨论．

问题 2)是插值论中最古老的，它是插值理论的出发点，并与 I. Newton，J. L. Lagrange，N. H. Abel，Ch. Hermite 等姓名相联系．问题 1),3) 及 4)直到 20 世纪才讨论，与此同时，2) 的解却通常已被正式确定了．

问题 3)与 2)密切相关，但是其价值仅在于在许多问题中它等价于完全性问题，以及有时它等价于对应函数空间中各种元素组$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$的基的问题．(完全性通常由 Banach 准则建立，还要证明完全性问题与某种唯一性问题的等价性．)

与 4) 有关的一个重要研究课题是研究在给定点集上取整数值的函数类(例如，$F(n)$ 或 $F(q^n)$ 必须是整数，$n=0,1,\cdots$)．在下面的 G. Pólya 的结果之后这个领域得到特别迅速的发展：如果指数型 $\sigma<\ln 2$ 的整函数 $F(z)$ 当 $n=0,1,\cdots$ 时 $F(n)$ 为整数，那么$F(z)$是一个多项式．在此定理中常数 ln2 是最佳可能的，因为 $F(z)=2^z=e^{z\ln 2}$ 为指数型 $\sigma=\ln 2$ 的整函数，它不是多项式，但在 $n=0,1,\cdots$ 处取整数值(例如、见 [5]，[10])．

如果(I3)中的集合 X 是一拓扑空间，而如果(I3)(在这种或那种意义下)的一个简化形式有解 x^*，那么解此问题的方法之一是一个插值过程，并要研究 x^* 到(I3)之解的收敛性．此类过程的特殊形式前面可以找到．但是，在许多情况下形如(I3)的问题能用泛函分析方法有效地解决(例如见[10])．

逆插值问题(inverse interpolation problems)的意义稍逊于直接插值问题．该方向的主要研究内容可叙述如下．

假设给定非空集 X,Y 及某一由 X 到 Y 的映射族$\{f_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}$类 F．设 $M=\{y_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}$ 为 Y 的元素的某一族集合．问题是要寻求加于一子类 $F_M\subset F$ 上之充分和必要的条件，它使得存在一个族$\{f_\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}\}\in F_M$ 具有这样的性质：当 x 历遍整个集合 X 时，集合$\{f_\alpha(x):\alpha\in\mathfrak{A}\}$与 M 相一致(或 $\subset M$、或 $\supset M$)．集合 F 和 M 密切相关．因此，在与逆插值问题有关的研究中通常将元偶(F,M)视作一个整体．作为上述类型的逆插值问题的一个例子，可考虑与熟知的 Nevanlinna-Pick 插值问题(Nevanlinna-Pick interpolation problem)有关的一个问题：设$\{z_k\}$为复平面 $\mathbf{C}$ 上开单位圆域 $|z|<1$ 内一点列．类 H^∞ (H^∞ 为在 $|z|<1$ 内的有界解析函数类)中的每一个函数 $x(z)$ 都与其在 z_k 上的值的序列相联系：

$$S(x)=\{f_k(x)=x(z_k)\}_{k=1}^{\infty}.$$

这样也就给出了某一类从 $X=H^\infty$ 到 $Y=\mathbf{C}$ 内的映射 F．设 M 为(具有范数 $\|c\|=\sup_k|c_k|$ 的有界复数序列 $c=(c_1,c_2,\cdots)$)空间 l_∞．在这种情形下，逆问题有下列具体形式：刻画 $|z|<1$ 中所有具有如下性质的序列$\{z_k\}$的集合(即具特殊形式 $f_k(x)=x(z_k)$ 的映射类 $F_M=F_{l_\infty}$)，它使算子 $S(x)$ 将 H^∞ 之全体映射到 l_∞ 中．具有此性质的序列$\{z_k\}$称为插值序列(interpolating sequences)．这样，所有插值序列$\{z_k\}$的集合确定了给定情形中的类 $F_M=F_{l_\infty}$．此问题的解答即为 Carleson 定理(Carleson theorem)：$|z|<1$ 中的一个序列$\{z_k\}$是插值序列，当且仅当存在一个 $\delta>0$ 满足

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|>\delta,\quad k=1,2,\cdots$$

(所谓分离条件(separation condition))．由 L. Carleson 所解决的此类逆插值问题在其他函数类和对应的数列

空间中也已研究(例如，见[9],[12],[13],[14])．

亦见 **Abel-Гончаров 问题**(Abel-Goncharov problem).

参考文献

[1] Березин, И.С., Жидков, Н.П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966, т. 2, 2 изд., М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Гельфонд, А. О., Исчисление конечных разностей, М.-Л., 1952.

[3] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954.

[4] Walsh, J. L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc., 1969.

[5] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

[6] Nörlund, N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer, 1924.

[7] Nörlund, N. E., Leçons sur les séries d'interpolation, Gauthier-Villars, 1926.

[8] Whittaker, J.M., Interpolatory function theory, Cambridge Univ. Press, 1935.

[9] Duren, P.L., Theory of H^p spaces, Acad. Press, 1970.

[10] Казьмин, Ю. А., Методы интерполяции аналитических функций и их приложения, Докт. дисс., М., 1972.

[11] Коробейник, Ю. Ф., 《Матем. сб.》, **97** (1975), 2, 193－229; **98** (1975), 1, 3－26.

[12] Кабайла, В., 《Литов. матем. сб.》, **3** (1963), 1, 141－147.

[13] Седлецкий, А. М., 《Докл. АН СССР》, **208** (1973), 6, 1293－1295.

[14] Щведенко, С. В., 《Матем. заметки》, **21** (1977), 4, 503－508.

Ю. А. Казьмин 撰

【补注】 插值这一课题是一个范围极广的课题，是大量论文和许多论著的主题．它也包括(所有各种)样条插值([A4])及所谓 Birkhoff 插值(见**插值过程**(interpolation process))([A3])．多元插值也已经给予详细研究(见[A2])．

关于插值序列的更详细的内容例如可在[A5]中找到．亦见 **Pick 定理**(Pick theorem); **Nevanlinna-Pick 问题**(Nevanlinna-Pick problem)．

参考文献

[A1] Carleson, L., An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 921－930.

[A2] Graves-Morris, P. R., Saff, E. B. and Varga, R. S. (eds.), Rational approximation and interpolation, Lecture notes in math., 1105, Springer, 1984.

[A3] Lorentz, G. G., Jetter, K. and Riemenschneider, S. D., Birkhoff interpolation, Wiley, 1983.

[A4] Schumaker, L.L., Spline functions: Basic theory, Wiley, 1981

[A5] Garnett, J.B., Bounded analytic functions, Acad. Press, 1984.

史应光 译

插值公式[**interpolation formula; интерполяционная формула**]

以某种意义上是简单的且属于某个函数类的函数

$$g(x) \equiv g(x; a_0, \cdots, a_n)$$

来替换函数 $f(x)$ 所得到近似计算其函数值的公式．参数 $a_i(i=0,\cdots,n)$ 的选取使在给定的一组 $n+1$ 个相异的自变量的值上 $g(x)$ 的值与 $f(x)$ 的已知值相同:

$$g(x_k)=f(x_k),\quad k=0,\cdots,n. \tag{1}$$

近似表示一个函数的这种方法称为**插值**(interpolation)，在其上(1)应成立的诸点 x_k 称为**插值结点**(interpolation nodes)．除最简单的条件(1)之外，与 $f(x)$ 有关的其他值，例如 $f(x)$ 在插值结点处的导数值也可给出．

线性插值(linear interpolation)方法在插值方法中是应用最广的．这就是要在由某个固定的函数组 $\varphi_0(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 所构成的(广义)多项式类

$$g(x; a_0, \cdots, a_n)=\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{2}$$

中寻求逼近．为使插值多项式(2)对于定义在区间 $[a, b]$ 上的任何函数 $f(x)$ 及对于任何选取的 $n+1$ 个结点 $x_0, \cdots, x_n \in [a, b]$ (若 $i \neq j$，则 $x_i \neq x_j$) 都存在，其必要且充分的条件是 $\{\varphi_i(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上的 **Чебышев 系**(Chebyshev system)．再者，插值多项式是唯一的且其系数 a_i 能由直接解(1)而得到．

对于 $\{\varphi_i(x)\}$ 经常选取 x 的幂的序列

$$1, x, x^2, \cdots,$$

三角函数序列

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots,$$

或指数函数序列

$$1, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \cdots,$$

其中 $\{\alpha_i\}$ 为一相异实数序列．

当用代数多项式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{3}$$

插值时，函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 为

$$\varphi_i(x)=x^i,\quad i=0,\cdots,n, \tag{4}$$

同时(1)具有形式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = f(x_k),\quad k=0,\cdots,n. \tag{5}$$

函数系(4)是一个 Чебышев 系，从而保证插值多项式(3)的存在性和唯一性．(4)的性质使得不用直接解

(5)就能得到插值多项式(3)的明显表达式．(3)的一个显式形式

$$g_n(x)=L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (6)$$

称为 Lagrange 插值多项式(Lagrange interpolation polynomial)(见 **Lagrange 插值公式**(Lagrange interpolation formula))．如果导数 $f^{(n+1)}(x)$ 是连续的，那么(6)式的余项能写成

$$f(x)-g_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x), \qquad (7)$$

$$\xi \in [y_1, y_2], \omega_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

其中 $y_1=\min\{x_0,\cdots,x_n,x\}$，$y_2=\max\{x_0,\cdots,x_n,x\}$．特别地，余项(7)的值依赖于 $\omega_n(x)$ 的值．这样选取插值结点使 $\sup_{[a,b]}|\omega_n(x)|$ 达极小就很有意义．在此意义上结点的分布是最佳的，如果选取在 $[a,b]$ 上与零有最小偏差的多项式

$$\overline{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)=(b-a)^{n+1}2^{-1-2n}T_{n+1}\left[\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right]$$

的诸根

$$x_k=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k=0,\cdots,n$$

作为结点．这里 $T_{n+1}(z)$ 为 $n+1$ 次 **Чебышев 多项式**(Chebyshev polynomials)．

还有许多其他显式表示(3)的方法，它们在解决这类或那类实际插值问题中更有用(例如，见 **Bessel 插值公式**(Bessel interpolation formula))；**Gauss 插值公式**(Gauss interpolation formula)；**Newton 插值公式**(Newton interpolation formula)；**Stirling 插值公式**(Stirling interpolation formula)；**Steffensen 插值公式**(Steffensen interpolation formula)；**Everett 插值公式**(Everett interpolation formula)．如果事先要估计为达到所需误差(例如当插值造表时)而要求的插值多项式的次数是困难的，那么可以利用 **Aitken 格式**(Aitken scheme)．在这个格式中次数逐次增大的插值多项式将被顺序构造出来，这样就有可能在计算过程中控制精度．另一个构造插值公式的方法可在 **Fraser 图**(Fraser diagram)中找到．

Hermite 插值公式(Hermite interpolation formula)给出在插值结点处对一个函数的函数值及其导数值的代数插值的问题的解．

参考文献

[1] Березин, И.С., Жидков, Н.П., Методы вычислений, 3 изд., т. I, М., 1966 (英译本：Berezin, I.S. and Zhidkov, N.P., Computing methods, Pergamon, 1973)．

[2] Бахвалов, Н.С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本：Bakhvalov, N.S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)．

М.К.Самарин 撰

【补注】 许多插值公式可在[A1]－[A3]中找到．

考虑寻求次数 $\leqslant N$ 的满足条件

$$P_N^{(k)}(x_i)=c_{i,k} \qquad (A1)$$

的多项式 P_N 的插值问题，这里 $x_1,\cdots,x_m$ 为 m 个相异结点，且在(A1)中恰有 $N+1$ 个方程．如果对于每个 i 在(A1)中给出的导数的阶数构成一个非间断序列 $k=0,\cdots,k_i$，那么这就是 Hermite 插值(Hermite interpolation)．(当对于所有 i 都有 $k_i=0$ 时，即若在(A1)中不包含导数插值条件时，则就是 Lagrange 插值(Lagrange interpolation))．如果出现间隔(缺项)，那么就称为缺项插值(lacunary interpolation)或 Birkhoff 插值(Birkhoff interpolation)．(A1)中出现的数偶 (i,k) 可方便地利用 $m\times(n+1)$ 插值矩阵(interpolation matrix)E 来描述：$E=(e_{i,k})(i=1,\cdots,m,k=0,\cdots,n)$，其中若 (i,k) 在(A1)中出现，则 $e_{ik}=1$，而相反的话令 $e_{ik}=0$．矩阵 E 称为正则的(regular)，如果(A1)对所有 x_i 及 $c_{i,k}$ 的选取都都可解，否则称为奇异的(singular)．

更一般地，设 $G=\{g_0,\cdots,g_N\}$ 为区间 $[a,b]$ 上或圆周上的 n 阶连续可微的线性无关的实值函数组．代替代数多项式，现在考虑线性组合 $P=\sum_{j=0}^{N}a_j g_j$．一个由 0 和 1 组成的矩阵 $E=(e_{ik})(i=1,\cdots,m,k=0,\cdots,n)$ 称为插值矩阵(interpolation matrix)，如果在 E 中恰有 $N+1$ 个 1(而且通常如果在 E 中不存在全由 0 组成的行；这就是说所有结点都在插值条件中至少出现一次)．设 $K=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 为结点集(set of knots)，即区间或圆周上的 m 个相异点．最后，对于每个对应于 $e_{i,k}=1$ 的 (i,k) 给出一个数 $c_{i,k}$．这些数据 $(G,E,K,c_{i,k})$ 定义了一个 Birkhoff 插值问题(Birkhoff interpolation problem)：

$$P^{(k)}(x_i)=c_{i,k}，\text{对所有使得 } e_{i,k}=1 \text{ 的 } (i,k) \qquad (A2)$$

元偶 (E,K) 称为正则的(regular)，如果(A2)对于 $c_{i,k}$ 的所有选择都可解．

对于每个对应于 $e_{i,k}=1$ 的 (i,k)，考虑长度为 $N+1$ 的行向量

$$g_0^{(k)}(x_i),\cdots,g_N^{(k)}(x_i).$$

变动 (i,k) 而使其总满足 $e_{i,k}=1$ 就可得到 $N+1$ 个行向量，它们一起组成 $(N+1)\times(N+1)$ 矩阵．元偶 (E,K) 为正则，当且仅当这个矩阵是可逆的．它的行列式记成 $D(E,K)$，其中对应于满足 $e_{i,k}=1$ 的 (i,k) 的行按字典顺序排列．

假定诸 $c_{i,k}$ 为某个函数 f 在结点处的导数值 $f^{(k)}(x_i)$.

那么插值问题(A2)的解的一个简单公式可由Cramer法则得出．事实上，如果以 $D^{(j)}(E,K)$ 表示在 $D(E,K)$ 的公式中用 f 替换 g_j 而得到的行列式，那么

$$P(t)=\sum_{j=0}^{N} \frac{D^{(j)}(E,K)}{D(E,K)} g_j(t) . \qquad (A3)$$

亦见 **Hermite 插值公式** (Hermite interpolation formula)．

参考文献

[A1] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A2] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974.

[A3] Steffenson, J. F., Interpolation, Chelsea, reprint, 1950.

[A4] Lorentz, G. G., Jetter, K. and Riemenschneider, S. D., Birkhoff interpolation, Addison-Wesley, 1983.

史应光 译

计算数学中的插值法 [**interpolation in numerical mathematics; интерполирование в вычислительной математике**]

借助于某量已知的个别值或与其有关的其他量来逼近或精确地寻求该量的一种方法．以插值为基础的解数学问题的一个完整的近似方法系列已经发展起来了．

计算数学中最重要的是对于函数的**插值** (interpolation) 的构造方法的问题．泛函和算子的插值在构造计算方法中也已得到广泛的应用．

函数的近似表示和计算．函数的插值视为逼近该函数的方法之一．对于函数 $f(x)$ 用其在网格 $\Delta_n=\{a\leq x_0<\cdots<x_n\leq b\}$ 结点 x_k 处的值在区间 $[a,b]$ 上插值就是构造另一个函数 $L_n(x)\equiv L_n(f;x)$ 满足 $L_n(x_k)=f(x_k)(k=0,\cdots,n)$．更一般地，对函数 $f(x)$ 插值的问题是在构造函数 $L_n(x)$ 时不仅要指定网格 Δ_n 上的值，而且还要指定在个别结点处到某一阶为止的导数值，或指定其他 $f(x)$ 与 $L_n(x)$ 间的关系．

通常 $L_n(x)$ 以形式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x)$$

来构造，其中 $\{\varphi_i(x)\}$ 是某个预先选定的线性无关函数组．这一插值称为关于 $\{\varphi_i(x)\}$ 是线性的，同时 $L_n(x)$ 称为函数组 $\{\varphi_i(x)\}$ 的插值多项式 (interpolation polynomial) 或插值函数 (interpolation function)．

$\{\varphi_i(x)\}$ 的选取是由被插值函数类的性质确定的．例如，对于在 $[0,2\pi]$ 上周期为 2π 的函数的逼近自然应选取三角函数组作为 $\{\varphi_i(x)\}$，对于在 $[0,\infty)$ 上的有界函数或递增函数的逼近则选取有理函数组或指数函数组，并考虑被逼近函数在无穷远处的性态，等等．

最经常利用的是代数插值：$\varphi_i(x)=x^i$；其最简单的形式(两个结点 x_k 和 x_{k+1} 上的线性插值 (linear interpolation)) 由公式

$$L_1(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}[f(x_{k+1})-f(x_k)]+f(x_k), \quad (1)$$

$$x_k\leq x\leq x_{k+1}$$

定义．很高阶的代数插值在实际应用中很少用于在一整个区间 $[a,b]$ 上函数逼近．通常仅限于应用由(1)给出的线性插值或在网格点的小区间上具三个结点的由公式

$$L_2(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}f(x_{k-1})+$$

$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}f(x_k)+$$

$$+\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}f(x_{k+1}), \quad x_{k-1}\leq x\leq x_{k+1} \quad (2)$$

给出的二次插值 (quadratic interpolation)．有多种方式来写出代数插值多项式(见**插值公式** (interpolation formula))．样条函数插值获得越来越广泛的应用 (见**样条** (spline))；**插值样条** (interpolation spline)．

抛物或三次样条在实用中最常应用．函数 $f(x)$ 关于给定网格 Δ_n 的具亏数 1 的插值样条是一个函数 $S_3(x)\equiv S_3(f;x)$，它在每个区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上是一个三次多项式，且属于二次连续可微函数类，同时满足条件

$$S_3(x_k)=f(x_k), k=0,\cdots,n;\ n\geq 2 .$$

在此定义中仍有两个自由参数；它们由附加的边界条件 $S_3^{(i)}(a)=S_3^{(i)}(b)(i=1,2)$；$S_3'(a)=a_n$，$S_3'(b)=b_n$，或其他条件来确定．

样条除可直接应用于逼近函数的问题之外，也可应用于解决其他问题；这样就要求样条不仅在网格 Δ_n 上与函数 $f(x)$ 的值相同，而且要与该函数的到某一阶为止的所有阶导数值相同．

当处理经验数据 $\{y_k\}$ 时，常需确定 $L_n(x)$ 中的系数 a_i 使

$$S=\sum_{k=1}^{m}[y_k-L_n(x_k)]^2, \quad m\geq n$$

达极小．如此所构造的函数 $L_n(x)$ 称为在最小平方意义下的插值函数．

多元函数的插值将遇到许多根本性的和数值计算方面的困难．例如，在代数插值的情形下，固定次数的 Lagrange 插值多项式一般说来不必对任意相异结点都存在．特别地，对二元函数 $f(x,y)$ 来说，全次数至多为 n 的这样一个多项式 $L_n(x,y)$ 仅当诸结点 $(x_k,$

y_k)不全在一条 n 阶代数曲线上才能构造出来．

多元函数 $f(x_1,\cdots,x_m)$ 的插值的另一个方法是先固定 $x_k(k=2,\cdots,m)$ 而对 x_1 插值该函数，然后对下一个变量 x_2 插值而固定余下的结点，等等．这时 $f(x_1,\cdots,x_m)$ 在结点

$$(x_1^{k_1},\cdots,x_m^{k_m}),$$
$$x_j^{\nu}\neq x_j^{\mu},\ \nu\neq\mu;\ k_j=0,\cdots,n_j;j=1,\cdots,m$$

上的插值多项式 $L_{n_1,\cdots,n_m}(x_1,\cdots,x_m)$ 具有形式

$$L_{n_1,\cdots,n_m}(x_1,\cdots,x_m)=$$
$$\sum_{k_1,\cdots,k_m=0}^{n_1,\cdots,n_m}\frac{\omega_{n_1}(x_1)\cdots\omega_{n_m}(x_m)}{\omega'_{n_1}(x_1^{k_1})\cdots\omega'_{n_m}(x_m^{k_m})}\ \frac{f(x_1^{k_1},\cdots,x_m^{k_m})}{(x_1-x_1^{k_1})\cdots(x_m-x_m^{k_m})},$$

其中

$$\omega_{n_j}(x_j)=\prod_{k_j=0}^{n_j}(x_j-x_j^{k_j}),\ j=1,\cdots,m.$$

与一维情形相类似，多元函数的插值样条在一多维网格上给出定义并作相应的改变．函数的插值用于以较简单的函数来代替复杂的函数以便更快地计算；也用于整个区域上的函数借助于其个别点处的值来近似恢复；还用于得到借助于运行过程所描述的更光滑的函数．此类问题都有其各自价值，且在许多科学和技术领域为解决复杂的问题而以辅助方式提出．在级数或序列等的加速收敛的问题中，函数的插值也用于近似地寻求函数之极限值．

数值求解非线性方程组．为解方程 $f(x)=0$ 或方程组 $f_i(x_1,\cdots,x_m)=0(i=1,\cdots,m)$ 而构造插值方法的一般思想是相同的．多变量函数的插值问题当方程个数很大时无论是研究还是实际应用这类方法其困难将特别明显．为解方程 $f(x)=0$ 而构造插值方法的基本原则是用其插值多项式 $L_n(x)$ 来代替 $f(x)$，然后解方程 $L_n(x)=0$．$L_n(x)=0$ 的根作为 $f(x)=0$ 的根的近似值．插值多项式 $L_n(x)$ 也用于构造解 $f(x)=0$ 的迭代方法．

例如，选取由 x_n 处的值 $f(x_n)$ 及 $f'(x_n)$，或由 x_{n-1} 及 x_n 处的值 $f(x_{n-1})$ 及 $f(x_n)$ 所构造的线性代数插值多项式的根作为 x_{n+1}，如此分别得出 **Newton 法**(Newton method)及**割线法**(secant method)：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1},x_n)},$$

其中 $f(x_{n-1},x_n)$ 为 $f(x)$ 在 x_{n-1} 和 x_n 处的均差．在某些条件下序列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 将收敛到 $f(x)=0$ 的解．

另一个构造解方程 $f(x)=0$ 的方法是基于插值反函数 $x=g(y)$．假定选取 $g(y)$ 的代数 Lagrange 插值多项式

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(y)}{\omega'_n(y_k)(y-y_k)}g(y_k),\omega_n(y)=\prod_{k=0}^{n}(y-y_k).$$

又设反函数在 $f(x)=0$ 的所要求的根的领域内存在，同时 x_k 及 $y_k=f(x_k)(k=0,\cdots,n)$ 的值均为已知，则下一近似值 x_{n+1} 即为插值多项式在零处的值：

$$x_{n+1}=-\omega_n(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{\omega'_n(y_k)y_k}.$$

数值积分法．插值是构造许多求积公式和求体积公式的基础．构造这类求积公式是将被积函数在整个区域上或部分区域上换成其某种类型的插值多项式，然后再对它积分．

例如，具最高代数精度的求积公式，亦称 **Gauss 求积公式**(Gauss quadrature formula)

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$$

是将 $f(x)$ 换成其关于 $p(x)$ 正交的 n 次多项式的诸根 x_k 上的代数插值多项式而得到，其中 $p(x)$ 是一个定号权函数．

如果将整个区间 $[a,b]$ 分成长度为 $h=(b-a)/n$ 的偶数 n 个等长区间，同时在每对区间上将 $f(x)$ 换成由端点和中点为结点的二次插值多项式，那么这将得出复 **Simpson 公式**(Simpson formula)

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{3n}[f_0+f_n+2(f_2+f_4+\cdots+f_{n-2})+$$
$$+4(f_1+f_3+\cdots+f_{n-1})],$$

其中 $f_k=f(a+kh),k=0,\cdots,n$．

也可取某个固定次数的插值样条作为求积公式的基础．上述构造积分的近似计算公式的方案也能用于多维情形．

数值微分法．数值微分公式由对插值公式微分而得到．这时关于被微分函数的光滑性的某种已知信息通常是有用的．

设 $L_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的某个插值多项式，又设 $R_n(x)$ 为插值公式的余项

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x).$$

如果在公式

$$f^{(i)}(x)=L_n^{(i)}(x)+R_n^{(i)}(x)$$

中忽略量 $R_n^{(i)}(x)$，那么就可得到 $f(x)$ 的 i 阶导数的近似计算公式

$$f^{(i)}(x)\approx L_n^{(i)}(x).\qquad(3)$$

基于插值的数值微分公式即由(3)得到，它依赖于 $L_n(x)$ 的选择．对于数值微分而言，通常利用函数在结点处的近似值；因而数值微分公式的误差就不仅依赖于插值公式和插值步长，而且也依赖于在结点处所使用的函数值的误差．例如，在线性插值(1)的情形中

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h}[f(x_{k+1})-f(x_k)], \qquad (4)$$

而余项 $R_1'(x)$ 有表达式

$$R_1'(x_k)=-\frac{1}{2}f''(\xi)h,\ \xi\in(x_k,x_{k+1}), h=x_{k+1}-x_k\ .$$

若 $f(x_{k+1})$ 及 $f(x_k)$ 已知分别有误差 $\varepsilon_{k+1},\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}\neq\varepsilon_k$，则 (4) 中的误差也要包含另外一项 $(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)/h$，它随步长的增大而减小．当使用数值微分公式时，其插值步长必须与函数值的误差相匹配．因此，在应用中常常发生这样的情形，即虽然已知一个函数在一个细网格上有某种误差的值，但在插值时却仅在较粗的网格上进行．

数值求解积分方程．积分方程中的未知函数 $\varphi(x)$ 用它的结点 x_k 的某个插值公式 (插值多项式、插值样条等) 代替，这样 $\varphi(x_k)$ 的近似值就可由用结点 x_k 替换独立变量 x 而得到的方程组来确定．

例如，对于第二类线性 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x) \qquad (5)$$

利用插值多项式的 Lagrange 公式

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\varphi(x_k)+R_n(x)\equiv L_n(x)+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项且

$$l_k(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)},\ \omega_n(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\ .$$

在 (5) 中将 $\varphi(x)$ 换成其插值多项式 $L_n(x)$ 及将 x 换成 x_i，就得到用来确定 $\varphi(x)$ 在 x_i 处的近似值 φ_i 的线性方程组

$$\varphi_i=\lambda\sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)\varphi_k+f(x_i),$$

$$M_k(x_i)=\int_a^b K(x_i,s)l_k(s)ds,\ i=0,\cdots,n\ .$$

在非线性积分方程的情形下，近似值 φ_i 须由对应的非线性方程组确定．

数值求解微分方程．构造求解微分方程的数值方法的途径之一是用数值微分插值公式代替未知函数的导数，而在许多情况下也要用插值代替方程中出现的其他函数和表达式．

假定有下述分别由线性插值公式 (1) 和二次插值公式 (2) 的微分得到的具有等距结点 $x_k=x_0+kh$ 的数值微分公式：

$$y'(x_k)\approx\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}=\frac{1}{h}\Delta y(x_k), \quad (6)$$

$$y''(x_k)\approx\frac{1}{h^2}[y(x_{k-1})-2y(x_k)+y(x_{k+1})]=$$

$$=\frac{1}{h^2}\Delta^2 y(x_k),$$

那么对于二阶常微分方程

$$F(x,y,y',y'')=0$$

在某些附加条件下由 (6) 得到有限差分方程

$$F\left[x_k,y_k,\frac{1}{h}\Delta y_k,\ \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_k\right]=0\,.$$

在此方程以及由附加条件得到的方程中以解 $y(x)$ 在结点 x_k 处的近似值 y_k 的方式出现．

通常将偏微分方程化为相应的有限差分方程也利用数值微分公式来实现．

插值方法也可应用于解写成积分形式的微分方程．例如，为寻求 Cauchy 问题

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0 \qquad (7)$$

在点 $x_k=x_0+kh(k=0,1,\cdots)$ 处的近似解，可利用以插值多项式替代方程

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)dx$$

中的被积函数然后再积分而得到的差分公式

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{j=1}^{n}B_j f(x_{n-j},y_{n-j})\ .$$

特别对于一阶方程 (7) 的 Adams 公式、对于二阶方程的 Störmer 公式等都是用这种方法得到的．

这种方法使人们能够构造一大类包括偏微分方程在内的微分方程的数值算法．由此提出的关于有限差分方程的解的可解性、精确性及稳定性的研究构成了数值求解微分方程理论的基本而又困难的部分．

算子插值和构造数值方法的若干一般途径．构造求解形如 $Ax=y$ 的数学问题的数值方法 (其中 x 及 y 是集合 X 及 Y 中的元素，而 A 为一已知算子) 是将 X，Y 及 A 或仅将其中的某几个替换成其他便于计算的对象．这种替换应当使求解 $\tilde{y}$ 或 $\tilde{x}$ 的新问题

$$\tilde{y}=\tilde{A}\tilde{x}$$

的解在某种意义下近似于原问题的解．用逼近元 $\tilde{A}$ 来替换 A 的一个方法是利用**算子插值** (interpolation of operators)．算子插值问题可由多种形式来描述．一个给定算子的线性插值算子 $L_1(F;x)$ 可写成

$$L_1(F;x)=F(x_0)+F(x_0,x_1)(x-x_0), \qquad (8)$$

其中 x_0,x_1 为插值结点，而 $F(x_0,x_1)$ 为一阶均差算子．后者定义为满足条件

$$F(x_0,x_1)(x_0-x_1)=F(x_0)-F(x_1)$$

的线性算子．所给出的均差算子的定义在许多情形下有具体形式．利用线性插值(8)，方程 $F(x)=0$ 的“割线法”能写成

$$x_{n+1}=x_n-F^{-1}(x_{n-1},x_n)F(x_n),$$

其中 $F^{-1}(x_{n-1},x_n)$ 为 $F(x_{n-1},x_n)$ 的逆算子．

在逼近方法理论中有用的泛函插值问题可描述如下．设 $\{\psi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ 是定义在 X 上的某些固定的泛函或泛函类．一个泛函 $L_n[F;x]$ 称为泛函 $F(x)$ 和 X 中的结点组 $\{x_k\}$ 的插值泛函多项式 (interpolation functional polynomial)，如果关系式

$$L_n[F;x_k]=F(x_k), L_n[\psi_i;x]\equiv \psi_i(x), i=0,\cdots,n$$

成立．

泛函插值用于构造计算抽象积分的近似方法，也用于寻求泛函的极值及很多其他方面．

例如，计算抽象积分的近似插值公式具有形式

$$\int_X F(x)d\mu(x)\approx\int_X L_n[F;x]d\mu(x),$$

这里插值多项式 $L_n[F;x]$ 关于某个测度 μ 的积分能精确计算或能化成有限维积分．当 X 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 时，$L_1[F;x]$ 能由 Stieltjes 积分来表示

$$L_1[F;x)=F(x_0)+\int_a^b\frac{x(\tau)-x_0(\tau)}{x_1(\tau)-x_0(\tau)}\,d\tau F[x_0(\cdot)+$$

$$+\chi(\cdot,\tau)(x_1(\cdot)-x(\cdot))],$$

其中 $x_0(t),x_1(t)$ 是插值结点，同时

$$\chi(t,\tau)=\begin{cases}1, & \tau>t,\\ 0, & \tau\leqslant t.\end{cases}$$

若 $F(x)$ 为常数或线性泛函，则 $L_1[F;x]\equiv F(x)$．

插值在寻求泛函极值中的应用，可以用寻求定义在某个 Hilbert 空间上的泛函 $F(x)$ 的局部无约束极小的梯度法的两个插值模型来说明．第一个模型是在梯度法中以 $F(x_{n-1},x_n)$ 替换 grad $F(x_n)$ 而得到，即

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_nF(x_{n-1},x_n),\ \varepsilon_n>0,\ n=1,2,\cdots. \quad (9)$$

第二个模型是利用插值多项式的梯度．由 $F(x)$ 的极值点 x^* 的逼近 x_{n-2}，x_{n-1}，x_n 构造二次插值多项式

$$L_2[F;x]=F(x_n)+F(x_{n-1},x_n)(x-x_n)+$$

$$+F(x_{n-2},x_{n-1},x_n)(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

其中 $F(x_{n-2},x_{n-1},x_n)$ 是 $F(x)$ 关于 x_{n-2},x_{n-1},x_n 的二阶均差．新的逼近 x_{n+1} 则由

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n\operatorname{grad}L_2[F;x_n],\varepsilon_n>0,\ n=2,3,\cdots \quad (10)$$

确定．插值方法(9)，(10)分别利用二个、三个初始逼近．

算子和泛函的插值在构造求解具体问题的算法中的应用是基于利用带有小的误差的插值公式．这一类公式在对具体的泛函和算子类构造时须考虑到其本身的特殊性质．

参考文献

[1] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, т. 1-2, М., 1959-1960 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[3] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[4] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы, т. 1-2, М., 1976-1977.

[5] Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной метематике, М., 1976.

[6] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

[7] Янович, Л. А., Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам, Минск, 1976.

Л. А. Янович 撰

【补注】 插值理论详细的理论分析可在专题论文 [A2] 中找到，同时插值在计算数学中的应用可在 [A1] 中找到．

参考文献

[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974.

[A2] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A3] Mason, J. C., Algorithms for approximation, Clarendon Press, 1987.

史应光 译

算子的插值 [interpolation of operators; интерполирование операторов]

从一个算子在两个或更多空间中的已知性质推断出这算子在某种意义下的中间空间中的性质．一个 Banach 对 A，B 是代数地且连续地嵌入到一分离的**线性拓扑空间** (linear topological space) $\mathfrak{A}$ 中的一对 **Banach 空间** (Banach space)．在交 $A\cap B$ 上引入范数

$$\|x\|_{A\cap B}=\max\{\|x\|_A,\ \|x\|_B\};$$

在算术和 $A+B$ 上引入范数

$$\|x\|_{A+B}=\inf_{x=u+v}\{\|u\|_A+\|v\|_B\}.$$

空间 $A\cap B$ 和 $A+B$ 是 Banach 空间．一个 Banach

空间 E 称为关于对 A、B 是中间的（intermediate），如果 $A \cap B \subset E \subset A+B$.

一个线性映射 T，作用于 $A+B$，映入到 $C+D$ 中，称为从对 A，B 到对 C、D 中的有界算子（bounded operator），如果它到 A（分别地 B）上的限制是从 A 到 C 中（分别地，从 B 到 D 中）的有界算子．如果从 A，B 到 C，D 中的每一个有界算子映 E 到 F 中，则一个空间三元系 $\{A, B, E\}$ 称为关于三元系 $\{C, D, F\}$ 的插值三元系，这里 E 是对 A，B 中间的（分别地，F 是对 C，D 中间的）．如果 $A=C$，$B=D$，$E=F$，则 E 称为 A 和 B 之间的插值空间（interpolation space）．对插值三元系存在常数 C 使得

$$\|T\|_{E\to F} \leqslant C\max\{\|T\|_{A\to C}, \|T\|_{B\to D}\}.$$

第一个插值定理是由 M. Riesz（1926）得到的：三元系 $\{L_{p_0}, L_{p_1}, L_{p_\theta}\}$ 是对 $\{L_{q_0}, L_{q_1}, L_{q_\theta}\}$ 的插值三元系，如果 $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$，且对某一 $\theta \in (0, 1)$，

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{1}$$

对仆 三元系，上面列举的空间中的测度可以不同．对其他空间族的类，这些定理的类似定理不一定成立；例如 $C^1(0, 1)$ 不是 $C(0, 1)$ 和 $C^2(0, 1)$ 之间的插值空间．

插值函子（interpolation functor）F 是一个函子，对任一 Banach 对 A，B，指定一个中间空间 $F(A, B)$，此外，对任两个 Banach 对 A，B 和 C，D，三元系 $\{A, B, F(A, B)\}$ 和 $\{C, D, F(C, D)\}$ 互为插值．有很多构造插值函子的方法．其中有两个方法得到最多的应用．

Peetre K 方法．对一个 Banach 对 A，B，构造泛函

$$K(t, x) = \inf_{x=u+v}\{\|u\|_A + t\|v\|_B\},$$

对每一 t 它等价于 $A+B$ 中的范数．在半实轴上可测函数的 Banach 空间 G 称为理想空间（ideal space），如果在 $(0, \infty)$ 上几乎处处 $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ 和 $g \in G$ 蕴涵 $f \in G$ 和 $\|f\|_G \leqslant \|g\|_G$．考虑 $A+B$ 中满足 $K(t, x) \in G$ 的所有元素 x．它们形成具有范数 $\|x\|_{(A, B)_G^K} = \|K(t, x)\|_G$ 的 Banach 空间 $(A, B)_G^K$．空间 $(A, B)_G^K$ 是非空的且对 A，B 是中间的，当且仅当函数 $\min(t, 1)$ 属于 G．在这种情况下，$F(A, B) = (A, B)_G^K$ 是插值函子．对某些 Banach 对，函数 $K(t, x)$ 能计算．这使得有可能构造有效的插值空间．对 L_1，L_∞：

$$K(t, x) = \int_0^1 x^*(\tau)\,d\tau,$$

这里 $x^*(t)$ 是与函数 x 等度可测的 $(0, \infty)$ 上非增右连续函数．对 C，C^1：

$$K(t, x) = \frac{1}{2}\hat{\omega}(2t, x),$$

这里 $\omega(t, x)$ 是函数 x 的**连续模**（continuity, modulus of），且符号 ^ 表示转移到 $(0, \infty)$ 上最小凸优函数．对 $L_p(\mathbf{R}^n)$，$W_p^l(\mathbf{R}^n)$（一个 **Соболев 空间**（Sobolev space）），

$$K(t, x) = \begin{cases} \omega_{l,p}(t^{1/p}, x) + t\|x\|_{L_p}, & t<1, \\ \|x\|_{L_p}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

这里

$$\omega_{l,p}(t, x) = \sup\{\|\Delta_h^l x(s)\|_{L_p} : |h| \leqslant t\}.$$

通常取带有范数

$$\|f\|_G = \left\{\int_0^\infty t^{-\theta}|f(t)|^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q}, \quad 0<\theta<1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

的空间作为 G．相应的函子用 $(A, B)_{\theta,p}^K$ 表示．带有 $m=\theta l$ 的 Бесов 空间．

$$B_{p,q}^m = (L_p, W_p^l)_{\theta,q}^K$$

在偏微分方程论中起重要作用．分析中的很多经典不等式藉助于 Lorentz 空间

$$L_{r,q} = (L_1, L_\infty)_{\theta,q}^K, \quad r = \frac{1}{1-\theta}$$

的语言可以叙述得更加精确．

Calderón-Lions 的复方法．设 A，B 是 Banach 对．用 $\Phi(A, B)$ 表示定义在复平面的带形 $\Pi = \{z: 0 \leqslant \mathrm{Re}\,z \leqslant 1\}$ 中，取值在 $A+B$ 中，且有以下性质的所有函数 $\varphi(z)$ 的空间：1) $\varphi(z)$ 按 $A+B$ 的范数在 Π 上连续且有界；2) $\varphi(z)$ 按 $A+B$ 的范数在 Π 内解析；3) $\varphi(i\tau)$ 按 A 的范数连续且有界；4) $\varphi(1+i\tau)$ 按 B 的范数连续且有界．空间 $[A, B]_\alpha$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 定义为所有这样的元素 $x \in A+B$ 的集合，$x = \varphi(\alpha)$，$\varphi \in \Phi(A, B)$．其中引入范数

$$\|x\|_{[A, B]_\alpha} = \inf_{\varphi(\alpha)=x}\|\varphi\|_{\Phi(A, B)}.$$

按这方法定义了插值函子 $[A, B]_\alpha$．如果 $A = L_{p_0}$，$B = L_{p_1}$，$p_0, p_1 \leqslant \infty$，则 $[L_{p_0}, L_{p_1}]_\alpha = L_p$，其中 $1/p = (1-\alpha)/p_0 + \alpha/p_1$．如果 G_0 和 G_1 是两个理想空间且如果至少其中之一的范数是绝对连续的，则

$[G_0, G_1]_\alpha$ 由满足 $|x(t)|=|x_0(t)|^{1-\alpha}\cdot|x_1(t)|^\alpha$, $x_0\in G_0$、$x_1\in G_1$ 的所有函数 $x(t)$ 组成. 如果 H_0, H_1 是两个复 Hilbert 空间, 使得 $H_1\subset H_0$, 则 $[H_0, H_1]_r$ 是一族有很重要应用的空间. 它称为 Hilbert 尺度(Hilbert scale). 如果 $H_0=L_2$, $H_2=\mathring{W}_2^l$, 则 $[\mathring{H}_0, H_1]_\alpha=\mathring{W}_2^{\alpha l}$(分数指标的 Соболев 空间). 关于构造插值函子的其他方法, 以及它们跟 Banach 空间尺度理论的关系, 见[1], [3], [5], [8], [9].

在算子插值理论中, 关于弱型插值算子的 Marcinkiewicz 插值定理(Marcinkiewicz interpolation theorem)起着重要的作用. 从一个 Banach 空间 A 到一个可测函数(例如, 在半轴上)空间中的算子 T 称为弱型 (A, ψ) 算子(operator of weak type), 如果 $(Tx)^*(t)\leqslant(c/\psi(t))\,\|x\|_A$. 这里假定 $\psi(t)$ 和 $t/\psi(t)$ 是非减的(例如 $\psi(t)=t^\alpha$, $0\leqslant t\leqslant\alpha$). Marcinkiewicz 型定理使得人们能够同时对弱型 (A_0, ψ_0) 和 (A_1, ψ_1) 算子 T(这里 A_0, A_1 是 Banach 对)描述空间对 A, E, 这里 $TA\subset E$. 很多情况下, 只须检验算子

$$\frac{1}{\psi_0(t)}K\left[\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)}, x\right]$$

(这里 $K(t, x)$ 是对 A_0, A_1 的 Peetre 泛函)把 A 映到 E 中. 如果对所有的弱型 (A_i, ψ_i) 线性算子已证明此泛函把 A 映到 E 中, 则对弱型 (A_i, ψ_i), $i=0, 1$ 的拟可加算子(即具有性质 $|T(x+y)(t)|\leqslant b(|Tx(t)|+Ty(t)|)$ 这也成立. 分析中很多重要算子(例如 Hilbert 奇异算子)是自然空间中弱型算子; 因此相应的内插定理已有很多应用.

参考文献

[1] Butzer, P. and Brens, H., Semi-groups of operators and approximation, Springer, 1967.

[2] Zygmund, A, Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] Крейн, С. Г., Петунин, Ю. И., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 2, 89 – 168.

[4] Lions, J. L. and Magenes, E., Non-homogenous boundary value problems and applications, 1-2, Springer, 1972(译自法文).

[5] Magenes, E., Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali, in Conf. Ⅶ Congr. Union Mat. Italy, 1963, Cremonese, 1965, 134 – 197.

[6] Stein, E. M. and Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975.

[7] Функциональный анализ [Справочная математическая библиотека], 2 изд., М., 1972(英译本: Vilenkin, N. Ya., et al. (eds.), Functional analysis, Wolters-Noordhoff, 1972).

[8] Bergh, J. and Löfström, B. I., Interpolation spaces, Springer, 1976.

[9] Triebel, H., Interpolation theory, function spaces, differential operators, North-Holland, 1978.

С. Г. Крейн 撰

【补注】 正文中提到的 M. Riesz 的定理通常称为 Riesz 凸性定理(Riesz convexity theorem). 它有如下的在某种程度上更确切的表述(包括对问题中有界算子在某种范数上的界). 设 T 是线性算子, 把一个**测度空间**(measure space) $(M, \mathscr{M}, \mu)$ 上复值可测函数的线性空间 D 映入另一测度空间 $(N, \mathscr{N}, \nu)$ 上的可测函数空间. 假设 D 包含所有可测集的指示函数且使得当 $f\in D$ 时所有的截断(truncation, 即对一定的 $c_1, c_2>0$, 当 $c_1<|f(x)|\leqslant c_2$ 时与 f 重合而在别处为 0 的函数)也属于 D. 算子 T 称为属于型 (p, q), 如果存在常数 C 使得

$$\|Tf\|_{L_q(N)}\leqslant c\|f\|_{L_p(M)}, \text{ 对所有的 } f\in D\cap L_p(M). \tag{A1}$$

使得(A1)成立的最小的 c 称为 T 的 (p, q) 范数. M. Riesz 凸性定理现表述如下: 如果线性算子 T 是 (p_i, q_i) 型的, 带有 (p_i, q_i) 范数 k_i, $i=0, 1$, 那么 T 是 (p_θ, q_θ) 型的, 有 (p_θ, q_θ) 范数 $k_\theta\leqslant k_0^{1-\theta}k_1^\theta$, 只要 $0\leqslant\theta\leqslant1$, p_θ, q_θ 满足(1). (由于 T 的 (p_θ, q_θ) 范数作为 θ 的函数是对数凸的这一事实, 引出"凸性定理"这一名称.)

在同样的条件下, T 称为次加性的(subadditive), 如果对几乎所有的 $x\in N$ 和 $f_1, f_2\in D$, 有 $|(T(f_1+f_2))(x)|\leqslant|(Tf_1)(x)|+|(Tf_2)(x)|$. 次加性算子 T 称为是属于弱型 (p, q) 的(这里 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant q<\infty$)如果存在常数 k, 使得

$$\nu(\{x\in N: |(Tf)(x)|>s\})\leqslant\left[\frac{k\|f\|_{L_p}}{s}\right]^q \tag{A2}$$

对所有的 $f\in L_p(M)\cap D$ 成立. 使得(A2)成立的最小的 k 称为 T 的弱 (p, q) 范数. (注意(A2)的左边是称为 Tf 的分布函数(distribution function).) 对 $q=\infty$, (A2) 必须换成

$$\|Tf\|_{L_p}\leqslant k\|f\|_{L_p}.$$

更进一步的推广是限制弱型 (p, q) 算子(operator of restricted weak type), 见[6].

奇异积分算子(见**奇异积分**(singular integral))常常证明是某种(弱)型的(例如 **Hilbert 变换**(Hilbert transform)是属于弱型(1, 1)的).

参考文献

[A1] Bennett, C. and Sharpley, R. C., Interpolation of operators, Acad. Press, 1988.

葛显良 译 鲁世杰 校

插值过程 [**interpolation process**; **интерполяционный процесс**]

当 n 无限增大时构造 n 个**插值**(interpolation)条件的插值函数序列$\{f_n(z)\}$的过程．如果插值函数 $f_n(z)$ 由函数的某个级数的部分和表示，那么该级数有时称为插值级数(interpolation series)．至少在最简单的基本的插值问题方面，研究插值过程的目的常常在于用插值函数 $f_n(z)$ 作为原始函数 $f(z)$ 的(在某种意义上的)逼近，而该函数或者只有不完全的信息或者其形式过于复杂而难以直接研究．

构造插值过程的一个非常普遍的情形可描述如下．设(a_{jk}) $(0\leqslant k\leqslant j, j=0,1,\cdots)$是一个任意而又固定的复数的无穷三角阵列:

$$\begin{array}{llll} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots, \end{array} \tag{1}$$

称它为插值结点(interpolation nodes 或 interpolation knots)．假定对应于(1)还有一个也由任意而又固定的复数组成的类似的阵列(w_{jk}) $(0\leqslant k\leqslant j, j=0,1,\cdots)$．

如果(1)的第 n 行 a_{nk} $(k=0,\cdots,n)$是由不相同的数组成，或者换句话说，如果此行由单结点(simple nodes)组成，那么例如利用 **Lagrange插值公式**(Lagrange interpolation formula)，就可构造一个(唯一的)次数至多为 n 的代数插值多项式 $p_n(z)$，它满足简单插值条件(simple interpolation condition)

$$p_n(a_{nk})=w_{nk}, \quad k=0,\cdots,n. \tag{2}$$

另一方面，如果在第 n 行中点 a_{n0} 是具有重数 $\nu_0>1$ 的多重结点，亦即如果在第 n 行中它重复ν_0次: $a_{n0}=a_{nk_1}=\cdots=a_{nk_{\nu_0-1}}$，那么在点 a_{n0} 处的对应的多重插值条件(multiple interpolation condition)具有形式

$$p_n(a_{n0})=p_n^{(0)}(a_{n0})=w_{n0}, \quad p_n'(a_{n0})=w_{nk_1}, \cdots, \\ p_n^{(\nu_0-1)}(a_{n0})=w_{nk_{\nu_0-1}}. \tag{3}$$

在出现多重结点的一般情况中构造这(唯一的)次数至多为 n 的代数插值多项式 $p_n(z)$，例如可利用 **Hermite 插值公式**(Hermite interpolation formula)．作为一个例子，组(1)可由单位圆周上的 $j+1$ $(j=0,1,\cdots)$个等距结点 $a_{jk}=e^{2\pi ik/(j+1)}$ 组成．这就是所谓的单位根上的插值(interpolation at roots of unity)(见[5])．

所述插值过程产生出由三角阵列(a_{jk})及(w_{jk})所定义的插值多项式序列$\{p_n(z)\}$．这里提出的主要问题是：确定极限 $\lim_{n\to\infty}p_n(z)=g(z)$ 存在的序列$\{p_n(z)\}$的收敛点的集合 $E\subset \mathbf{C}$，它依赖于(a_{jk})及(w_{jk})；确定极限函数 $g(z)$ 的特性；确定一致收敛 $p_n(z)\to g(z)$ 的集合 $F\subset E$；等等．

在复变函数理论中当阵列(w_{jk})是由正则解析函数 $f(z)$ 的插值结点处的函数值及其导数值组成时(适用于 $\nu_0\geqslant 1$ 重结点 a_{n0}；见(3))，须满足条件

$$p_n(a_{n0})=p_n^{(0)}(a_{n0})=f(a_{n0}),$$
$$p_n'(a_{n0})=f'(a_{n0}),\cdots,p_n^{(\nu_0-1)}(a_{n0})=f^{(\nu_0-1)}(a_{n0}),$$

此种情形已经得到很好的研究．插值多项式 $p_n(z)$ 可由 Hermite 公式写成围道 Γ 上的围道积分，该围道围绕诸结点 a_{nk} $(k=0,\cdots,n)$，且在围道上和围道内 $f(z)$ 是正则的:

$$p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_n(t)-\omega_n(z)}{\omega_n(t)(t-z)}f(t)\,dt, \tag{4}$$

其中

$$\omega_n(z)=(z-a_{n0})\cdots(z-a_{nn}).$$

公式(4)容易导出插值余项(remainder term of interpolation) $R_n(z)=f(z)-p_n(z)$ 的积分表达式．一般说来，由 $f(z)$ 构成的序列$\{p_n(z)\}$可以发散．但是如果它收敛，那么极限函数 $g(z)$ 也不必与 $f(z)$ 一致．基本问题是研究$\{p_n(z)\}$到 $f(z)$ 的收敛性，以及确定使这种收敛性在某种意义上是最佳的那些结点组(a_{jk})．例如，假设 $f(z)$ 在一个连续统 $K\subset \mathbf{C}$ 上正则，它包含至少两个点且其在扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的余集是一个包含无穷远点的单连通区域．设结点(a_{jk})属于 K．那么$\{p_n(z)\}$在 K 上一致收敛到 $f(z)$，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{1/(n+1)}=c,$$

其中 $M_n=\sup\{\omega_n(z): z\in\partial K\}$，而 c 为 K 的**容量**(capacity)(见[4])．

插值过程的一个经典的变型是 $a_{jk}=a_k$ $(0\leqslant k\leqslant j, j=0,1,\cdots)$，这时在第 n 步用第 n 行结点 $a_0,\cdots,a_n$ 构造 $p_n(z)$．对于正则函数 $f(z)$，它的插值多项式 $p_n(z)$ 这时就为 Newton 插值级数(Newton interpolation series)的部分和(亦见 **Newton 插值公式**(Newton interpolation formula))

$$q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\omega_n(z), \tag{5}$$
$$\omega_n(z)=(z-a_0)\cdots(z-a_n), \quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)}.$$

形如(5)的插值级数在计算时优于序列$\{p_n(z)\}$: 从已知多项式 $p_n(z)$ 过渡到 $p_{n+1}(z)$ 时只须计算级数中的一个系数 c_{n+1}．由于结点 a_k 及系数 c_k 的变化，(5)的收敛域可以是 $\mathbf{C}$ 中任何有解析边界的单连通域．特别地，如果$\{a_k\}$仅有无穷远点这一个极限点且 $\sum_{k=m}^{\infty}1/|a_k|<\infty$，又如果(5)至少在一个点 $z_0\neq a_k$ $(k=0,1,\cdots)$上

收敛，那么(5)在任何圆 $|z|\leqslant R$ 内一致收敛，由此其和 $q(z)$ 是一个整函数．Stirling 插值级数(Stirling interpolation series)即是 Newton 插值级数的一个特殊情形，它的结点序列为 $a_0=0, a_1=-1, a_2=1, \cdots, a_{2k-1}=-k, a_{2k}=k, \cdots$．其他类似的插值级数也已经得到研究(见[3]，[5])．

非代数插值多项式 $p_n(z)=\sum_{v=0}^{n} b_v \varphi_v(z)$ 的插值过程也是研究的对象，这里函数组 $\{\varphi_v(z)\}$ 异于 $\{z^v\}$，比方说是 $\{e^{\alpha_v z}\}$ (见[4]，[6])．

实域中的插值过程的研究在问题的描述及结果本身都有它自己的特征(见[2]，[4])．这些特征首先是由被插函数 $f(z)$ 的自然的(在实域中)正则的要求而来的．例如，我们知道不存在 $[a,b]$ 上的结点组使插值过程对任意连续函数 $f(x)(x\in[a,b])$ 都收敛．另一方面，如果一个连续函数 $f(x)$ 事先给出，那么总可能选择一个结点组使该插值过程收敛到 $f(x)$．

除多项式 $p_n(z)$ 的插值过程之外，有理函数 $r_n(z)$ 的插值过程，例如形如 $r_n(z)=q_n(z)/\omega_{n-1}(z)$ 的插值过程也已引起研究者的注意，其中 $\omega_{n-1}(z)=(z-b_0)\cdots(z-b_{n-1})$，而 $q_n(z)$ 是次数至多为 n 的多项式．插值条件(1)－(3)仍有效，而在极点 $b_k(k=0,1,\cdots)$ 处的条件也须给出，在最简单的情形下这些条件也是由类似于(1)的一个三角阵列 $(b_{jk})(0\leqslant k\leqslant j, j=0,1,\cdots)$ 给出的．

亦见 **Abel-Гончаров 问题**(Abel-Goncharov problem)；**Бернштейн 插值法**(Bernstein interpolation method)．

参考文献

[1] Маркушевич, А.И., Теория аналитических функций, т.1, 2 изд., М., 1967 (英译本：Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977)．

[2] Гончаров, В.Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954．

[3] Гельфонд, А.О., Исчисление конечных разностей, 2 изд., М., 1959．

[4] Смирнов, В.И., Лебедев, Н.А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., 1964 (英译本：Smirnov, V.I. and Lebedev, A.N., Functions of a complex variable, Scripta Techn., 1968)．

[5] Walsh, J.L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc., 1965．

[6] Леонтьев, А.Ф., Ряды экспонент, М., 1976．

Е.Д.Соломенцев 撰

【补注】 一个很普遍的插值方式是 Birkhoff 插值(Birkhoff interpolation)，见 **Hermite 插值公式**(Hermite interpolation formula)；**插值公式**(interpolation formula)，及[A5]．亦见函数逼近方面的各种文章．

对于有理函数插值亦见 **Padé 逼近**(Padé approximation)．

对于复域上的插值(与逼近)的好的参考文献是[A3]，[A4]．亦见**插值**(interpolation)．

参考文献

[A1] Steffenson, J.F., Interpolation, Chelsea, reprint, 1950．

[A2] Davis, P.J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975．

[A3] Gaier, D., Lectures on complex approximation, Birkhäuser, 1987 (译自德文)．

[A4] Garnett, J.-B., Bounded analytic functions, Acad. Press, 1981．

[A5] Lorentz, G.G., Jetter, K. and Riemenschneider, S.D., Birkhoff interpolation, Wiley, 1983．

史应光 译

插值样条 [**interpolation spline; интерполяционный сплайн**]

在给定的相异点 $\{\bar{x}_i\}$ 上与一已知函数取值相同的样条

$$S_m(\Delta_n;x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}+\sum_{k=0}^{n-1}C_k(x-x_k)_+^m,$$

其中

$$t_+=\begin{cases}t, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\quad x_0<\cdots<x_n.$$

对于 $m=2k+1$ 通常取 $\bar{x}_i=x_i(i=0,\cdots,n)$，而且因为对于 $S_{2k+1}(\Delta_n;x)$ 仍有 $2k$ 个自由参数，所以还要在点 x_0 及 x_n 处各加 k 个附加条件，例如，$S_{2k+1}^{(j)}(\Delta_n;z)=y_z^{(j)}$ $(j=1,\cdots,k,\ z=x_0,x_n)$，其中 $y_z^{(j)}$ 为已知数．如果诸 $y_z^{(j)}$ 线性地依赖于该已知函数，那么对应的样条同样也线性地依赖于该函数．对于 $m=2k$ 通常取 $\bar{x}_0=x_0$，$\bar{x}_n=x_n$，$x_i=(\bar{x}_{i-1}+\bar{x}_i)/2(i=1,\cdots,n-1)$，及在点 x_0 及 x_n 处各取 k 个附加条件．如果样条 $S_m(\Delta_n;x)$ 在 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 上有 $(m-s)$ 阶连续导数而 $(m-s+1)$ 阶导数间断，那么对于 $s\geqslant 2$ 样条的起始 $s-1$ 阶导数在这些点上须与被插函数的对应导数相同．插值 L 及 L_q 样条，以及多元插值样条现在也都已研究．插值样条用于以一个函数网格上的值来逼近该函数．与插值多项式不同，有许多矩阵和结点能使插值样条对于一任给连续可积函数收敛．

参考文献

[1] Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976．

[2] Ahlberg, J., Nilson, E.N. and Walsh, J.L., The theory of splines and their applications, Acad. Press, 1967．

Ю.Н.Субботин 撰

【补注】 亦见**样条**(spline)；**样条逼近**(spline approximation)；**样条插值**(spline interpolation)．

参考文献

[A1] Boor, C. de, Splines as linear combinations of B-

splines, a survey, in G. G. Lorentz, C. K. Chui and L. L. Schumaker (eds.), Approximation Theory, Vol. 2, Acad. Press, 1976.

[A2] Schoenberg, I. J., Cardinal spline interpolation, SIAM, 1973.

[A3] Schumaker, L. L., Spline functions: Basic theory, Wiley, 1981.

史应光 译

解释 [**interpretation**; **интерпретация**]

给数学表达式（符号、公式等等）一个值（意义）. 在数学中这些值是数学对象（集合、运算、表达式等等）. 这个值本身称为对应的表达式的一个解释.

例 符号 $\cdot$ 的值（或解释）可以是实数上的乘法运算，整数上的加法运算等等. 假设对 $\cdot$ 用了这些解释中的第一个. 如果符号 x 和 y 表示实数（即以整个实轴为可能的定义域的变元），则表达式 $x \cdot y$ 的值是把每一对实数变换到它们的积的映射；如果 x, y 的值分别是 6 和 2.5，则表达式 $x \cdot y$ 的值是数 15. 在 **Poincaré 模型**（Poincaré model）中，作为平面 Лобачевский 几何学的一个陈述的值（解释），可以取平面 Euclid 几何学中的相应陈述.

最重要的解释是逻辑语言表达式的集合论解释. 如果讨论一种语言的所有表达式的联合解释，则有这种语言的一个解释. 一个逻辑语言的集合论解释包括常元——对象常元、函数常元和谓词常元以及高阶常元（谓词的谓词常元）的值的详细说明，也包括变元——对象变元、函数变元等等的适用域的详细说明. 在多种解释中，不同的对象变元可以有不同的适用域；对函数变元等等也是如此. 然而，最常用的解释是对所有对象变元和具有恒等个数自变量的函数变元等有同样适用域的那些. 如果对象变元的变域（有时称为该解释的定义域或支集）是一集合 D_0，则 n 位函数变元的变域是 D_0 上 n 位运算集合 D_n. 通常 D_n 是取作 D_0 上所有 n 位运算的集合；在这种情况下，函数变元的变域常常不提及. 对象常元的值是 D_0 的元素，函数常元的值是 $D_1, D_2, \cdots$ 的元素.

在一个逻辑语言的集合论解释中，一个项的解释（即在给定解释中该项的值）是一个映射，它对该语言的变元的值的每一种选取（或按稍不同的定义，对参与该项的变元的值的每一种选取），按一定规则，指派解释域的一个元素. 这映射通常用项的结构上的归纳法给定.

为了得到一个语言公式的一个解释，除了上述部分外，还必须指定某非空集合 A，称为逻辑值集合. n 位谓词常元的解释是从 D_0^n 到 A 中的映射. 特别地，零位谓词常元是 A 的元素. 如果在该语言中有零位、一位等谓词变元等等，则它们的变域分别是集合 A，包含所有一位谓词常元解释的 A^{D_0} 的某一子集，等等. 一个公式的一个解释，类似于一个项的解释，定义为这样一个映射，对该语言的对象、函数和谓词变元的值的每一种选取，指派 A 的一个元素. 一类重要的集合论解释是代数解释，其中 A 上的运算被取作逻辑联结词的值（解释），从 A 的子集的集合到 A 中的映射（A 上的广义映射）被取作量词的值，而且这里一个公式的解释是用关于这结构的归纳法定义的. 在其他的集合论解释中，**Kripke 模型**（Kripke models）是最重要的.

Boole 值代数解释的特征在于集合 A 是一个完全 **Boole 代数**（Boolean algebra）这一事实；而联结词和量词的值是：对合取——交；对存在量词——取最小上界等等. 经典的解释起特别重要的作用. 它们定义为具有两个元素的 Boole 代数 A 的 Boole 值解释.

在一个给定的解释中，公式的真值概念由判别 A 中一定的元素来定义. 例如，对经典解释，自然地取 Boole 代数的单位元作为判别元素（单位元也称为“真值”）. 在一个给定的解释中，一个公式称为真的，如果它的解释只取判别值. 一定的语言的公式系统的一个模型（或正则解释，或简称解释，见**模型（逻辑中的）**（model (in logic)）是这个语言的这样一个解释，其中该系统的所有公式都是真的. 当一定的表达式的所有可能的值（解释）中有一个普遍地被接受时，使用标准解释这个术语. 例如，符号 = 在经典解释中的标准解释是元素的一致性的解释，而在算术中 + 和 $\cdot$ 的标准解释是自然数的加法和乘法. 类似地，引入语言的标准解释和标准模型的概念. 特别地，带谓词常元 = 和函数常元 + 和 $\cdot$ 的一阶算术的经典解释，如上所述，称为标准的.

除了逻辑语言的集合论解释外，也用其他的. 例如，其中一个逻辑语言的表达式被解释为另一逻辑语言中的表达式（见**浸入运算**（immersion operation））的解释用于证明逻辑理论的可判定性、不可判定性和逻辑理论的相对相容性. 亦见**构造逻辑**（constructive logic）.

参考文献

[1] Rosiowa, E. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk, 1963.

[2] Church, A., Introduction to mathematical logic, I, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

А. Л. Семенов 撰

【补注】 除了 Kripke 模型，**Boole 值模型**（Boolean-valued model）是重要的解释. 两者都能看成层模型（sheaf models），或**常用语句**（topos）中的解释的特殊情形. 见例如，[A1].

参考文献

[A1] Lambek, J. and Scott, P., Higher order categorical logic, Cambridge Univ. Press, 1986.

葛显良 译 鲁世杰 校

相交同调[intersection homology; пересечения гомология]

【补注】有许多关于非奇异复射影代数簇的(上)同调性质，例如 Poincaré 对偶性．Hodge 分解、严格 Lefschetz 定理等．对于奇异簇的通常(上)同调不再成立．相交(上)同调就是对通常的理论作一些改动，以使得上述性质能在奇异簇的情形继续保持，尤其是在同调(相交)形式下的 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)：设 M 是有向紧 $2n$ 维流形，$\alpha\in H_i(M)$，$\beta\in H_{2n-i}(M)$ 是同调类，它们的代表闭链 a 和 b 相交于有限多个点(这样的代表闭链存在)，则计入重数的交点数与 a 和 b 无关，并定义了一个对偶配对 $H_i(M,\mathbf{Q})\times H_{2n-i}(M,\mathbf{Q})\to\mathbf{Q}$．

设 X 是 n 维复解析簇(可以有奇点，亦见**解析流形**(analytic manifold))，具有 Whitney **层化**(stratification) $\{X_j\}$．设 c_j 是 X_j 在 X 里的余维数，$\{C_i(X)\}$ 是 X 上几何链的通常复形之一(例如 $C_i(X)$ 可以是关于 X 上某个分段线性结构的分段线性 i 链)．相交链复形(complex of intersection chains)被定义为满足下述条件的子复形 $\{IC_i(X)\}$：链 $c\in IC_i(X)$ 与各个奇异层 X_j 交于实维数 $\leqslant i-c_j$ 的集合，它的边界与各个奇异层 S_j 交于实维数 $\leqslant i-c_j-1$ 的集合．

第 i 个相交同调群 $IH_i(X)$ 就是链复形 $\{IC_i(X)\}$ 的第 i 个同调群([A1])．

也可用层论方法建立相交(上)同调．其中涉及到反常层([A4],[A5],[A9]，亦见 **D 模**(D-module))．

相交(上)同调有许多应用，尤其是在表示理论中([A1],[A5],[A8])(例如对 Kazhdan-Lusztig 猜想的证明([A7]))．

光滑闭定向 Riemann(或三角化的)流形的另一个优美且极其有用的性质是：第 p 个实上同调群 $H^p(M;R)$ 同构于适当的 Laplace 算子的零本征空间(调和上链)．为了在开流形上得到类似的结果，已经建立了一个适当的"泛函上同调"理论．这导致了 L_2 上同调(L_2-cohomology)．

设 Y 是具有度量 g 的无边(一般来说，不完全的) **Riemann 流形**(Riemannian manifold)，Λ^i 是 Y 上面的 $C^\infty i$ 形式的空间，$d_i:\Lambda^i\to\Lambda^{i+1}$ 是外微分．设 $L_2(i)$ 是具有可测系数的平方可积 i 形式的空间．L_2 上链复形定义为 $C^i_{(2)}(Y)=\{\alpha\in\Lambda^i\cap L_2(i): d_i\alpha\in L_2(i+1)\}$，而 Y 的第 i 个 L_2 上同调群 $H^i_{(2)}(Y)$ 的一种定义为：$H^i_{(2)}(Y)$ 是这个上链复形的第 i 个上同调群([A2])．一般地说，这些上同调群依赖于度量 g．

设 X 仍是一个复解析簇，$X\backslash\Sigma$ 是非奇异部分．在很多情形下已经发现 $X\backslash\Sigma$ 的(关于适当度量的) L_2 上同调对偶于 X 的相交同调([A1]－[A3],[A10],[A11])．

参考文献

[A1] MacPherson, R. D., Global questions in the topology of singular spaces, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Warszawa, 1983, Vol. 1, PWN, 1984, 213－236.

[A2] Cheeger, J., Goresky, M. and MacPherson, R. D., L^2-cohomolgy and intersection homology of singular algebraic varieties, in S.-T. Yau (ed.): Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press, 1982, 303－340.

[A3] Zucker, S., L_2-cohomology of warped products and arithmetic groups, *Invent. Math.*, **70** (1982), 169－218.

[A4] Borel, A., et al., Intersection cohomology, Birkhäuser, 1984.

[A5] Analyse et topologie sur les espaces singulier Ⅰ－Ⅲ, *Astérisque*, **100－102** (1982).

[A6] Kirwan, F. C., An introduction to intersection homology theory, Longman, 1988.

[A7] Brylinski, J.-L. and Kashiwara, M., Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Invent. Math.*, **64** (1981), 387－410.

[A8] Springer, T. A., Perverse sheafs and representation theory, in P. Fong (ed.), The Arcata Conf. Representations of Finite Groups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1987, 315－322.

[A9] Brylinski, J.-L., (Co-) homologie d'intersection et faisceaux pervers (Sem. Bourbaki 1981/1982, Exp. 585), *Astérisque*, **92－93** (1982), 129－158.

[A10] Looijenga, E., L^2-cohomology of locally symmetric varieties, *Preprint Dept. Math. Catholic Univ. Nijmegen*, **8723** (1987).

[A11] Saper, L. and Stern, M., L_2-cohomology of arithmetic varieties, *Proc. Nat. Acad. Sei. USA*, **84** (1987), 5516－5519.

陈志杰 译

相交指数(代数几何学中的)[intersection index (in algebraic geometry); пересечения индекс]

在 n 维**代数簇**(algebraic variety)里 n 个**除子**(divisor)的交点数(要计入这些点的重数)．更精确地说，设 X 是域 k 上的 n 维非异代数簇，$D_1,\cdots,D_n$ 是 X 中的有效除子，它们相交于有限多个点．这些除子在点 $x\in X$ 相交的局部指数(local index)(或重数(multiplicity))是整数

$$(D_1,\cdots,D_n)_x=\dim_k A/(u_1,\cdots,u_n),$$

其中 u_i 是除子 D_i 在局部环 $A=\mathcal{O}_{X,x}$ 里的局部方程．在复数的情形，局部指数等于形式 $(du_1/u_1)\wedge\cdots\wedge(du_n/u_n)$ 的留数，也等于映射

$$(u_1,\cdots,u_n):(X,x)\to(\mathbf{C}^n,0)$$

的芽的次数（见**映射度**（degree of a mapping））.整体相交指数（global intersection index）$(D_1,\cdots,D_n)$是在所有的交点 $D_1\cap\cdots\cap D_n$ 上的局部指数的和．如果交集非空，则 $(D_1,\cdots,D_n)>0$.

亦见**相交理论**（intersection theory）.

В.И.Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1974, Chapt. Ⅳ（译自俄文）. 陈志杰 译

相交指数（同调论中的）[intersection index (in homology); пересечения индекс]

刻画 Euclid 空间或定向流形中具有互补维数的（处于**一般位置**（general position）的）两个子集相交点的代数个数（即包括定向信息）的同调不变量．对不可定向流形的情形，同调群的系数环取为 $\mathbf{Z}_2$.

设 $X\supset A$，$Y\supset B$ 为 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的子集对，满足 $A\cap Y=\varnothing=X\cap B$，并设 d：$(X\times Y,(A\times Y)\cup(X\times B))\to(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\backslash 0)$ 为由 $d(x,y)=x-y$ 定义的映射．同调类 $\xi\in H_{n-i}(X,A)$ 和 $\eta\in H_i(Y,B)$ 的相交指数定义为 $\xi\circ\eta=(-1)^i\cdot d_*(\xi\times\eta)$．其中 d_* 为诱导同调映射，而 $\xi\times\eta\in H_n(X\times Y,(A\times Y)\cup(X\times B))$ 为 ξ 和 η 的外同调积．

相交指数 $\xi\circ\eta$ 仅依赖于同调类 ξ 和 η 那些支集包含在 $X\cap Y$ 的闭包的任意小的邻域 V 内的部分．特别地，如果 $X\cap Y=\varnothing$，则 $\xi\circ\eta=0$．此外，如果 $V=\bigcup_i V_i$，而 $V_i\cap V_j=\varnothing$，$i\neq j$，则相应于每个开集 V_i 可以定义 ξ 和 η 的局部相交指数，其和恰好等于 $\xi\circ\eta$．不变量 $\xi\circ\eta$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的自同胚下保持不变．利用前面的局部性质，这使得可以确定定向簇中紧致子集的相交指数 $\xi\circ\eta$．有如下的反交换关系：

$$\xi\circ\eta=(-1)^{i(n-i)}\eta\circ\xi.$$

如果 X 和 Y 为处于一般位置的向量子空间，$A=X\backslash 0$，$B=Y\backslash 0$，ξ 和 η 为 $R=H_{n-i}(X,A)=H_i(Y,B)$ 的生成元，则 $\xi\circ\eta$ 为 $H_n(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\backslash 0)=\mathbf{R}$ 的一个生成元．由于上述生成元的选取等价于相应 Euclid 空间定向的选取，因此可对满足 $|c|\cap|\partial c'|=\varnothing=|c'|\cap|\partial c|$ 的两个具有互补维数的链（可以是奇异链）定义相交指数 $c\circ c'$（$|c|$ 为链 c 的支集，其边缘为 ∂c 的支集）．此时，对于同调类 $\xi\in H_{n-i}(X,A)$，$\eta\in H_i(Y,B)$ 的链 c 和 c'，$|c|\subset X$，$|\partial c|\subset A$，$|c'|\subset Y$，$|\partial c'|\subset B$，有 $c\circ c'=\xi\circ\eta$.

相交指数被用于描述流形中某些对偶关系．

参考文献

[1] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Adams, J. F., Stable homotopy and generalised homology, Univ. of Chicago Press, 1974.

李贵松 译 张 平 校

集合的交 [intersection of sets; пересечение множеств]

集合的基本运算之一．假设存在有限或无限集族 $\{A_\alpha\}$（下标 α 用来区分集族 $\{A_\alpha\}$ 中的元素）．这时，由包含于一切集合 A_α 中的元素（即一切 A_α 的公共元素）组成的集合称为这些集合 A_α 的交．

这些集合 A_α 的交记为 $\bigcap A_\alpha$.

М. И. Войцеховский 撰 张鸿林 译

相交理论 [intersection theory; пересечений теория]，代数簇上的

代数子簇和闭链的相交理论．设 X 是域 k 上的 n 维光滑**代数簇**（algebraic variety），Y,Z 是 X 的余维数分别为 i 与 j 的子簇．如果 Y 和 Z 横截地相交，则 $Y\cap Z$ 是余维数为 $i+j$ 的光滑子簇，记为 $Y\cdot Z$．在一般情形下，二元组 (Y,Z) 构成了一个余维数为 $i+j$ 的**代数闭链**（algebraic cycle）$Y\cdot Z$.这个定义的基本思想是：Y 和 Z 被在某种意义下等价的闭链 Y' 和 Z' 所取代，使得 Y' 和 Z' 处于一般位置，然后取 Y' 和 Z' 的交．当然闭链 $Y'\cdot Z'$ 也是在等价意义下定义的．

设 $A^i(X)$ 是 X 上余维数为 i 的代数闭链的有理等价类的群，设 $A(X)=\oplus_{i\geq 0}A^i(X)$.周炜良的相交理论包含下述构造：

a）对于每个光滑拟射影簇 X．在 $A(X)$ 上构造一个分次交换环结构；

b）对于每个态射 $f:X\to Y$，构造一个分次环的同态 $f^*:A(Y)\to A(X)$（逆象）；

c）对每个**真态射**（proper morphism）$f:X\to Y$，构造一个 $\dim Y-\dim X$ 次的群同态 $f_*:A(X)\to A(Y)$（正象）.

在这三种构造 a），b），c）之间有一些关系式，其中最主要的是：

投影公式（projection formula）：对于真态射 $f:X\to Y$ 以及闭链 $\alpha\in A(X)$，$\beta\in A(Y)$，

$$f_*(\alpha\cdot f^*(\beta))=f_*(\alpha)\cdot\beta;$$

对角约化（reduction to the diagonal）：如果 $\Delta:X\to X\times X$ 是对角态射，且 $\alpha,\beta\in A(X)$，则 $\alpha\cdot\beta=\Delta^*(\alpha\times\beta)$.

此外，存在自然同态

$$c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to A^1(X).$$

利用它可以建立在周环内取值的**陈(省身)类**(Chern class)理论，特别是**陈(省身)特征标**(Chern character)

$$\mathrm{ch}: K(X) \to A(X) \otimes \mathbf{Q},$$

这是环同态.

不难确定正象同态 f_*. 设 $Z \subset X$ 是不可约子簇；当 $\dim f(Z) < \dim Z$ 时，$f_*(Z) = 0$，当 $\dim f(Z) = \dim Z$ 时，$f_*(Z) = d \cdot f(Z)$，这里的 d 是 Z 在 $f(Z)$ 上的次数. 利用线性性质，这个定义可扩展到闭链以及闭链的类. 而逆象同态 f^* 则利用公式

$$f^*(\alpha) = p_*(\Gamma_f \cdot (X \times \alpha)),$$

归结到闭链的乘法，这里 $p: X \times Y \to X$ 是投影，$\Gamma_f \subset X \times Y$ 是 f 的图象. 闭链相乘的定义分两步给出. 首先设 Y 和 Z 是正常地(properly)相交的 X 的不可约子簇(即 $Y \cap Z$ 的余维数等于 Y 和 Z 的余维数之和). 对交集 $Y \cap Z$ 的每个分支 W 可以规定一个正整数 $i(Y, Z; W)$，即局部相交重数(local multiplicity of the intersection). $i(Y, Z; W)$ 有几种定义，例如 Serre 的 Tor 公式：

$$i(Y, Z; W) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k l(\mathrm{Tor}_k^A(A/\mathfrak{a}, A/\mathfrak{b})),$$

这里 A 是局部环 $\mathcal{O}_{X,W}$，$\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是 Y 和 Z 的理想，l 是 A 模的长度. 然后令

$$Y \cdot Z = \sum_W i(Y, Z; W) \cdot W,$$

这里 W 取遍 $Y \cap Z$ 的不可约分支.

第二步是**周(炜良)移动引理**(Chow moving lemma)：对于拟射影簇 X 上的任何 Y 和 Z，存在与 Z 有理等价的闭链 Z'，使 Z' 与 Y 正常地相交；而且 $Y \cdot Z'$ 的有理等价类与 Z' 无关.

射影簇的情况是最令人感兴趣的. 把正象函子应用于结构态射 $X \to \mathrm{Spec}\, k$，就得到映射 $\deg: A(X) \to Z$. 从本质上说，闭链的次数说是它的零维分支的点数. 把乘法与次数复合后就可从数值上度量相交. 例如当 Y 和 Z 有相补的维数时，就可得到 Y 和 Z 的**相交指数(代数几何学中的)**(intersection index (in algebraic geometry))(**相交数**(intersection number)). 类似可得 n 个除子 $D_1, \cdots, D_n$ 的相交指数：

$$(D_1, \cdots, D_n) = \deg(D_1, \cdots, D_n).$$

举例来说，射影空间 P^n 的**周(炜良)环**(Chow ring)由超平面 H 的类所生成，这里 $(H^n) = (H, \cdots, H) = 1$. 因此当 $D_1, \cdots, D_n$ 是次数为 $d_1, \cdots, d_n$ 的超曲面时，$(D_1, \cdots, D_n) = d_1 \cdots d_n$ (Bezout 定理(Bezout theorem)). k 维射影簇 $Y \subset P^n$ 的次数定义为 Y 与具有相补维数的线性子空间 P^{n-k} 的相交指数；如果簇 Y 和 Z 横截地相交，则 $Y \cap Z$ 的次数是 Y 与 Z 的次数的乘积.

对于正常地相交的有效除子，$(D_1, \cdots, D)_n \geqslant 0$，但在一般的情形并不一定如此. 例如对于曲面上的例外曲线 E (见：**例外子簇**(exceptional subvariety))，$(E, E) = -1$.

其他一些理论也会具有周环理论的许多形式性质：以代数等价或数值等价为模的闭链，K 理论，奇异上同调理论 $H^*(,\mathbf{Z})$(在 $k = \mathbf{C}$ 的情形)以及 **l 进上同调**(l-adic cohomology)理论(亦见 **Weil 上同调**(Weil cohomology)). 这就导致了相交理论的公理化构造：使得每个簇 X(取自某个范畴)都对应到一个环 $C(X)$ 以及同态 f^* 与 f_*，后者又通过投影公式或对角约化公式那种类型的公理相联系(见[1]). 不同的相交理论之间的比较导出了有用的结果. 例如在复数的情形，**基本闭链**(fundamental cycle)的概念使人能定义相交理论的同态 $A(X) \to H^*(X, Z)$，后者又使人能应用超越方法. 把 **K 理论**(K-theory)与周理论相比较又导致 Riemann-Roch-Grothendieck 定理(见 **Riemann-Roch 定理**(Riemann-Roch theorem)). 在这里单项变换的相交理论起着重要作用([2],[6]). 相交理论的另一应用与 Schubert 的几何演算的基础有关([3]). 这个几何学分支可以被看作为一些簇的周环理论，这些簇对几何对象作了分类：Grassmann 流形，旗流形等.

参考文献

[1] Anneaux de Chow et applications, Sem. Chevalley, 1958.

[2] Манин, Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии ч. 2, М., 1971.

[3] Hilbert's problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437–479.

[4] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[5] Serre, J.-P., Algèbre locale. Multiplicités, Springer, 1965.

[6] Berthelot, P., et al. (eds.), Théorie des intersection et théorème de Riemann-Roch, SGA 6, Lecture notes in math., 225, Springer, 1971.

[7] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[8] Hartshorne, R. (ed.), Algebraic geometry, Arcata 1974, Proc. Symp. Pure Math., 29, Amer. Math. Soc., 1982.

[9] Fulton, W., Intersection theory, Springer, 1984.

В. И. Данилов 撰

【补注】W. Fulton 对奇异簇定义了周群([A1]). Fulton 和 R. MacPherson 又发展了更精细的相交理论：给出了 X 上的闭链 Y 和 Z，可以给出 $A(Y \cap Z)$ 的完全确定的元素 $X \cdot Y$([A2]).

另一个新发展是算术簇(arithmetic variety)的相交

理论，即数域的整数环上的平坦概形．再加上在无穷远处的一些附加的数据（[A3]－[A6]）．

参考文献

[A1] Fulton, W., Rational equivalence on singular varieties, *Publ. Math. IHES*, **45** (1975), 147－167.

[A2] Fulton, W. and MacPherson, R., Defining algebraic intersections, in L. D. Olson (ed.): Algebraic geometry, Lecture notes in math., Vol. 687, Springer, 1978, 1－30.

[A3] Faltings, G., Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. of Math.*, **119** (1984), 387－424.

[A4] Arakelov, S., Intersection theory of divisors on an arithmetical surface, *Math. USSR Izv.*, **8** (1974), 1167－1180. (*Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, **38** (1974), 6, 1179－1192).

[A5] Gillet, H., An introduction to higher dimensional Arakelov theory, in K. A. Ribet (ed.): Current trends in arithmetical algebraic geometry, Contemp. Math., Vol. 67, Amer. Math. Soc., 1987, 209－228.

陈志杰 译

交结数 [intertwining number; сплетения число]

交结算子 (intertwining operator) 空间 $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ 的维数 $c(\pi_1, \pi_2)$，其中的 π_1，π_2 是两个映射，将集合 X 分别映射到拓扑向量空间 E_1 和 E_2．交结数的概念当 X 是一个群或一个代数而且 π_1 和 π_2 是 X 的表示时特别富有成果．即使是有限维的表示，一般说来，$c(\pi_1, \pi_2) \neq c(\pi_2, \pi_1)$，但对于有限维的表示 π_1，π_2 和 π_3，下面的关系式成立：

$$c(\pi_1 \oplus \pi_2, \pi_3) = c(\pi_1, \pi_3) + c(\pi_2, \pi_3);$$

$$c(\pi_1, \pi_2 \oplus \pi_3) = c(\pi_1, \pi_2) + c(\pi_1, \pi_3);$$

又如果 X 是一个群，则还有等式

$$c(\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3) = c(\pi_1, \pi_2^* \otimes \pi_3).$$

如果 π_1 和 π_2 是不可约的和有限维的，或者是酉表示，则 $c(\pi_1, \pi_2)$ 等于 1 或 0，视 π_1 和 π_2 等价与否而定．对于一个紧群的连续有限维表示，交结数可以用表示的特征标表述出来（亦见**群表示的特征标** (character of a representation of a group)）．

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, М., 1972 (英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本：Naĭmark, M. A. and Shtern, A. I., Theory of group representations, Springer, 1982).

А. И. Штерн 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

交结算子 [intertwining operator; сплетающий оператор]

一个连续线性算子 $T: E_1 \to E_2$，使得 $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$，其中的 π_1 和 π_2 分别是集合 X 到两个拓扑向量空间 E_1 和 E_2 的映射，$x \in X$．这一概念当 X 是一个群或者一个代数且 π_1，π_2 是 X 的表示时特别富有成果．交结算子集构成空间 $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$，它是由从 E_1 到 E_2 的所有连续线性映射构成的空间的一个子空间．如果 $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2) = (0)$ 及 $\mathrm{Hom}(\pi_2, \pi_1) = (0)$，则 π_1 和 π_2 称为不相交表示 (disjoint representations)．如果 $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ 包含一个定义了 E_1 和 E_2 同构的算子，则 π_1 和 π_2 是等价的．如果 E_1，E_2 是局部凸空间，E_1^* 和 E_2^* 是它们的伴随空间，又如果 π_1^* 和 π_2^* 分别是 π_1 和 π_2 的**逆步表示** (contragredient representation)，则对于任意 $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$，算子 T^* 包含在 $\mathrm{Hom}(\pi_2^*, \pi_1^*)$ 中．如果 π_1 和 π_2 是有限维的，或者是单式表示，而且 π_1 是不可约的，则 π_2 容许一个等价于 π_1 的子表示，当且仅当 $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2) \neq 0$．亦见**交结数** (intertwining number)．

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本：Naĭmark, M. A. and Shtern, A. I., Theory of group representations, Springer, 1982).

А. И. Штерн 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

区间，间隔 [interval; интервал]

1) 见**区间和线段** (interval and segment).

2) 一个时空间隔 (space-time interval) 是表征以一空间距离和一时间期间相分隔的两事件之间关系的量．在狭义相对论中，一个间隔的平方是

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

其中 c 是光速，x_i，y_i，z_i 是空间坐标，t_i 是相应时间点（更详细情况，见 **Minkowski 空间** (Minkowski space)）．

在广义相对论中，人们考虑无限接近的两个事件之间的间隔：

$$ds = \sqrt{-g_{ik}dx^i dx^k},$$

其中 dx^i 是这些事件时空坐标的微差和 g_{ik} 是度规张量．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 具有 $s^2 > 0$ 的时空间隔称为类时时空间隔 (time-like space-time interval)，而具有 $s^2 < 0$ 的时空间隔称为类空时空间隔 (space-like space-time interval)．

参考文献

[A1] Lawden, D. F., An introduction to tensor calculus

and relativity, Methuen, 1962.
[A2] Sachs, R. K. and Wu, H., General relativity for mathematicians, Springer, 1977.
[A3] Tocaci, E., Relativistic mechanics, time, and inertia, Reidel, 1985, Sect. A. II. 1.4.

【译注】 一般称为事件间隔(interval of events),简称间隔(interval).

徐锡申 译

区间分析[interval analysis; интервальный анализ]

旨在计算在数字计算机上由计算产生的舍入误差的一种理论.由于并不是所有的数都能够准确地在计算机上表示成有限算术的形式,每个计算结果都可能包含一些误差,这种误差来自初始数据和中间结果的舍入.为计算这些误差的总效应,对于每个量都可以使其与一对数相伴,这对数就是这个数向上和向下的舍入,在计算机上可有一个准确的描述.于是,每个量都可以由一个包含它的区间代替.在作算术运算后,新区间将根据特殊运算来形成.

设 $\mathbf{G}$ 是区间的集合 $\{[a,b]\}$.区间上的初等算术运算定义如下:

$$I\star J=\{x\star y:\ x\in I,\ y\in J\},\ I,\ J\in\mathbf{G},$$

这里 $\star\in\{+,\ -,\ \cdot,\ /\}$.除法仅当除数区间不含有零时才能进行.集合 $\mathbf{G}$ 在加法和乘法的条件下是一个半群.下面等式成立:

$I+(J+K)=(I+J)+K$ —— 加法结合律;

$I\cdot(J\cdot K)=(I\cdot J)\cdot K$ —— 乘法结合律;

$I+J=J+I$ —— 加法交换律;

$I\cdot J=J\cdot I$ —— 乘法交换律.零元和单位元分别为区间 $\mathbf{0}=[0,\ 0]$ 和 $\mathbf{1}=[1,\ 1]$.这种代数结构的一个特征是加法和乘法两种情况下的逆元素都不是唯一确定的,即方程(对 X)$I+X=J$ 和 $I\cdot X=J$ 一般并没有唯一解.而且分配律不成立,例如

$$[1,\ 2]\cdot([1,\ 2]-[1,\ 2])=$$

$$=[1,\ 2]\cdot[-1,\ 1]=[-2,\ 2],$$

同时

$$[1,\ 2]\cdot[1,\ 2]-[1,\ 2]\cdot[1,\ 2]=$$

$$=[1,\ 4]-[1,\ 4]=[-3,\ 3].$$

只有次分配律成立:

$$I\cdot(J+K)\subseteq I\cdot J+I\cdot K.$$

区间运算关于包含关系是单调的.如果 $I\subset K$, $J\subset L$,则

$I+J\subset K+L,\ I-J\subset K-L,\ I\cdot J\subset K\cdot L,\ I/J\subset K/L.$

可由度量 $\rho(I,\ J)=\max(|c-a|,\ |d-b|)$ 在 $\mathbf{G}$ 内引入一个拓扑,其中 $I=[a,\ b]$, $J=[c,d]$,而半序定义如下:若 $b\leqslant c$,则 $I<J$,若 $a=c$ 且 $b=d$ 则,$I=J$.

由 $\mathbf{G}$ 到 $\mathbf{G}$ 的一个单值函数称为区间函数(interval function).可以用通常的方法引入区间函数连续的概念.可定义区间函数的导数,不定积分,定积分.

区间分析可以成功地应用于求解某些问题,但是,使用这个方法的代价是很高的.执行的运算量及所需存储空间达两倍以上.而且,在充分大规模的问题中包含最终答案的区间一般很大,以致实际上使问题得不到答案.为克服这个困难,一种具有概率论特征的区间分析方法已得到发展(见[3]).

参考文献

[1] Moore, R. E., Interval analysis, Prentice-Hall, 1969.
[2] Хемминг, Р. В., Численные методы, пер. с англ., М., 1968.
[3] Nickel, K. (ed.), Interval mathematics. Lecture notes in computer science, 29, Springer, 1975.

В. В. Поспелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Miranker, W. L. and Kulisch, U., Computer arithmetic in theory and practice, Acad. Press, 1981.
[A2] Miranker, W. L. and Kulisch, U., A new approach in scientific computing, Acad. Press, 1983.
[A3] Yohe, J. M., Software in interval arithmetic, *ACM Trans. Math. Software*, **5** (1979), 50–63.

张宝琳、袁国兴 译

区间与线段[interval and segment; интервал и сегмент]

直线上最简单的点的集合.一个区间(interval)(开区间(open interval))是直线上处于两固定点 A 和 B 之间的点的集合,这里认为 A 和 B 本身不属于该区间.一个线段(segment)(闭区间(closed interval))是两点 A 和 B 之间的点的集合,这里 A 和 B 包括在内."区间"和"线段"两词也用来表示相应的实数集合:区间由满足 $a<x<b$ 的数 x 组成,而线段由满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的数 x 组成.区间用 $(a,\ b)$ 或 $]a,\ b[$ 表示,线段用 $[a,\ b]$ 表示.

"区间"一词也在较广的意义下使用,即表示直线上的任意连通集.这时,不仅考虑 $(a,\ b)$,而且考虑无限的,即反常的区间 $(-\infty,\ a)$, $(a,\ +\infty)$, $(-\infty,\ +\infty)$,线段 $[a,\ b]$,半开区间 $[a,\ b)$, $(a,\ b]$, $(-\infty,\ a]$, $[a,\ +\infty)$.这里,圆括号表示不包括区间的相应端点,方括号表示包括相应端点. БСЭ-3

偏序集中的区间(interval in a partially ordered set)的概念更为一般.这里,区间 $[a,\ b]$ 由**偏序集**(partially ordered set)的一切满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的元素 x 组成.偏序集的恰好由两个元素组成的区间称为简单区

间(simple interval). Л. А. Скорняков 撰 张鸿林 译

闭区间[interval、closed; отрезок],线段(segment)

直线上处于两给定点 a 和 b 之间的一切点(包括两端点 a 和 b)的集合. 记为 $[a, b]$. 亦见**区间和线段**(interval and segment). 张鸿林 译

区间估计[interval estimator; интервальная оценка],概率分布标量参数的未知真值的

属于参数允许值集的区间, 其边界是服从给定分布的观测结果的函数. 设 X 是在样本空间 $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathrm{P}_\theta\}$ $(\theta\in\Theta)$ 中取值的随机变量, Θ 是实数轴上的区间, 其中参数 θ 的真值未知. 边界为被观测随机变量 X 值的函数的区间 $(a_1(X), a_2(X))\subseteq\Theta$, 称为 θ 的区间估计或置信区间(confidence interval); 数

$$p=\inf_{\theta\in\Theta}\mathrm{P}\{a_1(X)<\theta<a_2(X)\mid\theta\}$$

称为该置信区间的置信系数(confidence coefficient), 而 $a_1(X)$ 和 $a_2(X)$ 分别称为下置信限(lower confidence bounds)和上置信限(upper confidence bounds). 当估计参数 θ 的某个函数或该函数的某一个值时, 区间估计的概念可以推广到更一般的情形.

假设在集合 $T\subset\mathbf{R}^1$ 上有一函数族

$$u(\theta,\cdot)=(u_1(\theta,\cdot),\cdots,u_k(\theta,\cdot)): T\to\mathfrak{U}\in\mathbf{R}^k,$$
$$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Theta\subset\mathbf{R}^m;$$

并假设要求根据取值于样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathrm{P}_\theta)$ $(\mathfrak{X}\subset\mathbf{R}^n, \theta\in\Theta)$ 的随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的实现, 来估计对应于未知参数 θ 的真值的函数 $u(\theta,\cdot)$. 对于每一个 $t\in T$, 在 $\mathfrak{U}$ 中有一集合 $B(t)$ 与之相对应, 它关于映射 $u(\cdot,t)$ 是集合 Θ 的象: $\Theta\to B(t)\subset\mathfrak{U}$. 根据定义, 集合 $C(X,t)\in B(t)$ 称为函数 $u(\theta,\cdot)$. 在点 $t(t\in T)$ 处值 $u(\theta,t)$ 的置信集(confidence set), 其置信概率(confidence probability)为

$$\mathrm{P}\{u(\theta,t)\in C(X,t)\mid\theta\}=p(\theta,t),$$

而置信系数为

$$p(t)=\inf_{\theta\in\Theta}p(\theta,t).$$

所有置信集的全体在 $\mathfrak{U}$ 中构成函数 $u(\theta,\cdot): T\to\mathfrak{U}$ 的置信区域(confidence region) $C(X)$, 其置信概率为

$$\mathrm{P}\{C(X)\ni u(\theta,\cdot): T\to\mathfrak{U}\mid\theta\}=\widetilde{p}(\theta),$$

而置信系数为

$$p=\inf_{\theta\in\Theta}\widetilde{p}(\theta).$$

形如 $C(X,t)$ 和 $C(X)$ 的集合, 分别称为函数 $u(\theta,\cdot)$ 在点 t 处的值 $u(\theta,t)$ 和函数 $u(\theta,\cdot)$ 本身的区间估计.

存在若干种建立未知分布参数的区间估计的方法, 其中最常用的有, 基于 Bayes 定理的 **Bayes 方法**(Bayesian approach), 基于**信念分布**(fiducial distribution)的 Fisher 方法(关于 Fisher 方法见[3], [5]), **置信区间 Neyman 法**(Neyman method of confidence intervals ([5],[8],[9])) 以及 Н. В. Большев ([6]) 提出的方法.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[2] Fisher, R. A., Statistical methods and scientific inference, Hafner, 1973.

[3] Бернштейн, С. Н., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **5** (1941), 85 – 93.

[4] Большев, Л. Н., Камментарии к статье о 《доверительных》 вероятностях Фишера, в кн., Бернштейн, С. Н., Собр. соч., т. **4**, М., 1964, 566 – 569.

[5] Neyman, J., Silver jubilee of my dispute with Fisher, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **3** (1961), 4, 145 – 154.

[6] Большев, Л. Н., 《Теория вероят. и её примен.》, **10** (1965), 1, 187 – 192.

[7] Большев, Л. Н., Логинов, Э. А., 《Теория вероят. и её примен.》, **11** (1966), 1, 94 – 107.

[8] Neyman, J., Fiducial argument and the theory of confidence intelvals, *Biometrika*, **32** (1941), 2, 128 – 150.

[9] Neyman, J., Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, **236** (1937), 333 – 380.

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

周概容 译

开区间[interval, open; открытый промежуток], 开线段(open segment)

介于两给定点 a 和 b 之间的, 即满足条件 $a<x<b$ 的一切点的集合. 开区间不包含端点, 记为 (a, b), 以区别于包含端点的闭区间 $[a, b]$, 后者即由满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的点组成的集合. БСЭ-3

【补注】 亦见**闭区间**(interval, closed); **区间和线段**(interval and segment).

越来越多的作者使用另一种记号 $]a, b[$ 来表示开区间 $a<x<b$. 张鸿林 译

直觉主义[intuitionism; интуиционизм]

把数学看成是智力构造的科学的哲学和数学思想和方法的集合．由直觉主义者观点看来，数学推演真性的基本标准是，执行一个关于此推演的智力试验的可能性在直觉上是明显的．因此，在直觉主义数学中，人们拒绝数学概念的定义的集论式的途径以及经典逻辑中推演习俗的某些方式．

直觉主义的来源可以追溯到古代，其后出现在像 C. F. Gauss、L. Kronecker, H. Poincaré, H. Lebesgue 和 E. Borel 的论述中．1907 年以后 L.E.J. Brouwer 在一系列文章中详细地批评经典数学中某些概念．批评的基础建立在数学中存在性情况的考虑：在什么意义下，人们可以认为建立了一确切给定的无穷集的存在性，以及像实数的非可测集或无处可微函数的研究对象的潜在可实现性．可以自然地假定，人们可以构造任意自然数为一单一型对象的序列，例如是一系列平行的竖杠．在统一的框架下，在构造了某个自然数后，可以构造下一个自然数，即在已造的自然数之后加一竖杠．但是问题产生了：用什么构造的办法可以把我们构造的对象和一切实数相联系呢？或者说把自然数集作为研究的单个对象时，用什么相应的构造办法呢？现代物理学的概念不能为此提供很好的基础．因为我们周围的世界实际上不存在任何对象的无穷集．如果人们宣称某些对象不用**实无穷的抽象**（abstraction of actual infinity），只用有限制的**潜在可实现性的抽象**（abstraction of potential realizability）而建立了它们的存在性，那么当和现实有更直接的关系时会给出一很危险的基础．但是在通常的集论处理中，人们不把其存在性是由一潜在可实现构造来验证的对象和抽象集论的研究对象加以区别．在经典数学中建立这两种对象的性质的方法是建立在逻辑规律的基础上的，而这些逻辑规律都是对有穷集是对的，按有穷集规律延伸到无穷集上的．在无穷的领域内，这些规律不能引向被认为存在的对象的能行构造．这个途径实际上引向数学上称之为“纯粹存在定理”的出现．在这些定理中，只讲对象的存在性而不讲找出它们的方法．例如，经典的分析定理：在一 $\mathbf{R}^n$ 中的闭有界集上的每个实值连续函数可达一极大值．这定理的通常证明并不告诉你如何构造所求的极大值的方法．这和集合论数学一样：可以认为，极大值对每个所考虑的类中的一切函数“存在”，且独立于是否在每个个别的情况下可找到的问题；极大值作为某个可想像的世界（一个“柏拉图式”世界，对照 [6]）的客体而“存在”．但是，如果人们考虑主题研究者的可能性时，如此途径并不充分．是否有寻找极大值的方法？如果没有，那么对考虑的类中的每个函数都存在极大值的看法是否是真的？众所周知，寻找一个非常局限的类（多元有理系数多项式）的函数的极值很困难，而主要的是所述的定理对解决这种问题完全没有用处．必须指出，上述对经典数学的非难并不直接涉及集合论中的矛盾（见**悖论**（antinomy））．矛盾的出现可以看成是集合论途径的不可满足性的补充证明．但是，这非难也导向在其中不出现矛盾的数学分支．

上述对数学中集合论途径的非难历史地引向克服数学基础里困难的两条道路（Brouwer 的直觉主义和 D. Hilbert 的**形式主义**（formalism））的发展．在他们的苦心经营下、现在表明，他们的概念相互有重要的影响．因此，当证实形式理论的相容性时，必须使数学中有用的推理方法精确化；这通常是在直觉主义概念范围内进行的．另一方面，用了**形式化方法**（formalization method），人们可以找到若干关于直觉主义逻辑的若干重要结果．

直觉主义数学是直觉信服的智力构造的科学．Brouwer 自己把这种直觉的动机看成是观念上的，方式是把智力构造看成“与构造对象性质问题无关，只与它们的存在问题有关，而它们的存在性独立于我们关于它们的知识”（见 [1]）．但是，也有把直觉主义的可能的现实主义来源，作为真实活动的最简单的构造步骤的明确智力动机．撇开哲学观点不谈，与直觉主义数学和逻辑有关的具体数学结果有很大的科学价值．

在直觉主义数学的构造中，用于陈述数学命题的通常的逻辑联接词，是以与经典方式不同的方式加以解释．一命题被认为是真的，仅当研究者有一证明它的手段．这里涉及的证明永远与执行某个智力构造有关．因此，一个以存在量词开始的命题 $\exists x A(x)$ 的证明方法，只能是构造一个使 $A(x)$ 可被证实的对象 x．二命题 A 和 B 的析取式 $A \vee B$ 被认为是已被证明，仅当研究者的处理里有证明 A, B 之一的方法．由此观点，一命题 $A \vee \neg A$ 并不一定是真的．如果人们不能指出一方法使之最终能产生 A 或者 $\neg A$ 的证明．因此，在直觉主义数学中**排中律**（law of excluded middle）不能作为逻辑原则加以应用．一个真命题是考虑可被执行的构造的信息，且这些构造的能行性质以一特殊的与经典逻辑不同的直觉主义逻辑的使用为先决条件．此外，能行性在广义的意义下被考虑；它不涉及这个字在精确意义下的算法的存在性，且可能有历史事实的累积性质，或可以依赖于一问题的真实解或依赖于物理因素．

直觉主义数学中研究的对象首先是像自然数或有理数这样的构造性对象和藉列出它们的元素而给出的构造性对象的有限集（见**构造对象**（constructive object））．研究的固有对象是所谓的自由建立的序列（另一术语是选择序列（choice sequences））．选择序列可表示为定义在自然数集上的函数，取值为一定类研究的对象的（最简单情况是自然数集），且使得它的每个值能行地变为一可允许序列．精确的分析表明，人们

必须藉研究者所知道的关于选择序列的信息度去区别几类选择序列．因此，如果已经知道选择序列的整个形成规则，例如作为一相应算法的描述，则如此选择序列被称为有规则序列．另一极端是，任何时刻研究者只知道选择序列的一前节没有任何将来行为的信息；如此选择序列称为无规则的（lawless）．这种经典数学里不管的区别可用反映形成这些选择序列的不同方式的精细数学原则在直觉主义数学中表示．最后，所谓直觉主义的**种类**（species）可看成是直觉主义数学研究的对象．种类是研究对象可以有的性质．有这种性质的对象被称为种类的元素或项．为了避免矛盾的出现，人们可以引进像**类型论**（types, theory of）那样的种类的分层，其中要求种类的元素要独立于种类的定义来下定义．显然，在直觉主义数学中广泛地引进种类会（在直觉主义数学之中）出现一问题，这就是抽象集合论的特征，例如直谓性、明显的矛盾等等．但是，人们必须记住，一方面处理种类和在经典数学中处理集合很不相同，而另一方面在直觉主义数学的实际工作中种类处于非常次要的地位．实际上，绝大多数结果可以完全不必把种类作为研究的独立对象而加以陈述和证明．这涉及把能行可构成或能行可产生对象作为研究对象的趋势．研究的其他“非传统”对象也被认为包容在直觉主义的框架内．可以看出，有限种类的能行泛函的研究是富有成果的．用这些结果，人们可以在直觉主义框架内构造经典分析的解释（P. S. Norikov, K. Gödel, C. Spector）．

拒绝承认实际给定的无穷集和要求一切可实现对象的能行性导致这样的事实，在直觉主义数学中某些传统的数学分支获得很不寻常的形式．实线段不看成单个点的集合，而看成“构造的手段”，看成加细的有理区间的展形（见**展形（直觉主义中的）**（spread (in intuitionistic logic)））．每个直觉主义实数决定一个选择序列，它的值是无限加细的嵌套的有理区间．在关于直觉主义实直线的论证中，人们要用像**坝归纳**（bar induction）和**扇**（fan）定理这样的规则．其结果是例如在概念的自然体系中，每个在闭区段上定义的直觉主义的实值函数是一致连续的．直觉主义数学是数学中已很好地发展了的一个方向，它包含了在一些分支，如测度论、泛函分析、拓扑学、微分方程论中的许多深刻的结果．

除了这些研究，H. Weyl (1918) 企图在直谓途径的基础上构造数学．Weyl 大致同意直觉主义式的批评．他提出，人们要局限于研究构造性对象，且要把集合看成在一特定语言里的条件，这条件在定义时不能破坏集合定义的直谓性．其后 Weyl 加入了数学构造的直觉主义概念，而他的观点建立在数学基础的深入研究的基础上．

以考虑构造的真性的标准作为一切直觉的首要点，且与形式主义不同，Brouwer 反对企图去建立直觉主义数学特别是直觉主义逻辑．但是恰恰是在把基本的规律精确地陈述成**演算**（calculas）之后，直觉主义逻辑的研究取得很大的成绩，其中直觉主义的演算里也可以用数理逻辑的工具．在发展直觉主义逻辑时，数学家大量地在参与时不认为自己是直觉主义者．另外，数学中真性的问题不那么重要了，特殊的直觉主义演算有很大的数学兴趣，因为它澄清了数学中能行性的不同概念．直觉主义发展的现代方向是后来更广意义下的**构造数学**（constructive mathematics）．

在由 H. Heyting 对直觉主义谓词演算（见**直觉主义逻辑**（intuitionistic logic））有了确切的陈述后，建立了一个拓扑解释（A. Tarski）和一个作为问题演算的解释（A. H. Колмогоров）．逻辑联接词的独立性和不可能把直觉主义谓词演算表示成有穷值逻辑也被证明（K. Gödel）．Heyting 描述了直觉主义算术演算（intuitionistic arithmetical calculus），如果把经典算术演算建立在直觉主义谓词演算基础上就可以得到它．对谓词和算术演算，Колмогоров 和 Gödel 提出直觉主义演算对经典演算否定部分的**浸入运算**（immersion operation）（或**解释**（interpretation））．特别地，这可以推导出，如果直觉主义演算是无矛盾的，那么经典演算也无矛盾．直觉主义的析取词和存在性质被建立．这就是如果命题 $\exists x A(x)$ 可被推导出，那么对某个项 t，$A(t)$ 可被推导出，$A \vee B$ 的可推导性蕴涵 A 的可推导性或 B 的可推导性．命题的直觉主义概念的某些变型被 S. C. Kleene 以**递归可实现性**（recursive realizability）的形式提出来．恰在这意义下，这是 A. A. Марков 发展的数学的构造方向的特征．广意的理解直觉主义这个词，人们可把数学的构造方向看成直觉主义的一变型，在其中用算法方法来研究构造对象及构造过程．

直觉主义谓词演算的语义完全性已被研究．在直觉主义逻辑的模型的理论里给出了可推导性的一个完全是代数的刻画（E. Beth 和 S. Kripke 给出）．这些理论在直觉主义数学的其他部分中有应用．直觉主义逻辑关于一选择序列的某种概念是完全的．但是它关于递归可实现性不完全．量词的直觉主义概念允许人们在算术中把 **Church 论题**（Church thesis）陈述为一数学命题．例如，当写成“如果对每个自然数 x 都有一自然数 y 满足关系 $A(x, y)$，那么有一个一般递归函数 f 使得 $A(x, f(x))$ 对一切 x 成立就可以做到了；这关系 $A(x, y)$ 必须不包含选择序列型的非构造性参数．**Марков 的构造选择原理**（Markov constructive selection principle）也可以在算术语言中自然地陈述．直觉主义理论中的这两个基本原则的关系是当前许多研究的主题．

选择序列理论的一个满意的构造和直觉主义数学

的高等分支在 19 世纪都已完善．通常直觉主义分析 (intuitionistic analysis) 的形式理论语言包含两类变元：自然数的变元 $x, y, z\cdots$ 和把自然数映到自然数的选择序列的变元 $\alpha, \beta, \gamma\cdots$．理论包含对函数和数上的原始递归运算作为项符号．原子公式的形式是二项组成的等式，对两类变量都可用量词．该理论包含了直觉主义算术演算的一切公设．这组公设保证了对函数和数的原始递归变换的一切基本性质的引入．所以在理论中可以描述一个用自然数编码自然数有限序列 (数组，见**多元组** (tuple)) 的一一对应．令 $(x_1, \cdots, x_n)$ 表示以数 $x_1, \cdots, x_n$ 为项的数组；$x \star y$ 是数组的联接运算 (concatenation)，即若 $x=\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$，且 $y=\langle y_1, \cdots, y_m\rangle$，则 $x \star y=\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m\rangle$．只具有一个项的数组 $\langle x\rangle$ 的数记为 $\hat{x}$．令 $\hat{\alpha} x$ 表示数组 $\langle\alpha(0), \cdots, \alpha(n-1)\rangle$．人们用 $\alpha \in K$，意指

$$\forall \beta \exists x(\alpha(\bar{\beta} x)>0) \& \forall x y$$

$$(a x>0 \supset \alpha(x \star y)=\alpha(x)),$$

来引进谓词"α 是一连续算子"．用一连续算子于选择序列的结果可定义如下：$y=\alpha(\beta)$ 意指

$$\exists z(y+1=\alpha(\bar{\beta} z)),$$

且 $\gamma=(\alpha \mid \beta)$ 意指

$$\forall y \exists z(\gamma(y)+1=\alpha(\hat{y} \star \beta(\bar{z}))).$$

此外，令 $(\beta)_x$ 表示函数 α，它满足

$$\forall y(\alpha(y)=\beta(\langle x, y\rangle)) .$$

用这些算子，人们可以精确地陈述关于选择序列的某些基本原则．

首先有直觉主义选择公理 (intuitionistic axiom of choice)

$$\forall x \exists \alpha A(x, \alpha) \supset \exists \beta \forall x A(x,(\beta)_x),$$

Brouwer 连续性原理 (Brouwer continuity principle)

$$\forall \alpha \exists \beta A(\alpha, \beta) \supset(\exists \gamma \in K) A(\alpha,(\gamma \mid \alpha)),$$

及**坝归纳** (bar induction)．这些原理给出 Kleene 提出的选择序列的形式理论．这理论足以得到直觉主义分析，包括扇定理、连续函数的一致连续性等等定理．人们必须记住，这理论只反映构造直觉主义分析特别方便的一种直觉主义序列．选择序列的其他有特征意义的类是上述无规则序列．如下的开数据原理 (principle of open data) 指出，在一无规则序列中的一切信息可藉研究它的前节而抽出：

$$A(\alpha) \supset \exists x y(a x=y \& \forall \beta(\bar{\beta} x=y \supset A(\beta))).$$

其中 α 是在 $A(\alpha)$ 中出现的仅有的选择序列变元．

还有一种选择序列出现在企图在一形式理论中表达那些依赖于问题解的选择序列的存在性之中．对如此选择序列，所谓的 Kripke 概形 (Kripke scheme)：

$$\exists \alpha((\forall x a(x)=0 \equiv \neg A) \wedge(\exists x \alpha(x) \neq 0 \supset A))$$

成立．

不同的直觉主义原则用于不同的选择序列类．所以对无规则序列一般形式下的直觉主义选择公理不成立，且对依赖于问题解的序列所述 Brouwer 连续性原理不成立．表示直觉主义类型论的形式理论尚未很好建立．但是也有企图处理类型的特定的直觉主义工具被陈述过，例如若 X 是一自然数类型的变元；则如下称为一致性的原则可被接受：

$$\forall X \exists x A(x, X) \supset \exists x \forall X A(x, X).$$

直到 20 世纪的后半世纪 Brouwer 的想法只被一小部分数学家、直觉主义者赏识，尽管这些人对数学基础的进一步研究有很大影响．最近情况有些改变．证明论的发展使得有可能在正合演算形式中陈述基本的直觉主义理论，且对它们进行精确的研究．数学中计算倾向的发展产生对证明的能行工具的逻辑分析，也对数学中用的抽象性的研究产生兴趣．基于某些构造性想法的重新构造数学的各种计划出现了．把直觉主义的传统方法和证明论的现代方法的综合可能极大地推进直觉主义．

参考文献

[1] Heyting, A., Intuitionism: an introduction, North-Holland, 1970.

[2] Kleene, S. C. and Vesley, R. E., The foundations of intuitionistic mathematics: especially in relation to recursive functions, North-Holland, 1965.

[3] Kreisel, G. and Troelstra, A. S., Formal systems for some branches of intuitionistic analysis, Ann. Math. Logic, 1 (1970), 3, 229 - 387.

[4] Troelstra, A. S., Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, Lecture notes in math., 344, Springer, 1973.

[5] Martin-Löf, P., Notes on constructive mathematics, Almqvist & Wiksell, 1970.

[6] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

A. G. Dragalin 撰

【补注】

上述另一个影响对直觉主义兴趣的恢复的因素是范畴逻辑的产生特别是拓普斯理论 (见**拓普斯** (topos)) 的出现．一拓普斯内逻辑性质上是直觉主义式的．实际上一拓普斯可以认为是高价直觉主义类型理论的模型，且直觉主义的拓普斯模型推广了 Beth 和

Kripke 的代数模型和 Tarski 和 Scott 的拓扑模型.

一个包罗万象的截止到目前情况的报告见 [A3], 它也列有丰富的文献目录.

参考文献

[A1] Fourman, M. P., The logic of topoi, in J. Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977, 1053 - 1090.

[A2] Fourman, M. P. and Scott, D. S., Sheaves and logic, in M. P. Fourman, C. J. Mulvey and D. S. Scott (eds.), Applications of Sheaves, Springer, 1979, 302 - 401.

[A3] Troelstra, A. S. and Dalen, D. van., Constructivism in mathematics, 1 - 2, North-Holland, 1989.

[A4] Dummett, M. A. E., Elements of intuitionism, Oxford Univ. Press, 1977.

[A5] Dalen, D. van (ed.), Bouwer's Cambridge Lectures on intuitionism, Cambridge Univ. Press, 1981.

[A6] Beeson, M., Foundations of constructive mathematics, Springer, 1985.

杨东屏 译

直觉主义算术 [intuitionistic arithmetic; интуиционистское арифметическое исчисление]

见**直觉主义** (intuitionism).

直觉主义逻辑 [intuitionistic logic; интуиционистская логика]

一个从**直觉主义** (intuitionism) 观点来看有效的证明语句的方法集合. 在狭义的意义下, 直觉主义逻辑指的是 A. Heyting 在 1936 年陈述的直觉主义谓词演算 (intuitionistic predicate calculus). 这个演算通常在**谓词演算** (predicate calculas) 语言中陈述包含**直觉主义命题演算** (intuitionistic propositional calculus) 的一切公理模式和推演规则 (但是这里用的是谓词演算语言), 外加如下的量词公理和推演法则 (quantifier axioms and derivation rules). 公理有

$$\forall x A(x) \supset A(t) \text{ 和 } A(t) \supset \exists x A(x)$$

以及二推演法则

$$\frac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}, \quad \frac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}.$$

其中 x 是一变元, t 是语言中的项, 且公式 C 不含 x 作为一参数.

直觉主义谓词演算的完全性依赖于直觉主义理论的语义原则基础. 所以, 形式为

$$\forall x(P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg \neg \exists x P(x) \supset \exists x P(x)$$

的**构造性选择原理** (constructive selection priciple) 在直觉主义谓词演算中不能被推演出, 但在一定的构造主义途径里可以认为是真的. 在这方面的另一个例子是所谓单值化原理 (uniformization principle) 的

$$(\neg Q \supset \exists x P(x)) \supset \exists x(\neg Q \supset P(x)),$$

它在某些直觉主义的解释中为真, 且同时在附加了 **Church 论题** (Church thesis) 的算术理论框架内与构造性选择原理不相容. 给定的例子表明, 没有对一切实际使用于各直觉主义理论的逻辑基础都合适的完全的直觉主义谓词演算. 可能有依赖于不同的语义规定的本质上互异的直觉主义逻辑. 推演的直觉主义理论的发展 (见**逻辑推导** (derivation, logical)) 允许人们在直觉主义框架内精确地陈述许多语义问题. 所以 K. Gödel 证明了关于推演的直觉主义谓词演算的完全性蕴涵对原始递归谓词的 Марков 的构造选择原理. 由这些语义的看法, 这是一个倾向谓词演算不完全性的论证. 另外已经发现, Beth 模型或 **Kripke 模型** (Kripke models) 的代数语义的直觉主义逻辑完全性的直觉主义有效的证明.

参考文献

[1] Heyting, A., Intuitionism: an introduction, North-Holland, 1970.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 上、下册, 科学出版社, 1984 - 1985).

A. G. Dragalin 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dummett, M. A. E., Elements of intuitionism, Oxford Univ. Press, 1977.

杨东屏 译

直觉主义谓词演算 [intuitionistic predicate calculus; интуиционистское исчисление предикатов]

见**直觉主义逻辑** (intuitionistic logic).

直觉主义命题演算 [intuitionistic propositional calculus; интуиционистское исчисление высказываний]

一个描述从**直觉主义** (intuitionism) 观点来看有效的命题推演法则的**逻辑演算** (logical calculas). 一个被广泛接受的直觉主义命题演算的陈述是由 A. Heyting 在 1930 年给出的. 它和经典命题演算的基本不同之处在于用较弱的矛盾原理 (contradiction principle)

$$A \supset (\neg A \supset B)$$

取代**排中律** (law of the excluded middle) (或双否定律 (law of double negation)).

直觉主义命题演算的一个一般变异形式可陈述如下. 设 A, B, C 是所考虑的语言中的任意公式. 演算的公理是下列公式:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;

3. $A \supset (B \supset A \wedge B)$;
4. $A \wedge B \supset A$;
5. $A \wedge B \supset B$;
6. $A \supset A \vee B$;
7. $B \supset A \vee B$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
10. $A \supset (\neg A) \supset B)$.

直觉主义命题演算的仅有的推理法则是假言推理法则(rule of modus ponens): 若 A 和 $A \supset B$ 可被推演出，则 B 可被推演出.

由直觉主义观点来看，这个演算的每个可被推演出公式都是有效的; 上述演算的完全性问题是更精细的. 直觉主义命题演算关于代数语义，Kripke 模型和 Beth 模型是完全的、但是关于 Kleene 的**递归可实现性**(recursive realizability)解释是不完全的; 亦见**构造命题演算**(constructive propositional calculas).

关于参考文献，见**直觉主义**(intuitionism).

A. G. Dragalin 撰 杨东屏 译

统计程序的不变性 [invariance of a statistical procedure; инвариантность статистической процедуры]

一统计问题中某一判决规则关于群 G 的不变性(见下文)，其中 G 是该问题提法容许的对称族. 不变统计程序的概念首先出现在数理统计的所谓参数问题中，有先验信息: "观测结局 ω 的概率分布 $P(d\omega)$ 属于已知族 $\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$" 时. 设 G 是结局的可测空间 (Ω, B_Ω) 之可测变换 g 的群，则称统计判决问题关于变换群 G 为 G 同变的(G-equivariant)，如果满足条件: 1) 存在群 G 到参数空间 Θ 的变换群 $\bar{G}$ 上的同态 f

$$f: g \to \bar{g} \in \bar{G}, \ \forall g \in G,$$

且具有性质

$$(P_\theta g)(\cdot) = P_{\bar{g}(\theta)}(\cdot), \ \forall g \in G;$$

2) 存在群 G 到判决 d 的可测空间 (D, B_D) 的可测变换群 $\hat{G}$ 上的同态 h

$$h: g \to \hat{g} \in \hat{G}, \ \forall g \in G,$$

且具有性质

$$L(\bar{g}(\theta), \hat{g}(d)) = L(\theta, d),$$

其中 $L(\theta, d)$ 是损失函数; 3) 关于参数的一切可能值的全部附加先验信息(先验密度 $p(\theta)$, 不相交分割 $\Theta = \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_s$ 等)是 G 不变或 G 同变的. 在这些条件下，不管是确定性还是随机化的判决规则 $\delta: \omega \to \delta(\omega) \in D$ 统称为不变程序(invariant procedure)或更确切地称为，G 同变程序(G-equivariant procedure)，如果

$$\delta(g(\omega)) = \hat{g}(\delta(\omega)), \ \forall \omega \in \Omega, \ \forall g \in G.$$

同变判决程序 δ 的风险

$$r_\delta(\theta) = \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(\omega))$$

是 G 不变的; 特别地，它不依赖于 θ, 只要群 G 在 Θ 上作用可传递.

一般地，在参数问题中不存在保证使风险对于参数 θ 的每一个值都最小的最优判决程序. 特别地，对于某些 θ 值，判决程序可以使风险最小，但这要以参数其他一些同样可能的先验值的质量变坏为代价. 同变性在某种程度上保证方法的无偏性. 假如群 G 充分丰富，则在不变程序中存在一具有一致最小风险的最优不变程序.

不变程序广泛应用于假设检验(亦见**不变检验**(invariant test))和分布律参数的估计中. 例如，对于具有单位协方差矩阵的 m 维正态分布律

$$p(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left[-\frac{\sum_j (x_j - \alpha_j)^2}{2} \right]$$

和平方损失函数 $\sum_j (\delta_j - \alpha_j)^2$, 普通样本均值

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + \mathbf{x}^{(N)}}{N}$$

是未知均值向量 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)'$ 的最优同变估计量. 这里，群 G 是观测结果的排列群 S_N 与 Euclid 空间 $\mathbf{R}^m$ 的运动群 Ort(m) 的乘积; $\bar{G} = \hat{G} = \mathrm{Ort}(m)$. 对于 $m \geqslant 3$, 该问题中存在非同变估计量，使对于一切 α, 其风险比 $\mathbf{x}^*$ 更小; 不过，本质上的"超有效性"的区域变得不显著了，并且随着样本容量 N 的增大无限减小. 超有效程序的可能性与 G 的非紧性有关.

统计学的一些非参数问题中，结局的先验分布 P^* 族本质上是无穷维的情形下，以及在有多余参数的情形下建立参数 θ 的置信集时，亦出现同变统计程序.

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

Н. Н. Ченцов 撰 周概容 译

不变性原理 [invariance, principle of; инвариантности принцип]

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列独立同分布的实值随机变量，期望为零且方差为 σ^2; 考虑随机折线

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \{S_{[nt]} + (nt - [nt]) X_{[nt]+1}\},$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1,$$

其中 $S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$. 如果 f 是 $C[0, 1]$ 上的实值连续泛函（或除一个 Wiener 测度为零的集合外处处连续），其中 $C[0, 1]$ 是 $[0, 1]$ 上连续函数赋以上确界范数的空间，那么 $f(Y_n)$ 依分布收敛于 $f(W)$，其中 W 是 Wiener 随机函数．因此，$f(Y_n)$ 的极限分布不依赖于 $X_1, X_2, \cdots$ 的任何特殊性质．

利用不变性原理的一个典型范例是，为求 $f(Y_n)$ 的极限分布，只须求 $f(Y_n')$ 的极限分布，其中 Y_n' 是用与构造 Y_n 相同的方法从某一特殊选择的序列 $X_1', X_2', \cdots$ 构造的随机折线．例如，如果

$$f(x) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t),$$

那么 f 在 $C[0, 1]$ 上连续，并且由于

$$f(Y_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m,$$

因此知

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m$$

依分布收敛于 $\sup_t W(t)$．为求 $\sup_t W(t)$ 的分布，可用序列 $\{X_n'\}$：$\mathrm{P}\{X_n' = 1\} = \mathrm{P}\{X_n' = -1\} = \frac{1}{2}$，作为一个计算结果可得

$$\mathrm{P}\{\sup_t W(t) \leqslant a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-u^2/2} du, \; a \geqslant 0.$$

参考文献

[1] Donsker, M., An invariance principle for certain probability limit theorems, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **6** (1951), 1 - 12.

[2] Прохоров, Ю. В., 《Теория вероятн. и ее примен.》, 1956, т. 1, No. 2, 177 - 238.

[3] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

В. В. Сазонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.

潘一民 译

不变量 [**invariant**; **инвариант**]

一组给定的数学对象 M 连带着一固定的等价关系 ρ 到另一组数学对象 N 的一个映射 φ，它在 M 关于 ρ 的每一等价类上取常值（更准确地说，它是 M 上等价关系 ρ 的一个不变量）．如果 X 是 M 中的一个对象，则常称 $\varphi(M)$ 是对象 X 的一个不变量．不变量是数学中最重要的概念之一．其研究直接关系到某些对象的分类问题．本质上，每一数学分类的目的都是构造不变量的某个（可能的话，尽可能简单的一个）完全系统，使之能够区分任何两个不等价的所论对象．

不变量最简单的例子是实平面**二次曲线**（second-order curve）的不变量．就是，设 M 是实平面全体二次不可分裂曲线之集，ρ 是 M 上由下述规则给出的等价关系：$\Gamma \in M$ 等价于 $\Gamma_1 \in M$，当且仅当 Γ_1 是 Γ 经由平面的一个运动（即等距，见**等距映射**（isometric mapping））而得到的．如果 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ 是曲线 $\Gamma \in M$ 在一 Descartes 坐标系的方程，设 $\sigma(\Gamma) = A + C$，

$$\delta(\Gamma) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \; \Delta(\Gamma) = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

则 $\Delta(\Gamma) \neq 0$，并且数 $f(\Gamma) = \sigma(\Gamma)/\Delta(\Gamma)^{-1/3}$ 和 $g(\Gamma) = \delta(\Gamma)/\Delta(\Gamma)^{-2/3}$ 的值不依赖于坐标系的选择（尽管 Γ 的方程本身依赖于此）．如果两个曲线 Γ，$\Gamma_1 \in M$ 等价，则有 $f(\Gamma) = f(\Gamma_1)$ 以及 $g(\Gamma) = g(\Gamma_1)$．换言之，从集合 M 到所有实数之集合 N 的映射 f，g 是等价关系 ρ 的不变量；这些映射又称为实平面二次不可分裂曲线的不变量．由任一特定曲线的诸不变量的值可以确定该曲线的类型（椭圆、双曲线、抛物线）．

另一经典的例子是实射影直线上有序四点集的**交比**（cross ratio）．经过直线的射影变换，有序四点集的交比不改变．此例中，M 是一实射影直线上的有序四点组的集合；M 上的等价关系 ρ 由下述规则定义：两个点集 F，$F' \in M$ 等价，当且仅当 F 在直线的一个射影变换下变成 F'；N 是实数添加无穷大所得的完全集．交比定义了一个从 M 到 N 的映射，它是关系 ρ 的一个不变量；正是在此意义上称交比是四点（关于射影群）的一个不变量．

一个 n 变元的**二次型**（quadratic form）的秩给出又一个不变量的例子：秩在二次型的等价代换下不改变（简言之，秩是二次型的一个不变量）．进而，若二次型是在复数域上考虑的，则秩构成 n 变元二次型不变量的一个完全系统；两个二次型等价当且仅当它们有相同的秩．另一方面，若在实数域上考虑二次型，则产生另外一个不变量，即二次型的符号差；秩和符号差构成不变量的一个完全系统．在这些例子中，M 是 n 变元二次型的集合，ρ 是由变元的非奇异线性变换定义的等价关系，而 N 是整数集．

以上几个（以及其他很多）例子的共同特征是其中的等价关系 ρ 由集合 M 的某一变换群 G 所定义（即 X，$Y \in M$ 是 ρ 等价的，当且仅当 $Y = g(X)$ 对某一 $g \in G$ 成立）．这种情形所产生的不变量叫做群 G 的不变量．在第一个例子，M 的变换由平面等距群而导出，第二个例子由射影群导出，第三个例子由变元的非奇异变换的一般线性群导出．这些例子说明 F. Klein 提出的（所谓**埃尔兰根纲领**（Erlangen program））这一一般概念，每一变换群在某一几何学中可作为“坐标系的变

换”(自同构)群；这一几何学的对象所定义的在“坐标变换”之下不变的量(不变量)刻画所论几何学的内蕴性质，并且给出这一几何学的定理的一个“结构”分类．例如，射影几何学的问题是发现射影群的不变量(以及它们之间的关系)：对 Euclid 几何学，就是 Euclid 空间的运动群(等距)的不变量，等等．

不变量的经典理论(见**不变量理论**(invariants, theory of))是以上述方式发展起来的．其中只考虑了特殊类型的不变量(线性变换群的多项式或有理不变量，或更广泛地，在某一群的轨道上取常数的数值函数)．

不过，不变量的一般概念含义更为广泛而不限于变换群不变量的框架，因为并非所论数学对象的集合 M 上的每一等价关系 ρ 都是由一个群的作用决定的．这一类不变量的例子可在很多数学领域给出．代数拓扑学和同伦拓扑学中每一个拓扑空间与其同伦群以及(系数取自某个群的)奇异同调群相联系；这些群是空间关于同伦等价的不变量．代数几何学考虑代数簇的双有理等价关系，代数簇的维数以及——若限于光滑完全簇——算术亏格，提供了此等价关系的不变量的一个例子．微分拓扑学考虑流形的微分同胚，流形的 Stiefel-Whitney 类就是等价关系的不变量．经典微分几何学中考虑封闭曲面的总曲率；它是一个弯曲不变量．Abel 群的理论则考虑所谓的有限生成群的不变量，即准素分支的秩和顺序；按同构来考虑，它们构成这些群的集合的不变量的一个完全集．

В. Л. Попов 撰

【补注】 实数域二次型的符号差可代之以其 Witt 指标(又见 **Witt 分解**(Witt decomposition))．

杨路、曾振柄 译

不变平均[**invariant average** 或 **invariant mean**；**инвариантное среднее**]，群或半群 G 上的(更精确地说，G 上的函数空间 X 上的不变平均)

由 G 上的所有有界复值函数构成的空间(赋予上确界模)$B(G)$ 的闭子空间 X 上的一个连续**线性泛函**(linear functional)m，其中的闭子空间 X 包含常数函数并在复共轭运算下保持不变，而且 m 和 X 满足下述条件：1)X 在左平移下不变，即如果 $f\in X$，则有 ${}_xf\in X$，其中的 ${}_xf(t)=f(xt)$ 对所有的 x，$t\in G$ 及 $f\in X$；2)m 是 X 上的平均，即对所有的 $f\in X$ 有 $m(\bar{f})=\overline{m(f)}$ 并对所有的实值 $f\in X$ 有 $\inf\{f(x)\}\leqslant m(f)\leqslant\sup\{f(x)\}$；3) 对所有的 $f\in X$ 及所有的 $x\in G$ 有 $m({}_xf)=m(f)$．这种情形的不变平均 m 称为左不变平均(left-invariant mean)；G 上的右不变平均(right-invariant mean)和双侧不变平均(two-sided invariant means)可类似地定义．

如果在 $X=B(G)$ 上存在一个双侧不变平均，则称群 G 是顺从的(amenable)．群 G 的顺从性和与 G 相关的某个变换群的**不变测度**(invariant measure)的存在性有关(见[1])．如果 G 是一个局部紧的**拓扑群**(topological group)，则在 G 上的殆周期函数和弱殆周期函数构成的空间上存在一个非平凡的左不变平均．另一方面，下面的几个条件是等价的：1) 在空间 $X=L_\infty(G)$ 上存在一个左不变平均；2) 在 G 上的有界连续复值函数构成的空间 $X=CB(G)$ 上存在一个左不变平均；3) 在 G 上的一致连续有界复值函数构成的空间 $X=UCB(G)$ 上存在一个左不变平均；4) 在空间 $L_\infty(G)$，$CB(G)$ 和 $UCB(G)$ 中的某一个上存在一个双侧不变平均；5) 群 G 没有(表示的)**补序列**(complementary series)；6) G 的**正则表示**(regular representation)的支集与 G 的对偶空间一致；7) G 上的单位函数可以在任何紧统 $K\subset G$ 上用 G 的正则表示的矩阵项的有限线性组合一致逼近；8) 如果 μ 是 G 上的一个左 **Haar 测度**(Haar measure)，ν 是 G 上的使得对所有 G 上的具有紧支集的连续函数 f 有

$$\iint f(s)\overline{f(t^{-1}s)}\,d\mu(s)\,d\nu(t)\geqslant 0$$

的一个有界复值的正则 **Borel 测度**(Borel measure)，则有 $\int_G d\nu\geqslant 0$；9) 对某个 $q>1$，$q\neq\infty$，任意 $\varepsilon>0$ 及任意紧统 $K\subset G$，存在一个非负函数 $\varphi\in L_q(G)$，$\|\varphi\|_q=1$ 使对所有 $x\in K$ 有 $\|{}_x\varphi-\varphi\|_q<\varepsilon$；10) 前一个条件对所有 $q>1$，$q\neq\infty$ 成立；11) 对任意 $\varepsilon>0$ 及任意紧统 $K\subset G$，存在一个 Borel 集 $U\subset G$ 使得 $0<\mu(U)<\infty$ 及 $\mu^{-1}(U)\mu(xU\Delta U)<\varepsilon$ 对所有 $x\in K$ 成立；12) G 的任何一个由连续仿射变换在局部凸空间的紧凸子集上的连续作用有一个不动点．满足等价条件 1)－12) 中任意一条的局部紧群称为是顺从的(amenable)．顺从群的连续象、顺从群的闭子群、顺从群的借助于顺从群的扩张以及顺从群的归纳极限都是顺从群．顺从群在 Hilbert 空间中的一致有界表示等价于在同一空间中的**酉表示**(unitary representation)．上面列举的结果中的一部分可以推广到容许在有界连续复值函数空间上的不变平均的一般拓扑群的情形．不变平均以及顺从群的理论在动力系统理论、遍历理论、von Neumann 代数理论以及**抽象调和分析**(harmonic analysis, abstract)理论中有重要的应用．

参考文献

[1] Neumann, J. von, Zur allgemeiner Theorie des Masses, *Fund. Math.*, **13** (1929), 73－116.

[2] Greenleaf, F., Invariant means on topological groups and their applications, v. Nostrand-Reinhold, 1969.

[3] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

А. И. Штерн 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

不变微分算子 [**invarint differential operator**; **инвариантный дифференциальный оператор**]

定义在一个空间上的**微分算子** (differential operator), 在该空间的某些变换下其形式保持不变. 例如, 如果 $L(\partial/\partial x_k)$ 是按某个坐标系 $(x_1,\cdots,x_n)$ 写出的偏微分算子, 如果 $x_k=\varphi_k(y)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 是某个坐标变换, 它诱导出一个相应的在函数 $u(x)$ (每一个函数 $u(x)$ 以一种自然的方式与函数 $(\varphi^* u)(y)$ 相联系) 的集合上的变换 φ^*, 并且如果

$$\varphi^* L\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]u=L\left[\frac{\partial}{\partial y}\right]\varphi^* u,$$

其中右边的算子 L 用 $\partial/\partial y_k$ 的表示与左边的算子 L 用 $\partial/\partial x_k$ 的表示一样, 那么称 L 在变换 φ 下是不变的 (或者说, L 与算子变换 φ^* 可交换). 最重要的情形是当一个微分算子对组成一个群的变换族是不变的. 不变微分算子的定义实质性地变得更加复杂, 如果考虑这个变换群的某个表示所变换的一个函数系. 关于 Lorentz 群和正交群不变的微分算子 (波动算子, Klein-Gordon 和 Laplace 算子等) 在数学物理中起重要作用. 在微分流形的分析中广泛地使用外微分算子 d 和算子 ∂, 前者在微分同胚下不变, ∂ 和 d 度量对偶, 它在保持距离张量的光滑变换下不变. 在 Lie 群理论中, 所谓在群上相应的移位下左和右不变算子是非常重要的.

参考文献

[1] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 1965).

[2] Наймарк, М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958.

[3] Rham, G. de, Differentiable manifolds, Springer, 1984 (译自法文).

[4] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

А. А. Дезин 撰 鲁世杰 译 葛显良 校

不变嵌入 [**invariant imbedding**; **инвариантное вложение**]

【补注】 一种将某些两点边值问题转换成初值问题的方法. 这是不变量方法的一种延伸, 由 V. A. Ambarzumyan 提出 (见 [A1]), 并由 S. Chandrasekhar 相当成功地用于辐射传导问题之中 (见 [A2]). 不变嵌入与搜索方法密切相关 (又见**双搜索法** (double-sweep method); **打靶法** (shooting method)).

考虑标量线性常微分方程组

$$\frac{du}{dz}=A(z)u+B(z)v, \tag{A1}$$

$$-\frac{dv}{dz}=C(z)u+D(z)v,$$

$$x\leqslant z\leqslant y,$$

$$u(x)=0,\ v(y)=1.$$

(当 B 和 C 非负时, (A1) 可看成描述右运动粒子 u 和左运动粒子 v 的流, 它在 y 处输入一个单位, 而在 x 处不输入. 这种解释常常有用, 但并不必要.) 求 $R_r(x,y)\equiv u(y)$. (在流的模型中 R_r 为反射系数 (reflection coefficient).)

记

$$u(z)=R_r(x,z)v(z). \tag{A2}$$

将 (A2) 代入 (A1), 形式上得到

$$\frac{dR_r}{dz}=B+(A+D)R_r+CR_r^2,\ R_r(x,y)=0. \tag{A3}$$

在某些条件下, 把这个 **Riccati 方程** (Riccati equation) 从 x 到 y 积分得到 $u(y)$. 若定义 $T_r(x,y)\equiv v(x)$, 则

$$\frac{d}{dz}T_r(x,z)=[D+CR_r(x,z)]T_r(x,z),$$

$$T_r(y,y)=1. \tag{A4}$$

如果只改动 (A1) 中的边界条件, 则可定义类似的函数 R_l 和 T_l. 如 T_r 那样, 它们满足线性初值方程. 只有 (A3) 是非线性的 (见 [A3]).

若将 (A1) 中的边界条件换成

$$u(x)=s_l,\ v(y)=s_r, \tag{A5}$$

该方法就有用得多.

于是, 对任意 z^*, $x\leqslant z^*\leqslant y$,

$$u(z^*)=\rho(x,y,z^*)[s_rT_r(z^*,y)R_r(x,z^*)+ + s_lT_l(x,z^*)], \tag{A6}$$

$$v(z^*)=\rho(x,y,z^*)[s_rT_l(x,z^*)R_l(z^*,y)+ + s_rT_r(z^*,y)],$$

$$\rho(x,y,z^*)=[1-R_r(x,z^*)R_l(z^*,y)]^{-1}.$$

这种想法有许多扩充和推广. 有些为:

a) 方程 (A1) 可换成具有 n 维向量 u 和 k 维向量 v 的方程组.

b) 可对 (A1) 加上非齐次项.

c) 条件 (A5) 可换成混合边界条件.

d) 如果 (A3) 并不是对所有 $z(x\leqslant z\leqslant y)$ 都有解, 则可用各种方式穿过奇点.

在所有情形, 函数 R_r 起着重要作用, 它是通过解非线性方程得到的仅有的函数. 其他问题都是线性

的．（注意：该理论也可围绕 R_l 建立，此时它满足 Riccati 方程．）

不变嵌入概念已用于输运理论问题的研究（又见**输运方程，数值方法**（transport equation, numerical method）），波的传播，差分方程，积分方程，量子力学及数学物理和理论物理的许多其他领域．

参考文献

[A1] Ambarzumyan, V. A., Diffuse reflection of light by a foggy medium, *C. R. Acad. Sci. SSSR*, **38** (1943)（俄文）.

[A2] Chandrasekhar, S., Radiative transfer, Dover, 1960.

[A3] Bellman, R. and Wing, G. M., An introduction to invariant imbedding, Wiley, 1975.

G. M. Wing 撰 唐 云 译

不变积分 [**invariant integration**; **инвариантное интегрирование**]，群上的

拓扑群（topological group）上函数的积分，它关于群运算具有某种不变性．设 G 为局部紧拓扑群，$C_0(G)$ 为所有在 G 上具有紧支集的连续复值函数构成的向量空间，并设 I 为 $C_0(G)$ 上的积分，即 $C_0(G)$ 上的正**线性泛函**（linear functional）（对 $f\geqslant 0$ 有 $If\geqslant 0$）．积分 I 称为左不变的（left invariant）（或右不变的（right invariant）），若对所有 $g\in G, f\in C_0(G)$ 有 $I(gf)=If$（或 $I(fg)=If$）；这里 $(gf)(x)=f(g^{-1}x)$, $(fg)(x)=f(xg)$．若 I 既是左不变的又是右不变的，则称为（双侧）不变的（(two sided) invariant）．令 $\hat{I}f=I\hat{f}$, $\hat{f}(x)=f(x^{-1})$，则映射 $I\to\hat{I}$ 定义了 $C_0(G)$ 上左不变与右不变积分类之间的一一对应．若 $I=\hat{I}$，则 I 称为逆不变的（inversion invariant）．

在每个局部紧群 G 上都存在非零的左不变积分；若不计常数因子，它是唯一的（Haar-von Neumann-Weil 定理（Haar-von Neumann-Weil theorem））．此积分称为左 Haar 积分（left Haar integral）．下列方程成立：

$$I(fg)=\Delta(g)If,$$

其中 $g\in G, f\in C_0(G)$，Δ 是由群 G 到全体正实数所成的乘法群上的连续同态（正特征标（positive character））．此外，$\hat{I}f=I(f/\Delta)$．特征标 Δ 称为 G 的模（modulus）．若 $\Delta(g)\equiv 1$，则 G 称为幺模的（unimodular）．在此情形下，I 是双边不变积分．

特别地，每个紧群（那里 $I(1)<\infty$, $\hat{I}=I$）与每个离散群（那里 $If=\sum_g f(g), f\in C_0(G)$）都是幺模的．

根据 Riesz 定理（Riesz theorem），$C_0(G)$ 上的每个积分是关于某个 **Borel 测度**（Borel measure）μ 的 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral），此测度 μ 由在 G 中每个紧子集 K 上为有限的 Borel 测度所成的类上唯一确定．与 $C_0(G)$ 上左（右）不变 Haar 积分对应的左（右）不变测度 μ 称为 G 上的左（右）**Haar 测度**（Haar measure）．

设 H 为 G 的闭子群，Δ_0 为 H 的模．若 Δ_0 能延拓为 G 上的正特征标（见**群的特征标**（character of a group）)，则在左齐次空间 $X=G/H$ 上存在相对不变积分（relatively invariant integral）J，即 X 上具紧支集的连续函数空间 $C_0(X)$ 上的正泛函，它满足等式：对所有 $g\in G, f\in C_0(X)$,

$$J(gf)=\delta(g)Jf,$$

其中 $(gf)(x)=f(g^{-1}x)$, $\delta(g)=\Delta_0(g)/\Delta(g)$ 且 Δ 为 G 的模．此积分定义为 $Jf=I(\delta\tilde{f})$，这里 I 为 G 上的 Haar 积分，而 $\tilde{f}$ 为 G 上函数，使 $f(gH)=I_0((g\tilde{f})_H)$．（$I_0$ 是 H 上左 Haar 积分，而 φ_H 是 φ 在 H 上的限制．）上述等式是有定义的，因为 $\tilde{f}\to f$ 是从 $C_0(G)$ 到 $C_0(X)$ 上的映射，且当 $f=0$ 时 $Jf=0$．**不变平均**（invariant average）概念与不变积分概念是密切相关的．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8（译自法文）.

[2] Weil, A., l'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940.

[3] Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, v. Nostrand, 1953.

[4] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 1, Springer, 1979.

Д. П. Желобенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.

郑世骏 译 苏维宜 校

不变测度 [**invariant measure**; **инвариантная мера**]

(1) **可测空间**（measurable space）$(X, \mathfrak{B})$ 上的关于此空间的可测变换 T 的不变测度是指 $\mathfrak{B}$ 上的一个测度 μ，对所有 $A\in\mathfrak{B}$，满足 $\mu(A)=\mu(T^{-1}A)$．通常假定该测度是有限的（即 $\mu(X)<\infty$）或至少是 σ 有限的（即 X 可表示为可数并 $\bigcup X_n$，这里 $\mu(X_n)<\infty$）．最重要的情形是 T 为双射且映射 T^{-1} 也是可测的（因而称 T 为可逆的，并记住这是指在可测变换类中的可逆性），此时测度 μ 的不变性等价于性质：对所有 $A\in\mathfrak{B}$ 有 $\mu(A)=\mu(TA)$．最后，关于一族（可测）变换（例如半群、群、流等）的不变测度是指在此族中的所有变换下不变的测度．不变测度概念在动力系统理论与遍历理论中起重要的作用．在后一

情形下，人们考虑在以 μ 为不变测度的测度空间 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 中动力系统的种种性质. 如果一个动力系统有几个不变测度，例如 μ 与 ν，那么它作为 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 中动力系统的性质（关于不变测度 μ 的性质）可能与作为 $(X, \mathfrak{B}, \nu)$ 中动力系统的性质（关于不变测度 ν 的性质）不同. 在一个固定的动力系统中考虑不同的不变测度时，往往将此系统关于不变测度 μ 的性质看作测度 μ 的性质（例如，"μ 是遍历的" 意为在空间 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 中的一个给定系统的遍历性，即不存在 $\mu(A)>0$ 与 $\mu(X\backslash A)>0$ 的不变集 $A\in\mathfrak{B}$）.

在历史上，最初的一些不变测度的例子是与在光滑流形上生成某些特殊类型的流的变换的微分性质有关的（见 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）；**积分不变量**（integral invariant））. 利用（局部）坐标 $x_1, \cdots, x_n$，可将这些测度 μ 表示为形式 $d\mu=\rho dx_1\cdots dx_n$，并且密度 ρ 有显式表示 $\rho=\rho(x_1, \cdots, x_n)$. 在来自代数学的一些例子中（移位群等），不变测度通常指 **Haar 测度**（Haar measure）或由它经某种自然构造得到的测度.

在拓扑动力学中，Н. Н. Боголюбов 与 Н. М. Крылов 证明了（[1]，亦见 [2]，[3]），度量紧统 X 上关于连续流与级联的有限遍历不变测度的存在性（其他种种推广也是可能的，见 [4]，[5]，[6]）. 非遍历有限不变测度在某种意义下是遍历有限测度的线性组合；有限不变测度的支集以某种方式与 X 中的轨道特性有关（所有这些不变测度都集中于所谓极小引力中心 [3]）. 试图找到一般情形下不变测度性质的更详细的叙述并无多大价值；它们可以有很大差异. 在某个情形下遍历不变测度集中在一个点上，而在另一情形下，它可能在 X 中所有开子集上为正，并且具有"拟随机"性质（混合，正熵等），它的描述与研究同遍历理论有关（而这在前一情形中是毫无意义的）. 因此，有许多关于后一情形各种动力系统具有种种有趣性质的不变测度的存在性的研究.

最后提一下关于不变测度存在性的纯度量方面的问题. 假设动力系统具有**拟不变测度**（quasi-invariant measure）μ；那么它是否还有一个与 μ 等价的不变测度 ν？（此问题的论述能在 [7] 中找到. 另外的讨论也可在 [8] 中找到）. 一般说，答案是否定的，即使只要求 ν 是 σ 有限的以及 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 是 Lebesgue 空间（[9]）. 关于有限不变测度的存在性的充要条件的各种不同形式是已知的；其中最成功的要算 Hajian 与 S. Kakutani 给出的条件（[10]，[8]）.

Д. В. Аносов 撰

（2）概率论中的不变测度是对转移概率来定义的（见**转移概率**（transition probabilities））. 设 $(X, \mathscr{A})$ 为可测空间，这里 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数；又设 $P(x, A)$ $(x\in X, A\in\mathscr{A})$ 为转移概率（即对每个 $x\in X$，$P(x, \cdot)$ 为 $\mathscr{A}$ 上的概率测度，对每个 $A\in\mathscr{A}$，$P(\cdot, A)$ 为 $\mathscr{A}$ 可测的）. 那么 $(X, \mathscr{A})$ 上的一个可数可加测度 μ 称为关于 P 不变的，如果对所有 $A\in\mathscr{A}$，$\mu(A)=\int_X P(x, A)\mu(dx)$. 若 T 是由 $(X, \mathscr{A})$ 到自身的可测映射，则测度 μ 关于 T 不变当且仅当 μ 关于转移测度 $P(x, A)=\chi_{T(x)}(A)$ 是不变的，这里 $\chi_y(A)=1$ $(y\in A)$ 且 $\chi_y(A)=0$ $(y\bar{\in} A)$.

В. В. Сазонов 撰

参考文献

[1] Bogoluboff, N. N. and Kriloff, N. M., La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique nonlinéaire, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 65 – 113.

[2] Oxtoby, J., Ergodic sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 116 – 136.

[3] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949（中译本：В. В. 涅梅茨基，В. В. 斯捷班诺夫，微分方程定性理论，科学出版社，上册 1956，下册 1959）.

[4] Боголюбов, Н. Н., Избр. труды, т.1, К., 1969, 561 – 569.

[5] Фомин, С. В.,《Матем. сб.》, **12** (1943), 1, 99 – 108.

[6] Фомин, С. В.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **14** (1950), 3, 261 – 274.

[7] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan, 1956.

[8] Владимиров, Д. А., Булевы алгебры, М., 1969.

[9] Ornstein, D. S., On invariant measures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 4, 297 – 300.

[10] Hajian, A. and Kakutani, S., Weakly wandering sets and invariant measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110** (1964), 136 – 151.

[11] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probability, Holden-Day, 1965（译自法文）.

[12] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[13] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980.

В. В. Сазонов 撰

【补注】 关于变换群的不变测度的存在性，亦见 [A1]. 至于不变测度的"遍历分解"（即将测度分解为遍历不变测度的线性组合），在假设底空间为度量紧统的情形下，它是 Choquet 理论（见 **Choquet 单形**（Choquet simplex））的直接推论. 关于更一般的紧空间情形，见 [A2].

关于转移概率的不变测度，除了 [11]，[12] 与 [13] 外，在 [A3]（它的附录中包含关于这种测度的遍历分解的可能性的一个结果），[A4] 与 [A5] 中有很多讨论.

关于转移概率的不变测度在 **Марков 过程** (Markov process) 理论中，主要是在 **Марков 链** (Markov chain) 的递归性研究中起重要作用.

参考文献

[A1] Glasner, S., Proximal flows, Springer, 1976.

[A2] Keynes, H. B. and Newton, D., The structure of ergodic measures for compact group extensions, *Israel J. Math.*, **18** (1974), 363 - 399.

[A3] Kifer, Y., Ergodic theory of random transformations, Birkhäuser, 1986.

[A4] Krengel, U., Ergodic theorems, de Gruyter, 1985.

[A5] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.

郑世骏 译 苏维宜 校

不变度量 [**invariant metric**; **инвариантная метрика**]

流形 M 上的一个 **Riemann 度量** (Riemannian metric) m, 它在给定的 Lie 变换群 G 的任何变换下不变. 群 G 本身称为度量 m (或 Riemann 空间 (M,m)) 的运动群 (group of motions) (等距群 (group of isometries)).

正常作用在流形 M 上的 Lie 变换群 G (即映射 $G\times M\to M\times M$, $(g,x)\to(gx,x)$ 是正常的) 有一个不变度量. 反之, 任一 Riemann 度量的所有运动的群 (它的任何闭子群亦然) 是一个正常的 Lie 变换群. 在这种情况下, 任一点 $x\in M$ 的稳定群 (或迷向群)

$$G_x=\{g\in G: gx=x\}$$

是 G 的紧子群. 若 G 本身是紧的, 则利用 M 上任何度量 m 在 G 上的平均

$$m_0=\int_G (g^* m)\,dg$$

可构造 M 上的 G 不变度量 m_0, 其中积分是关于 Haar 测度取的.

若 G 是可迁的, 则 M 可与 G 关于一定点 $x_0\in M$ 的稳定群 $H=G_{x_0}$ 的傍集空间 G/H 恒同, 并且为使 M 上存在 G 不变度量, 充要条件是线性迷向群 (见**迷向表示** (isotropy representation)) 在 $\mathrm{GL}(T_{x_0}M)$ 中有紧闭包 (特别地, 只要 H 是紧的). 这种情况下空间 G/H 是可约的, 即 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 容许分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{M}$, 其中 $\mathfrak{H}$ 是对应于 H 的子代数, $\mathfrak{M}$ 是 $\mathrm{Ad}\,H$ 下不变的子空间, 这里 $\mathrm{Ad}\,H$ 是 G 的件随表示 (见 **Lie 群的件随表示** (adjoint representation of a Lie group)). 若 $\mathfrak{M}$ 与 $T_{x_0}M$ 恒同, 则 M 上任何 G 不变度量 m 可用下述方法从 $\mathfrak{M}$ 上的某个 $\mathrm{Ad}\,H$ 不变 Euclid 度量 $\langle\,,\,\rangle$ 得出:

$$m_x(X,Y)=\langle (g^*)^{-1}X,(g^*)^{-1}Y\rangle,\ X,Y\in T_xM,$$

其中 $g\in G$ 使得 $gx_0=x$.

与 G 不变度量相关联的张量场 (曲率张量, 它的共变导数等) 都是 G 不变场. 在齐性空间 $M=G/H$ 的场合, 它们在一点 x_0 的值可用野水算子 (Nomizu operator) $L_X\in\mathrm{End}(\mathfrak{M})$ 来表示, L_X 由下列公式定义

$$L_XY=-\nabla_YX^*=(\mathscr{L}_{X^*}-\nabla_{X^*})_{x_0}Y,\ Y\in\mathfrak{M},\ X\in\mathfrak{G},$$

其中 X^* 是单参数变换群 $\exp tx$ 的速度场, ∇ 是 Riemann 联络的**共变微分** (covariant differentiation) 算子, $\mathscr{L}$ 是 **Lie 导数** (Lie derivative) 算子. 特别地, 沿幺正基 $X,Y\in\mathfrak{M}$ 所给方向的**曲率** (curvature) 算子 $\mathrm{Riem}(X,Y)$ 和**截面曲率** (sectional curvature) $K(X,Y)$ 满足下列公式:

$$\mathrm{Riem}(X,Y)=[L_X,L_Y]-L_{[X,Y]},$$

$$K(X,Y)\equiv-\langle \mathrm{Riem}(X,Y)X,Y\rangle=$$

$$=\langle L_XY,L_XY\rangle-\langle [X,Y]_{\mathfrak{M}},[X,Y]_{\mathfrak{M}}\rangle+$$

$$-\langle [Y,[Y,X]_{\mathfrak{M}},X\rangle-\langle L_XX,L_YY\rangle,$$

其中 $Z_{\mathfrak{M}}$ 是 $Z\in\mathfrak{G}$ 沿 $\mathfrak{H}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的投影.

根据 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 和度量 $\langle\,,\,\rangle$, 野水算子可用下列公式表示

$$2\langle L_XY,Z\rangle=\langle [X,Y]_{\mathfrak{M}},Z\rangle+$$

$$-\langle X,[Y,Z]_{\mathfrak{M}}\rangle-\langle Y,[X,Z]_{\mathfrak{M}}\rangle,$$

其中 $X\in\mathfrak{G}$, $Y,Z\in\mathfrak{M}$. 由野水算子的定义得, 它们在 G 不变场上的作用与在点 x_0 的共变导数的作用仅差一符号. 若 Riemann 空间 $(G/H,m)$ 在 de Rham 分解中不包含平坦因子, 则由野水算子 $L_X(X\in\mathfrak{G})$ 生成的线性 Lie 代数与空间 $(G/H,m)$ 在 x_0 的和乐代数 (见**和乐群** (holonomy group)) 相同.

齐性空间上不变度量的测地线可用下述方法描述. 首先, 设 $M=G$ 是由左移动作用在自身上的 Lie 群. 设 γ_t 是 Lie 群 G 上度量 m 的左不变测地线, 并设 $X_t=\gamma^{-1}\dot{\gamma}_t$ 是与之对应的在 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 中的曲线 (速端曲线 (velocity hodograph)). 曲线 X_t 满足速端曲线方程

$$\dot{X}_t-L_{X_t}X_t=\dot{X}_t-(\mathrm{ad}^*X_t)X_t=0,$$

其中 ad^*X 是与伴随表示 $\mathrm{ad}\,X$ 对偶的算子. 测地线 γ_t 也可根据它的速端曲线 X_t 由微分方程 $\dot{\gamma}_t=\gamma_tX_t$ (若群 G 为线性, 则它也为线性) 或泛函关系

$$\langle X_t,(\mathrm{ad}\,\gamma(t))Y\rangle=\text{常数},\ Y\in\mathfrak{G}$$

来描述, 后者给出前者方程的初积分. 这样, 度量 m 的测地线的描述化为速端曲线方程的积分, 它有时是完全可积的. 例如, 当度量 m 关于右移动也不变时, 通过点 e 的测地线是 G 的单参数子群. 这样的度量在任何紧 Lie 群上都存在. 对于任何齐性空间 $M=G/H$, G/H 上的一个不变度量 m 可"提升"为 G 上的左不变度量 $\tilde{m}$, 使得 Riemann 空间 $(G,\tilde{m})$ 在 Riem-

ann 空间（$G/H, m$）上的自然丛 $G \to G/H$ 是 Riemann 丛，也即与纤维正交的切向量的长度在投影下保持不变．为此，只要把度量〈 , 〉延拓到整个代数 $\mathfrak{G}$ 上即可，办法是令

$$\langle \mathfrak{H}, \mathfrak{M} \rangle = 0 \text{和} \langle X, Y \rangle = -\mathrm{Tr}\, L_X L_Y (X, Y \in \mathfrak{H}),$$

并利用左移动把它拓广成 G 上的度量 $\widetilde{m}$．（G/H，$\widetilde{m}$）的测地线就是（$G, \widetilde{m}$）的测地线在纤维正交方向的投影．

因为 $\mathfrak{G}$ 上函数 $X \to \langle X, X \rangle$ 总是速端曲线方程的初积分（能量积分（energy integral）），故 $\mathfrak{G}$ 上向量场的对应方程与球面 $\langle X, X \rangle =$ 常数相切．这意味着速端曲线方程的完全性，因而也意味着齐性空间上任何不变 Riemann 度量的完全性．对于伪 Riemann 度量，完全性性质一般不成立．另一方面，在紧齐性空间上任何不变伪 Riemann 度量是完全的．

亦见**对称空间**（symmetric space）．

参考文献

[1] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[2] Петров, А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966.

[3] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2, Interscience, 1969.

[4] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[5] Wolf, J. A., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1984.

[6] Lichnerowicz, A., Geometry of groups of transformations, Noordhoff, 1977（译自法文）.

[7] Besse, A. L., Einstein manifolds, Springer, 1987.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】（在点 x 的切空间 T_xM 的）de Rham 分解（de Rham decomposition）定义如下．设 $x \in M$，T_xM 是在 x 的切空间，并设 Φ_x 是 Riemann 联络在 x 的**和乐群**（holonomy group）．群 Φ_x 作用在 T_xM 上．设 $T_x^{(0)}M$ 是 Φ_x 下左不变的切向量的子空间．令 $T_x'M$ 是 T_xM 中 $T_x^{(0)}M$ 的正交补，并令 $T_x'M = \sum_{i=1}^{r} T_x^{(i)}M$ 是 $T_x'M$ 分解成相互正交的不变不可约子空间．分解

$$T_xM = \sum_{i=0}^{r} T_x^{(i)}M$$

称为 de Rham 分解或典型分解（canonical decomposition）．

不可约 Riemann 流形（irreducible Riemannian manifold）是和乐群 Φ_x 不可约地作用在 T_xM 上（从而在 T_xM 的 de Rham 分解中只存在一个因子）的 Riemann 流形．

de Rham 分解定理（de Rham decomposition theorem）是说，一个连通的单连通的完全 Riemann 流形 M 等距于直积 $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_r$，其中 M_0 是 Euclid 空间（可能为零维），而 $M_1, \cdots, M_r$ 都是单连通的完全不可约 Riemann 流形．这样的分解唯一确定到因子的次序（[A1], Ch. Ⅳ, 6.）．

参考文献

[A1] Kobayashi, S. & Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963.

沈一兵 译

不变对象 [**invariant object**; **инвариантный объект**]，齐性空间上的

Lie 群 G 的齐性空间 $M = G/H$ 上几何量的场，它在 G 的任何变换下不变．不变对象的更精确定义如下．设

$$\pi: E \to M = G/H$$

是 Lie 群 G 的齐性空间 $M = G/H$ 上的局部平凡齐性纤维化，其中 G 作用在 E 上且 π 在 G 对 E 和 M 的作用下是等变的．若 π 的一个截面在 G 对该纤维化的截面空间 $\Gamma(E)$ 的作用 L^E 下是不变的，则它称为 M 上的（π 型）不变对象．π 型不变对象的集合自然地一一对应于所给纤维化在点 $m \in M$ 的对应于傍集 eH 的纤维的 H 不变元素的集合．

最重要和最值得研究的特殊情况是当 π 为**向量丛**（vector bundle）的时候．这时，H 线性地作用在点 m 的纤维上，并且 π 型不变对象一一对应于该纤维的 H 不变向量，这就把它们的分类化为不变量理论中的分类问题．对于张量丛（与切丛相关联的），不变对象的分类问题化为寻找线性**迷向群**（isotropy group）的不变量．

不变对象常在下列内容中出现．设 s 是光滑流形 M 上的几何量的场（几何对象），并设 $\mathrm{Aut}(s)$ 是它的对称群，即使得 $\varphi^* s = s$ 的 M 的微分同胚 φ 的集合，其中 φ^* 是由 φ 诱导的 s 的变换．进一步假定群 $\mathrm{Aut}(s)$ 包含子群 G，它可迁地作用在 M 上并且是 Lie 群．那么，M 可与齐性空间 G/H 恒同，其中 H 是任一点 $m \in M$ 的稳定子群（见**不变子群**（invariant subgroup）），且对象 s 成为齐性空间 G/H 上的不变对象．不变对象的经典例子是不变 Riemann 度量、不变复结构、不变辛结构、不变切触结构、不变常微分方程（特别是粉碎（pulverization）和联络）和不变微分算子．很大一类不变对象容许有在 **G 结构**（G-structure）理论框架中的统一描述．

不变对象自然地呈现在数学和物理学的各个领域中．例如，常系数线性微分方程是作为向量群齐性空间的 Euclid 空间上的不变对象．刚体的 Euler 运动是作为群 $SO(3)$ 上左不变 Riemann 度量的测地线而出现的．Newton 空间和 Minkowski 空间的齐性和 Galileo

相对性原理一起导致 Newton 物理学和相对物理学中的各种不变对象，其中不变性要求常使人们能有效地唯一确定所考虑的对象（方程，Lagrange 算子等）（见[9]）．不变对象的性质研究通常易化为线性代数的某些问题（常容有完全解）．通常，不变对象比所给类型的任意对象有更简单的结构．例如，与任意 Riemann 度量相对照，齐性空间上任何不变 Riemann 度量是完全的（紧齐性空间上任何不变伪 Riemann 度量亦然），并且它的任何自交测地线是闭的．

对于少数经典的不变张量对象，关于不变对象的分类问题已作出进展．对于紧 Lie 群的齐性空间，已得到了最完整的结果．

从各种观点来看，最有兴趣的是研究非齐性 G 空间上的不变对象，即在流形 M 的一个给定的不可迁 Lie 变换群 G 下不变的几何对象．这里，在紧 Lie 群的场合，为了构造不变对象，常常采用在群上平均的方法（例如，G 不变 Riemann 度量的存在性定理）．更精细的方法（适用于一大类 Lie 变换群，即所谓正常作用的变换群）是基于切片的存在性，它的存在性意味着在群 G 的轨道上流形 M 的纤维化的"殆局部平凡性"．

不变对象概念的重要推广是共变对象．假定在纤维化 π 的纤维 F_m 上给定一附加结构 t_m，它光滑地依赖于点 $m\in M$（例如，向量空间结构），并设 $A_m=\mathrm{Aut}(t_m)$ 是结构 t_m 在纤维 F_m 上的自同构群．纤维化 ψ: $A=\bigcup_{m\in M}A_m\to M$ 的截面 k: $m\to S_m\in A_m$ 的集合作成 π 的自同构群，称为**规范群**（gauge group）．设 K 是它的一个子群．若 π 的截面 S 对一切 $g\in G$, $m\in M$ 有 $(L_g^E s)(m)=k_g(m)s(m)$，其中 $g\to k_g$ 是 $G\to K$ 的同态，则称 s 为 $M=G/H$ 上的 π 型 K 共变对象．若 π: $E\to M=G/H$ 是向量丛，K 是 M 上正函数的群，把它看作 π 的自同构群，且 $ke=k(m)e$，其中 $k\in K$, $m=\pi(e)$, $e\in E$，则就得到最重要的特殊情况．在这种情况下，K 共变对象也称为**共形不变对象**（conformally-invariant object），而对应丛的由它确定的截面是不变对象．

参考文献

[1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2, Interscience, 1969.

[2] Lichnerowicz, A., Geometry of groups of transformations, Noordhoff, 1977（译自法文）.

[3] Wolf, J. A., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1984.

[4] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[5] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[6] Комраков, Б. П., Дифференциально-геометрические структуры и однородные пространства, ч. 1, Минск, 1977.

[7] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1962, М., 1963.

[8] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967.

[9] Lévy-Leblond, J. M., Group-theoretical foundations of classical mechanics: The Lagrangian gauge problem, *Commun. Math. Phys.*, **12** (1969), 1, 64 – 79.

Д. В. Алексеевский 撰 沈一兵 译

不变集 [**invariant set**; **инвариантное множество**], *动力系统* $f(p,t)$ *的相空间* R *的*

由完整的轨道的并形成的集合 M，即适合条件

$$f(M,t)=M,\ t\in\mathbf{R}$$

的集合 M，这里 $f(M,t)$ 是 M 在相应于一已给的 t 的变换 $p\to f(p,t)$ 下的象．

不变集 M 作为度量空间 R 中的集合，可以具有确定的拓扑构造；例如，它可以是一拓扑流形或光滑流形，一个曲面，一条闭 Jordan 曲线，或一孤立点．从而可以说不变集 M 是一**不变流形**(invariant manifold)，一**不变曲面**(invariant surface)，一**不变曲线**(invariant curve)或一**不变点**(invariant point)．

不变点常称为动力系统的**平稳点**(stationary point)，因为在此点上运动转化为静止：即对一切 t 有 $f(p,t)=p$．不包含动力系统的任意不变点的闭不变曲线恒由周期运动的轨道构成，即对一切 $t\in\mathbf{R}$ 与某个 $T>0$ 均满足条件

$$f(p,t+T)=f(p,t)$$

的运动．因此，它称为**周期轨道**(periodic trajectory)．可以成为不变流形的例子是球面、环面、圆盘，不变曲面可以是锥面、Möbius 带，带柄的球面；不变集则可以是所有平稳点的集合，运动 $f(p,t)$ 的所有 ω 极限点的集合 Ω_p 和所有 α 极限点的集合 A_p，还有所有**游荡点**(wandering point)的集合 W 和所有**非游荡点**(non-wandering point)的集合 $R\setminus W$．

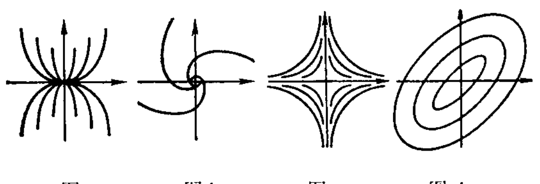
平面上的动力系统

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y) \tag{1}$$

的不变点按轨道在其邻域内的动态的性质分属四种类型，即**结点**(node)、**焦点**（focus)、**鞍点**(saddle)和**中心**(centre)（见图).

结点和焦点可以是渐近稳定或渐近不稳定的，鞍点是不稳定的，而中心是稳定的(见**渐近稳定解**(asymptotically-stable solution))．结点、中心和焦点的 Poincaré 指标为 +1；鞍点的则为 −1．

若(1)的右方在平稳点 $x=x_0$，$y=y_0$ 处的 Jacobi 矩



阵

$$J(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\end{bmatrix}$$

的本征值 λ_1、λ_2 有非零实部，若 λ_1 和 λ_2 均为实且有同号，则不变点是结点；若 λ_1 和 λ_2 均为实但为异号则为鞍点；若 λ_1 和 λ_2 为共轭复数，则为焦点．

在这些情况下，系统(1)的奇点的类型与将(1)的右方展为 $x=x_0$，$y=y_0$ 处的 Taylor 级数所得的线性系统的奇点类型是相同的，即与系统

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+by_1,\quad \frac{dy_1}{dt}=cx_1+dy_1 \qquad (2)$$

在 $x_1=0$，$y_1=0$ 处的奇点类型相同，(2)的矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 即 $J(x_0,y_0)$．在上述三种奇点的邻域内，(1)的轨道与(2)的轨道有一种比以上所述更为深刻的关系．亦即，若函数 f 和 g 在不变点 $x=x_0=0$，$y=y_0=0$ 的邻域内是解析的，且矩阵 $J(x_0,y_0)$ 有具有非零实部的本征值，则在点 $x=0$，$y=0$ 的邻域 U 中存在连续可微的变量变换

$$x_1=x+F_1(x,y),\quad y_1=y+F_2(x,y),$$

$$F_i(0,0)=\frac{\partial F_i(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial F_i(0,0)}{\partial y}=0,\quad i=1,2,$$

把系统(1)化为系统(2)．

若 λ_1, λ_2 是纯虚的，不变点 x_0, y_0 既可以是焦点，也可以是中心．这时奇点类型的分类又单独为一个困难问题，即**中心和焦点问题**(centre and focus problem)，需要更精密的判别法以区分中心和焦点(见[1]，[7])．当矩阵 $J(x_0,y_0)$ 为奇异时，在决定奇点类型时也会发生类似困难．

参考文献

[1] Немыцкий, В.В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л. 1949(中译本：涅梅茨基，斯捷班诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956)．

[2] Birkhoff, G.D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927．

[3] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959 (中译本：史捷班诺夫，微分方程教程．高等教育出版社，1959)．

[4] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982．

[5] Малкин, И.Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966．

[6] Ляпунов, А.М., Собрание Соченений, т. 2, М.-Л., 1956．

[7] Сибирский, К.С., Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц, Киш., 1976．

А.М.Самойленко 撰

【补注】 在奇点的邻域内将系统(1)化为系统(2)常称为方程的线性化(linearization of the equation)．若 λ_1 和 λ_2 有非零实部(这时奇点 (x_0,y_0) 称为双曲型奇点(singular point of hyperbolic type))，只要(1)中的 f 和 g 是 C^1 类的，这种线性化恒可用一拓扑(非光滑)坐标变换(即变换与其逆仅为连续)实现．这个结果对 $\mathbf{R}^n$ $(n\geq 2)$ 中的自治微分方程也成立．若本征值之间满足某些“非共振条件”，也可得到光滑的变换(在一些附加条件下甚至是 C^∞ 或解析的变换)．(这是 H. Poincaré，C.L. Siegel，S. Sternberg 的工作．) 见[4]，256－271 页和[4]中 271－272 页所引的文献．这些结果与微分方程的**正规形式**(normal form) 理论有关，并且涉及**小分母**(small denominators) 问题．

关于 Poincaré 指标见**奇点**(singular point)．

齐民友 译

不变统计量 [**invariant statistic; инвариантная статистика**]

在样本空间的一对一变换群生成的轨道上取常数值的统计量．这样，如果 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ 是样本空间，$G=\{g\}$ 是 $\mathfrak{X}$ 到自身的一对一 $\mathfrak{B}$ 可测变换群，$t(x)$ 是不变统计量，则对于一切 $x\in\mathfrak{X}$ 和 $g\in G$，有 $t(gx)=t(x)$．不变统计量对于构造**不变检验**(invariant test)有重要作用(参见**统计程序的不变性**(invariance of statistical procedure))．

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986．

[2] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971．

[3] Климов, Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973．

М. С. Никулин 撰 周概容 译

不变子群 [**invariant subgroup; инвариантная подгруппа**]

与**正规子群**(normal subgroup)同义，即 G 的子群 H，它在 G 的任意内自同构(inner automorphism)下变到自身．

石生明 译 许以超 校

不变子集 [**invariant subset; инвариантное подмножество**]，群 G 的

G 的子集 H，它包含它的每个元素 h 在 G 中的所有**共轭元**(conjugate element)，即所有形为 $g^{-1}hg$ 的元素．不变子半群(invariant sub-semi-group)是一

个子半群且同时为不变子集．

О．А．Иванова 撰 石生明 译 许以超 校

不变子空间 [**invariant subspace**; **инвариантное подпространство**]，容许子空间（admissible subspace）

设 V 为一向量空间（vector space），M 为 V 到其自身的线性映射的给定集合．这时，V 关于 M 的不变子空间是这样一个子空间 U，对所有的 $u\in U$，$g\in M$，有 $gu\in U$．这个子空间也称为 M 不变子空间（M-invariant subspace）或 M 容许子空间（M-admissible subspace）．Ю．И．Мерзляков 撰 杜小杨 译

表示 π 的不变子空间 [**invariant subspace of a representation**; **инвариантное подпространство представления**]，群（代数，环，半群）X 的在某向量空间（或拓扑向量空间）E 中的

向量（分别地，闭的向量）子空间 $F\subset E$，满足：对每个 $\xi\in F$ 及 $x\in X$ 有 $\pi(x)\xi\in F$．设 P 是从 E 到 F 的投影算子，则 F 是 π 的不变子空间，当且仅当对所有 $x\in X$，$P\pi(x)P=\pi(x)P$ 成立．E 中的子空间 $\{0\}$ 对 E 中任何表示是不变的；它称为平凡不变子空间（trivial invariant subspace）；其余的不变子空间（若存在的话）称为非平凡的．亦见**表示的收缩**（contraction of a representation）；**完全可约集**（completely-reducible set）；**不可约表示**（irreducible representation）．

А．И．Штерн 撰 石生明 译 许以超 校

不变检验 [**invariant test**; **инвариантный критерий**]

基于**不变统计量**（invariant statistic）的统计检验．设 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathsf{P}_\theta(\theta\in\Theta))$ 是样本空间；$H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ 是欲检验的假设，$H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$ 是备选假设，而且假设 H_0 关于空间 $\mathfrak{X}$ 到自身的一对一 $\mathfrak{B}$ 可测变换群 $G=\{g\}$ 是不变的，即对于任意 $g\in G$，有

$$\bar{g}\,\Theta_0=\Theta_0\ \text{且}\ \bar{g}\,\Theta_1=\Theta_1,$$

其中 $\bar{g}$ 是 $\bar{G}=\{\bar{g}\}$ 中的元素，而对于一切 $\theta\in\Theta$ 和 $g\in G$，$\bar{G}$ 是由公式 $\mathsf{P}_{\bar{g}\theta}(B)=\mathsf{P}_\theta(g^{-1}B)(B\in\mathfrak{B})$ 定义的，概率测度 P_θ 的一对一变换 $\mathsf{P}_\theta\to\mathsf{P}_{\bar{g}\theta}$ 的诱导群．由于假设 H_0 在 G 下是不变的，故为检验假设 H_0，自然应利用基于关于该群 G 的不变统计量的检验．这样的检验称为不变检验，而且一切不变检验类与基于最大不变量的检验类重合．Hunt-Stein 定理（Hunt-Stein theorem）："如果假设关于族 G 不变，则在为检验假设 H_0 所建立的检验类中存在最大检验"，它在不变检验理论中起重要作用．不变检验是不变统计程序（见**统计程序的不变性**（invariance of a statistical procedure）的特殊情形）．

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.
[2] Schmetterer, L., Introduction to mathematical statistics, Springer, 1974（译自德文）.
[3] Hall, W.J., Wijsman, R.A. and Chosh, J.K., The relationships between sufficiency and invariance with applications in sequential analysis, *Ann. Math. Stat.*, **36** (1965), 575.
[4] Климов, Г.П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.
[5] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971.

М．С．Никулин 撰 周概容 译

不变量理论 [**invariants, theory of**; **инвариантов теория**]（在经典意义下）

研究在变量的非退化线性变换下按一定方式变化的代数表达式(多项式，有理函数或它们的族)的代数理论(有时称为不变量的代数理论(algebraic theory of invariants))．在这里通常不考虑一般线性群(即变量的非退化线性变换的全集)，而只考虑它的某个子群(例如，正交子群，辛子群，等等)．不变量理论起源于数论、代数学与几何学中的许多问题．C. F. Gauss 在他的关于二元二次型理论的研究中，提出研究关于二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 的系数的多项式的问题，这些多项式在由形如 $x\to\alpha x+\beta y$，$y\to\gamma x+\delta y$(其中，$\alpha\delta-\beta\gamma=1$，且 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为整数)的替换诱导的这些系数的变换下不变．另一方面，在射影几何学的构形与关系的内蕴特征中，出现在射影直射变换下不变的射影坐标的代数表达式．行列式的研究还是不变量理论的先例．按某种方式与不变量理论联系着的算术与代数问题引起了 C. G. J. Jacobi，F. Eisenstein 与 Ch. Hermite 的注意．不变量理论形成一门数学学科却是在 19 世纪中叶．这一阶段以兴趣在形式代数问题及其在几何学中的应用为其特征．群，不变量的概念与不变量理论的基本问题在当时按确切的方式表述出来，且经典与射影几何学的各种事实只是相应变换群的不变量或协变量之间的恒等(合冲)表达式逐渐地变得越来越明确．A. Cayley (1846) 的超行列式的研究报告(Memoir on hyperdeterminants)显然被认为是不变量理论的第一本著作．不变量理论中的所有正式的术语，诸如**不变量**(invariant)；**共变变换**(covariant)；**相伴变换**(comitant)；**判别式**(discriminant)，等等，由 J. Sylvester 引入．

不变量理论中最初研究对象之一是所谓的型的不变量(invariant of a form)．考虑次数为 r 的关于 n 个变量的含不确定系数的型：

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1+\cdots+i_n=r}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}.$$

经变量的线性变换

$$x_i\to\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

式中 α_{ij} 是实或复数，它变成型

$$f'(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1+\cdots+i_n=r} a'_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},$$

于是，上述的变量线性变换确定型的系数的变换:

$$a_{i_1\cdots i_n}\to a'_{i_1\cdots i_n}.$$

关于型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 系数的多项式 $\varphi(\cdots,a_{i_1\cdots i_n},\cdots)$ 称为型的(相对)不变量((relative) invariant of the form)，如果下列关系在变量的任意非退化线性变换下成立:

$$\varphi(\cdots,a'_{i_1\cdots i_n},\cdots)=|\alpha_{ij}|^q\varphi(\cdots,a_{i_1\cdots i_n},\cdots),$$

式中，$|\alpha_{ij}|$ 是线性变换的**行列式**(determinant)，而 q 为常数(权(weight))．如果 $q=0$，那么不变量称为绝对的(absolute)．例如、不变量的最简单的例子是二元二次($n=r=2$)型 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 的判别式 $D=b^2-ac$，或三次($n=2,r=3$)型 $f(x,y)=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$ 的判别式 $\Delta=3b^2c^2+6abcd-4b^3d-4ac^3-a^2d^2$．若给定不是一个而是相同变量集的几个型，则可能考虑在变量的线性变换下，按上述方式变换的所有这些型的系数的多项式 φ；用这种方法得到型组的联合不变量(joint invariant of a system of forms)的概念．例如，行列式 $|a_{ij}|$ 是 n 个线性型的组 $f_i(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(1\leqslant i\leqslant n)$ 的联合不变量．类似地可定义**共变变换**(covariant)、以及更一般地，**相伴变换**(comitant)．

不变量理论基本问题的经典陈述是要计算不变量，且还要给出它们(同样地对共变变换)的完整的描述．为此目的，各种的形式过程得以发展以便能够造出不变量(极化，取代，Capelli 恒等式，Cayley Ω 过程，等等)．这项活动的顶峰是不变量理论中所谓的符号法的产生，它是计算所有次数不超过给定数的不变量的形式方法(见[3],[6],[11])．

20 世纪 30 年代发展起来的半单群及其表示的整体理论已能给出不变量经典理论中基本问题的如下更一般的陈述([6])．给定一个任意**群**(group) G 与它的在域 k 上线性空间 V 中的有限维**线性表示**(linear representation) ρ．如果 $x_1,\cdots,x_n$ 是 V 中的坐标(关于某基)，则每个元素 $g\in G$ 确定变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个线性变换；将这个变量变换用到一个任意多项式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 上便得到新的多项式，因此，g 导出域 k 上变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的所有多项式的环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 的一个变换(自同构)．在所有这样的变换下(即当 g 跑遍整个 G 时)不变的多项式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 称为群 G 的表示 ρ 的不变量(invariant of the representation of the group)(亦见**线性表示的不变量**(linear representation, invariant of a))．所有不变量组成一个 k 代数，且不变量理论的目的就是要描述这个代数．因此，型的不变量均是一般线性群关于它的在底(或对偶)空间的有固定秩的对称张量空间中的表示的不变量(原先型 f 的系数是这个张量的分量)；共变变换的考虑归结到在混合价张量空间中的表示的不变量的代数的研究．在这样的提法下，不变量的描述问题是线性表示理论的如下一般问题的特殊情形：将一个给定价的张量空间分解为关于底线性空间的线性变换的给定群不可约的不变子空间(寻求不变量可简化成去选出一维不变子空间)．

在不变量理论发展的最初阶段，如下事实就已经被发现，它允许考虑不变量组作为一个整体：在所有考察的情况下，能够选择有限个基本不变量(basic invariant) $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$，即这样的不变量，使得其他的每个给定表示的不变量 φ 可以表示为关于它们的多项式：$\varphi=F(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$．换言之，不变量代数原来是有限生成的．同时，下面事实也变得清楚了，即这些基本不变量通常不是独立的(这就是说，不变量代数不是自由代数)：可存在一些非平凡多项式 $P(t_1,\cdots,t_m)$，称为关系(relation)或合冲(syzygy)，经过替换 $t_i=\varphi_i$，$1\leqslant i\leqslant m$，它们恒等于零．在关系集本身又能够找出有限个基本关系，所有余下的关系均是它们的代数运算的结果(这些关系组成关于变量 $t_1,\cdots,t_m$ 的多项式环的一个理想，且基本关系是它的生成元)．同样地，基本关系自身通常也不是独立的；因此，可确定二次合冲，等等．用这种方法造出的合冲链结果总是有限的．例如，如果 G 是坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 的所有置换的**对称群**(symmetric group)，则不变量的代数就是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的所有对称多项式的代数；初等对称多项式均是基本不变量，它们是代数无关的(在这种情况下，不存在合冲)．

这些事实导出经典不变量理论中两个基本问题的陈述:

1. 证明给定群的给定表示的不变量代数是有限生成的(不变量理论的第一基本定理)，且确定基本不变量组．

2. 证明合冲的有限基的存在性(不变量理论的第二基本定理)，且找出它．

对于任意有限个变量，任意次数的型的不变量，不变量理论的第一基本定理已被 D. Hilbert([1])证明(亦见关于不变量的 **Hilbert 定理**(Hilbert theorem))．在第一基本定理成立的所有情况下，他还证明了不变量理论的第二基本定理亦真，并且，在这个情况下，合冲链总是有限的．Hilbert 得到经典不变量理论的基本定理的证明是基于由他证明(带有这个特殊目的)的一般抽象代数的一些结果．这些结果日后成为现代交换代数的基础(Hilbert 基定理，Hilbert 合冲定理，Hilbert 零点定理，见 **Hilbert 定理** 1)，3)与 5))．不变量理论的第一基本定理的最初证明是非构造性的，且未给出基本不变量次数的上界估计．在 20 世纪 30 年代，H. Weyl 通过发展 Hilbert 与 A. Hurwitz([14])的思想

证明了对于任意紧 Lie 群的有限维表示与对于任意复半单 Lie 群的有限维表示的不变量理论的第一基本定理([6]).综述经典不变量理论发展的著作[6]包括对于典型群的以及对于某些其他群的表示的基本不变量与合冲的描述.不变量理论方法的一个重要应用是对典型紧群的 Betti 数的描述.

不变量理论第二基本定理的证明揭示了该定理的一般代数特征(它是 Hilbert 基定理的推论).在试图确定对于不变量理论的第一基本定理这件事是否也真的过程中,Hilbert 提出了下列问题(Hilbert 第十四问题(Hilbert 14-th problem)):令 k 是域,令 $A=k[x_1,\cdots,x_n]$ 是 k 上变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式代数,L 是包含 k 的 A 的分式域的任一子域.这时代数 $A\cap L$ 在 k 上是有限生成的吗?对这个问题的肯定回答将蕴涵对任意群的不变量理论的第一基本定理的有效性.对 Hilbert 第十四问题的一个否定解已在[9]中获得,在其中给出交换幂幺群表示的一个实例,对该群不变量代数没有有限个生成元.在 20 世纪 50 年代,已得到关于有限群的,特别是关于由反射生成的群(见**反射群**(reflection group),**Coxeter 群**(Coxeter group))的不变量的许多结果.业已证明([13],[14])由酉反射生成的有限线性复群可表征为其不变量代数不含合冲的有限线性群.

不变量理论的新发展阶段与问题的范围扩张以及这个理论的几何应用有关.现代不变量理论(或不变量的几何理论(geometric theory of invariants))变成代数变换群的一般理论的一部分;20 世纪 50 年代产生的代数群论是它的基础,并且,代数几何学的语言是它的语言基础.经典理论的基本对象是域 k 上 n 个变量的多项式环,还有由变量线性变换导出的自同构群,与经典不变量理论成鲜明对比,现代不变量理论考虑任意有限生成 k 代数 R 以及它的 k 自同构的代数群 G.代替线性空间 V 与表示 ρ,任意仿射代数簇 X 与它的代数变换(自同构)的代数群 G 一起被考虑,使得 R 是 X 上正则函数的环,且 G 在 R 上的作用由 G 在 X 上的作用导出.R 的在 G 下固定不变的元素是不变量;它们的整个集合组成一个 k 代数,R^G.

经典不变量理论的其他概念也可推广.例如,相伴变换,它是从这样的簇到另一个与群作用可交换的簇内的正则映射;如果 R^G 是有限生成的,则可断定不变量理论的第一基本定理是有效的.已经证明 R^G 是有限生成的,如果 G 是几何约化群(见 **Mumford 假设**(Mumford hypothesis)).在许多重要情况下,例如在应用于模问题中,G 事实上是这种类型的群.如果 R^G 是有限生成的,则存在一个仿射代数簇 W,对于它,R^G 是正则函数的代数;嵌入 $R^G\subset R$ 导出一个态射 π: $X\to W$.如果 G 是几何约化的,则 W 将 G 在 W 中的闭轨道分类:π 是满射的,且它的每个纤维中恰有一个闭轨道.X 对于 G 的商簇的存在性的一个必要条件,即是所有轨道均为闭的,原来也是充分的,并且,W 原来是这个商簇.因此,R^G 在分类与构造商簇的几何问题的解决中的作用变得清楚了;除此之外,R^G 的研究(它是经典不变量理论的最终目的)对于这些几何问题的解决仅处于初始阶段,因为 R^G 的知识通常不提供 G 在 X 中轨道的完全信息,因而必须与非闭轨道,它们的闭包与稳定化子(所谓的轨道分解(orbital decomposition))的考虑结合起来.而且,在仿射代数簇上代数群作用的研究只是代数变换群一般理论的"局部"(正如仿射簇理论是代数簇一般理论的"局部"一样).

在一般情况下,考虑 G 在任意代数簇 X(由仿射片粘合起来的)上的代数(正则)作用,于是,例如构造 X(或 X 的一个合适的开子集)关于 G 的作用的商簇问题的解决归结到考虑 X 的 G 不变仿射覆盖且应用上述构造到带有所得仿射商簇的随后"粘合"的这个覆盖的每个元素上.为了这个步骤的成功应用,X 通常必须用它的某个不变子集代替(X 本身不一定有一个不变仿射覆盖).

目前,代数变换群论的研究通往不同的方向,从中可挑选如下:要得到代数群 G 正则作用在其上的簇 X 上的一般位置的点的性质的信息;要描述各种特殊的作用(主要是线性表示)的轨道分解;一般空间变换到较简单标准空间内的层化定理;关于商簇,**轨道**(orbit)空间,截面空间,拟截面与"片"空间的定理,关于不动点簇的定理;关于等价嵌入的定理;对轨道的仿射性与拟仿射性准则(见 **Matsushima 准则**(Matsushima criterion));各种特殊类型轨道闭包的构造,拟齐次簇(即带有稠轨道的簇)理论与带有不变量平凡代数的作用理论;不变量环的代数性质,商簇的变换空间的代数几何性质;与奇异性理论的联系([16]);不变量域的有理性问题,以及与代数环面和代数数论的联系([17]).

参考文献

[1] Hilbert, D., Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann., **36** (1890), 473-534.

[2] Hilbert, D., Ueber die vollen Invariantensysteme, *Math. Ann.*, **42** (1893), 313-373.

[3] Weitzenböck, R., Invarianten Theorie, Noordhoff, 1923.

[4] Hurwitz, A., Ueber die Erzeugung von Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.*, (1897), 71-90.

[5] Klein, F., Development of mathematics in the 19-th century, Math. Sci. Press, 1979, p. Chapt. 1(译自德文).

[6] Гуревич, Г. Б., Основы теории алгебраические инвариантов, М.-Л., 1948(英译本:Gurevich, G. B., Algebraic theory of invariants, Noordhoff, 1964).

[7] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.

[8] Hilbert problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8**(1902), 437-479.

[9] Nagata, M., On the fourteenth problem of Hilbert, in proc. Internat. Congress Mathematicians Edinburg, 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 459-462.

[10] Nagata, M., On the 14-th problem of Hilbert, *Amer. J. Math.*, **81**(1959), 766-772.

[11] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[12] Dieudonné, J. and Carrell, J., Invariant theory: old and new, Acad. Press, 1971.

[13] Fogarty, S., Invariant theory, Benjamin, 1969.

[14] Chevalley, C., Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.*, **77**(1955), 778-782.

[15] Shephard, G.C. and Todd, J.A., Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.*, **6**(1954), 274-304.

[16] Wagreich, P., Algebraic varieties with group action, in R. Hartshorne (ed.): Algebraic geometry Arcata, 1974, Proc. Sym. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 633-642.

[17] Воскресенский, В. Е., 《Успехи матем. наук》, **28** (1972), 4, 77-102.

В.Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Springer, T. A., Invariant theory, Springer, 1977.

[A2] Mumford, D., Hilbert's fourteenth problem-the finite generation of subrings such as rings of invariants, in F. E. Browder (ed.): Mathematical Developments arising from Hilbert Problems, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 28, Amer. Math. Soc., 1976, 431-444.

陈公宇 译

反函数 [inverse function; обратная функция]

函数的完全逆象，即对给定函数值域的每个元素 y 都对应所给函数定义域的一切那样的元素的集合，使它们被映成 y. 若用 f 表示给定的函数，则用 f^{-1} 表示 f 的反函数. 这样，若 f: $X \to Y$ 且 Y_f 为 f 的值域，$Y_f \subset Y$，则对任意 $y \in Y_f$ 有 $f^{-1}(y) = \{x: f(x) = y\}$.

若对一切 $y \in Y_f$，y 的完全逆象恰由一个元素 $x \in X$ 组成，即若映射 f: $X \to Y_f$ 为一一映射，则反函数是单值的（single-valued），否则便是多值的（many-valued）.

若集合 X 与 Y 为实直线（或更一般地，某有序集）的子集，则 f 的严格单调性是使反函数也是严格单调的存在的充要条件.

反函数的许多性质可由 f 的相应性质确定. 例如，若 f 为实直线的某一区间上严格单调且连续的函数，则它的反函数也是对应区间上严格单调且连续的. 若一个由紧集到 Hausdorff 拓扑空间上的一一映射是连续的，则逆映射也是连续的，即原映射是映到其象集上的**同胚**（homeomorphism）. 当映射 f 是由 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的一一有界线性算子时，则逆算子 f^{-1} 也是线性与有界的.

设 G 为 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 中具有充分光滑边界的有界域，f 为 G 的闭包 $\bar{G}$ 上的连续映射. 设 f 为 G 中可微函数并映 G 的边界为 $f(G)$ 的边界，并设 f 的 Jacobi 式的零点集为孤立集，则当 f 为在 G 的边界上一一映射时，在 $\bar{G}$ 上为一一的. 为使局部逆映射在一给定点邻域存在，只需映射的 Jacobi 式在此点的某个邻域不为零. 若 f: $G \to \mathbf{R}^n$, $G \subset \mathbf{R}^n$ 是在所有点 $x \in G$ 有非零 Jacobi 式的可微映射，则对任意 $x_0 \in G$，存在邻域 $U = U(x_0)$，使 f 在 U 上的限制 $f|_U$ 为 U 到 $y_0 = f(x_0)$ 的某个邻域 $V = V(y_0)$ 上的一一映射，且逆映射 f^{-1}（在 V 上）也是可微的. 此定理可以推广到无穷维情形：设 X 与 Y 为完全赋范空间，$G \subset X$ 为开集，且令 f: $G \to Y$ 为连续可微映射. 若 $f'(x_0)$ 为有界线性算子空间 $\mathscr{L}(X, Y)$ 中的可逆元（f' 为 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative）），$x_0 \in G$，则在 X 与 Y 中分别存在 x_0 的邻域 $U = U(x_0)$ 与 $y_0 = f(x_0)$ 的邻域 $V = V(y_0)$，使映射 f: $U \to V$ 与其**逆映射**（inverse mapping）为连续可微同胚.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н. и Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯莫格洛夫与 С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 本文末段中的论断常称为反函数定理（inverse-function theorem）.

现今"函数"一词常保留它的单值意义的场合，而"映射"是它的一个同义词. 按此规定，只有双射（一一映上的函数）有反函数. 在其他情形下，逆关系 f^{-1}（本文中称为多值函数）不是函数，除非像有时规定的那样把它看成集值函数. 这样便引起孤立子集与其唯一元之间的重要且简单的区别.

郑维行 译 沈祖和 校

反双曲函数 [inverse hyperbolic functions; обратные гиперболические функции]

双曲函数（hyperbolic functions）的反函数. 反双曲函数有反双曲正弦、反双曲余弦、反双曲正切：$\operatorname{Ar\,sh} x$, $\operatorname{Ar\,ch} x$, $\operatorname{Ar\,th} x$；别的记号有：$\operatorname{ar\,sh} x$, $\operatorname{ar\,ch} x$, $\operatorname{ar\,th} x$；$\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ 等.

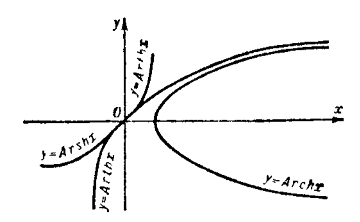
实变量 x 的反双曲函数由下列公式定义：

$$\operatorname{Ar\,sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\operatorname{Ar\,ch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1;$$

$$\mathrm{Ar\,th}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \ |x|<1.$$

反双曲函数在其定义域的每个点处是单值(除 $\mathrm{Ar\,ch}\,x$，它是双值的)并连续的．在研究反双曲函数的性态时，选取 $\mathrm{Ar\,ch}\,x$ 的一个连续分支，即在上述公式中取定一个符号(通常取正号)，这些函数的图象如下图．



反双曲函数之间有一些关系式，例如，

$$\mathrm{Ar\,sh}\,x=\mathrm{Ar\,th}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\mathrm{Ar\,th}\,x=\mathrm{Ar\,sh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

反双曲函数的导数由下列公式给出:

$$(\mathrm{Ar\,sh}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\mathrm{Ar\,ch}\,x)'=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\mathrm{Ar\,th}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}.$$

复变量 z 的反双曲函数由与实变量情形相同的公式定义，但其中的 $\ln z$ 应理解为多值对数函数．复变量的反双曲函数是实变量的对应函数到复平面上的解析延拓．

反双曲函数可由下列公式通过**反三角函数**(inverse trigonometric functions)表达:

$$\mathrm{Ar\,sh}\,z=-i\arcsin iz,$$

$$\mathrm{Ar\,ch}\,z=i\arccos z,$$

$$\mathrm{Ar\,th}\,z=-i\arctan iz.$$

Ю. В. Сидоров 撰

【补注】 也常用 $\operatorname{arc\,sinh}x$, $\operatorname{arc\,cosh}x$, $\operatorname{arc\,tanh}x$ 这些记号．

参考文献

[A1] Spiegel, M. R., Complex variables, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1974.

[A2] Abramowitz, M., Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972.

沈永欢 译

逆映射 [**inverse mapping**; **обратное отображение**], 逆算子(inverse operator)，单值满映射(算子) $f:M\to f(M)$ 的

一个单值映射 g，使得

$$g\circ f=I_X \quad 在 M 上, \tag{1}$$

$$f\circ g=I_Y \quad 在 f(M) 上, \tag{2}$$

其中 $M\subset X$, $f(M)\subset Y$，而 X, Y 都是集合．

如果 g 只满足条件(1)，则称为 f 的左逆映射(left-inverse mapping)，如果只满足条件(2)，则称为 f 的右逆映射(right-inverse mapping)．逆映射 f^{-1} 存在，当且仅当对每个 $y\in f(M)$，完全逆象 $f^{-1}(y)$ 由单个元素 $x\in M$ 组成．如果 f 有逆映射 f^{-1}，则方程

$$f(x)=y \tag{3}$$

对每一个 $y\in f(M)$ 有唯一的解．如果仅仅右逆 f_R^{-1} 存在，则(3)有一个解，但是它的唯一性问题尚未解决．如果仅仅左逆 f_L^{-1} 存在，并假设解存在，则解是唯一的．如果 X 和 Y 是向量空间，而 A 是从 X 到 Y 的线性算子，那么如果 A^{-1} 存在，则它也是线性的．一般地，如果 X 和 Y 被赋予某种结构，可能出现这样的情况; A 的某些性质也由 A^{-1} 继承，假设它存在的话．例如，如果 X 和 Y 是 Banach 空间，而 $A:X\to Y$ 是一个闭算子，则 A^{-1} 也是闭的; 如果 H 是一个 Hilbert 空间，而 $A:H\to H$ 是自伴的，则 A^{-1} 也是自伴的; 如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个奇函数，则 f^{-1} 也是奇的，等等．对许多重要的线性算子类，A 的连续性并不总蕴涵 A^{-1} 的连续性，例如对完全连续算子，就是如此．下面是一个线性算子逆的连续性的重要检验准则．

设 X 是一个带有某个基的有限维空间，并设 $A:X\to X$ 是用关于这个基的矩阵 (a_{ij}) 给定的，则 A^{-1} 存在，当且仅当 $\det(a_{ij})\neq0$(在这种情形下，A 和 A^{-1} 是自动连续的)．

设 X 和 Y 是 Banach 空间，并设 A 是从 X 到 Y 的连续线性算子．

1) 如果 $\|Ax\|\geqslant m\|x\|$，其中 $m>0$，则 A^{-1} 存在并且是连续的．

2) 如果 $X=Y$, $\|A\|\leqslant1$，则 $(I-A)^{-1}$ 存在、连续并且

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n,$$

其中右边的级数按空间 $\mathscr{L}(X)$ 中的范数收敛．

3) 算子 A^{-1} 存在并且在整个 Y 上连续，当且仅当共轭 A^* 有一个在 X^* 上定义和连续的逆．这里 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

4) 如果 A^{-1} 存在，连续并且如果 $\|A-B\|<\|A^{-1}\|^{-1}$，则 B^{-1} 也存在，连续并且

$$B^{-1}=A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[(A-B)A^{-1}]^n.$$

这样，可逆算子的集合在 $\mathscr{L}(X, Y)$ 中按这个空间的**一致拓扑**(uniform topology)是开的．

5) Banach 开映射定理(Banach open mapping theorem)：如果 A 是 X 到 Y 上的一对一映射，则逆映射存在并且是连续的．这个定理有下面的推广：从满完全空间 X 到分离的桶型空间 Y 上的一个一对一连续线性映射是一个拓扑**同构**(isomorphism)．

Hilbert 空间上线性算子的谱理论包含连续线性算子逆的存在性和连续性的一些结果．例如，如果 A 是自伴的并且 λ 不是实的，则 $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在并且是连续的．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J.T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[2] Канторович, Л.В., Акилов, Г. П., функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本：Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析，高等教育出版社，1982).

[3] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本：W.Rudin, 泛函分析，湖北教育出版社，1989).

[4] Robertson, A.P. and Robertson, W., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

В.И.Соболев 撰 鲁世杰 译 葛显良 校

逆矩阵 [**inverse matrix**; **обратная матрица**]，域 k 上的方阵 A 的

矩阵 A^{-1}，满足 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，其中 E 是单位矩阵．一个矩阵的可逆性，等价于它的非奇异性(见**非奇异矩阵**(non-singular matrix))．对于矩阵 $A=\|\alpha_{ij}\|$，其逆矩阵是 $A^{-1}=\|\gamma_{ij}\|$，其中

$$\gamma_{ij}=\frac{A_{ji}}{\det A},$$

这里 A_{ij} 是元素 α_{ij} 的**代数余子式**(cofactor)．关于计算逆矩阵的方法，见**矩阵的求逆**(inversion of a matrix)．

张鸿林 译

逆抛物型偏微分方程 [**inverse parabolic partial differential equation**; **обратно параболическое уравнение**]

一个形如

$$u_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)u_{x_i}-$$
$$-a(x,t)u=f(x,t) \qquad (*)$$

的方程，此中形式 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是正定的．变量 t 起着"逆"时间的作用．替换 $t=-t'$ 就可将方程 $(*)$ 化为通常的抛物型形式．"混合"型的抛物型方程将发生这种情况，例如，$u_t=xu_{xx}$ 对 $x>0$ 是正向的抛物型方程，而对 $x<0$ 是一个逆抛物型方程，又以 $x=0$ 为阶的退化线．

А. П. Солдатов 撰

【补注】 方程 $(*)$ 的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)是不适定问题的众所周知的例子，见**不适定问题**(ill-posed problems)．对反向热传导方程(backward heat equation)(亦见**热传导方程**(thermal-conductance equation))

$$u_t+\Delta u=0$$

的讨论见 [A1]，此处 Δ 是 **Laplace 算子**(Laplace operator)．

参考文献

[A1] Payne, L. E., Improperly posed problems in partial differential equations, SIAM, 1975.

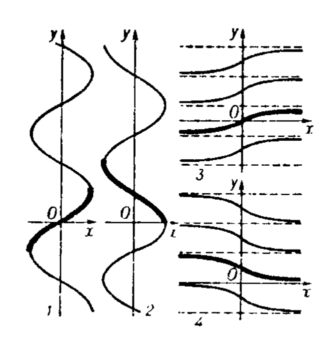
仇庆久 译

反三角函数 [**inverse trigonometric functions**; **обратные тригонометрические функции**]，反圆函数(inverse circular functions)

三角函数(trigonometric functions)的反函数．六个基本三角函数对应六个反三角函数．它们是所谓反正弦、反余弦、反正切、反余切、反正割、反余割，并且分别记为 Arc sin x, Arc cos x, Arc tan x, Arc cotan x, Arc sec x, Arc cosec x．函数 Arc sin x 和 Arc cos x 对于 $|x|\leqslant 1$ 有定义(在实数范围内)；Arc tan x 和 Arc cotan x 对于一切实数 x 有定义；Arc sec x 和 Arc cosec x 对于 $|x|\geqslant 1$ 有定义；最后两个函数很少使用．另外一些记号是 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, 等等．

因为三角函数是周期的，所以它们的反函数是多值的(many-valued)．这些函数的单值分支(主支(principal branches))记为 arc sin x，arc cos x，…．也就是说，arc sin x 是 Arc sin x 的主支，满足条件 $-\pi/2\leqslant \arcsin x\leqslant\pi/2$．类似地，arc cos x，arc tan x 和 arc cotan x 分别满足条件 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，$-\pi/2\leqslant\arctan x\leqslant\pi/2$，$0<\operatorname{arccotan}x<\pi$．

下图表示 $y=\operatorname{Arc\,sin}x$，$y=\operatorname{Arc\,cos}x$，$y=\operatorname{Arc\,tan}x$，$y=\operatorname{Arc\,cotan}x$ 的图形；主支由粗线标明．



函数 Arc sin x, … 很容易由 arc sin x, … 来表示，例如：

$$\operatorname{Arc\,sin}x=(-1)^n\arcsin x+\pi n,$$
$$\operatorname{Arc\,cos}x=\pm\arccos x+2\pi n,$$

$$\operatorname{Arc}\tan x = \arctan x + \pi n,$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{cotan} x = \operatorname{arc}\operatorname{cotan} x + \pi n,$$
$$n = 0, \pm 1, \cdots.$$

反三角函数之间存在关系:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\arctan x + \operatorname{arc}\operatorname{cotan} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

因此，$\arccos x$ 和 $\operatorname{arc}\operatorname{cotan} x$ 在以后的公式中并不出现.

反三角函数是无限次可微的，并且在其定义域的任何内点的邻域中能够展开为级数. 导数、积分和级数展开为:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

复变量的反三角函数定义为相应实函数到复平面的解析延拓.

反三角函数可以通过**对数函数** (logarithmic function) 来表示:

$$\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2-1}),$$
$$\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{cotan} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{iz-1}{iz+1}.$$

Ю. В. Сидоров 撰

【补注】 $\tan^{-1} x$ 和 $\operatorname{cotan}^{-1} x$ 的另一种记号分别是 $\operatorname{tg}^{-1} x$ 和 $\operatorname{ctg}^{-1} x$.

参考文献

[A1] Spiegel, M. R., Complex variables, Schaum's Dutline Series, McGraw-Hill, 1974.

[A2] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

反演 [inversion; инверсия]

将任意一点 A 变换至射线 OA 上满足 $OA' \cdot OA = k$ 的点 A' 的映射，其中 k 是一实常数. 点 O 称作该反演的**中心** (centre) 或**极点** (pole)，k 称作该反演的**幂** (power) 或**系数** (coefficient). 如果 $k = a^2$，则以 O 为圆心，a 为半径的圆 S 上的点在反演下映至自身；S 内部的点映至 S 的外部，反之亦然（有时称反演为关于某一圆的对称）. 反演的中心没有象. 一个具有负幂 k 的反演等价于一个具有同一中心 O 和正幂 $|k|$ 的反演后接一个关于 O 的对称. 具有正幂的反演有时称为**双曲反演** (hyperbolic inversion)，具有负幂的称为**椭圆反演** (elliptic inversion) 或**负反演** (anti-inversion). 通过反演中心的任一直线在该反演之下映成其自身. 不通过反演中心的任一直线映成通过该反演中心的一个圆. 通过反演中心的任一圆映成不通过该反演中心的一条直线. 不通过反演中心的任一圆映成不通过该反演中心的一个圆. 反演在 Descartes 直角坐标系中可由

$$x' = \frac{kx}{(x^2+y^2)}, \quad y' = \frac{ky}{(x^2+y^2)}$$

给出；在复平面上的公式是 $z = k/\bar{z}$. 反演是一个负共形映射，即它保持直线间的夹角但改变其定向. 空间中的反演由类似的方法定义.

有时反演定义为将每一不同于一给定圆束中心的点 A 映为此圆束中通过点 A 的圆的交点 A' 的一个平面映射.

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 有时将理想点 ∞ 当作一反演的中心在该反演之下的象，特别是在扩张复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上考虑时.

参考文献

[A1] Schwerdfeger, H., Geometry of complex numbers, Dover, reprint, 1979.

[A2] Pedoe, D., Circles, Pergamon, 1957.

杨路、曾振柄 译

反演（组合学中的）[inversion (in combinatorics); инверсия в комбинаторике]，更列 (derangement)

n 个元素的一个排列，在这个排列中元素 i 不能占据第 i 个位置，$i = 1, \cdots, n$，这种排列就称为更列. 计算更列数 D_n 的问题，称为"错坐问题". 成立下列公式:

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

更列是要求所排列的元素的位置满足一种特定限制的排列的一个特殊情形. 例如，"夫妻围桌入座问题"在于计算与两个排列 $(1, \cdots, n)$ 及 $(n, 1, \cdots, n-1)$ 都冲突的排列数 U_n.（两个 n 元排列称为冲

突的(conflicting),如果对于所有的 $i=1, \cdots, n$,第 i 个元素在其中每个排列内所占据的位置都不相同.)给出 U_n 的公式是:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{n} (n-k)!.$$

$r \times n$ 的**拉丁方**(Latin square)数 $L(r, n)$,当 $r=2$, 3 时可用下列公式通过 D_n 与 U_n 来计算

$$L(2, n) = n! D_n,$$

$$L(3, n) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} D_{n-k} U_{n-2k}.$$

参考文献

[1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Wiley & Math. Assoc. Amer., 1963(中译本:H. J. 赖瑟,组合数学,科学出版社,1983).

[2] Riordan, J., An introduction to combinatorial mathematics, Wiley, 1958.

B. M. Михеев 撰 陶懋颀 译

矩阵求逆[inversion of a matrix; обращение матрицы]

适用于**逆矩阵**(inverse matrix)数值计算的一种算法.正像求解线性方程组,数值求逆的方法可以分为直接法和迭代法;但是,迭代法因其工作量大在这里仅处于很次要的地位.

大多数矩阵求逆的直接法是基于把给定的矩阵分解为易于求逆的因子的思想.如果

$$A = L_1 \cdots L_k$$

是这样一种分解,则

$$A^{-1} = L_K^{-1} \cdots L_1^{-1}.$$

Jordan 法(Jordan method)(见[1])是直接法的典型代表(而且是一种最普遍应用的方法).

令 A 是一个 n 阶非奇异矩阵.构造逆矩阵 A^{-1} 可分 n 步;第 k 步的结果是矩阵 A_k,它的前 k 列和单位阵的对应列相同.从矩阵观点看,将矩阵从 A_k(令 $A=A_0$)演变到 A_{k+1} 与以矩阵 L_{k+1} 左乘 A 等价,而 L_{k+1} 仅仅第 $(k+1)$ 列与单位阵不同.这样选取该列的元素,使之将 A_k 的第 $(k+1)$ 列化为单位元,它们的形式为

$$-\frac{a_{1,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}, \cdots, -\frac{a_{k,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}},$$

$$\frac{1}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}, \cdots, -\frac{a_{n,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}.$$

由关系式

$$A_{k+1} = L_{k+1} A_k, \quad A_n = E,$$

得

$$L_n \cdots L_1 A = E,$$

和

$$A^{-1} = L_n \cdots L_1. \tag{1}$$

要得出逆阵 A^{-1} 的因子分解(1)大约要做 $n^3/2$ 个乘法和 $n^3/2$ 个加法.为了将(1)中的矩阵乘乘出来以得到 A^{-1} 的显式形式,大约也需要同样数量的运算.在矩阵求逆的许多运用中,运用(1)恰如运用显式形式一样令人满意.例如,计算乘积 $A^{-1}b$,其中 b 是一个列向量,两种情况的运算量是相同的.当在计算机上执行时,连要求的存储量也是相同的.

在上面关于 Jordan 法的叙述中,为简单起见,假定所有元素 $a_{k+1,k+1}^{(k)}$(称为主元(pivot))非零.实际上,Jordan 法,如解线性方程组的 Gauss 型方法(亦称 **Gauss 法**(Gauss method))一样,通常与选择主元的某种格式一起应用.应用这样一种格式等价于(1)中引入附加因子,它考虑了逆矩阵行和列的置换.如线性方程组情况一样,计算解的精度与在方法的中间步中矩阵元素的增长速率有关.随着计算解中精度往后越来越差,即使选择主元,在 Jordan 法中,这种增长也比 Gauss 型方法中更有可能.

相应于 A 的近似逆 X,矩阵 $R=E-AX$ 称为剩余(residual).有估计

$$\frac{\| A^{-1} - X \|}{\| A^{-1} \|} \leqslant \| R \|.$$

这样,剩余的范数是近似逆阵的相对精确度的界.这是矩阵的数值求逆问题与线性方程组解之间的重要差别,而后者(例如,在正交法或 Gauss 型方法中)剩余通常是小量,而且得到的解的性质与该线性方程组的条件有关.

几种重要类型的矩阵可以用比在一般情况更经济有效的方法来求逆.这一类矩阵包括 Toeplitz, Hankel, 带状(特别是三对角)矩阵,有 Toeplitz 结构或 Kronecker 乘积结构等的分块矩阵.例如,令 T 为具有 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 中元素的 $n+1$ 阶 **Toeplitz 矩阵**(Toeplitz matrix):

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ t_{-1} & t_0 & \cdots & t_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ t_{-n} & t_{-n+1} & \cdots & t_0 \end{array} \right\|.$$

假定不仅 T,而且它的 n 阶主子阵也是非奇异的,则矩阵 T^{-1},一般不再是 Toeplitz 矩阵,有表达式(见[2]):

$$T^{-1}=\frac{1}{p_n}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & \cdot & 0\\ b_1 & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & & & \cdot\\ b_n & \cdot & b_1 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}1 & a_1 & \cdot & a_n\\ 0 & 1 & & \cdot\\ \cdot & & & a_1\\ 0 & \cdot & 0 & 1\end{matrix}\right\|+$$

$$-\frac{1}{p_n}\left\|\begin{matrix}0 & \cdots & \cdot & 0\\ a_n & & & \cdot\\ \cdot & & & \cdot\\ a_1 & \cdots & a_n & 0\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0 & b_n & \cdots & b_1\\ \cdot & 0 & & \\ \cdot & & & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

其中向量

$$\frac{1}{p_n}(1b_1\cdots b_n)^T \text{ 和 } \frac{1}{p_n}(a_n\cdots a_1 1)^T$$

分别是 T^{-1} 的第一列和最后一列．因此，T 完全由给定的它的第一列和最后一列描述．由（2），T^{-1} 的所有元素可以逐次计算出：

$$\{T^{-1}\}_{i+1,j+1}=\{T^{-1}\}_{i,j}+$$
$$+\frac{1}{p_n}(b_{i+1}a_{j+1}-a_{n-i}b_{n-j}).$$

这个计算需要 $O(n^2)$ 个算术运算．

在 Toeplitz 矩阵求逆的经济算法（例如见[3]）中，a_i, b_j 和 p_n 的计算是由递归公式进行的．而且也需要 $O(n^2)$ 个运算．主子矩阵非奇异这个条件可以放宽，而仍然只需要 $O(n^2)$ 个算术运算．

矩阵求逆有时是为了用公式 $x=A^{-1}b$ 来解线性方程组 $Ax=b$．对一般形式的矩阵，这样做几乎没有意义，因为与线性方程组的直接求解方法相比较，它将增加运算量而且损失数值稳定性．可是对 Toeplitz（和有关的）矩阵，情况就不同了．如表达式（2）所示，$T^{-1}b$ 的计算简化为执行 Toeplitz 矩阵和向量的四个乘法和一个向量减法．有 Toeplitz 矩阵与向量乘的经济算法，这种算法需要（对 n 阶）$O(n\log n)$ 个运算．对 Toeplitz 方程组的解法，算术运算量还不能达到这种渐近状态（现在，这些算法中最好的方法需要 $O(n\log^2 n)$ 个运算）．因此，对具有同一 Toeplitz 矩阵 T 和不同右边 b 的线性方程组 $Tx=b$ 的重复求解，预先将 T 求逆似乎是合理的．

在具有许多并行处理器的计算机上，重复求解具有同一个一般形式矩阵的线性方程组时，预先求出矩阵的逆是很合理的，因为与矩阵与向量相乘比较，解线性方程组的直接法不具有这种方便的并行性．

在许多情况（例如在数学规划的拟 Newton 方法中），要求矩阵 A 的逆，它与具有已知逆阵 B^{-1} 的矩阵只相差一个秩为 1 的矩阵或（在 B 是对称矩阵情况）秩为 2 的一个对称矩阵．对 n 阶矩阵，这样重新构造一个逆矩阵可用 $O(n^2)$ 个运算来完成．下面的公式可以作为一个例子（见[4]）：如果 u 和 v 是列向量，则

$$(B+uv^T)^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{\gamma}B^{-1}uv^TB^{-1},$$

其中假定 $\gamma=1+v^TB^{-1}u$ 非零．

从计算复杂性理论的观点看，矩阵求逆的问题和解线性方程组问题（在串行机上）有相同的复杂性（如果随其阶数的增加，两种问题的复杂性增长速率上的一些固有条件得以满足[5]）．这种复杂性的量级不会超过 $n^{0.49}$．

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.

[2] Гохберг, И. Ц., Фельдман, И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971（英译本：Gohberg, I. C [I. Ts. Gokhberg] and Fel'dman, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, Amer. Math. Soc., 1974）.

[3] Trench, W., An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices, *Siam J. Control Optim*. **12** (1964), 512 – 522.

[4] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М. - Л., 1963（中译本：Д. К. 法捷耶夫，В. Н. 法捷耶娃，线代数计算方法，上海科学技术出版社，1965）.

[5] Aho, A., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., The design and analysis of computer algorithms, Addison-Wesley, 1974.

С. Д. Икрамов 撰 袁国兴、张宝琳 译

级数的反演[inversion of a series; обращение ряда]

对于一个给定的幂级数

$$w=f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j(z-a)^j,\ b_1\neq 0, \tag{1}$$

得到它的反函数 $z=\varphi(w)$ 的形如

$$z=\varphi(w)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(w-b)^k \tag{2}$$

的级数，其中 $b=f(a)=b_0$, $a_0=a$,

$$a_k=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta\to a}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left[\frac{\zeta-a}{f(\zeta)-b}\right]^k,\ k\geqslant 1.$$

级数(2)称为级数(1)的反演，或 Lagrange 级数（Lagrange series）．更一般的寻求任意复合解析函数 $F[\varphi(w)]$ 的展式的问题由 **Bürmann - Lagrange 级数**（Bürmann - Lagrange series）解决．如果(1)的收敛圆盘是 $|z-a|<\rho$，那么级数（2）在圆盘 $|w-b|<\delta$ 内收敛，其中 δ 是点 b 和圆周 $|z-a|=\rho$ 在映射 $w=f(z)$ 下的象之间的距离．

如果函数 $w=f(z)$ 被展成形如

$$w=f(z)=b+\sum_{j=m}^{\infty}b_j(z-a)^j,\ m\geqslant 2,\ b_m\neq 0,\quad (3)$$

的级数，也就是说，如果 a 是 $f(z)$ 的一个**临界点**(critical point)，那么反函数 $z=\varphi(w)$ 在 b 有一个 $m-1$ 级的**代数支点**(algebraic branch point)，并且(3)的反演只能取 **Puiseux 级数**(Puiseux series)的形式：

$$z=\varphi(w)=a+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(w-b)^{k/m},$$

$$a_k=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta\to a}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left\{\frac{\zeta-a}{[f(\zeta)-b]^{1/m}}\right\}^k,\ k\geqslant 1.$$

包含 $z-a$ 的负整数幂和正整数幂的 **Laurent 级数**(Laurent series)的反演问题在级数只有有限个负(或正)幂项的情形可以类似地解决(见[1]).

对于多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n>1)$ 的解析函数，反演问题可以有很多不同的表述．例如，如果 f: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的零点的一个邻域到 $\mathbf{C}^n$ 里的一个非奇异(即 Jacobi 矩阵 $\|\partial f/\partial z_k\|$ 的秩等于 n)的全纯映射，$f(0)=0$，那么在零点的某个邻域内存在全纯的反函数 φ，它可以用多维 Bürmann-Lagrange 级数的形式来表示(见[3]).

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977).

[2] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1964.

[3] Солтан, Е. Е., в кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных, Красноярск, 1972, 129 – 137.

Е. Д. Соломенцев 撰　陈怀惠 译

椭圆积分的反演 [**inversion of an elliptic integral**; **обращение эллиптического интеграла**]

在**椭圆积分**(elliptic integral)

$$z=\int^u R(z,w)dz$$

的情形下，构造函数 u 使之成为 z 的函数或构造形如 $f(u(z))$ 的单值复合函数的问题，其中 R 是变量 z 和 w 的有理函数，而这两个变量是通过方程 $w^2=F(z)$ 相关联的，这里 $F(z)$ 是一个没有重根的，次数为 3 或 4 的多项式．这个问题的完全解答是由 N. H. Abel 和 C. G. J. Jacobi 在 1827 – 1829 年几乎同时给出的．他们指出，这个问题的解导致新的超越**椭圆函数**，椭圆函数(见(elliptic function)).

研究椭圆函数理论的一个本质不同的方法是属于 K. Weierstrass 的．对于 Weierstrass 范式下的第一类椭圆积分，

$$z=\int^u\frac{dz}{w},\ w^2=4z^3-g_2z-g_3,$$

$u=\wp(z)$ 原来是带不变量 g_2, g_3 的 Weierstrass $\wp$ 函数(见 **Weierstrass 椭圆函数**(Weierstrass elliptic functions))．对于 Legendre 的范式下的第一类椭圆积分，

$$z=\int^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

反演导致 **Jacobi 椭圆函数**(Jacobi elliptic functions).

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970.

[2] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1964.

Е. Д. Соломенцев 撰　陈怀惠 译

逆半群 [**inversion semi-group**, **inverse semi-group**; **инверсная полугруппа**]

每个元素 a 具有唯一逆元素 a^{-1} 的半群(见**正则元**(regular element))．半群 S 的这个性质等价于下列每一个性质：S 是**正则半群**(regular semi-group)且它的任意两个幂等元交换(于是逆半群的所有幂等元的集合是半格(见**幂等元的半群**(idempotents, semi-group of))；S 的每个左或右的**主理想**(principle ideal)有唯一的生成幂等元．群是逆半群；群是具有唯一幂等元的仅有的逆半群．任意逆半群 S 上的自然偏序关系(natural partial order relation) $\leqslant$ 在逆半群的研究中起重要作用．该关系为：$a\leqslant b$，当且仅当 $ab^{-1}=aa^{-1}(a,b\in S)$．在逆半群的幂等元的半格上，这关系与半格上的自然偏序相同(见**幂等元**(idempotent))．逆半群的半格(见**半群的带**(band of semi-groups))是逆半群．逆半群的平移包(见**半群的平移**(translation of semi-groups))也是逆半群([7])．逆半群上的每个同余由含幂等元的类决定．

设 J_X 是集合 X 上全体一一部分变换(包括空集到自身的"空"变换)的集合，则 J_X 对叠加运算成为逆半群，称为 X 上对称逆半群(symmetric inverse semi-group)．下述 Wagner-Preston 定理(Wagner-Preston theorem)具有基本的重要性：任何逆半群 S 可同构地嵌入到对称逆半群 J_S 中．

逆半群理论是半群理论中重要而深入研究过的分支．已研究过用一一部分变换以及用域上矩阵来表示逆半群(见[1])．也已研究逆半群中的同余关系．正在研究具有有限性条件的逆半群．已经找出许多重要的特殊类型的逆半群．附加在大多数这种逆半群上的限制或总是在某种意义上的单纯性(例如，双单纯性，见**单半群**(simple semi-group))或联系于幂等元

的半格 E，或是两种类型的组合．在 E 上的限制可涉及 E 作为半格的抽象性质（例如，E 是某种类型的链）或 E 在半群中的某些有关性质，特别地，E 对于某些同余的行为．在任何逆半群 S 上，存在一个具有性质 S/σ 是群的最小同余（最小群同余（least group congruence）），即

$$\sigma=\{(a,b): ae=be \quad 对某\ e\in E\}.$$

逆半群称为真的（proper），若 E 构成 σ 类．在任何逆半群 S 上存在能分离幂等元的最大的同余 μ，即

$$\mu=\{(a,b): a^{-1}ea=b^{-1}eb, \ 对任何\ e\in E\},$$

且 μ 含于关系 $\mathscr{H}$ 中（见 **Green 等价关系**（Green equivalent relations））；逆半群称为基本的（fundamental），如果 μ 与相等关系一致．对于上面提到的类型的逆半群已经得到许多结构定理，在许多情形，逆半群的描述通过"模去群"来实现；群作为各种结构的"块"出现．这些结构中，半格、群同态等也参与进去．例如，Clifford 逆半群（见 **Clifford 半群**（Clifford semi-group））和完全 O 单逆半群（见 **Brandt 半群**（Brandt semi-group））的典型的描述就是这种类型．

逆半群也能看成具有两个运算的泛代数：一个是乘法二元运算，一个是取逆一元运算．单演（monogenic）（由单个元素生成的）逆半群作为泛代数已得到分类（[6]，[9]）．对于上面的运算，所有逆半群的类是一个簇；例如它可用下列恒等式组来确定（[8]）：

$$(xy)z=x(yz),\ (x^{-1})^{-1}=x,\ xx^{-1}x=x,$$
$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1},\ xx^{-1}yy^{-1}=yy^{-1}xx^{-1}.$$

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1 – 2, Amer. Math. Soc., 1961 – 1967.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960（英译本：Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974）.

[3] Курош, А. Г., Общая алгебра, Лекции 1969 – 1970, учебного года, М., 1974（英译本：Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963）.

[4] Вагнер, В. В.,《Докл. АН СССР》, **84** (1952), 6, 1119 – 1122.

[5] Preston, G. B., Inverse semigroup, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954) 4, 396 – 403.

[6] Глускин, Л. М.,《Матем. сб.》, **41** (1957), 1, 23 – 36.

[7] Понизовский, И. С.,《Успехи матем. наук》, **20** (1965), 6, 147 – 148.

[8] Шаин, Б. М., В теория полугрупп и её приложения, в. 1. Саратов, 1965, 286 – 324.

[9] Ершова, Т. И.,《Матем. зап. Уральского ун-та》, **8** (1971), 1, 30 – 33.

[10] Munn, W. D., Some recent results on the structure of inverse semigroups, in K. W. Folley (ed.): Semigroups, Acad. Press, 1969, 107 – 123.

[11] O'Carroll, L., Embedding theorems for proper inverse semigroups, *J. of Algebra*, **42** (1976), 26 – 40.

[12] Petrich, M., Inverse semigroups, Wiley, 1984.

Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 许以超 校

可逆元 [invertible element; обратимый элемент]，有单位元的半群的

元素 x、对于它有元素 y 使得 $xy=1$（右可逆性（right invertibility））或 $yx=1$（左可逆性（left invertibility））．若元素既是右可逆的，又是左可逆的，就称为双边可逆的（two-sidedly invertible）（通常简称为可逆的）．有单位元的半群 S 中具有双边逆的全部元素的集合 $G(S)$ 是 S 中含单位元的最大的子群．**双循环半群**（bicyclic semi-group）是一个例子，其中有元素仅为右可逆的或左可逆的；此外半群 S 中这样元素的存在蕴含了 S 中存在着双循环子半群，它与 S 有同一个单位元．换一种情形，就是 S 中的元素若有单边逆就有双边逆；这情况具备当且仅当或者 $S=G(S)$ 或 $S\setminus G(S)$ 是子半群（显然是 S 中最大的理想）；这样的半群称为具有孤立的群部分的半群．下面是这样的半群的例子：有单位元的有限半群，有单位元的交换半群，具有双边消去律和单位元的半群以及含单位元的复矩阵的乘法半群．

参考文献

[1] Clifford, A. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960（英译本：Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974）.

Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 许以超 校

可逆模 [invertible module; обратимый модуль]

交换环（commutative ring）上的**模**（module）M，满足：存在一个 A 模 N，使得 $M\otimes N$ 同构于 A（作为 A 模同构）．一个模 M 是可逆的，当且仅当它是有限生成的、投射的并且在 A 的每个素理想上的秩均为 1．可逆模的同构类组成环 A 的 Picard 群（Picard group）；此群中的运算是由张量积所诱导的，其幺元是模 A 所在的类．在非交换的情形下，设 A 和 B 是结合环，称一个 (A,B) 双模 M 是可逆的（invertible），如果存在一个 (B,A) 双模 N，使得

$$M\otimes_B N\simeq A,\quad N\otimes_A M\simeq B.$$

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）.

[2] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1, Springer, 1973.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 非交换环的 Picard 群是序模和 G 模理论中的一个很有用的不变量，见[A1]，[A2].

参考文献

[A1] Fröhlich, A., The Picard group of noncommutative rings, in particular of orders, *Proc. London Math. Soc.*, **180**(1973), 1 – 45.

[A2] Fröhlich, A., Reiner, I. and Ullom, S., Class groups and Picard groups of orders, *Proc. London Math. Soc.*, **180**(1973), 405 – 434.

赵春来 译

可逆层[invertible sheaf; обратимый пучок]

戴环空间(ringed space)$(X,\mathcal{O}_X)$ 上 $\mathcal{O}_X$ 模的秩 1 的**局部自由层**(locally free sheaf). 等价定义为：局部同构于层 $\mathcal{O}_X$ 的 $\mathcal{O}_X$ 模层．X 上的可逆层关于 $\mathcal{O}_X$ 上的张量乘法运算可在同构意义下构成一个 Abel 群．这个群称为空间 X 的 **Picard 群**(Picard group)，记为 $\mathrm{Pic}\,X$. 层 $\mathcal{L}$ 在这个群里的逆元是与 $\mathcal{L}$ 对偶的层 $\mathcal{L}^{-1}=\mathcal{H}om(\mathcal{L},\ \mathcal{O}_X)$. 当 $(X,\mathcal{O}_X)$ 是**概形**(scheme)(尤其是代数簇)或是**解析空间**(analytic space)时，一个 $\mathcal{O}_X$ 模层为可逆层，当且仅当它同构于 X 上某个代数(相应地，解析)线丛的正则(相应地，解析)截面的层.

概形上的可逆层与**除子**(divisor)有密切的联系．X 上的每个 Cartier 除子 D 都可联系一个可逆层 $\mathcal{O}_X(D)$，从而定义了一个单同态 $\mathrm{Cl}\,X\to\mathrm{Pic}\,X$，这里 $\mathrm{Cl}\,X$ 是 X 上的 Cartier 除子类群．对于整概形 X，这个同态是同构.

在射影概形 X 上可以定义 Serre 扭可逆层(Serre twisted invertible sheaf)$\mathcal{O}_X(1)=\mathcal{O}(1)$. 实际上如果给出了概形 X 到射影空间 P^N 内的一个嵌入，则 $\mathcal{O}_X(1)$ 对应于超平面截面的类．特别当 $X=P^N(k)$ 是域 k 上的射影空间时，层 $\mathcal{O}(1)$ 是 k^{N+1} 上的线性函数的层在自然映射 $k^{N+1}\setminus\{0\}\to P^N(k)$ 下的正象．$P^N(k)$ 里的齐次坐标系 $x_0,\cdots,x_N$ 可被等同于截面空间 $\Gamma(P^N,\mathcal{O}(1))$ 的一个基.

概形 X 上的可逆层可与一个从 X 到射影空间内的有理映射相联系．设 $\mathcal{L}$ 是概形上的可逆层，$s_0,\cdots,s_N$ 是 $\mathcal{L}$ 的截面，这些截面在任何一点 $x\in X$ 处的值在 $\mathcal{O}_X$ 上生成 $\mathcal{L}_X$. 存在唯一的态射 $\varphi:X\to P^N(k)$ 使得 $\varphi^*\mathcal{O}(1)\simeq\mathcal{L}$ 而且 $\varphi^*x_i=s_i$，这里 $x_0,\cdots,x_N$ 是 $P^N(k)$ 里的齐次坐标．如果存在嵌入 $\varphi:X\to P^N(k)$ 使得 $\varphi^*\mathcal{O}(1)\simeq\mathcal{L}$，就称 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 是极丰富的(very ample). 如果存在正整数 n 使得 $\mathcal{L}^n$ 是极丰富的，就称 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 为丰富的(ample). k 上的 **Noether 概形**(Noetherian scheme)X 的可逆层 $\mathcal{L}$ 是丰富的，当且仅当对于 X 上的每个**凝聚层**(coherent sheaf)$\mathcal{F}$，存在整数 $n_0>0$ 使得当 $n\geqslant n_0$ 时层 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^n$ 由它的整体截面生成.

如果除子 D 对应于 X 上的一个丰富可逆层 $\mathcal{L}$，就称 D 为丰富除子(ample divisor). 设 X 是代数闭域 k 上的真光滑概形，则 X 上 Cartier 除子 D 为丰富的当且仅当对每个闭整子概形 $Y\leqslant X$. 相交指数 $D^r\cdot Y$ 取正值，这里 $r=\dim Y$(见**相交指数(代数几何学中的)**(intersection index (in algebraic geometry))). 关于丰富性的其他判则参见[5]. 也有把丰富除子的概念推广到较大余维数的子簇上去的([2]).

极丰富和丰富可逆层的概念也可被转移到解析空间的情形(在这种情形下的丰富性判则可参见**正向量丛**(positive vector bundle)).

参考文献

[1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[2] Hartshorne, R., Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer, 1970.

[3] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[4] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

[5] Итоги науки и техники. Алгебра, Топология, Геометрия, **10**(1972), М., 47–112.

В. А. Исковских 撰

【补注】Serre 扭可逆层的定义不够精确．在 $k^{N+1}\setminus\{0\}$ 上有一个乘法群 $k^\times$ 的作用，使得 $P^N(k)$ 成为它的商．结构层在映射 $k^{N+1}\setminus\{0\}\to P^N(k)$ 下的正象分裂成可逆层 $\mathcal{O}(n)(n\in\mathbf{Z})$ 的直和，使得 $k^\times$ 通过特征标 $t\to t^n$ 作用在 $\mathcal{O}(n)$ 上.

陈志杰 译

对合[involution; инволюция]

1) 二阶**自同态**(endomorphism)，即将对象映到自身的满射，且其平方是恒等态射(也见**具有对合的范畴**(category with involution))．周期映射(periodic mapping)有时也称为对合，它是态射且它的某个非零幂是恒等态射．最小的这样的幂称为该对合的周期(period).

通常，群 G 的所谓对合是指它的二阶元.

实数或复数域上代数 E 的对合是 E 到自身的满射 $x\to x^*$，且它满足下述对合公理(involution axioms: 1) $x^{**}=x$，对所有 $x\in E$; 2) $(x+y)^*=x^*+y^*$ 对所有 $x,y\in E$; 3) $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$，对所有 $x\in E$ 及相应域中所有 λ; 4) $(xy)^*=y^*x^*$，对所有 $x,y\in E$. 复数域上具有对合的代数 E 称为对称代数(symmetric algebra)或**对合代数**(involution algebra).

参考文献

[1] Conner, P. E. and Floyd, E. E., Differentiable periodic maps, Springer, 1964.

2) 射影几何学中的对合是射影变换，它的平方是恒等变换．实的射影直线的非恒等对合恰有两个不动点(双曲对合(hyperbolic involution))或没有不动点(椭圆对合(elliptic involution))．设 A, B 是双曲对合的不动点，则在该对合下的对应点 M 及 M_1，调和地分割点对 A, B. 射影平面上的对合是双曲(下)

同调(homology).

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1977.

3) 代数簇的对合(involution of an algebraic variety)是簇的二阶自同构. 设 X 是代数封闭域 k 上的非奇异射影代数簇而 g 是 X 的对合, 则相对于循环群 $\{g\}$ 的作用的商簇 $X/\{g\}$ 是射影簇, 称为对合 g 下的商(quotient under the involution), g 的不动点的集合 $F(g)$ 形成 X 的非奇异子簇. 若 $F(g)$ 在每个点上有余维数 1, 则 g 的象是非奇异簇. 簇 $X/\{g\}$ 的非奇异模型 $\bar{X}$ 的数值不变量可利用 **Lefschetz 公式**(Lefschetz formula)来计算.

参考文献

[1] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators Ⅲ, *Ann. of Math.* (2), **87** (1968), 1, 546 – 604.

[2] Долгацев, И. В., Исковскикь, В. А., Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия., **12** (1975), 77 – 170.

[3] Godeaux, L., Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, Hermann, 1963.

石生明 译 许以超 校

对合代数 [**involution algebra** 或 algebra with involution; **алгебра с инволюцией**]

复数域上的代数 E, 赋予一个**对合**(involution) $x \mapsto x^*$, $x \in E$. 一些例子是: 紧集上连续函数的代数, 其中的对合是把任一函数对应于其复共轭; Hilbert 空间上有界线性算子的代数, 其中的对合是把任一算子对应于其伴随算子; **群代数(局部紧群的)**(group algebra (of a locally compact group)); 和局部紧群上测度的代数. 元素 $x^* \in E$ 称为 x 的共轭元(conjugate element)或伴随元(adjoint element). 一个元素 $x \in E$ 称为自伴的(self-adjoint)或 Hermite 的(Hermitian), 如果 $x^* = x$; 称为正规的(normal), 如果 $x^* x = x x^*$. 如果 E 包含单位元素 1, 则满足 $x^* x = x x^* = 1$ 的元素 $x \in E$ 称为酉的(unitary). E 中的 Hermite 元素的集合 E_h 是 E 的实向量子空间, 且任一 $x \in E$ 能唯一地写成 $x = x_1 + i x_2$ 的形式, 这里 $x_1, x_2 \in E_h$. 在这种情况下, $x \in E$ 是正规的, 当且仅当 x_1 和 x_2 可交换. 每一个形如 $x^* x$ 的元素是 Hermite 的, 单位元素也是如此. 如果 x 可逆, 则 x^* 也可逆, 且 $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. 任一 Hermite 元素的谱(见**元素的谱**(spectrum of an element))是关于实轴对称的. 一个对合代数称为全对合代数(totally involution algebra), 如果任一形如 $x^* x$ ($x \in E$) 的元素的谱包含在非负实数集中. 全对合代数的例子有: 紧集上连续函数的对合代数; Hilbert 空间上有界线性算子的对合代数; 紧群和交换局部紧群的群代数. 非紧半单 Lie 群的群代数不是全对合代数. 交换对合代数 E 是全对合代数, 当且仅当它的所有极大理想是对称的, 或当且仅当 E 的所有特征是 Hermite 的. 每个 **C^* 代数**(C^*-algebra)都是一个全对合代数.

对合代数 E 的子集 M 称为对合集(involution set), 如果对所有的 $x \in M$ 有 $x^* \in M$. 对合代数的映射 $\varphi: E \to F$ 称为对合映射(involution mapping), 如果对所有的 $x \in E$ 有 $\varphi(x)^* = \varphi(x^*)$. 对合代数的对合同态的核是对称的双边理想. 每一个对称的单边理想是双边的, 且对合代数关于对称理想的商代数按自然方式有一个对合代数的结构. 对合代数的根(见**环与代数的根**(radical of rings and algebra))是一对称理想. 一个对合代数 E 的对合子代数 F 是对合代数. 设 $\widetilde{E}$ 是一对合代数 E 和域 $\mathbf{C}$ 的直和, 其中线性运算和对合是按分量定义而乘法由下式给出:

$$\{x, \lambda\}\{y, \mu\} = \{xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu\}$$

对所有的 $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, $x, y \in E$. 这时 $\widetilde{E}$ 是有单位元素的对合代数.

对合代数 E 上的线性泛函 f 称为 Hermite 的(Hermitian), 如果对所有的 $x \in E$ 有 $f(x^*) = \overline{f(x)}$; f 称为正的(positive), 如果对所有的 $x \in E$ 有 $f(x^* x) \geqslant 0$. E 上 Hermite 线性泛函的集合 E'_h 是 E 的对偶 E' 的实向量子空间, 而 E' 是子空间 E'_h 和 iE'_h 的直和. 如果 E 有单位 1, 则 E 上每一个正泛函 f 是 Hermite 的, 且对所有的 $x \in E$ 有 $|f(x)|^2 \leqslant f(1) f(x^* x)$. 如果 f 是对合代数 E 上的正泛函, 则对所有的 $x, y \in E$, 有 $f(y^* x) = f(x^* y)$ 和 $|f(y^* x)|^2 \leqslant f(y^* y) f(x^* x)$.

设 E 是一对合代数, 赋予一个范数使 E 成为**赋范代数**(normed algebra), 且对所有的 $x \in E$ 满足条件 $\|x^*\| = \|x\|$. 则 E 称为对合赋范代数(normed algebra with involution). 如果 E 关于此范数是完全的, 则 E 称为 Banach 对合代数(Banach algebra with involution). 每一个具有对合的赋范代数 E 能嵌入到一个具有对合的 Banach 代数 $\bar{E}$ 中, $\bar{E}$ 包含 E 作为其稠对合子代数. 在等距对合同构意义下 $\bar{E}$ 是唯一确定的. $\bar{E}$ 称为 E 的完全化(completion). 如果 E 是具有对合的 Banach 代数, 有近似单位元, 则 E 上每一正线性泛函 f 是连续的且能延拓成 $\bar{E}$ 上的正线性泛函. 如果 E 有单位元 1 且 $\|1\| = 1$, 则对 E 上任一正线性泛函 f, $\|f\| = f(1)$ 且 $f(x^* x) \leqslant f(1) r(x^* x)$, 这里 $r(x^* x)$ 是 $x^* x$ 的**谱半径**(spectral radius)(见 **Banach 代数**(Banach algebra)).

全对合代数的 Hermite 元有实的谱. 对有单位元

的全对合代数 E 上任一极大左理想 I 存在一个 E 上正线性泛函 f 满足 $I=\{x\in E: f(x^*x)=0\}$. 全对合代数 E 中的一个元素 x 是在 E 中左可逆的，当且仅当对 E 上所有的非零正泛函 f 有 $f(x^*x)>0$. 全对合代数 E 的根与对 E 上所有正线性泛函 f 满足 $f(x^*x)=0$ 的元素 $x\in E$ 的集合重合. 有单位元 1 的具有对合的 Banach 代数 E 是全对合的，当且仅当 $r(x^*x)=\sup f(x^*x)$, 这里上确界是对使 $f(1)=1$ 的 E 上的正线性泛函 f 的集合取的.

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 1956(英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

[2] Dixier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977(译自法文).

[3] Pták, V., Banach algebras with involution, *Manuscripta Math.*, **6** (1972), 3, 245 – 290.

[4] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract hamonic analysis, 2, Springer, 1979.

А. И. Штерн 撰

【补注】 具有对合的 (Banach, 赋范) 代数也称为对合 (involutive) (Banach, 赋范) 代数. 如果在一个对合 Banach 代数 A 中, 对所有的 $x\in A$, 有 $\|xx^*\|=\|x\|^2$, 则 A 称为 B^* 代数 (B^*-algebra).

设 A 是 Banach 代数. A 中左近似单位元 (left-approximate identity) 是 A 中元素的网 $\{e_i\}_{i\in I}$ (见网(有向集)(net (directed set))), 使得对所有的 $x\in A$ 有 $\lim\|e_ix-x\|=0$. 右近似单位元 (right-approximate identity) 用 $\|xe_i-x\|$ 可类似地定义. 左近似且右近似的单位元简称为近似单位元 (approximate identity). 每一个 B^* 代数有近似单位元.

具有对合的代数也用术语对称代数 (symmetric algebra), 全对合代数也称完全对称代数 (completely symmetric algebra). 相应地, 具有对合代数的同态 $\varphi: E\to F$ 称为对称同态 (symmetric homomorphism), 如果对所有的 $x\in E$ 有 $\varphi(x^*)=\varphi(x)^*$. 使人遗憾的是, 术语对称代数有时也用来表示全对合代数.

E 的对称理想 (symmetric ideal) 是使得 $M^*=\{m^*: m\in M\}=M$ 的理想 M.

参考文献

[A1] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本: W. Rudin, 泛函分析, 湖北教育出版社, 1989).

葛显良 译 鲁世杰 校

对合表示 [involution representation; симметричное представление]

对合代数 (involution algebra) A 用 Hilbert 空间上连续线性算子的表示 π, 且使得对所有的 $x\in A$, $\pi(x)^*=\pi(x^*)$, 这里 x^* 是 x 在 A 的对合下的象.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

葛显良 译 鲁世杰 校

对合方程组 [involutional system 或 system in involution; инволюционная система], 对合偏微分方程组 (involutive system of partial differential equations)

一个一阶偏微分方程组

$$F_i(x,u,p)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m, \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $u=u(x_1,\cdots,x_n)$, $p=(p_1,\cdots,p_n)=(\partial u/\partial x_1,\cdots,\partial u/\partial x_n)$, 其 **Jacobi 括号** (Jacobi brackets) 对 (x,u,p) 恒为零:

$$[F_i,F_j]=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m, \tag{2}$$

方程(2)称为可积条件 (integrability conditions).

对于拟线性方程组, 这定义可略加修改. 设函数 $\partial F_i/\partial p_k$ ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant n$) 均不依赖于 $p=(p_1,\cdots,p_n)$, 则函数

$$[F_i,F_j]-F_i\frac{\partial F_j}{\partial u}+F_j\frac{\partial F_i}{\partial u}$$

也有此性质. 在拟线性方程类中, 一个方程组为对合的条件是由下式来定义的:

$$[F_i,F_j]-F_i\frac{\partial F_j}{\partial u}+F_j\frac{\partial F_i}{\partial u}=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m.$$

当 F_i 不含 u 时, 这个定义和前面的定义是一样的. 后一个定义有时也推广到所有形如(1)的方程组.

若方程组(1)是线性齐次的, 而且写成形式

$$P_i(u)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

其中 P_i 是一阶线性微分算子, 则它们的对合性可以定义为对一切 $1\leqslant i,j\leqslant m$ 的可交换性条件 $P_iP_j=P_jP_i$.

每个对合方程组都是**完全系统** (complete system). 反之, 如果(1)是完全系统, 而且可写为范式, 即 $1\leqslant m\leqslant n$, 且

$$F_i(x,u,p)=p_i-f_i(x,u,p_{m+1},\cdots,p_n),\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

则它是对合的. 故当一个完全系统适合 $m\leqslant n$ 而且可以用非奇异的变换, 从变量 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 中解出 m 个来, 则可以将完全系统化为对合方程组.

若方程组(1)不含 u, 且 $m=n$, 行列式 $|\partial F_i/\partial p_k|\neq 0$, 而且从方程组 $F_i(x,p)=0$ ($1\leqslant i\leqslant n$) 中可以解出 $p_i=p_i(x)$ 来, 则若此方程组是对合的, 表达式

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(x)dx_i$$

必是恰当形式．应用Jacobi方法([2])求解一个不含 u 且由 $m(m<n)$ 个函数无关的方程构成的对合方程组，即以此为基础．用此方法时要把原方程组补充成一个仍有以上性质的 n 个方程所成的对合方程组．扩充要逐步进行：由前一方程组添上未知的首次积分即得下一方程组．这个方法也可用于含 u 的方程组(见[3])．

参考文献

[1] Carathéodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 1, Holden-Day, 1965(译自德文).

[2] Jacobi, C. G. J., Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium qeumcunque propositas integrandi, *J. Reine Angew. Math.*, **60**(1862), 1－181.

[3] Coursat, E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Hermann, 1891.

[4] Гюнтер, Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.-М., 1934.

[5] Kamke, E., Differentialgleichungen; Lösungsmethoden und Lösungen, 2, Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Akad. Verlagsgesellschaft, 1944(中译本：E. 卡姆克，一阶偏微分方程手册，科学出版社，1983).

А. П. Солдатов 撰

【补注】 其他参考文献和说明，亦见**完全系统**(complete system)．

更为一般地，一个偏微分方程组可定义如下：令 $\pi: M\to N$ 为一纤维流形(fibre manifold)，即 π 局部地(只相差一个微分同胚)看起来就是一个标准投影 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$．令 $J^l=J^l(\pi)$ 为 π 的 l 阶节流形，$\mathcal{O}^l$ 是 J^l 上的函数的芽的层．于是 $U\subset J^l$ 上的 l 阶偏微分方程组(system of partial differential equations)就是 $\mathcal{O}^l$ 的理想的局部有限生成层 Φ 在 U 上的限制．解就是一个截面 $f:\pi(U)\to U$，使得对一切 $\varphi\in\Phi$ 有 $\varphi(j_x^l f)=0$，$j_x^l f$ 即为 f 在 $\pi(U)$ 中的 x 点处的 l 阶节．

按此框架讨论偏微分方程组的对合性和完全性，见[A1]．

参考文献

[A1] Kuranishi, M., Lectures on involutive systems of partial differential equations, Publ. Soc. Mat. São Paulo, 1967.

[A2] Cartan, E., Les systèmes differentiels et leur applications géométriques, Hermann, 1945.

齐民友 译

对合分布 [involutive distribution; инволютивное распределение]

C^k $(k\geqslant 3)$ 类 n 维流形 M^n 上的完全可积微分系统的几何解释．M^n 上的一个 C^r 类 p 维分布(p-dimensional distribution)或称 p 维微分系统(differential system of dimension p)，这里 $1\leqslant r<k$，就是对每一点 $x\in M^n$ 指定其切空间 $T_x(M^n)$ 的一个 p 维线性子空间 $D(x)$，使得 x 有一个邻域 U，而在其中有 p 个 C^r 向量场 $X_1,\cdots,X_p$，而在每一点 $y\in U$，向量组 $X_1(y),\cdots,X_p(y)$ 均为空间 $D(y)$ 的基．分布 D 称为对合的(involutive)，如果对每一点 $y\in U$，

$$[X_i,X_j](y)\in D(y),\ 1\leqslant i,j\leqslant p.$$

这个条件也可以用微分形式来表述．分布 D 是由以下事实来刻画的：

$$D(y)=\{X\in T_y(M^n):\ \omega^\alpha(y)X=0\},\quad p<\alpha\leqslant n,$$

这里 $\omega^{p+1},\ \cdots,\ \omega^n$ 是 C^r 类1形式，而在每一点 $x\in U$，它们都线性无关；换言之，D 局部地等价于微分方程组 $\omega^\alpha=0$．于是 D 为对合分布，如果在 U 上存在1形式 ω_β^α，使得

$$d\omega^\alpha=\sum_{\beta=p+1}^{n}\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,$$

也就是说，外微分 $d\omega^\alpha$ 属于形式 ω^β 所生成的理想．

M^n 上的 C^r 类分布 D 是对合的，当且仅当(作为一个微分方程组)它是**可积系统**(**integrable system**)(Frobenius 定理(Frobenius theorem))．

参考文献

[1] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] Narasimhan, R., Analysis on real and complex manifolds, North-Holland & Masson, 1968(译自法文).

Ю. Г. Лумисте 撰 齐民友 译

无理数 [irrational number; иррациональное число]

不是有理数(整数或分数)的数．无理数在几何上表示一个与单位长线段不可公度的线段的长度．古代数学家已经知道不可公度线段的存在．例如，他们知道正方形的对角线与边是不可公度的，这等价于 $\sqrt{2}$ 是无理数．

每个实数都能写为无穷十进小数，而无理数(且只有无理数)能写为不循环十进小数，例如 $\sqrt{2}=1.41\cdots$，$\pi=3.14\cdots$．无理数确定有理数集的这样的分割：其下类无最大数，上类无最小数(见 **Dedekind 分割**(Dedekind cut))．无理数集在实数轴上处处稠密：任何两个数之间必有无理数．无理数集是不可数的，它是第二范畴集并且是 G_δ 型的(见**集合的范畴**(category of a set))；**$F_\sigma(G_\delta)$ 型集**(set of type $F_\sigma(G_\delta)$)．

无理代数数(irrational algebraic number)(与超越数不同)不能被有理分数任意阶逼近．更确切地说，对于任一 n 次无理**代数数**(algebraic number) ξ，存在 $c>0$，使对任何整数 p 和 $q(q>0)$，都有

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^n}.$$

二次无理数，且只有二次无理数，能由循环连分数所表示.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 事实上能证明，如果 $\xi \notin \mathbf{Q}$ 是代数数，则对任一 $\varepsilon>0$、存在 $c(\varepsilon)>0$，使得 $|\xi-\frac{p}{q}|>c(\varepsilon)q^{-2-\varepsilon}$ (Roth 定理 (Roth theorem))．已知 e, π、e^{π} 是无理数 (还是**超越数** (transcendental number))．然而，还不知道 $e+\pi$, $e\pi$ 是否为无理数.

沈永欢 译

不可约解析空间 [**irreducible analytic space**; **неприводимое аналитическое пространство**]

一个不能表为一局部有限解析子空间族的并的**解析空间** (analytic space)．不可约解析空间是不可约**解析集** (analytic set) 概念的拓广．每一解析空间都能唯一表为一个局部有限不可约解析子空间族的不可约并，不可约解析子空间是它的所谓不可约分支 (irreducible components) (将一个空间层化为不可约分支)．一个复解析流形是不可约的，当且仅当它是连通的；一个流形的不可约分支是它的连通分支．一个解析空间在它的一个给定点的芽称为不可约的 (irreducible)，如果它不能表为在同一点的解析子空间的有限多个芽的并.解析空间在每一点的每一个芽都可唯一地表为它的有限多个不可约子芽的并.一个约化**复空间** (complex space) $(X,\mathcal{O})$ 在一点 $x\in X$ 的芽是不可约的，当且仅当局部环 $\mathcal{O}_x$ 无零除子．一个复空间在它的所有点的芽都是不可约的，就是它本身是不可约的，当且仅当它是连通的；一个复空间的不可约分支都是它的连通分支.

参考文献

[1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Printice-Hall, 1965.

[2] Hervé, M., Several complex variables: local theory, Oxford Univ. Press, 1963.

Д. А. Пономарев 撰 钟同德 译

不可约连续统 [**irreducible continuum**; **неприводимый континуум**]

一个非退化的**连续统** (continuum)，在某两点间是不可约的，即是不包含任何含有这两点的真子连续统.

А. А. Мальцев 撰

【补注】 一个例子是 $\sin(1/x)$ 产生的著名曲线，即平面的子集 $\{0\}\times[-1,1]\cup\{(x,\sin(1/x)): 0<x\leqslant 1\}$. 这条曲线在点 $(0,0)$ 与 $(1,\sin 1)$ 之间是不可约的.

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Topology, II, PWN & Acad. Press, 1968.

胡师度、白苏华 译

不可约映射 [**irreducible mapping**; **неприводимое отображение**]

拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的一个**连续映射** (continuous mapping)，使得除 X 本身外，X 的每个闭集的象都不同于 Y．如果 $f:X\to Y$ 是一个连续映射，$f(X)=Y$，且若点在 f 下的所有逆象都是紧的，则 X 中存在一个闭子空间 X_1，使得 $f(X_1)=Y$ 且 f 对 X_1 的限制是不可约映射．映射不可约与映射为闭的要求相结合便得到一个漂亮的结果：由这样的映射联系起来的空间有很多重要的特征是一致的；特别地，它们有相同的 Суслин 数和 π 权．但不可约闭映射的主要价值在于它们在绝对形理论中起主要作用.

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

А. В. Архангельский 撰

【补注】 见**绝对形** (absolute).

参考文献

[A1] Porter, J. R. and Woods, R. G., Extensions and absolutes of Hausdorff spaces, Springer, 1988.

白苏华、胡师度 译

不可约矩阵群 [**irreducible matrix group**; **неприводимая матричная группа**]

域 k 上 $n\times n$ 矩阵的群 G，在**一般线性群** (general linear group) $\mathrm{GL}(n,k)$ 中不能用共轭将 G 的元素同时化成半约化形式

$$\left\|\begin{matrix} A & * \\ 0 & B \end{matrix}\right\|,$$

其中 A 及 B 是固定维数的方块．更确切地，称 G 在域 k 上是不可约的 (irreducible)．用变换的语言表达：有限维空间 V 的线性变换群 G 称为不可约的，若 V 是非零的极小 G 不变子空间．代数封闭域上交换的不可约矩阵群是一维的．若域上矩阵群在任何扩张域上不可约．则称为绝对不可约的 (absolutely irreducible)．设 k 是代数封闭域，则对每个群 $G\subseteq \mathrm{GL}(n,k)$，下列条件是等价的：1) G 在 k 上不可约；2) G 含有 n^2 个 k 上线性无关的矩阵；3) G 是绝对不可约的．于是域 k 上绝对不可约性等价于 k 的代数闭包上的不可约性.

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der: Algebra 1－2, Springer, 1967－1971 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，I，II，科学出版社，1978).

[2] Мерзляков, Ю. И., Рациональные группы, М., 1980.

Ю. И. Мерзляков 撰 石生明 译 许以超 校

不可约模 [**irreducible module**; **неприводимый модуль**], 单模 (simple module)

在有单位元的环 R 上的一个非零**幺模** (unitary module) M, 它只包含两个子模, 即零模与 M 自身.

例. 1) 若 $R=\mathbf{Z}$ 是整数环, 则不可约 R 模是素数阶的 Abel 群. 2) 若 R 为体, 则不可约 R 模是 R 上一维向量空间. 3) 设 D 为体, V 是 D 上左向量空间, $R=\mathrm{End}_D V$ 是 V 的线性变换环(或其稠密子环), 则右 R 模 V 是不可约的. 4) 设 G 是群而 k 是域, 则 G 在 k 上的不可约表示恰是**群代数** (group algebra) kG 上的不可约模.

右 R 模 M 为不可约的, 当且仅当 M 同构于 R/I, 这里 I 是 R 中极大右理想. 如果 A 和 B 是不可约的 R 模, $f\in\mathrm{Hom}_R(A, B)$, 则 $f=0$ 或 f 为同构 (这蕴含着: 不可约模的自同态环是个体). 设 R 是一代数闭域上的代数, A 和 B 是 R 上不可约模, 则有 (Schur 引理 (Schur lemma)).

$$\mathrm{Hom}_R(A, B)=\begin{cases}k, \text{若 } A\simeq B,\\ \{0\}, \text{ 否则}.\end{cases}$$

在环与群的表示论中, 不可约模概念是很基本的. 用它, 我们可定义环上的模的**合成序列** (composition sequence) 和**基座** (socle), **Jacobson 根** (Jacobson radical) 以及**完全可约模** (completely-reducible module). 不可约模在很多重要类型的环的定义中都要用到. 例如, 经典半单环、本原环及其他环 (见**经典半单环** (classical semi-simple ring); **本原环** (primitive ring)).

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[3] Lambek, J., Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966.

[4] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1-2, Springer, 1973-1976.

А. В. Михалев 撰 冯绪宁 译

不可约多项式 [**irreducible polynomial**; **неприводимый многочлен**]

域 k 上的 n 个变量的多项式 $f=f(x_1,\cdots,x_n)$, 它是环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中的素元, 即 f 不能表为 $f=gh$, 其中 g 和 h 为系数在 k 中的非常数多项式 (域 k 上的不可约性 (irreducibility)). 如果一个多项式在它的系数域的代数闭包上不可约, 则称为绝对不可约的 (absolutely irreducible). 绝对不可约的单变量多项式是一次多项式. 在多变量情况下, 存在任意高次数的绝对不可约多项式, 例如, 任一形如 $f(x_1,\cdots,x_{n-1})+x_n$ 的多项式是绝对不可约的.

多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 是**唯一分解环** (factorial ring): 任一多项式可分解成不可约多项式之积, 且除常数因子外这种分解是唯一的. 在实数域上任一单变量的不可约多项式都是一次或二次的, 一个二次多项式不可约, 当且仅当它的判别式是负的. 在任一代数数域上存在任意高次数的不可约多项式; 例如, 当 p 为素数及 $n>1$ 时, 由 Eisenstein 判别准则可知 x^n+px+p 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中是不可约的 (见**代数方程** (algebraic equation)).

设 A 是整闭环, k 为其分式域, $f(x)\in A[x]$ 是首项系数为 1 的单变量多项式. 若在 $k[x]$ 中有 $f(x)=g(x)h(x)$, 且 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的首项系数为 1, 则 $g(x)$, $h(x)\in A[x]$ (Gauss 引理 (Gauss lemma)).

不可约性的约化判别准则 (reduction criterion for irreducibility). 设 $\sigma: A\to B$ 是整环的同态. 若 $f(x)$ 和 $\sigma(f(x))$ 次数相同且 $\sigma(f(x))$ 在 B 的分式域上不可约, 则 $f(x)$ 不能因子分解为 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $g(x)$, $h(x)\in A[x]$ 且不是常数. 例如, $\mathbf{Z}[x]$ 中首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是素元 (从而在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约), 如果对某素数 p, 将 $f(x)$ 的系数模 p 后得到的多项式 $\sigma(f(x))$ 是不可约的.

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (译自德文).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[3] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1; 2, Springer, 1975.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 唯一分解环也称为唯一因子分解整环 (unique factorization domain) (UFD). 裴定一 译 赵春来 校

不可约表示 [**irreducible representation**; **неприводимое представление**]

群 (代数, 环, 半群) X 在向量空间 (或拓扑向量空间) E 中的 (线性) 表示 π, 它仅有两个 (闭的) 不变子空间, (0) 和 E. 时常将拓扑向量空间中的不可约表示称为拓扑不可约表示 (topologically-irreducible representation). 设 π 是拓扑向量空间 E 中的表示且设它又是 E 中的作为向量空间的不可约表示, 则 π 称为代数不可约表示 (algebraically-irreducible representation). 代数不可约表示也是拓扑不可约的; 一般地其逆不真. 有些概念与不可约表示的概念相近, 此中有**算子不可约表示** (operator-irreducible representation) 及完全不可约表示 (该表示中算子族形成完全不可约集, 见**完全可约集** (completely reducible set)). 完全不可约表示是 (拓扑) 不可约及算子不可约的; 一般地, 逆断言不真.

А. И. Штерн 撰 石生明 译 许以超 校

不可约拓扑空间 [**irreducible topological space**; **неприводимое топологическое пространство**]

不能表作两个真闭子集之并集的**拓扑空间**(topological space). 不可约拓扑空间也可以等价地定义为: 它的任意开子集都是连通的或任意非空开子集都是处处稠密的. 不可约拓扑空间在连续映射下的象是不可约的. 不可约拓扑空间之积是不可约的. 不可约拓扑空间的概念仅对不可分离空间有意义; 它常用于涉及非分离的 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)的代数几何学.

拓扑空间 X 的不可约分支(irreducible component)是 X 的任一极大不可约子集. 不可约分支是闭的, 它们的并集就是整个 X. В. И. Данилов 撰

【补注】 在覆盖理论(见**覆盖**(**集合的**)(covering (of set)))中还有不可约性的概念: 一个拓扑空间是不可约的、如果它的每个开覆盖都有不可约的开加细; 一个覆盖是不可约的(irreducible), 如果它的真子族都不是覆盖. **可数紧空间**(countably-compact space)由条件"每个不可约开覆盖都是有限的"来刻画. 于是, 一个空间是紧的, 当且仅当它是可数紧且不可约的.

参考文献

[A1] Arens, R. and Dugundji, J., Remark on the concept of compactness, *Portugaliae Math*., **9**(1950), 141-143.

白苏华、胡师度 译

不可约簇 [**irreducible variety**; **неприводимое многообразие**]

在 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)下是一个**不可约拓扑空间**(irreducible topological space)的**代数簇**(algebraic variety). 换句话说, 一个代数簇称为不可约的, 如果它不能表示成两个真闭代数子簇的并. 概形的不可约性可类似地定义. 对于光滑(甚至正规)簇、不可约的概念与连通的概念是相同的. 每个不可约簇有唯一的一般点(见**一般位置点**(point in general position)).

与一个拓扑空间到不可约分支的分解相类似, 任何一个代数簇是有限多个不可约闭子簇的并. 这种表示法(可以用更精确的方式表达出来)的代数基础是交换 Noether 环的**准素分解**(primary decomposition).

在代数闭域上不可约簇的积亦是不可约的. 对于任意基域, 这不再正确. 关于不可约簇的概念的另一种说法也是有用的: 域 k 上的簇 X 称为几何不可约的(geometrically irreducible), 如果对于 k 的任何域扩张 k', 通过**换基**(base change)从 X 得到的簇 $X\otimes_k k'$ 仍为不可约. В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

非正则边界点 [**irregular boundary point**; **иррегулярная граничная точка**]

区域 D 的边界 Γ 上的一个点 y_0, 存在 Γ 上的一个连续边界函数 $f(y)$ 使得 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)的 Perron-Wiener-Brélot 广义解(见 **Perron 法**(Perron method)) $u(x)$ 在 y_0 不取边界值 $f(y_0)$, 即或者极限

$$\lim_{\substack{x\to y_0\\ x\in D}} u(x)$$

不存在, 或者极限存在但不等于 $f(y_0)$. 对于平面区域 D, 边界 Γ 的每一个孤立点都是非正则点. 对于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 的区域 D, H. Lebesgue 首先发现, D 的一个很尖的角的顶点是一个非正则边界点. 例如, 坐标原点 $O\in\mathbf{R}^3$ 是一个非正则边界点, 如果在 O 点的一个邻域里, 区域的边界是落在由曲线 $y=e^{-1/x}$ $(x>0)$ 绕正 x 轴旋转所得到的尖角里(Lebesgue 脊(Lebesgue spine)). Dirichlet 问题的广义解在非正则点不取边界值 $f(y_0)$, 如果 $f(y_0)$ 是 $f(y)$ 在 Γ 上的最小上界或者最大下界; 在这种情况下, 经典解不存在. 在某种意义下, 非正则边界点的集合是薄的(thin): 它为 F_σ 型的, 是一个**极集**(polar set)且具有零**容量**(capacity). 亦见**闸函数**(barrier); **正则边界点**(regular boundary point).

参考文献

[1] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966(英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[2] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1959.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 补充的经典参考文献见[A1], 关于公理位势论的非正则点, 见[A2].

参考文献

[A1] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Wiley, 1969(译自德文).

[A2] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

高琪仁、吴炯圻 译

非正则素数 [**irregular prime number**; **иррегулярное простое число**]

一个奇**素数**(prime number) p、使得**分圆域**(cyclotomic field) $Q(e^{2\pi i/p})$ 的理想类数可被 p 整除. 所有其他奇素数称为正则的(regular).

Kummer 检验法(Kummer test)可以用来解决每个素数是否为正则的问题. 一个奇素数是正则的, 其充分必要条件是前 $(p-3)/2$ 个 **Bernoulli 数**(Bernoulli numbers) $B_2, B_4, \cdots, B_{p-3}$ 的分子中没有一个能被 p 除尽([1]).

正则素数与非正则素数的分布问题是这样产生的．从 Bernoulli 数表和 Kummer 检验指出，100 以内只有三个非正则素数，37，59，67(B_{32}，B_{44} 和 B_{58} 分别是 37，59 和 67 的倍数)．E．Kummer 猜想平均起来正则素数是非正则素数个数的两倍．后来，C.L．Siegel ([2])猜测包含在区间 $(1,x)$ 中的非正则素数与正则素数之比趋于 $e^{-1/2}$(当 $x\to\infty$ 时)(e是自然对数的底)．直到目前(1989)人们只知道，非正则素数的个数是无限的．在小于 5500 的奇数中有 439 个正则素数，285个非正则素数(见[3])．

对任一正则素数 p，Fermat 方程

$$x^p+y^p=z^p$$

在有理数中没有非零解([1])．

设 p 是非正则素数，设 $2\alpha_1,\cdots,2\alpha_s$ 是分子能被 p 除尽的 Bernoulli 数 B_2，$B_4,\cdots,B_{p-3}$ 的脚标，并设 k,t 是自然数，使得 $q=1+pk$ 是小于 $p(p-1)$ 的素数，且 $t^k\not\equiv 1(\bmod q)$．设

$$d_\alpha=\sum_{r=1}^{(p-1)/2} r^{p-2\alpha},$$

$$D_\alpha=t^{-kd/2}\prod_{r=1}^{(p-1)/2}(t^{kr}-1)^{r^{p-1-2\alpha}}.$$

如果对每个 $\alpha=\alpha_i(i=1,\cdots,s)$，

$$D_\alpha^k\not\equiv 1(\bmod q),$$

则对这个非正则素数 p，Fermat 定理成立，即 Fermat 方程没有非零有理数解．这称为 Vandiver 检验法(Vandiver test)．用这个方法对所有指数小于 5500 的(Fermat)方程证明了(Fermat)定理的正确性．

参考文献

[1] Kummer, E., Allgemeiner Beweis des Fermat'schen Satzes, dass die Gleichung $x^\lambda+y^\lambda=z^\lambda$ durch ganze zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potentz-Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten $(\lambda-3)/2$ Bernoulli'schen Zahlen als Factoren nicht Vorkommen, *J. Reine Angew. Math.*, **40** (1850), 130－138.

[2] Siegel, C.L., Zu zwei Bemerkungen Kummers, *Nachr. Akad. Wiss Göttingen Math. Phys. Kl.*, **6** (1964), 51－57.

[3] Боревич, З.И., Шафаревич, И.Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972(英译本：Borevich, Z.I., Shafarevich, I.R., Number theory, Acad Press, 1966).

[4] Vandiver, H.S., Examination of methods of attack on the second case of Fermat's last theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 8, 732－735.

В．А．Демьяненко 撰

【补注】 对指数 $p<125000$，Fermat 定理成立，这是由 S．Wagstaff 证明的．他的计算表明，小于 125000 中的 11733 个奇素数中 60.75％是正则的，这很接近于 Siegel 猜测．根据他的猜测，有 $e^{-1/2}\cong 60.65\%$ 的素数是正则的．

更一般地，对一奇素数 p 定义非正则性指数(index of irregularity)$i(p)$，即在指数集 $k\in\{2,4,\cdots,p-3\}$ 中 p 能除尽其分子的 Bernoulli 数 B_k 的个数．正则素数是满足 $i(p)=0$ 的素数 p．人们直观地预测 $i(p)=k$ 的素数 p 的部分为 $(1/2)^k\cdot e^{-1/2}/k!$．根据[A1]中的数据，这是正确的．Eichler 证明了 Fermat 定理第一种情形对于满足 $i(p)<\sqrt{p}-2$ 的素指数 p 是成立的(见[A2])．亦见 **Fermat 大定理**(Fermat great theorem)．

参考文献

[A1] Wagstaff, S., The irregular primes to 125000, *Math. Comp.*, **32** (1978), 583－591.

[A2] Washington, L.C., Introduction to cyclotomic fields, Springer, 1982.

[A3] Edwards, H.M., Fermat's last theorem, Springer, 1977.

[A4] Lang, S., Cyclotomic fields, 1－2, Springer, 1978－1980.

冯绪宁 译

非正则奇点 [**irregular singular point**; **иррегулярная особая точка**]

出自线性常微分方程解析理论的一个概念．设 $A(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵，它在 $t_0\neq\infty$ 的有孔邻域内是全纯的，且在 t_0 处有一奇点．

这时，点 t_0 称为方程组

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (*)$$

的奇点．非正则奇点有两个不等价的定义．按照第一个定义，t_0 称为(*)的非正则奇点，如果 $A(t)$ 在 t_0 处具有阶数高于 1 的极点(见**微分方程解析理论**(analytic theory of differential equations))．按照第二个定义，t_0 称为(*)的非正则奇点，如果不存在数 $\sigma>0$，使得当 t 沿射线方向趋向于 t_0 时，每个解 $x(t)$ 的增长不比 $|t-t_0|^{-\sigma}$ 快(见[3])．情况 $t_0=\infty$，可通过变换 $t\to t^{-1}$，化为情况 $t_0=0$．非正则奇点有时称为强奇点(例如，见 **Bessel 方程**(Bessel equation))．解在非正则奇点的一个邻域内可以作渐近展开；H．Poincaré 最早研究了这个问题([1])．

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, *Acta Math.*, **8** (1886), 295－344.

[2] Wasov, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.

[3] Coddington, E.A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equtions, McGraw-Hill, 1955.

Ю．С．Ильяшенко 撰 唐 云 译

非正则性 [**irregularity**; **иррегулярность**]

非异射影代数簇 X 的一个数值不变量，等于它的 **Picard 簇** (Picard variety) 的维数. 如果基域的特征数等于零 (或更一般地，如果 X 的 Picard 概形是约化的)，则非正则性等于以结构层为系数的第一个上同调空间 $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 的维数.

具有非零非正则性的簇称为非正则的 (irregular)，而具有零非正则性的簇称为正则的 (regular). 有时把簇 X 的完全线性系 $|D|$ 的第 i 个非正则性定义为

$$\sigma^i(D) = \dim H^i(X, \mathcal{O}_X(D)),$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant \dim X$. И. В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

非正则性指标 [**irreqularity indices**; **неправильности коэффициенты**], 线性常微分方程组的

在每个有限区间上可积的映射 A: $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (或 $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$) 构成的空间上的非负函数 σ，使得 $\sigma(A)$ 等于零的必要和充分条件是方程组

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (*)$$

为**正则线性方程组** (reqular linear system).

最熟知 (且最容易定义) 的非正则性指标如下所述.

1) Ляпунов 非正则性指标 (Lyapunov irreqularity index) ([1]):

$$\sigma_L(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) - \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr}\, A(\tau)\, d\tau,$$

其中 $\lambda_i(A)$ 是方程组 $(*)$ 的 Ляпунов 特征指数 (Lyapunov characteristic exponent)，按降阶排列，而 $\mathrm{tr}\, A(t)$ 是映射 $A(t)$ 的迹.

2) Perron 非正则性指标 (Perron irreqularity) ([2]):

$$\sigma_p(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\lambda_i(A) + \lambda_{n+1-i}(-A^*)),$$

其中 $A^*(t)$ 是 $A(t)$ 的伴随映射. 如果系统 $(*)$ 是 **Hamilton 系统** (Hamiltonian system)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p \in \mathbf{R}^k,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q \in \mathbf{R}^k,$$

则 $n = 2k$，而

$$\lambda_i(-A^*) = \lambda_i(A), \quad i = 1, \cdots, n.$$

结果，对于 Hamiton 系统的变分方程组，其正则性的必要和充分条件是

$$\lambda_i(A) = -\lambda_{n+1-i}(A), \quad i = 1, \cdots, k$$

(Персидский 定理 (Persidskii theorem)).

其他非正则指标，见 [4] – [6].

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956.

[2] Perron, O., Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Math. Z.*, **31** (1929 – 1930), 748 – 766.

[3] Малкин, И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966 (中译本: И. Г. 马尔金, 运动稳定性理论, 科学出版社, 1956).

[4] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, Б. В., Теория показателей Ляпунова ···, М., 1966.

[5] Изобов, Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ., т. 12, М., 1974, 71 – 146.

[6] Прохорова, Р. А., 《Дифференц. уравнения》, **12** (1976), 3, 475 – 483; 4, 766 – 769.

В. М. Миллионщиков 撰 唐云 译

等视曲线 [**iso-optic curve**; **изооптическая кривая**]

平面曲线，它是给定角 γ 在平面上以这样方式运动时 γ 之顶点的轨迹，使得对于角 γ 的任何位置它的边总是与一给定曲线相切. 若 $\gamma = \pi/2$，则等视曲线称为正视曲线 (ortho-optic curve). 例如，椭圆的正视曲线是一个圆.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

【补注】 Д. Д. Соколов 撰

参考文献

[A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

[A2] Berger, M., Geometry, Ⅰ, Springer, 1987, p. 232 (译自法文) (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一卷, 科学出版社, 1987).

[A3] Berger, M., Geometry, Ⅱ, Springer, 1987, p, 239 (译自法文) (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第二卷, 科学出版社, 1989).

[A4] Texeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables planes on gauches, Coïmbre, 1908 – 1915.

沈一兵 译

等倾线 [**isocline**; **изоклина**]

一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \qquad (*)$$

的等倾线是 (x, y) 平面上由方程 $(*)$ 所定义的**方向场**(direction field)其倾角都相等的点的集合．如果 k 是任意实数，则方程 $(*)$ 的 k 等倾线是集合

$$\{(x, y): f(x, y)=k\}$$

(通常这是一条曲线)；在它的每一点处 x 轴与方程 $(*)$ 过该点的解的切线之间的(方向)角是 $\arctan k$．例如，0 等倾线是由方程 $f(x, y)=0$ 定义的，且恰由 (x, y) 平面上的那些使方程 $(*)$ 的解具有水平切线的点组成．方程 $(*)$ 的 k 等倾线同时是 $(*)$ 的解，当且仅当它是一条具有斜率 k 的直线．

如果能相当多次地选择参数 k 来构造已知方程的等倾线，且画得出与 $(*)$ 的**积分曲线**(integral curve)对应的倾角，则可得到关于 $(*)$ 的积分曲线性态的粗略的定性表示(等倾线法(method of isoclines))．构造出由方程 $1/f(x, y)=0$ 定义的 ∞ 等倾线很有用；在 ∞ 等倾线的点上方程 $(*)$ 的积分曲线具有竖直切线．方程 $(*)$ 的解的(局部)极值点只位于 0 等倾线上，而解的拐点只位于由下列方程定义的曲线上：

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+f(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0 .$$

对于解不出导数的一阶方程

$$F(x, y, y')=0,$$

k 等倾线定义为集合

$$\{(x, y): F(x, y, F)=0\}.$$

在二阶自治系统

$$\dot{x}=f(x, y), \dot{y}=g(x, y)$$

的情况下，相平面上使得相速度向量共线的点的集合是方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

的等倾线．

参考文献

[1] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966(中译本：В. В. 史捷班诺夫，微分方程教程，人民教育出版社，1960)．

Н. Х. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, H. T., Introduction to nonlinear differential and integral equations, Dover, reprint, 1962.

唐 云 译

同源 [isogeny; изогения]

群概形(group scheme)的具有有限核的**满同态**(epimorphism)．基概形 S 上的群概形的态射 $f:G\to G_1$ 称为一个同源，如果 f 是满态射而且它的核 $\mathrm{Ker}(f)$ 是平坦有限群 S 概形．

以下假设 S 是特征 $p\geqslant 0$ 的域 k 的谱．假设 G 是 k 上有限型的群概形，且设 H 是有限子群概形，则商 G/H 存在，而且自然映射 $G\to G/H$ 是一个同源．反之，如果 $f:G\to G_1$ 是有限型的群概形的同源且 $H=\ker(f)$，则 $G_1=G/H$．对于 Abel 簇的每个同源 $f:G\to G_1$，存在一个同源 $g:G_1\to G$，使得它们的复合 $g\circ f$ 是 G 的用 n 相乘的同态 n_G．同源的复合仍是同源．两个群概形 G 和 G_1 称为同源的(isogenous)，如果存在同源 $f:G\to G_1$．同源 $f:G\to G_1$ 称为可分的(separable)，如果 $\ker(f)$ 是 k 上的艾达尔群概形．这等价于 f 是有限艾达尔覆叠．可分同源的一个例子是同态 n_G，这里 $(n,p)=1$．如果 k 是有限域，则一维连通交换群概形的任何一个可分同源 $f:G\to G_1$ 通过同源 $\mathfrak{p}:G\to G$ 分解，这里 $\mathfrak{p}=F-\mathrm{id}_G$，$F$ 是 **Frobenius 自同态**(Frobenius endomorphism)．不可分同源的一个例子是在一个 Abel 簇 A 内用 $n=p^r$ 相乘的同态．

k 上 Abel 簇的加性范畴 $A(k)$ 关于同源的局部化确定了一个 Abel 范畴 $M(k)$，其中的对象称为精确到同源的 Abel 簇．每个这样的对象可以等同于一个 Abel 簇 A，$M(k)$ 里的态射 $A\to A_1$ 是有理数域上的代数 $\mathrm{Hom}_{A(k)}(A, A_1)\otimes_Z Q$ 的元素．同源 $f:A\to A_1$ 定义了 $M(k)$ 里相应对象间的同构．范畴 $M(k)$ 是半单的：它的每个对象都同构于不可分解对象的积．当 k 是有限域时，对 $M(k)$ 有一个完全的描述(见[4])．

对于形式群也可定义同源的概念．域 k 上的形式群的态射 $f:G\to G_1$ 称为一个同源，如果它在商范畴 $\varphi(k)$ 里的象是一个同构，这里的 $\varphi(k)$ 是 k 上形式群的范畴关于 Artin 形式群的子范畴的商范畴．群概形的同源确定了相应的形式完全化之间的一个同源．关于精确到同源的形式群的范畴 $\varphi(k)$ 的描述见[1],[2]．

参考文献

[1] Манин, Ю. И., «Успехи матем. наук», 18(1963), 6, 3－90.

[2] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1974.

[3] Serre, J.-P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.

[4] Tate, J., Classes d'isogénie des variétés abeliennes sur une corps fini (d'après T. Honda), in Sem. Bourbaki Exp. 352, Lecture notes in math., Vol. 179, Springer, 1971.

[5] Dieudonné, J., Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de characteristique $p>0$, *Comm. Math. Helvetici*, **28** (1954), 1, 87－118.

И. В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Honda, T., Isogeny classes of Abelian varieties over

finite fields, *Math. Soc. Japan*, **20** (1968), 83–95.

[A2] Tate, J., Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, *Invent. Math.*, **2** (1966), 134–144. 陈志杰 译

等角轨道 [isogonal trajectory; изогональная траектория]

与平面上给定的单参数曲线族中的各曲线相交为同一个角度的平面曲线. 如果

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

是给定曲线族的微分方程, 则与该族曲线交角为 $\alpha(0<\alpha<\pi, \alpha\neq\pi/2)$ 的等角轨道满足下列两个方程之一:

$$F\left(x, z, \frac{z'-\tan\alpha}{1+z'\tan\alpha}\right)=0,$$

$$F\left(x, z, \frac{z'+\tan\alpha}{1-z'\tan\alpha}\right)=0.$$

特别是, 正交轨道 (orthogonal trajectory) 即与曲线族 (1) 中任一曲线在交点处形成直角的平面曲线, 满足方程

$$F(x, z, -\frac{1}{z'})=0. \qquad (2)$$

对于给定的曲线族 (1) 的正交轨道构成一个单参数平面曲线族——方程 (1) 的**通积分** (general integral). 例如, 如果考虑平面静电场的电力线族, 则其正交轨道族是等位线族.

参考文献

[1] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966 (中译本: B. B. 史捷班诺夫, 微分方程教程, 高等教育出版社, 1955).

Н. Х. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

[A2] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. E., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (中译本: D. 希尔伯特, S. 康福森, 直观几何, 高等教育出版社, 上册, 1959, 下册, 1964). 沈永欢 译

等角多面体和等面多面体 [isogons and isohedra; изогоны и изоэдры]

三维凸**多面体** (polyhedron), 其所有多面角均相等 (等角多面体), 或其所有面均相同 (等面多面体); 一个等角多面体 (等面多面体) 关于其重心旋转 (连同反射) 的群把每个顶点 (面) 对应到另外的顶点 (面). 每个等角多面体对应一个对偶等面多面体, 反之亦然. 如果一个凸多面体是等角的和等面的, 则它是正多面体. 有 13 种特殊的和两个无穷系列的组合相异等角多面体, 它们可由**半正多面体** (semi-regular polyhedra) 实现.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 上述 13 种特殊的等角多面体称为 Archimedes 立体 (Archimedean solid), 其对偶称为 Catalan 立体 (Catalan solid). 其中有一些在数的几何和晶体学中有用. 关于非凸等角多面体和等面多面体, 见 [A2].

参考文献

[A1] Féjes Toth, L., Reguläre Figuren, Verlag Ung. Akad. Wissenschaft, 1965.

[A2] Grünbaum, B., Shephard, G., Polyhedra with transitivity properties, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **6** (1984), 61 – 66. 沈永欢 译

孤立元 [isol; изоль]

一个孤立的 (即有限的或禁的, 见**禁集** (immune set) 自然数集的**递归等价型** (recursive equivalence type). 一切孤立子的集合的基数为连续统且在对任意递归等价型所定义的加法、乘法运算下构成半环. 这个半环称为孤立子的算术. 它有自然数算术的若干性质; 特别地, 基本子公式表示所谓组合函数等式的一切全称 Horn 公式在其中是真的. 这种公式的一个例子是消去律: $X+Z=Y+Z\Rightarrow X=Y$. 孤立子可以看成 Dedekind 有限集 (Dedeking-finite sets) 即和它们的任何真子集不等同的集合的基数的递归类比.

А. Л. Семенов 撰

【补注】 自然数集 $\mathbf{N}$ 的一个子集是孤立集 (isolated set), 若它不含 $\mathbf{N}$ 的无穷递归可枚举子集.

参考文献

[A1] McLaughlin, Th. G., Regressive sets and theory of isols, M. Dekker, 1982. 杨东屏 译

孤立点 [isolated point; изолированная точка], 拓扑空间 X 的子空间 A 的

一个点 $a\in A$, 使得 a 的某个**邻域** (neighbourhood) 与 A 的交集由 a 单独构成.

А. А. Мальцев 撰 白苏华、胡师度 译

孤立奇点 [isolated singular point; изолированная особая точка], 解析函数 $f(z)$ 的一个元素的

复 z 平面中满足下列条件的点 a: 1) $f(z)$ 的所述元素沿到达 a 的任一路径都没有**解析延拓** (analytic continuation); 2) 存在数 $R>0$, 使得 $f(z)$ 沿 a 的去心邻域 $U=\{z\in\mathbf{C}: 0<|z-a|<R\}$ 中任一路径都能解析延拓.

如果当 $f(z)$ 沿 U 中包围 a 的一条闭路径例如沿圆周 $|z-a|=\rho(0<\rho<R)$ 解析延拓时得到一个新元素, 则 a 称为**分支点** (branch point) 或多值特征孤立奇点 (isolated singular point of multi-valued char-

acter)；否则 $f(z)$ 的所述元素在 U 中定义一个单值解析函数，此时 a 称为单值特征孤立奇点(isolated singular point of single-valued character). 在单值特征孤立奇点 a 的一个去心邻域 U 中，$f(z)$ 能展开为 **Laurent 级数**(Laurent series):

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k, \qquad (1)$$

此级数具有正则部分 $f_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$ 和主要部分 $f_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$. 解析函数 $f(z)$ 在其单值特征孤立奇点的去心邻域 U 中的性态，原则上由其 Laurent 级数的主要部分决定. 如果主要部分的所有系数都是零，则在令 $f(a)=c_0$ 后就得到 a 的一个整个邻域中的单值解析函数. 这种实际上没有奇异性的情形也可由下述事实刻画：$f(z)$ 在去心邻域 U 中有界；或者存在有限的极限 $\lim_{z\to a} f(z)=c_0 (z\in U)$.

如果主要部分的系数中只有有限多个不等于零，且其中下标最小的是 $c_{-m}\neq 0$，则 a 是 m 阶极点(见**极点(函数的)**(pole (of a function))). 极点 a 也可由

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty, \ z\in U$$

这一事实刻画.

最后，如果主要部分中有无穷多个非零系数，则 a 是**本质奇点**(essential singular point). 在这种情形下，不存在有限或无穷的极限

$$\lim_{z\to a} f(z), \ z\in U.$$

对于元素 $f(z)$ 在无穷远处的孤立奇点 $a=\infty$，去心邻域具有 $U=\{z\in\mathbf{C}: r<|z|<\infty\}$ 的形式，而 Laurent 级数为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

正则部分为 $f_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$，主要部分为 $f_2(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$. 有了这些规定，上面关于孤立奇点分类和判定准则的描述，就可不加修改地移植到 $a=\infty$ 的情形(亦见**解析函数的残数**(residue of an analytic function)). 应当注意，**完全解析函数**(complete analytic function) $f(z)$ 的不同分支的元素在同一个点 $a\in\mathbf{C}$ 可以有完全不同类型的奇点.

多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n\geqslant 2)$ 的全纯函数 $f(z)$ 不可能有孤立奇点. 对于 $n\geqslant 2$，奇点形成一个无限奇点集.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967(中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第 4 章).

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979(中译本：E. C. 梯其玛希，函数论，科学出版社，1962).

[A2] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979(中译本：L. V. 阿尔福斯，复分析，上海科学技术出版社，1984).

沈永欢 译

孤立子群[isolated subgroup; изолированная подгруппа]

群 G 的子群 A，一旦 $g^n\in A, g^n\neq 1$，则 $g\in A$；换句话说，若方程 $x^n=a$ (其中 $1\neq a\in A$) 在 G 中有解，则解在 A 中. 子群 A 称为强孤立的(strong isolated)，若对每个 $a\in A$，a 在整个群中的中心化子位于 A 中. 群中元素集合 M 的孤立子(isolator of a set)是含 M 的最小的孤立子群.

在 R 群中(即**具有唯一开方法的群**(group with unique extraction of root))，孤立子群的概念对应于 Abel 群的**纯子群**(pure subgroup)的概念. R 群中孤立子群的交集是孤立子群. R 群 G 的正规子群 H 是孤立子群当且仅当 G/H 是无扭的. R 群的中心是孤立的.

序群理论中，孤立子群有时被称为**凸子群**(convex subgroup).

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Курош, А. Г., Теории групп, 3 изд., М., 1967(中译本：А. Г. 库洛什，群论，上、下，高等教育出版社，1981, 1982).

石生明 译 许以超 校

等距浸入[isometric immersion; изометрическое погружение]

k 维度量流形 M^k 到 $n(\geqslant k)$ 维 Riemann 空间 V^n 中的一个浸入.(见**流形的浸入**(immersion of a manifold))，使得它成为一个 k 维曲面 Φ，并且 M^k 上任两点之间的距离等于它们的象之间沿 V^n 中曲面 Φ 度量的距离. 若 Riemann 空间用更一般的度量空间代替，则可以推广此定义. 等距浸入的一种特殊情况是等距嵌入(isometric imbedding)——一一的(等距)浸入.

等距浸入论中的主要问题是：1) 一给定流形到一给定空间的等距浸入的可能性；2) 当等距浸入存在时唯一性问题. 这些问题是在关于流形及其等距象的各种条件下考虑的，如光滑性，正则性，解析性，凸性等. 在每种条件下，等距浸入论的主要问题

有以下类型：a) M^k 到 V^n 的整体等距浸入问题；b) M^k 到 V^n 的局部等距浸入问题（即一特定点 $v \in M^k$ 的一个充分小邻域到 V^n 的等距浸入）；c) 在局部和整体情况下，确定最小的 p 使 M^k 能浸入（嵌入）到 $k+p$ 维 Euclid 空间 E^{k+p} 中（数 p 称为 M^k 的浸入类（immersion class）或嵌入类（imbedding class））；d) 一给定浸入的等距形变问题.

从分析的观点来看，M^k 到 V^n 的等距浸入的存在性问题等价于解一组非线性微分方程. 对于到 E^n 的等距浸入，这组方程有如下形状：

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j} = g_{ij},$$

其中 $x = \{x^\alpha(u^s)\}$ 是所求的等距浸入，g_{ij} 是 M^k 在局部坐标 $u^1, \cdots, u^k$ 下的度量张量. 关于这组方程的解，在整体情况下要利用所谓到 E^n 的自由映射 x（见 **Nash 定理（微分几何学中的）**（Nash theorems (in differential geometry)））. 对于局部解析的情况，**Cauchy - Ковалевская 定理**（Cauchy - Kovalevskaya theorem）被用来替代隐函数定理. 在一般情况下，对于到 Riemann 和伪 Riemann 空间的 C^r 类（$2 \leqslant r \leqslant \infty$，或 $r = \omega$）浸入，自由映射和隐函数定理的作用仍同样有效. 对于 C^1 类的等距浸入，则要采用不同的方法. 这些方法基于浸入的形变，使得既能改变浸入，又保持与度量变分的联系. 在研究到 E^n 的等距浸入时，Gauss - Meinardi - Codazzi 方程也常被使用（见 **Peterson - Codazzi 方程**（Peterson - Codazzi equations））.

整体等距浸入（global isometric immersion）. 每个 C^r 类（$3 \leqslant r \leqslant \infty$）紧 Riemann 流形 M^k 都有一个到 E^n 的任一球（体）中的 C^r 类等距浸入，对于某个 $n \leqslant k(3k+11)/2$；若 M^k 是非紧的，则它有一个到 E^n 的任何部分的 C^r 类等距嵌入，对于某个 $n \leqslant k(k+1)(3k+11)/2$，其中 $3 \leqslant r \leqslant \infty$（见 [6]）. 在 $r = \infty$ 和 $r = \omega$ 的场合，空间 E^n 的维数还可减小：每个 $C^\infty(C^\omega)$ 类 Riemann 流形 M^k（紧或非紧，有边或无边）都有一个到 E^n 的 $C^\infty(C^\omega)$ 类等距浸入，对于某个 $n \leqslant 3k+5+k(k+1)/2$.

对于 $k(>2)$ 维双曲空间，可用显式得出到 E^{6k-5} 的 C^ω 类等距浸入，而对于 k 维椭圆空间，也已得出到 $E^n(n = k(k+3)/2)$ 的 C^ω 类等距浸入.

在这里列举的结果中，曲面 Φ 的光滑性不大于浸入度量的光滑性. 其实，这并不是偶然的；到 E^n 的每个 $C^{r,\alpha}$ 类（$r \geqslant 2$，$0 \leqslant \alpha < 1$）的 k 维（$1 \leqslant k \leqslant n-1$）曲面 Φ 都是某个 $C^{r,\alpha}$ 类 Riemann 流形 M^k 的 $C^{r,\alpha}$ 类等距浸入（见 [8]）.

能实现一 Riemann 流形到空间 E^n 的等距浸入的 E^n 之维数的下界由下列定理给出. 设 C^4 类紧 Riemann 流形 M^k 具有如下性质：在 M^k 的每点存在一 q 维平面，使得沿该平面的任何 2 维方向，M^k 的截面曲率均非正，那么，M^k 不具有到任何 $n \leqslant k+q-1$ 维的 E^n 的 C^4 类等距浸入；若对 M^k 的曲率所加的条件仅限于一个单点且 $q = n$，则存在着到 E^{2k-2} 的 C^4 类等距浸入. 例如，一个 k 维平环面不具有到 E^{2k-1} 的 C^4 类等距浸入；若 k 是 2 的幂，则赋予处处正标量曲率的度量的实射影空间 $\mathbf{R}P^k$，特别是 k 维椭圆空间，不具有到 E^{2k} 的 C^2 类等距浸入.

关于 C^1 类等距浸入的结果迥然不同于前面的情况. 它们可陈述如下：若一个 C^0 类紧 Riemann 流形 M^k（有边或无边）具有到 $E^n(n \geqslant k+1)$ 的 C^1 类浸入，则它也具有到 E^n 的 C^1 类等距浸入；若一个 C^0 类非紧 Riemann 流形 M^k 具有到 $E^n(n \geqslant k+1)$ 的与其极限集不相交的 C^1 类短浸入（short immersion）（即在每点都不能延拓线元），则 M^k 有一个到 E^n 的 C^1 类等距浸入（见 [7]）（这里，流形 M^k 到 E^n 的浸入的极限集是 E^n 中这样的点 x 的集合，使得在 M^k 上存在发散的点列，它们在 E^n 中的象收敛到 x）. 特别，每个 C^0 类紧致 Riemann 流形 M^k（有边或无边）都有一个到 E^{2k} 的 C^1 类等距浸入；每个 C^0 类非紧 Riemann 流形都有一个到 E^{2k+1} 的 C^1 类等距浸入.

若 Riemann 流形 M^k 到 $E^n(n > k)$ 的 C^1 类等距浸入（等距嵌入）能被一个短的正则同伦（短微分同伦）所联接，则它们也能被一个由 C^1 类等距浸入（等距嵌入）组成的形变来联接. 特别地，在紧的情况下，C^1 类等距浸入（等距嵌入）能被由 C^1 类等距浸入（等距嵌入）组成的形变所联接，当且仅当它们是正则同伦的（正则微分同伦的）.

局部等距浸入（local isometric immersions）. 1873 年，L. Schläfli 猜想，每个 k 维 Riemann 流形都有一个到 Euclid 空间 $E^n(n = k(k+1)/2)$ 的局部等距浸入. 这个猜想仅对解析流形已被证实（见 **Janet 定理**（Janet theorem））；即在每个 C^ω 类 Riemann 流形 M^k 上，任一点都存在该点的一个邻域，使它有一个到 E^n 的 C^ω 类等距嵌入，其中 $n = k(k+1)/2$. 在 C^∞ 类 Riemann 流形 M^k 上，任一点都存在该点的一个邻域，使它有一个到 E^n 的 C^∞ 类等距嵌入，其中 $n = k + k(k+1)/2$（见 [7]）. 另一方面，对于每个 C^0 类 Riemann 流形，其上任一点都有一个邻域，它具有到 E^{k+1} 的 C^1 类等距嵌入.

一给定流形 M^k 具有到 $E^n(n < k(k+1)/2)$ 的等距浸入的条件的发现沿着完全不同的方向展开. 这与下述事实有关，即不是每个 Riemann 流形 M^k 都

有一个到 E^n 的等距浸入：对于 $r \geqslant k^2(k+1)/2-k$, $r-1 \leqslant l \leqslant \infty$，在光滑流形 M^k 上由到 $E^n(n<k(k+1)/2)$ 的 C^r 类局部嵌入所（局部）诱导的 Riemann 度量的集合，在 M^k 的一切 C^l 类 Riemann 度量的集合（赋予通常的 C^l 拓扑）中是处处不稠密的；对于 $r=2$ 和 $2 \leqslant l \leqslant \infty$，只要 n 和 k 满足不等式 $n<(k+1+k(k+1)/2)/3$，这个结论仍正确．

在求解确定一流形的等距浸入类（见上述）的问题中，对于局部情况下找到的极小值 p 也是整体等距浸入的 p 值的下界．然而，对于每个 $C^r(2 \leqslant r \leqslant \infty)$ 类流形 M^k $(k>2)$，使它有一个到 E^{k+p} 的 C^r 类等距浸入的最小 p 的确切值是未知的．存在某些特殊方法来计算给定 Riemann 流形 M^k 到 E^n 的等距浸入类．如是，$p=0$ 当且仅当 M^k 的**曲率张量**(curvature tensor)恒为零．基于下列事实，即在某些附加假设下，类 1 度量的 **Peterson-Codazzi 方程**(Peterson-Codazzi equations)是 Gauss 方程的结果，因而存在确定等距浸入类是否为 1 的代数准则([11])．特别是，正的常曲率度量具有类 1，并且对于 $k>3$，它在 Euclid 空间中以超球面的形式实现．但若 M^k 的 **Ricci 曲率**(Ricci curvature)为零，则 $p \neq 1$．

这里讨论的几乎所有结果都能推广到从一个 Riemann 空间到另一个 Riemann 空间的等距浸入．例如，这样的情况是，对于 C^1 类浸入，局部等距浸入，k 维流形到充分大维数 V^n 的充分光滑等距浸入，曲面与其度量的光滑阶之间的关系，等等．

等距浸入可能性的问题也可对伪 Riemann 流形进行讨论．这时除了维数 k 和 n 外，还常用浸入流形 M^k 上度量张量的正和负部分的维数 k_+ 和 $k_-=k-k_+$，以及外围空间 V^n 的类似维数 n_+ 和 $n_-=n-n_+$．例如，在伪 Riemann 情况下，对于 $n \geqslant k(k+1)/2$, $n_+ \geqslant k_+$, $n_- \geqslant k_-$, Janet 的定理仍成立．

二维流形的等距浸入(isometric immersions of two-dimensional manifolds)．在要构造浸入的靶空间具有最小维数的意义下，这种类型的许多问题已完全被解决了．这里，基于非线性偏微分方程的一般理论和拓扑几何的考虑，已发展了特殊的解法．

1916年提出的 **Weyl 问题**(Weyl problem)是说：若二维 Riemann 流形 M^2 同胚于球面且具有正 Gauss 曲率，则它容有到 E^3 的等距浸入吗？Weyl 问题的完整解已由 А. В. Погорелов ([3]) 给出，并推广到关于 M^2 在三维 Riemann 空间 V^3 中的等距浸入可能性的情况：设 V^3 是 3 维完全 Riemann 空间，M_+^2 是闭的拓扑球面，它具备 Gauss 曲率处处大于某常数 k_0（大于、等于或小于零）的 Riemann 结构．若外围空间的曲率处处小于 k_0，则 M_+^2 容有映到 V^3 作为正则曲面 Φ 的等距浸入．这个浸入能达到这样的位置，使 M_+^2 的一个给定二维元素 α（一点和在该点的一束方向）重合于 V^3 中与 α 等距的给定二维元素 α'，并且曲面位于沿 α' 所给出的方向上．若 V^3 和 M_+^2 的度量属于 $C^r(r \geqslant 3)$，则 Φ 至少属于 $C^{r-1,\nu}(0<\nu<1)$．此曲面被二维元素唯一地确定．V^3 中每两个 C^r 类 $(r \geqslant 3, r=\omega)$ 等距浸入都能用一个由同类等距浸入组成的形变来联接．

А. Д. Александров 以完全不同的观点研究 Weyl 问题，他创造了具**凸度量**(convex metric)([4])的（非正则）二维流形的理论（这种流形可定义为具正 Gauss 曲率的正则流形的极限）并提出解 Weyl 问题的下列方案：1) 推广问题的提法，把 M^2 看成具有任意（一般为非正则）度量的流形；2) 然后按照 M^2 上度量的正则性建立等距浸入的正则性．由他完成的这个方案的第一部分导致一个深刻的结果：每个与球面同胚且具有凸度量的流形都能以凸闭曲面的形式等距浸入于 E^3 中．这个方案第二部分的实现是由 Погорелов ([3]) 做到的，其中具正则度量凸曲面的正则性问题被完全解决了：若凸曲面 $\Phi \subset E^3$ 具有一个 $C^{k,\alpha}$ $(k \geqslant 2, 0<\alpha<1)$ 类度量，并且具有正 Gauss 曲率，则 Φ 属于 $C^{k,\alpha}$．若 Φ 的度量解析，则 Φ 本身也解析．对于常曲率空间中的凸曲面，类似的问题也成立．在某些条件下，存在着具正 Gauss 曲率且同胚于平面或圆盘的二维 Riemann 流形的等距浸入．此外，已构造出定义在圆盘上的正曲率解析度量的例子，它没有到 E^3 中的 C^2 类等距浸入．

Hilbert 的定理说，Лобачевский 平面没有到 E^3 的 C^2 类等距浸入，这自然导致下列问题：曲率以负常数为上界的二维完全度量（即所谓 Λ 型度量(metrics of type Λ)）是否有到 E^3 的浸入？这个问题的解由 Н. В. Ефимов ([14]) 给出：若 Φ 是 E^3 中具 Gauss 曲率 $K(x)$ 的 C^2 类完全曲面，则 $\sup_{x \in \Phi} K(x) \geqslant 0$，因而特别有，$\Lambda$ 型度量没有到 E^3 的浸入．与此相关，Λ 型度量的哪些部分（即二维流形上给定这种度量的区域）能浸入 E^3 中的问题是颇感兴趣的．在 [15] 中得到了这个问题的特殊回答．设在具有直角坐标 x, y 的 E^2 中无限长带形

$$\Pi_a=\{0 \leqslant x \leqslant a, -\infty<y<+\infty\}$$

上给定线素 $ds^2=dx^2+B^2(x, y)dy^2$，其中 $B \in C^{r,1}(r \geqslant 3)$ 具有如下性质：a) B 自身，B 的所有 r 阶导数，以及 B 的所有 $(r-1)$ 阶导数对于 y 的偏导数（关于 y）的 Lipschitz 常数，在 Π_a 中都有界；b) $\inf B>0$；c) Gauss 曲率 K 满足 $K=-B_{xx}/B \leqslant -\beta^2=$ 常数 <0．那么，ds^2 在带边界流形 Π_a 上生成一个 $C^{r,1}$ 类 Riemann 结构，并且所得的

Riemann 空间有一个到 E^3 的 $C^{r,1}$ 类 ($r \geqslant 3$) 等距浸入. 特别地, 存在着具任意负曲率 (正则) 度量的任何测地圆盘的等距浸入. 也有若干关于负曲率度量的非紧部分到 E^3 的等距浸入的定理 ([5]). 对于一张曲率以负常数为上界的曲面已经给出了它能一一投影到其上的区域的大小范围的估计.

既然 Λ 型度量不能整体地浸入 E^3, 因此余下的是这些度量在高维 Euclid 空间中的等距浸入问题. 这方面只有部分结果; 例如, 存在着 Лобачевский 平面到 E^6 的 C^∞ 类等距嵌入和到 E^5 的等距浸入; 也存在能等距浸入 E^4 的 Λ 型正则度量的例子; 然而, 不知道是否存在 Лобачевский 平面到 E^4 的 C^r 类 ($r \geqslant 2$) 等距浸入.

具有变号曲率的度量到 E^3 的等距浸入性问题至今尚未解决, 哪怕是局部情况. 已构造出一个 $C^{2,1}$ 类二维 Riemann 流形的例子 ([16]), 它没有到 E^3 的 $C^{2,1}$ 类局部等距浸入. 实现具变号曲率的解析度量的问题已被下列定理所解决 ([17]): 设在 E^2 的矩形域 $\Pi_{a,b} = \{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ 上给定度量 $ds^2 = dx^2 + B^2(x, y)dy^2$, 且 $B(x, y)$ 是包含 $\Pi_{a,b}$ 的某个矩形域上的解析函数; 那么, 在 $\Pi_{a,b}$ 上由给定度量生成的带边界解析 Riemann 流形具有一个到 E^3 的解析等距浸入. 也有若干关于变号曲率的正则度量到高维 (但接近三维) Euclid 空间的等距浸入的结果. 如是, 若 M^2 是与平面同胚的 $C^{3,\alpha}$ 类完全 Riemann 流形, 则它的每个紧部分都有一个到 E^4 的 $C^{2,\alpha}$ 类等距浸入; 与环面同胚的 Riemann 流形也具有到 E^4 的等距浸入. 每个 $C^\infty(C^\omega)$ 类紧二维 Riemann 流形都有一个到 E^{10} 的 $C^\infty(C^\omega)$ 类等距浸入, 而 Klein 瓶和 Möbius 带具有到 E^4 的等距浸入.

若忽略浸入的正则性, 则每个 C^r 类 ($r \geqslant 0$) 二维 Riemann 度量都有到 E^3 的 C^1 类等距浸入. 然而, 在这种情况下, 实现该度量的曲面的内蕴和外在几何学之间的通常联系被扰乱了. 对于任何 $\alpha < 1/13$, 已构造出二维球面的度量到 E^3 的局部等距浸入, 使它作为 $C^{1,\alpha}$ 类局部非凸曲面; 而对于 $\alpha < 1/25$, 类似的整体等距浸入也被构造了. 另一方面, 若曲面 Φ 属于 $C^{1,\alpha}(\alpha > 2/3)$, 则具有变号内在曲率的 Φ 必有有界的外在曲率. 特别是, 若 Φ 的内在曲率为正, 则 Φ 是局部凸曲面, 并且若再假定曲面的度量是正则的, 则曲面本身也是正则的. 这样, 对于具变号内在曲率的 $C^{1,\alpha}$ 类曲面 Φ, 能保持其内蕴和外在几何学之间联系的 α 值的下界位于区间 $[1/13, 2/3]$ 之中. 最后, 一切有界外在曲率 (没有曲率 2π 的点) 的定向流形都有到 E^3 的作为可微曲面的等距嵌入. 在研究非正则等距浸入时, 分片线性度量的分片线性等距浸入也已被研究过; 如是, 与定向闭曲面上一闭区域同胚的每张渐屈面都能等距嵌入在 E^3 中作为多面体.

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., в кн.: Тр. 4 Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, 86 – 99.

[2] Бакельман, И. Я., Вернер, А. Л., Кантор, Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию《в целом》, М., 1973.

[3] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1973).

[4] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948 (中译本: А. Д. 亚历山大洛夫, 凸曲面的内蕴几何学, 科学出版社, 1962).

[5] Позняк, Э. Г., Шикин, Е. В., в сб: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, **12** (1974), М., 171 – 207.

[6] Nash, J., The imbedding theorem for Riemannian manifolds, *Ann. of. Math.* (2), **63** (1956), 20 – 63.

[7] Громов, М. Л., Рохлин, В. А., 《Успехи матем. наук》, **25** (1970), в. 5, 3 – 62.

[8] Сабитов, И. Х., Шефель, С. З., 《Сиб. матем. ж.》, **17** (1976), 4, 916 – 925.

[9] Otsuki, T., Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold, *J. Math. Soc. Japan*, **6** (1954), 221 – 234.

[10] Nash, J., Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 345 – 355.

[11] Розенсон, Н. А., 《Изв. АН СССР. Сер. Матем.》, **7** (1943), 253 – 284.

[12] Friedman, A., Local isometric imbedding of Riemannian manifolds with indefinite metrics, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 625 – 649.

[13] Сабитов, И. Х., 《Сиб. матем. ж.》, **17** (1976), 4, 907 – 915.

[14] Ефимов, Н. В., 《Матем. сб.》, **64** (1964), 2, 286 – 320.

[15] Позняк, Э. Г., 《Укр. геометр. сб.》, в. **3** (1966), 78 – 92.

[16] Погорелов, А. В., 《Докл. АН СССР》, **198** (1971), 1, 42 – 43.

[17] Позняк, Э. Г., 《Успехи матем. наук》, **28** (1973), 4, 47 – 76.

[18] Бураго, Ю. Д., Залгаллер, В. А., 《Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астрон.》, **7** (1960), 2, 66 – 80.

В. Т. Фоменко 撰

【补注】 对于整体等距浸入, 也见 [A1]. 一般而言, 这篇参考文献包含了比上述正文中给出的更好的估计. 例如, 一个 C^r 类 Riemann 流形 M^k 有一个 C^r

类 ($3 \leqslant r \leqslant \infty$) 等距嵌入:

若 M^k 是紧的, 则它可映到 E^n 的每个球(体), 其中 $n \leqslant 3k(k+9)/2$;

若 M^k 是非紧的, 则它可映到 E^n 的每个部分, 其中 $n \leqslant 3k(k+1)(k+9)/2$.

k 维双曲空间可以 C^∞ 等距嵌入到 E^{4k-3} 中.

有关包含同伦(上述"整体等距浸入"的最后一节)的叙说, 也见[A2].

对于到 V^3 的 C^r 等距浸入 ($r \geqslant 3$, $r = a$) 可以用一个同阶的变换形变来联接, 见[A3].

在西方, 等距嵌入 (isometric imbedding) 通常理解作一一的浸入 (如同正文所说) 并满足附加要求: 由单一浸入所诱导的拓扑重合于原来流形 (浸入的定义域) 所给的拓扑.

参考文献

[A1] Gromov, M., *Partial differential relations*, Springer, 1986 (译自俄文).

[A2] Kuiper, N., On C^1-isometric imbedding, I, *Proc. K. Ned. Akad. Wetensch.*, **A-58** (1955), 545 – 556.

[A3] Nirenberg, L., The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 337 – 394.

【译注】

参考文献

[B1] Berger, E., Bryant, R. L. and Griffiths, P. A., The Gauss equations and rigidity of isometric embeddings, *Duke Math. J.*, **50** (1983), 803 – 892.

[B2] Lin, C. S., The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature, *J. Diff. Geom.*, **21** (1985), 213 – 230.

[B3] Jacobowitz, H., Local isometric embeddings, *Ann. Math. Studies*, **102**, edited by S. T. Yau, 1982, 381 – 393.

[B4] Bryant, R. L., Griffiths, P. A. & Yang, D., Characteristics and existence of isometric embeddings, *Duke Math. J.*, **50** (1983), 893 – 994.

沈一兵 译

等距映射 [**isometric mapping**; **изометрическое отображение**]

把度量空间 A 映入度量空间 B 的保持点之间距离不变的映射 f: 若 $x, y \in A$, $f(x), f(y) \in B$, 则

$$\rho_A(x, y) = \rho_B(f(x), f(y)).$$

等距映射是一类特殊的单射, 它实际上是一个**浸入** (immersion). 若 $f(A) = B$, 即若 f 是一一映射, 则 f 称为 A 到 B 的一个等距 (isometry), A 和 B 称为成等距对应 (isometric correspondence) 或彼此等距的. 等距的空间是同胚的. 若 B 再与 A 相同, 则该等距映射称为 A 的一个等距变换 (isometric transformation) 或运动 (motion).

若度量空间 A_0 和 A_1 是某拓扑空间 B 的子集, 且若存在一个**形变** (deformation) $F_t: A \to B$, 使对每个 t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, F_t 是把 A 映成 A_t 的等距映射, 则 $\{A_t\}$ 称为 A_0 到 A_1 的等距形变 (isometric deformation).

实 Banach 空间的等距是一个仿射映射. 这样的线性等距由 (所谓) **等距算子** (isometric operator) 来实现.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 实 Banach 空间的等距是仿射的, 这一结论属于 S. Ulam 和 S. Mazur ([A1]).

参考文献

[A1] Mazur, S. and Ulam, S., Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **194** (1932), 946 – 948.

白苏华、胡师度 译

等距算子 [**isometric operator**; **изометрический оператор**]

度量空间 (X, ρ_X) 到度量区间 (Y, ρ_Y) 中的一个映射 U, 使得对所有的 $x_1, x_2 \in X$,

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(Ux_1, Ux_2)$$

成立. 如果 X 和 Y 是实赋范线性空间, $U(X) = Y$, 并且 $U(0) = 0$, 那么 U 是一个线性算子.

一个等距算子 U 把 X 一对一映射到 $U(X)$ 上, 所以逆算子 U^{-1} 存在, 并且也是一个等距算子. 从某个赋范线性空间到另一个的线性等距算子的共轭算子也是等距的. 把 X 映射到整个 Y 上的线性等距算子称为酉算子 (unitary operator). 作用在 Hilbert 空间 H 上的线性算子 U 成为酉算子的条件是方程 $U^* = U^{-1}$. 酉算子的谱 (见**算子的谱** (spectrum of an operator)) 位于单位圆周上, 并且 U 有表示

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_\varphi,$$

其中 $\{E_\varphi\}$ 是相应的**单位分解** (resolution of the identity). 定义在 Hilbert 空间的一个子空间上并且在此空间上取值的等距算子可以延拓为一个酉算子, 如果它的定义域和值域的直交补有相同的维数.

定义域为 $D_A \subset H$ 的每一个对称算子 A 联系一个等距算子

$$U_A = (A - iI)(A + iI)^{-1},$$

称为 A 的 **Cayley 变换** (Cayley transform). 如果 A 是自伴的, 那么 U_A 是酉的.

有相同定义域 D 的两个算子 A 和 B 称为度量相等的 (metrically equal), 如果 $B = UA$. 这里 U 是一个等距算子, 亦即如果对所有的 $x \in D$, 有 $\|Bx\| = \|Ax\|$.

这样的算子有许多共同的性质．对作用在 Hilbert 空间上的每一个有界线性算子 A 有一个且仅有一个正算子与它度量地相等，即由方程 $B=\sqrt{A^*A}$ 定义的算子．

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators on a Hilbert space, Pitman, 1981).

[2] Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965.

[3] Mazur, B. and Ulam, S., Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **194** (1932), 946－948.

В. И. Соболев 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

等距曲面 [isometric surfaces; изометричные поверхности]

Euclid 空间或 Riemann 空间中的曲面，它们的点之间存在一一对应，使得一曲面上的每条可求长曲线对应于另一曲面上的相同长度的可求长曲线．换言之，等距曲面由两两之间的等距对应，即关于由外围空间的度量在曲面上诱导的内在度量（见**内度量**（internal metric））的等距（见**等距映射**（isometric mapping））所刻画．等距曲面的最重要例子是由给定曲面的等距形变（见**等距形变**（deformation, isometric））获得的曲面族．

若曲面的等距蕴含着合同，更确切地，若某类 K 中与一曲面 F_0 等距的任何曲面 F 都有这样的性质，使得等距必由外围空间的一个自等距的限制来表示，则 F_0 被说成是在类 K 中唯一确定的（uniquely determined）或刚性的（rigid）．

等距曲面的概念可推广到度量空间及其子集的更广阔的范畴．　М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice-Hall, 1977, Sects. 4－10.

[A2] Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1973 (译自俄文).

沈一兵 译

同构 [isomorphism; изоморфизм]

对象之间或对象的系统之间的一种对应（关系），表示它们在某种意义下结构相等．在任意的一个**范畴**（category）中，一个同构是一个可逆的**态射**（morphism），即，是一个态射 φ，对它存在一个态射 φ^{-1}，使 $\varphi^{-1}\varphi$ 与 $\varphi\varphi^{-1}$ 都是恒等态射．

同构的概念源出于一些具体的代数系统（最初是群），其后以一种自然的方式推广到更广的各类数学结构．同构系统，"恒等构造"的古典例子是实数集 $\mathbf{R}$ 以加法为其运算，与正实数集 P 以乘法为其运算．

设 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ 为两个同样类型的**代数系统**（algebraic system），写成记号

$$\{F_i : i\in I\}\cup\{P_j : j\in J\},$$

其中 F_i 为函数符号，$i\in I$，而 P_j 为谓词符号，$j\in J$：

$$\mathbf{A}=\langle A;\{F_i : i\in I\},\{P_j : j\in J\}\rangle,$$
$$\mathbf{A}'=\langle A';\{F_i : i\in I\},\{P_j : j\in J\}\rangle.$$

从 A 到 A' 上的一个同构（isomorphism），或同构映射，是一个从集合 A 到集合 A' 上的一一映射 φ，并有性质：对 A 中所有的 $a_1, a_2, \cdots$，与所有的 $i\in I$，$j\in J$，都有

$$\varphi(F_i(a_1,\cdots,a_{n_i}))=F_i(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{n_i}))$$
$$P_j(a_1,\cdots,a_{m_j})\Leftrightarrow P_j(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_{m_j})).$$

因此，在每一个代数系统的范畴中，同构是一个**同态**（homomorphism）且为**一一映射**（bijection）．一个代数系统到其自身上的同构称为自同构．

同构关系是自反的、对称的与传递的，即，它是一个等价关系，可将任何集合分裂成不相交的等价类——两两同构的系统的类．一类代数系统，其每一系统都是这种类的**并**（union），就称为一个抽象类（abstract class）（见**代数系统类**（algebraic system, class of））．

О. А. Иванова, Д. М. Смирнов 撰

【补注】 上面中提到的 $\mathbf{R}$ 与 P 之间的同构可以明显地用指数映射或其逆，**对数函数**（logarithmic function）来给出（亦见**实指数函数**（exponential function, real））．

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[A2] Adámek, J., Theory of Mathematical structure, Reidel, 1983.

[A3] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

周伯埙 译

同构问题 [isomorphism problem; изоморфизма проблема]

寻求一个**算法**（algorithm）的问题，通过这个算法可以确定一个给定类中的任意两个递归表出的**代数系统**（algebraic system）是否同构．对于一个固定的代数系统 A 的部分同构问题（partial isomorphism problem）是寻求一个算法，通过这个算法可以识别所讨论的类中的一个递归表出的代数是否同构于 A．同构（部分同构）问题的一个肯定解答是由要求的一个算法的描述构成（其对应的同构问题可解）；同构问题的一个否定解答由证明根本没有要求的算法存在构成．通常，

对于代数的同构问题用生成元和定义关系来表述.

对于很多重要的代数系统类，同构问题是不可解的. 在由所有有限表出的半群构成的类中，对于一个有限表出的半群的部分同构问题的不可解性已在[2]中证明，并且在由所有有限表出的群构成的类中，对于一个有限表出的群的部分同构问题的不可解性已在[1]中证明. 可解长度为 n 的可解群簇中，由有限个生成元和定义关系给定的群的同构问题，当 $n \geqslant 7$ 时也是不可解的([3]).

固定表征的所有有限的有限表出的代数类以及可换群类中的同构问题都是可解的.

对于类 2 的幂零群以及对于具有一个定义关系的群的同构问题都还没有解决(1996). 对于群的同构问题与拓扑中的算法问题有关.

参考文献

[1] Адян, С. И., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **6** (1957), 231 – 298.

[2] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М.-Л., 1954 (中译本: A. A. 马尔科夫, 算法论(上、下), 科学出版社, 1959, 1960).

[3] Kirkinskiĭ, A. S. and Remeslennikov, V. N., The isomorphism problem for solvable groups, *Math. Notes*, **18** (1975), 3, 849 – 853 (*Mat. Zametki*, **18** (1975), 3, 437 – 443).

А. Л. Семенов 撰 卢景波 译

等周不等式 [**isoperimetric inequality**; **изопериметрическое неравенство**] (几何学和物理学中的)

涉及平面区域的面积 V 和周长 F 之间的不等式 $4\pi V \leqslant F^2$，它的各种推广以及图形、集合和流形的几何特征之间的其他不等式的一个一般的术语. 借助于几何特征对物理起源的量(惯性矩，弹性梁的抗扭刚度，膜的基本频率，静电容量等等)的估计也属于等周不等式的一般领域. 一个精确的等周不等式等价于某一极值问题的解. 等周不等式能把两个或更多的量联系起来.

关于最熟知的等周不等式，即经典的等周不等式和在 Minkowski 空间 M^n，Лобачевский空间 L^n，球面 S^n 中它的类似式，以及关于它们的改进，见**经典等周不等式**(isoperimetric inequality, classical).

最简单图形，主要是多边形元素之间的等周不等式的范围广泛的概括能在[1]中找到. 这类等周不等式称为几何不等式(geometric inequalities).

关于 $\mathbf{R}^n$ 中集合的诸如体积 V，直径 D 和最小外切球半径 R 等这类参数之间的初等不等式，见[2]和[3]. 其中有 Young 不等式(Young inequality):

$$R \leqslant \left[\frac{n}{2n+2} \right]^{1/2} D;$$

Gale 不等式(Gale inequality)

$$l \leqslant \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^{1/2} D,$$

这里 l 是最小外切正则单形的边的长度; Bieberbach 不等式(Bieberbach inequality)

$$V \leqslant 2^{-n} V_n D^n;$$

和 Loomis - Whitney 不等式(Loomis - Whitney inequality):

$$V \leqslant \prod_{i=1}^{\lambda} V_i^{n/k\lambda},$$

这里 V_i 是此集合在 $\lambda = \binom{n}{k}$ 个两两不同的 k 维 Descartes 坐标平面中的第 i 个上的投影的 k 维体积. 前面三个不等式能推广到空间 M^n, L^n, S^n (见[4], [5]). 在 Bieberbach 的不等式中，直径可用平均宽度代替(见[5]).

与**排列**(arrangement)和**覆叠**(covering)问题相联系，对等周不等式作了考虑，特别是对多面体，连同引入的边数或边长的和等等(见[6]).

对凸体，很多等周不等式(包括经典不等式和主曲率的对称函数的积分之间的许多不等式)是复合对象之间不等式的特殊情形(见**混合体积理论**(mixed-volume theory); **Minkowski 不等式**(Minkowski inequality)).

利用等周不等式作为对图形的某些参数借助于其他参数的估计是在几何学的范围内出现的. 等周不等式类被数学物理、复变函数论、泛函分析、函数逼近论和变分学丰富充实. 显而易见，Riemann 几何学中的等周不等式更为复杂.

在数学物理中，等周不等式(最初作为猜想)出现于 A. Saint - Venant (1856) 的文章中:

$$2\pi P \leqslant V^2,$$

这里 P 是棱柱形弹性梁的抗扭刚度; Lord Rayleigh (1877) 的文中:

$$\Lambda^2 \leqslant \pi j^2 V^{-1},$$

这里 Λ 是膜的基本频率而 j 是 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第一个正根; 也在 H. Poincaré (1903) 的文中:

$$3V \leqslant 4\pi c^3,$$

这里 c 是物体的静电电容. 在这些不等式中，V 分别是梁的横截面积，膜的面积和物体的体积. 这一类的很多结果在[7]和[8]中作了概括. 对闭 Riemann 流形上 Laplace 算子的第一个本征值 Λ^{-1} 的某些估计可在[9]中找到.

在泛函分析中，对 Соболев 空间的嵌入算子(见

嵌入定理(imbedding theorems))的有界性和紧性条件已经借助于等周不等式(使测度和容量联系起来)给出(见[10],[11]).

例如,当 μ 是非负测度,$q \geqslant 2$、$n > 2$ 时,估计

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^q d\mu\right)^{n/q} \leqslant c\int_{\mathbf{R}^n} (\nabla u)^2 dx,$$

对所有的 $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 成立,当且仅当对所有的紧统 $e \subset \mathbf{R}^n$ 满足以下的等周不等式:

$$\mu^{2/q}(e) \leqslant c_1 \operatorname{cap}(e).$$

这里 cap(·) 是 Wiener 容量(见**容量**(capacity)).

对体积和面积的等周不等式用以证明线性和拟线性椭圆型方程解的先验估计(见[12],[26]).

与函数逼近论相联系对 Minkowski 空间中的凸体出现了特殊的等周不等式(见**自周长**(self-perimeter);**宽度**(width)).

在共形和拟共形映射理论中应用等周不等式是一个标准方法.下面的不等式(4)是共形不变的等周不等式的一个例子.

包含子流形平均曲率,特别是对极小曲面的等周不等式在 **Plateau 问题**(Plateau problem)的求解中起重要作用.

非齐次空间的 Riemann 几何学中,经典等周不等式的推广仅在二维情况下已经作了详细的研究.设 M 是单连通紧二维带边流形且 M 的积分曲率的正部 ω^+ 小于 2π,那么(见[13])

$$2(2\pi - \omega^+)V \leqslant F^2. \tag{1}$$

等周不等式(1)也对**有界曲率的二维流形**(two-dimensional manifold of bounded curvature)成立,它是比 Riemann 流形更一般的流形类型.对一种非正则对象——与关于顶点的完全角为 $2\pi - \omega^+$ 的正圆锥的侧面同构的区域,(1)中的等式是可达的.利用(1),对在区域内部、依赖于 F,ω^+ 的曲线的长度和固有旋转能建立不等式(见**曲线的卷绕**(winding of a curve)).特别地,对测地线长度 L,

$$L\left[1 + \cos\frac{1}{2}\omega^+\right] \leqslant F,\ \text{如果}\ \omega^+ \leqslant \pi;$$

$$L\sin\frac{1}{2}\omega^+ \leqslant F,\ \text{如果}\ \pi \leqslant \omega^+ < 2\pi.$$

等周不等式(1)是估计式

$$F^2 + 2(\omega_a^+ - 2\pi\chi)V + aV \geqslant 0 \tag{2}$$

的特殊情形,这里 a 是任何实数,χ 是带边界的紧区域的 **Euler 示性数**(Euler characteristic),$\omega^+ = \int (K-a)^+ dV$,而 K 是 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature).对一个区域边界的 t 邻域的面积和对从边界到区域中的点的最大距离的估计式类似于(2)(见[14]).如果曲面 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中光滑子流形,则估计式(1),(2)用包含曲面外特征线的等周不等式来补充.对闭曲面下面的精确的等周不等式从积分恒等式推出(见[15]):

$$V \leqslant 2R^2(\omega^+ - \pi\chi),$$

这里 R 是 $\mathbf{R}^3$ 中包含 M 的一个球的半径.对有边界的曲面也已经得到类似的(但不精确)不等式(见[16]).特别地,对 $\mathbf{R}^n$ 中带边界长度 F 的单连通鞍曲面:

$$V \leqslant CF^2,\ V \leqslant CF^{2-\varepsilon}R^\varepsilon,$$

$$\frac{1}{7} > \varepsilon = \text{常数} > 0.$$

如果取代 ω^+ 考虑正外曲率——局部支撑平面集合中的一个测度,上面提到的诸不等式对 $\mathbf{R}^n$($n \geqslant 2$)中一般(非正则)曲面仍保持正确(见[16]).

对一个 n 维 Riemann 空间 V^n,等周不等式通常与**截曲率**(sectional curvature)或 **Ricci 曲率**(Ricci curvature)的单侧界相联系.最简单的是 V^n 中半径为 t 的球的体积 $V(t)$ 的界用常曲率 K 的完全单连通曲面中同样半径的球的体积 $v(t, K)$ 来表示:

$$V(t) \leqslant v(t, K), \tag{3}$$

这里 $(n-1)K$ 是 V^n 中 Ricci 曲率的最小值;如果 $K > 0$,则假定 $t \leqslant \pi/\sqrt{K}$(见[17]).对 V^n 的 p $(0 \leqslant p < n)$ 维子流形的管状 t 邻域,类似的等周不等式成立:V^n 中截曲率的最小值和子流形的法曲率的最大值都参加到这样一个等周不等式中(取代 Ricci 曲率)(见[18]).

如果截曲率的最小上界 $\bar{K}$ 是负的,则闭流形的体积 V 被 $\bar{K}$ 界于下(见[19]).以下的线性等周不等式对完全单连通的 V^n 中的区域 M 成立:

$$(n-1)\sqrt{-\bar{K}}\ V \leqslant F,$$

这里 F 是 M 的边界的 $(n-1)$ 维面积,而且也有等周不等式

$$V^{(n-1)/n} \leqslant c(n)F,$$

$c(n)$ 的精确值还不知道.

在有负曲率的空间中,对凸区域的很多估计已经得到,它们推广了 $\mathbf{R}^n$ 中对凸体的等周不等式(见[20],[21]).这样,

$$n^{-1}rF \leqslant V \leqslant rF,$$

这里 r 是从边界到 M 的点的最大距离.如果 M 中

截曲率的最大下界 $\underline{K}$ 是正的，则 $r\sqrt{\underline{K}}\,dt<\pi$，且左边的不等式可以加强：

$$F\sin^{1/n} r\sqrt{\underline{K}}\int_0^r \sin^{n-1} t\sqrt{\underline{K}}\,dt \leqslant V.$$

不等式 $rH\leqslant F$ 成立，这里 H 是积分**平均曲率**(mean curvature)．下面的等周不等式在三维情形下成立：

$$2\pi\chi r\leqslant H+\Omega,$$

这里 χ 是 M 的边界的 Euler 示性数，而 Ω 是 M 的积分**标量曲率**(scalar curvature)．

在经典等周不等式中，面积是界于上的．对闭单连通曲面，面积可以借助于不同伦于零的最短闭路的长度 λ 来界于下：

$$\lambda^2 c(\chi)\leqslant V. \tag{4}$$

$c(\chi)$ 的精确值仅对环面 $(=\sqrt{3}/2)$ 和射影平面 $(=2/\pi)$ 是已知的．不等式(4)是以下的关于不同伦于零的闭路族的极值长度 λ_e 的等周不等式(见[22])：

$$\lambda_e\leqslant c^{-1}(\chi) \tag{4'}$$

的推论．

对 $n>2$ 的 V^n 的类似不等式问题在[22]中作了讨论．如果 M 是带有内度量 g 的拓扑 n 维立方体，则它的 n 维体积满足不等式

$$V\geqslant\prod_{i=1}^n g_i;$$

这里 g_i 是第 i 对相对的 $(n-1)$ 维面之间在度量 g 下的距离，更多的细节见[24]，[25]．

在极小曲面和与它们相像的曲面理论中，很多等周不等式已经得到，它们不但对 $\mathbf{R}^n$ 中光滑 k 维子流形 $(n\geqslant k\geqslant 2)$ 成立，而且也对更一般的 k 维"膜"——有奇性的子流形，流动形等等也成立．这样，在[26]，[27]中，建立了以下的不等式：

$$V\leqslant C(k)\,(F+H)^{k/(k-1)}. \tag{5}$$

这里 F 是一个面的 $(k-1)$ 面积而 H 是膜的平均曲率 h 的模的积分．如果 $k=2$，则当 $\alpha=2-\max|h|\operatorname{diam}H>0$ 时，下面的等周不等式成立：

$$4\pi V\leqslant(1-\alpha)^{-1}F^2.$$

按照证明方法和应用，关于一个 k 膜 M 与半径为 t 中心在 $p\in M$ 的球的交的体积 $V(t)$ 的下界的估计，属于型(5)的不等式类．这样，对一个极小曲面 M，函数 $g^{-k}V(t)$ 对所有的 $t<d(x,\partial M)$ 递增．对 V^n 中极小膜(以及对在假设 $|h|\leqslant$ 常数下的膜)的某些推广，见[27]，[28]．

参考文献

[1] Bottema, O., Geometric inequalities, Noordhoff, 1969.
[2] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.
[3] Bonnesen, T. and Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934.
[4] Danzer, L., Grünbaum, B. and Klee, V., Helley's theorem and its relatives, in V. Klee (ed.), Convexity, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 7, Amer. Math. Soc., 1963, 101 – 180.
[5] Мельников, М. С., 《Успехи матем. наук》, **18** (1963), 4, 165 – 170.
[6] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972.
[7] Polyá, G. and Szegö, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.
[8] Payne, L. E., Isoperimetric inequalities and their applications, *Siam Rev.*, **9** (1967), 3, 453 – 488.
[9] Berger, M., Ganduchon, P. and Mazet, E., Le spectre d'une variété riemannienne, Springer, 1971.
[10] Мазья, В. Г., в кн., Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, 33 – 68.
[11] Мазья, В. Г., в кн., Теоремы вложения и их приложения, М., 1970, 142 – 159.
[12] Мазья, В. Г., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **20** (1969), 137 – 172.
[13] Александров, А. Д., Стрельцов, В. В., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **76** (1965), 67 – 80.
[14] Бураго, Ю. Д., 《Сиб. матем. ж.》, **14** (1973), 3, 666 – 668.
[15] Shahin, J. K., Some integral formulas for closed hypersurfaces in Euclidean space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 3, 609 – 613.
[16] Бураго, Ю. Д., Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны, Л., 1968 (英译本：Burago, Yu. D., Isoperimetric inequalities in the theory of surfaces of bounded external curvature, Consultants Bureau, 1970).
[17] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964.
[18] Cheeger, J., Finiteness theorems for Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 1, 61 – 74.
[19] Маргулис, Г. А., в кн.: VI Всесоюзная топологическая конференция. Тезисы, Тб., 1972.
[20] Декстер, Б. В., 《Матем. сб.》, **88** (1972), 1, 61 – 87.
[21] Волков, Ю. А., Декстер, Б. В., 《Матем. сб.》, **83** (1970), 4, 616 – 638.
[22] Berger, M., Du côté de chez pu, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4*, **5** (1972), 1, 1 – 44.
[23] Berger, M., A l'ombre de Loewner, *Ann. Sci. École*

Norm. Sup. Sér. 4, **5** (1972), 2, 241 – 260.

[24] Derrick, W. R., A weighted volume-diameter inequality for n-cubes, *J. Math. Mech.*, **18** (1968), 5, 453 – 472.

[25] Almgren, F., An isoperimetric inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 2, 284 – 285.

[26] Michael, J. and Simon, L., Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of $\mathbf{R}^n$, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26** (1973), 23, 361 – 379.

[27] Allard, W., On the first variation of a varifold, *Ann. of Math.*, **95** (1972), 417 – 491.

[28] Фоменко, А. Т., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **36** (1972), 5, 1049 – 1079.

Ю. Д. Бураго 撰

【补注】 关于直到现在的补充[1]的几何不等式的报导，见[A3].

参考文献

[A1] Bandle, C., Isoperimetric inequalities and applications, Pitman, 1980.

[A2] Kaul, H., Isoperimetrische Ungleichung und Gauss-Bonnet-Formel für H-Flächen in Riemannsche Mannigfaltigkeiten, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **45** (1972), 194 – 221.

[A3] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E. and Volenec, V., Recent advances in geometric inequalities, Kluwer, 1989.

葛显良 译 鲁世杰 校

经典等周不等式 [**isoperimetric inequality, classical**; **изопериметрическое неравенство классическое**]

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 中某一区域的体积 V 与构成该区域边界的 $n-1$ 维超曲面面积 F 之间的不等式:

$$n^n v_n V^{n-1} \leqslant F^n,$$

其中 v_n 是 n 维单位球的体积．等式仅当该区域为球体时才成立．经典等周不等式提供了**等周问题**(isoperimetric problem)的一个解．$n=2,3$ 情形下的经典等周不等式在古代已为人所知．经典等周不等式的严格证明在 $n=2$ 时由 F. Edler 于 1882 年给出，$n=3$ 时由 H. A. Schwarz 于 1890 年给出，$n \geqslant 2$ 时由 Л. А. Люстерник 于 1935 年，E. Schmidt 于 1939 年给出(见[1],[2],[3]).

尽管在二维时经典等周不等式有多种证法(见[4]), 但当 $n>2$ 时，所知的证明方法却只有两个．其一是 J. Steiner 提出的对称化方法．利用该方法，Schmidt 得到了经典等周不等式(以及 Brunn-Minkowski 不等式)在球型和双曲型 n 维空间的类似不等式([5]). 第二种证法将经典等周不等式转化为一个 Brunn-Minkowski 不等式(见 **Brunn-Minkowski 定理**(Brunn-Minkowski theorem))并利用体积的比例除法．遵循这一证法可以自然地得到一个更一般的不等式

$$n^n V^{n-1}(A) V(B) \leqslant F^n(A,B), \qquad (*)$$

它对于两集合 A,B 的体积 $V(A), V(B)$, 以及集合 A 相对于集合 B 的 Minkowski 面积 $F(A,B)$ 成立．不等式(*)可看作是 Minkowski 空间的经典等周不等式；对于一个固定的 Minkowski 球 B，一般来讲，使得等号成立的凸体 A 并不唯一，而且它们也不同于"球"([6]).

经典等周不等式有种种推广．在这些推广中，人们不是考虑那些具有逐段光滑边界的区域，而是考虑更为广泛的集合类，并且在更广泛的意义下来考虑边界的面积(Minkowski 面积，Lebesgue 面积，集合的 Caccioppoli-De Giorgi **周长**(perimeter), 或者流的质量，见[7],[8])．经典等周不等式在这些情况下仍然成立，另外，对于自相交的超曲面以及相应的有向体积，该不等式也成立(见[9]). 这些推广可以通过在不同收敛意义下取极限的方法从经典等周不等式得到．

对于等周差 $F^n - n^n v_n V^{n-1}$ 和等周比 $F^n V^{1-n}$ 的已知的估计是对经典等周不等式的加强(见[2]). 其中的一些估计是对具有特殊形状的集合，首先是**凸集**(convex set)和多面体而做的(见[10]). 这方面的一个例子是平面图形的 **Bonnesen 不等式**(Bonnesen inequality):

$$F^2 - 4\pi V \geqslant (F - 4\pi r)^2,$$

其中 r 是该图形的最大内切圆半径，以及该不等式对于 $\mathbf{R}^n$ 中凸体的推广(见[11]):

$$F^{n/(n-1)}(A,B) - n^{n/(n-1)} V(A) V^{1/(n-1)}(B) \geqslant$$
$$\geqslant [F(A,B) - n^{n/(n-1)} q V(B)^{1/(n-1)}]^n.$$

这里 $q = \max\{\lambda : \lambda B$ 可嵌入 A 中$\}$．两个凸体的相对等周差，

$$F^n(A,B) - n^n V^{n-1}(A) V(B)$$

可用来衡量它们之间的非位似程度(见[12]). 例如，它可用来证明 **Minkowski 问题**(Minkowski problem)中的稳定性定理(见[13]). 关于经典等周不等式在变曲率空间的推广以及相关的不等式，见**等周不等式**(isoperimetric inequality).

参考文献

[1] Крыжановский, Д. А., Изопериметры, 3 изд., М., 1959.

[2] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.

[3] Люстерник, Л. А., 《Успехи матем. наук》, **2** (1936), 47 – 54.

[4] Blaschke, W. and Reichardt, H., Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1960.

[5] Schmidt, E., Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenshaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometric Ⅰ, *Math. Nachr.*, **1** (1948), 81 − 157.

[6] Busemann, H., The isoperimetric problem for Minkowski area, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 743 − 762.

[7] Giorgi, E. De., Sulla proprièta isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insience aventi frontiera orientata di misura finita, *Atti Acad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur.*, **8** (1958), 5, 2, 33 − 44.

[8] Federer, H. and Flerming, W. H., Normal and integer currents, *Ann. of Nath.* (2), **72** (1960), 458−520.

[9] Rado, T., The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 3, 530 − 555.

[10] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972.

[11] Дискант, В. И., 《Докл. АН СССР》, **213** (1973), 3, 519 − 521.

[12] Дискант, В. И., 《Сиб. матем. журнал》, **13** (1972), 4, 767 − 772.

[13] Волков, Ю. А., 《Вестн. Ленигр. ун-та. Сер. матем. и астроном.》, **18** (1963), 1, 33 − 43.

Ю. Д. Бураго 撰

【补注】凸集 A 关于凸集 B 的 Minkowski 面积 (Minkowski area) $F(A,B)$ 定义如下. 令 $H_B(u)$ 为 B 的支撑函数 (support function), 即对 $\mathbf{R}^n$ 中每个向量 u, $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = H_B(U)$ 定义了一个 B 的支撑平面, 使得向量 u 所指向的那个开半空间内不含 B 中的点, 因而对所有 $x \in B$, $\sum u_i x_i \leqslant H_B(u)$ (等号至少对 B 中一个点成立). A 相对于 B 的 Minkowski 面积现在定义为

$$F(A,B) = \int_S H_B(u) dS,$$

其中 S 是 A 的边界. 该面积也等于 n 倍的混合体积 $V(A,B,\cdots,B)$ (($n-1$) 个 B). 这里 n 个凸集的混合体积 $V(A_1,\cdots,A_n)$ 定义为多项式 $V(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n)$ 中 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 的系数.

参考文献

[A1] Bonnesen, T. and Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper, Chelsea, reprint, 1948, Sects. 15, 29, 31, 38.

成 斌 译

等周问题 [isoperimetric problem; изопериметрическая задача]

经典变分学中基本问题之一. 等周问题是求泛函

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y') dx$$

在形式为

$$J_i(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_i(x, y, y') dx = c_i;$$

$$f_i: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ i = 1, \cdots, m$$

的约束和一定的边界条件下的极小值.

当引进满足微分方程

$$\dot{z}_i = f_i(x, y, y'),\ i = 1, \cdots, m$$

和边界条件

$$z_i(x_1) = 0,\ z_i(x_2) = c_i,\ i = 1, \cdots, m$$

的新变数 z_i 时, 等周问题化成 **Lagrange 问题** (Lagrange problem). 等周问题中最优性的必要条件与 **Lagrange 函数** (Lagrange function)

$$L(x, y, y', \lambda_0, \cdots, \lambda_m) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x, y, y')$$

有关的变分学中最简单问题有同样的形式.

"等周问题"的名称可追溯到下面的经典问题: 在平面上所有具有给定周长的曲线中, 求围成最大面积的一条曲线.

参考文献

[1] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[2] Цлаф, Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, 2 изд., М., 1970.

[3] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】如上所述, 原始等周问题是求有最大面积和给定周长的几何图形的问题, 即这问题是求函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 使得

$$\int_{x_1}^{x_2} y_1 y_2' dx$$

最小, 且满足

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(y_1')^2 + (y_2')^2}\, dx = l,$$

这里 l 是一给定常数.

参考文献

[A1] Elsgoloc, L. E. [L. E. El'sgol'ts], Calculus of variations, Pergamon, 1961 (译自俄文) (中译本: 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).

葛显良 译 鲁世杰 校

等温坐标 [isothermal coordinates; изотермические координаты]

二维 Riemann 空间的坐标, 在此坐标下线素的平

方有如下形式:

$$ds^2=\lambda(\xi,\eta)(d\xi^2+d\eta^2).$$

等温坐标给出了二维 Riemann 流形到平面的共形映射．在二维正则流形的紧区域上总可以引入等温坐标．等温坐标下 Gauss 曲率可用下列公式计算:

$$k=-\frac{\Delta\ln\lambda}{\lambda},$$

其中 Δ 是 **Laplace 算子** (Laplace operator).

在二维伪 Riemann 空间中也考虑等温坐标；此时线素的平方有如下形式:

$$ds^2=\psi(\xi,\eta)(d\xi^2-d\eta^2).$$

这里，经常采用的是与等温坐标自然关联的坐标 μ,ν，使得线素的平方有如下形式:

$$ds^2=\lambda(\mu,\nu)d\mu d\nu.$$

在这种情况下曲线 $\mu=$ 常数和 $\nu=$ 常数是迷向测地线，并且坐标系 μ,ν 称为迷向的 (isotropic)．迷向坐标广泛应用于广义相对论中． Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W. & Leichtweiss, K., *Elementare Differentialgeometrie*, Springer, 1973.

【译注】 二维 Riemann 流形上局部等温坐标存在性的一个初等证明可见 [B1]．关于开区域上等温坐标的存在性见 [B2]．等温坐标的优越性之一是藉以在有向二维流形上建立复结构．事实上，若设 ξ,η 是与定向相同的等温坐标，令 $z=\xi+\sqrt{-1}\,\eta$，则在等温坐标变换时，复坐标 z 按全纯函数关系进行变换，且线素平方可化为

$$ds^2=\lambda|dz|^2.$$

取复形式 $\varphi=\sqrt{\lambda}\,dz$，就有

$$ds^2=\varphi\bar{\varphi}.$$

见 [B2].

参考文献

[B1] Chern, S. S., An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. A. M. S.*, **6** (1955), 771 – 782.

[B2] Chern, S. S., Hartman, P. and Wintner, A., On isothermic coordinates, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 301 – 309.

沈一兵 译

等温网 [**isothermal net**; **изотермическая сеть**]

三维 Euclid 空间中曲面 V^2 上的正交网，在此网下由不同族的两对曲线组成的小四边形在一阶无穷小量范围内是正方的．等温网的曲线是两个共轭调和函数的等高线．在等温网的参数下，线素有如下形式:

$$ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2),$$

其中 $\lambda=\lambda(u,v)$．等温网是**菱形网** (rhombic net) 的特殊情况．在旋转曲面上，子午线和纬线构成等温网；极小曲面上的**渐近网** (asymptotic net) 是等温网.

В. Т. Базылев 撰

【补注】 亦见**等温坐标** (isothermal coordinates) 和那里给出的参考文献． 沈一兵 译

等温曲面 [**isothermal surface**; **изотермическая поверхность**]

其曲率线构成**等温网** (isothermal net) 的曲面．例如，二次曲面，旋转曲面，常平均曲率曲面，特别是极小曲面，都是等温曲面 (见**二次曲面** (quadric)；**旋转曲面** (rotation surface)；**极小曲面** (minimal surface))．曲面为等温的不变准则是曲率线网的 Чебышев 向量为梯度向量．对于一等温曲面，可定义另一等温曲面，它最多差一相似与原曲面成共形 **Peterson 对应** (Peterson correspondence)．空间的**反演** (inversion) 保持等温曲面类不变． И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, **2**, Gauthier-Villars, 1887, Chapt. XI, 429 ff.

[A2] do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976 (中译本: M. 多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988).

[A3] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, **5**, Publish or Perish, 1975.

沈一兵 译

保序映射 [**isotone mapping**; **изотонное отображение**]

偏序集 A 到偏序集 B 中的保持序的单值映射 φ．保序映射起着偏序集 (看成具有单一关系的**代数系统** (algebraic system)) 的同态的作用．保序映射也称为单调映射 (monotone mapping)． О. А. Иванова 撰

【补注】这样的映射也称为增的 (increasing) 或保序的 (order-preserving)．术语 "单调" 一般地指或者保序的或者反序的一个映射 (见**反序映射** (antitone mapping)).

葛显良 译 李慧陵 校

同痕 [**isotopy**; **изотопия**]，又称合痕

定义在给定集合 G 上所有**广群** (groupoid) 的类间的一种关系．即 G 上两个广群称为同痕的

(isotopic)，如果存在 G 的置换 ρ，σ 及 τ 使得对任意 a、$b \in G$ 有

$$a \circ b = (a\rho \cdot b\sigma)\tau,$$

其中·和∘表示这两个广群的运算．同痕关系对于 G 上的二元运算是等价关系．定义在同一集合上的两个二元运算的同构是同痕的特殊情况（$\rho = \sigma = \tau^{-1}$）．一个同痕称为主(principal)同痕，若 τ 是恒等置换．同痕于**拟群**(quasi-group)的广群本身是拟群．拟群皆同痕于某个**幺拟群**(loop)（Albert 定理(Albert theorem)）．如果某个幺拟群（特别地，某个群）同痕于某个群，则它们同构．若有单位元的某个广群同痕于**半群**(semi-group)，则它们同构，即它们都是有单位元的半群．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Общая алгебра, М., 1974 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963).

【补注】

参考文献

[A1] Bruck, R. H., A survey of binary systems, Springer, 1971.

石生明 译　许以超 校

同痕(拓扑学中的) [**isotopy (in topology)**; **изотопия**]，亦称合痕

拓扑空间 X 关于拓扑空间 Y 的一个**同伦**(homotopy): $f_t: X \to Y$（这里且贯穿整篇文章中，$t \in [0,1] = I$），使得对每个 t，映射 f_t 是 X 到 Y 的一个子集上的**同胚**(homeomorphim)．等价地，同痕是纤维状连续映射 $f: X \times I \to Y \times I$，使得 f 将纤维 $X \times t$ 同胚地映射到纤维 $Y \times t$ 的一个子集上．对使每个 t 有 $F_t(Y) = Y$ 的同痕 $F_t: Y \to Y$，称为空间 Y 的同痕(isotopy of the space)．

一个同痕 $f_t: X \to Y$ 的覆叠同痕(covering isotopy)(或包络同痕(enveloping isotopy))理解为同痕 $F_t: X \to Y$ 使得 $F_t|_X = f_t$．X 到 Y 中的两个嵌入 $f_0, f_1: X \to Y$ 称作同痕的(isotopic)，如果存在一个覆叠同痕 $F_t: Y \to Y$，对它有 $F_0 = \mathrm{id}$，$F_1(f_0(X)) = f_1(X)$．两个空间 X, Y 称为同痕等价的(isotopy equivalent)，如果存在嵌入 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 使得复合 $g \circ f: X \to X$ 和 $f \circ g: Y \to Y$ 同痕于恒同映射．同痕等价的空间也称为有相同的同痕型(isotopy type)(相似于同伦型)的空间．如果两个空间是同胚的，那么，它们是同痕等价的；然而，存在有相同同痕型的不同胚的空间，例如，一个 n 维球和将这同一球粘上一直线段(在它的端点处)．任何一个同伦不变量是同痕不变量，但是存在同痕不变量不是同伦不变量，例如维数．

同痕理论中的基本问题是同痕扩张问题(isotopy extension problem)，即覆叠一个给定的同痕 f_t 的同痕 F_t 的扩张问题．像为嵌入寻找一个同痕不变量的完全系的一般问题一样，这个问题是在拓扑流形的范畴和分片线性或微分流形的子范畴中最经常被考虑的．

流形 M^k 关于流形 $M^n (k \leqslant n)$ 的拓扑同痕 f_t 可以扩张到覆叠同痕：$F_t: M^n \to M^n$，当且仅当相应的纤维状嵌入 $f(M^k \times [a,b]) \subset M^n \times I$ 是局部平坦的（见**局部平坦嵌入**(locally flat imbedding))；这里 $[a,b]$ 是 $(0,1)$ 的子区间．如果 $n-k \neq 2$ 及 $n \neq 4$，则同痕 f_t 被同痕 F_t 所覆叠，而嵌入 $f_t(M^k) \subset M^n$ 对任何 $t \in [0,1]$ 是局部平坦的．在余维数为 2 时这不真（例如 E^3 中圆上"打一个纽结"），因此，对覆叠同痕的存在性，加上一个同伦假设是必要的．对 $n-k \neq 2$，充分地，局部闭平坦嵌入是同痕．

分片线性同痕的存在性定理在一般情形中用类似的方式叙述（在相应的纤维状嵌入在分片线性意义下是局部平坦的自然条件下）．若 $n-k \geqslant 3$，则分片线性同痕总能被扩张，因为在这些余维数中，分片线性嵌入在分片线性意义下是局部平坦的．对 $n-k=2$ 或 1，必须加上假设：嵌入 $f_t(M^k) \subset M^n$ 在分片线性意义下是局部平坦的，因为在这些余维数中，分片线性嵌入不必是局部平坦的，甚至在拓扑的意义下，例如，在纽结上的一个锥．

一个可微同痕总可以扩张成一个可微的覆叠同痕．

寻找流形 M^k 在 M^n 中嵌入的同痕不变量完全系的问题只有几个特殊的情形得到了解决．因此，对 $n-k \geqslant 3$ 或者 $n-k=1, n \neq 4$，球面 $S^k \subset S^n$ 的每个局部平坦（在拓扑的意义下）嵌入同痕于标准球面，而如果 $n-k=2, n \neq 4$，则 S^n 中的局部平坦球面 S^{n-2} 同痕于标准球面，当且仅当补集 $S^n \setminus S^{n-2}$ 有圆的同伦型(Stallings-Brown 定理(Stallings-Brown theorem))．在余维数 2 中，可以存在非同痕纽结．用完全同样的方法，可以说明在分片线性球面的分片线性同痕（不打结性）上的 Zeeman-Stallings 定理(Zeeman-Stallings theorem)．

分片线性同痕的不变量优于拓扑同痕的不变量．因此，S^n 的任何一个同胚到恒同的拓扑同痕的问题当 $n \neq 4$ 时在肯定意义下已经解决，在同样的限制下，球面 S^n 到它自身的任何两个保持定向的同胚的同痕已经被证明．在分片线性情形中，这些陈述可以用初等的方法没有任何限制地证明．充分地，拓扑流形到它自身上的闭同胚是同痕的；另一方面，存在分片线性流形的任意闭的分片线性非同痕的分片线性同胚．例如 $n \geqslant 5$ 的 n 维环面的同胚．

与拓扑和分片线性的情形形成对照，一个 n 球面

到它自身的任何两个微分同胚决不可能是微分同痕．对于 $k \leqslant n$，球面 S^k 到 S^n 中的可微嵌入的同痕类已经详细地研究过．如果 $k \geqslant n-3$，那么存在一个拓扑空间 $C_q, q=n-k$，使得同伦群 $\pi_k(C_q)$ 是与 S^k 到 S^n 中的嵌入类一一对应的．这里，对 $k<2q-3, \pi_k(C_q)=0$，而 $\pi_{2q-3}(C_q)$ 是 $\mathbf{Z}$ 或者 $\mathbf{Z}_2$ 依赖于 q 是偶数还是奇数．这样，嵌入在 S^n 中的标准 k 球面 S^k，对 $k \leqslant n-3$ 能在可微意义下纽结．换言之，存在嵌入 $S^k \subset S^n$，S^n 不可微同痕于标准嵌入，这些纽结称为 Haefliger 纽结（Haefliger knots）．如果 $k=n-2$，那么可微纽结 $S^{n-2} \subset S^n$ 可以在拓扑意义下纽结；更进一步，存在比拓扑或分片线性更多的值得考虑的；对于奇数 n，它们完全作了分类．如果 $k=n-1, n \neq 4$，则任何可微嵌入 $S^{n-1} \subset S^n$ 可微同痕于标准嵌入．

存在 S^n 到它自身的不同痕于恒同的微分同胚这个事实导致了在维数 $n+1$ 的球面上非平凡微分结构的存在性．虽然每一个 $S^n(n \neq 4)$ 到它自身的同胚能用微分同胚逼近，但不是球面的所有闭微分同胚都是可微同痕．即一个球面到它自身的微分同胚可以通过无穷小的扰动变成一个不同痕于它的同胚．

参考文献

[1] Келдыш, Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (Тр. Матем. ин-та АН СССР 81). (Keldysh, L. V., Topological imbeddings in Euclidean space, *Proc. Steklov inst. Math.*, **81** (1968).)

[2] Rourke, C. and Sanderson, B., Introduction to piecewise-linear topology, Springer, 1972.

[3] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **29** (1965), 1, 71－96.

[4] Чернавский, А. В., 《Матем. сб.》, **79** (1969), 3, 307－356.

[5] Rushing, T., Topological embeddings, Acad. Press, 1973.

[6] Siebenmann, L. C. and Kirby, R. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. Princeton Univ. Press, 1977.

М. А. Штанько 撰

【补注】同痕在无穷维的拓扑中也是很重要的（见**无穷维空间**（infinite-dimensional space））．例如，如果 x 和 y 是 **Hilbert 立方体**（Hilbert cube）Q 中的点，那么，存在一个同痕 $F: Q \times I \to Q$ 使得 $F(\cdot, 0)=\mathrm{id}$ 和 $F(x,1)=y$．

参考文献

[A1] Mill, J. van, Infinite-dimensional topology; prerequisites and introduction, North-Holland, 1988.

薛春华 译

迷向向量[**isotropic vector**; **изотропный вектор**]

正交于自身的非零向量．设 E 是实数域或复数域上的**向量空间**（vector space），设 Φ 是 $E \times E$ 上具有符号差（signature）(p,q) $(p \neq 0, q \neq 0)$ 的非退化**双线性型**（bilinear form）．这时，迷向向量（isotropic vector）是满足 $\Phi(x,x)=0$ 的非零向量 $x \in E$．有时说迷向向量有零长度（或范数）．所有迷向向量的集合称为迷向锥（isotropic cone）．一个子空间 $V \subset E$ 称为迷向的（isotropic），如果有一个非零向量 $z \in V$ 正交于 V（亦即 Φ 对 $V \times V$ 的限制是退化的：$V \cap V^{\perp} \neq \{0\}$）．向量子空间 V 称为全迷向的（totally isotropic），如果它的所有向量均为迷向向量．

在宇宙的相对论解释中，**时空**（space-time）局部地看做带有符号差 $(3,1)$ 的双线性型的四维向量空间，光子的轨道均为迷向直线，而迷向锥称为光锥（light cone）．　А. Б. Иванов 撰　陈公宁 译

迷向线汇[**isotropy congruence**; **изотропная конгруэнция**]

具有不定主曲面的**线汇**（congruence of lines）．

沈一兵 译

迷向群[**isotropy group**; **изотропии группа**]

作用在集合 M 上的作为变换群的已给群 G 的保持点 x 不动的元素组成的集合 G_x．这个集合实际上是 G 的子群，并且称为点 x 的迷向群（isotropy group）．下列术语在同一个意义下使用：平稳子群（stationary subgroup），稳定化子（stabilizer），G 中心化子（G-centralizer）．如果 M 是 Hausdorff 空间，G 是连续作用在 M 上的拓扑群，则 G_x 是闭子群．更进一步，如果 M 和 G 是局部紧的，G 有可数基，并可迁地作用在 M 上，那么存在从 M 到商空间 G/H 唯一的同胚，其中 H 是迷向群之一；所有的 $G_x, x \in M$，同构于 H．

设 M 是光滑流形，G 是光滑作用在 M 上的一个 Lie 群，则点 $x \in M$ 的迷向群 G_x 诱导了切空间 $T_x(M)$ 的线性变换的群；后者称作 x 处的线性迷向群（linear isotropy group）．在通过点 x 处的高阶的切空间上，可以得到相应的高阶的切丛的构造群中的迷向群的自然表示；它们称为高阶迷向群（higher-order isotropy groups）（也见**迷向表示**（isotropy representation））．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（英译本：Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958）.

[2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[3] Sulanke, R. and Wintgen, P., Differentialgeometrie und Faserbündel, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1972.

Ю. Г. Лумисте 撰　薛春华 译

迷向表示[**isotropy representation**; **изотропии представ-**

ление]

基础流形的切空间中可微变换群的**迷向群**(isotropy group)的自然线性表示. 若 G 是流形 M 上的可微变换群、G_x 是在点 $x \in M$ 所对应的迷向子群, 则迷向表示 $\mathrm{Is}_x: G_x \to \mathrm{GL}(T_x M)$ 把每个 $h \in G_x$ 与在 x 的变换 h 的微分 $\mathrm{Is}_x(h) = dh_x$ 联系起来. 迷向表示的象, $\mathrm{Is}_x(G_x)$, 称为在 x 的线性迷向群(linear isotropy group). 若 G 是具可数基的 Lie 群, 光滑可迁地作用在 M 上, 则切空间 $T_x M$ 可自然地与空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ 恒同, 其中 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_x$ 是群 $G \supset G_x$ 的 Lie 代数. 而且, 迷向表示 Is_x 恒同于由 G 的伴随表示(见 **Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group)) Ad_G 在 G_x 上的限制所诱导的表示 $G_x \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)$.

若**齐性空间**(homogeneous space) M 是可约的, 即若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x + m$, 其中 m 是关于 $\mathrm{Ad}_G(G_x)$ 的不变子空间, 则 $T_x M$ 可与 m 恒同, 而 Is_x 可与表示 $h \mapsto (\mathrm{Ad}_G h)_m$ 恒同(见[3]). 这时若 G 有效地作用, 则迷向表示是一一的(见**忠实表示**(faithful representation)).

迷向表示和线性迷向群在研究齐性空间上的不变对象(见**不变对象**(invariant object))时起重要作用. 齐性空间 M 上的不变张量场与 $T_x M$ 上关于迷向表示不变的张量成一一对应. 特别地, M 具有不变 Riemann 度量, 当且仅当 $T_x M$ 具有在线性迷向群下不变的 Euclid 度量. 齐性空间 M 上存在正的**不变测度**(invariant measure)当且仅当对一切 $A \in \mathrm{Is}_x(G_x)$ 有 $|\det A| = 1$. 齐性空间具有不变定向, 当且仅当对一切 $A \in \mathrm{Is}_x(G_x)$ 有 $\det A > 0$. M 上的不变线性联络一一对应于满足下列性质的线性映射 $\Lambda: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(T_x M)$:

$$\Lambda|_{\mathfrak{g}_x} = (d\mathrm{Is}_x)_e,$$

$$\Lambda((\mathrm{Ad}\, h)X) = \mathrm{Is}_x(h)\Lambda(X)\mathrm{Is}_x(h)^{-1} \quad (h \in G_x).$$

迷向表示的概念的推广是 r 阶迷向表示(isotropy representation of order r)的概念. 这是群 G_x 到群 $L^r(T_x M)$ 的同态 $h \to j_x^r h$, $L^r(T_x M)$ 是空间 $T_x M$ 到自身取零的微分同胚的可逆 r 阶射流群. 这个概念在高阶不变对象的研究中有用.

参考文献

[1] Sulanke, R. and Wintgen, P., Differentialgeometrie und Faserbündel, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1972.

[2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[3] Рашевский, П. К., в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, в. 9, М.-Л., 1952, 49-74.

[4] Cartan, E., La théorie des groups finits et continus et l'analyse situs, Gauthier-Villars, 1930.

[5] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2, Interscience, 1969.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984, Chapt. Ⅱ, Sect. 4.

沈一兵 译

迭代[iterate; итерация]

重复应用某种数学运算的结果. 这样, 如果

$$y = f(x) \equiv f_1(x)$$

是 x 的函数, 则函数

$$f_2(x) = f[f_1(x)], \cdots, f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$$

顺次称为 $f(x)$ 的二次, …, n 次迭代(iterate). 例如, 令 $f(x) = x^\alpha$, 就得到

$$f_2(x) = (x^\alpha)^\alpha = x^{\alpha^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x) = (x^{\alpha^{n-1}})^\alpha = x^{\alpha^n}.$$

指标 n 称为迭代的指数(exponent), 而从 $f(x)$ 转移到 $f_2(x), f_3(x), \cdots$ 也称为迭代(iteration). 可以对某种函数类定义具有任意实指数甚至复指数的迭代. 迭代用于通过迭代方法求解各种方程或方程组. 详见**序列逼近法**(sequential approximation, method of).

参考文献

[1] Collatz, L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer, 1964.

СБЭ-3 沈永欢 译

迭代核[iterated kernel; итерированное ядро]

一个函数 $(x, s) \mapsto K_n(x, s)$, 它由**积分算子**(integral operator)

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt$$

给定的核 K(见**积分算子的核**(kernel of an integral operator))通过递推关系式

$$K_1(x, s) = K(x, s),$$

$$K_n(x, s) = \int_a^b K_{n-1}(x, t)K(t, s)dt$$

所构成. K_n 称为 K 的 n 次迭代核(n-th iterate kernel, 或 n-th iterated kernel). 迭代核有时也称为累次核(repeated kernel). 如果 K 是连续的或平方可积的核, 则其迭代核也分别是连续的或平方可积的. 如果 K 是对称核, 则它的所有迭代核也是对称的. K_n 是算子 A^n 的核. 等式

$$K_n(x,s)=\int_a^b K_{n-m}(x,t)K_m(t,s)dt,$$

$$1\leqslant m\leqslant n-1$$

成立.

参考文献

[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974(中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一分册, 高等教育出版社, 1958).

[2] Михлин, С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959(英译本: Mikhlin, S. G., Lincar integral equations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960).

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I., Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhäuser, 1981.

[A2] Забрейко, П. П., и т. д., Интегральные уравнения, М., 1968 (справочная матем. б-ка) (英译本: Zabreyko P. P. [P. P. Zabreĭko], et al., Integral equations — a reference text, Noordhoff, 1975).

沈永欢 译

迭代算法 [iteration algorithm; итерационный алгоритм]

由点到集合的一个映射序列 A_k 所确定的递推算法, 其中 $A_k: V\to V$, V 是一个拓扑空间, 对于某初始点 $u^0\in V$, 可依下式计算点列 $u^k\in V$,

$$u^{k+1}=A_k u^k,\ k=0,1,\cdots. \tag{1}$$

称算子(1)为迭代(iteration), 而序列 $\{u^k\}$ 为迭代序列(iterative sequence).

迭代法(iteration method)(或迭代逼近法(method of iterative approximation))应用于求下面算子方程的解

$$Au=f, \tag{2}$$

即某泛函的极小值, 求方程 $Au=\lambda u$ 的本征值和本征向量等, 同时也用来证明这些问题解的存在性. 如果对于一个初始近似 u^0, 当 $k\to\infty$ 时 $u^k\to u$, 则称迭代方法(1)收敛到问题的解 u.

求解(2)的线性度量空间 V 上的算子 A_k 一般由下式构造

$$A_k u^k=u^k-H_k(Au^k-f), \tag{3}$$

其中 $\{H_k: V\to V\}$ 是由某迭代型方法所确定的算子序列. 压缩映射原理(contracting-mapping principle)及其推广, 或者问题的泛函变分极小化方法都是建立在构造形如(1),(3)的迭代法基础之上. 所使用的构造 A_k 的各种方法有 **Newton 法**(Newton method)或**下降法**(descent, method of)的诸多变形. 人们尝试选取 H_k 使得在一定条件下 $u^k\to u$ 的快速收敛得到保证, 这些条件要求计算机存储空间确定后算子 $A_k u^k$ 的数值实现充分简单, 有尽可能低的复杂性而且数值稳定. 求解线性问题的迭代法得到了很好的发展和深入的研究. 该迭代法这里分为线性与非线性两大类. **Gauss 法**(Gauss method), **Seidel 法**(Seidel method), 逐次超松弛法(见**松弛法**(relaxation method))和带有 Чебышев 参数的迭代法属于线性方法; 变分法(如最速下降法, 共轭梯度法和**极小偏差法**(minimal discrepancy method))等. 见**最速下降法**(steepest descent, method of); **共轭梯度法**(conjugate gradients, method of)属于非线性方法. 最有效的迭代法之一是使用 Чебышев 参数(Chebyshev parameters), 这里 A 是一个带有 $[m,M]$ 上谱的自相伴算子, $M>m>0$. 这个方法提供了关于预先指定的第 n 步收敛性最优(对谱边界上的给定信息)估计. 方法可描述为

$$u^{k+1}=u-\alpha_{k+1}(Au^k-f),\ k=0,\cdots,N-1,$$

这里

$$\alpha_{k+1}=2\left[M+m-(M-m)\cos\frac{2j_k-1}{2N}\right]^{-1},$$

而 N 是所期望的迭代次数, 并且当使用时为了 Чебышев 多项式根的稳定性, 取阶 N 的混合得好的一个特殊排列 $\kappa_N=(j_1,j_2,\cdots,j_N)$. 例如, 若 $N=2^n$, κ_N 可构造如下: $\kappa_2=(1,2)$, 且如果 $\kappa_{2^{i-1}}=(j_1,\cdots,j_{2^{i-1}})$ 已构造好, 则 $\kappa_{2^i}=(j_1,2^i+1-j_1,j_2,2^{i+1}-j_2,\cdots)$. 取 $N=16$, 则它形为(1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12, 2, 15, 7, 10, 3, 14, 6, 11).

存在使用前 r 个近似 $u^k,\cdots,u^{k-r+1}$ 的迭代法, 称为所谓 r 步法, 具有随 r 增加的收敛速度.

迭代法广泛地用于求解多维数学物理问题, 对于某些类型的问题存在着特殊的快速收敛迭代法. 例如: 变化方向法, 解椭圆型边-初值问题的[7]中所述方法, 质点输运或辐射问题的一些方法(见[1]-[7]; **可变方向法**(variable-directions method)).

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977(英译本: Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P., Functional analysis in normed spaces, Pergamon, 1964).

[2] Collatz, L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer, 1964.

[3] Марчук, Г. И., Лебедев, В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971(英译本: Marchuk, G. I. and Lebedev, V. I., Numerical

methods in the theory of neutron transport, Harwood, 1986).
[4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).
[5] Красносельский, М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.
[6] Лебедев, В. И., в кн.: Тр. института кибернетики АН УССР, К. 1972, 109 – 135.
[7] Федоренко, Р. П., 《Успехи матем. наук》, 28 (1973), 121 – 182 (亦见: Fedorenko, R. P., Iterative methods for elliptic difference equations, *Russian Math. Surveys*, **2** (1973), 129 – 195).

В. И. Лебедев 撰

【补注】 亦可参阅 **Чебышев迭代法** (Chebyshev iteration method)的补注.

参考文献

[A1] Young, D. M., Iterative solution of large linear systems, Acad. Press, 1971.
[A2] George, A. and Liu, J. W.-H., Computer solution of large sparse positive definite systems, Prentice-Hall, 1981.
[A3] Dennis, J. E., Jr. and Schnable, R., Least change secant updates for quasi-Newton methods, *SIAM Review*, **21** (1979), 443 – 459.
[A4] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad. Press, 1970 (中译本: J. M. 奥特加, W. C. 莱因博尔特, 多元非线性方程组迭代解法, 科学出版社, 1983).
[A5] Rheinboldt, W. C., Methods for solving systems of nonlinear equations, SIAM, 1970.
[A6] Traub, J. F., Iterative methods for the solution of equations, Prentice-Hall, 1964.
[A7] Watt, R., The numerical solution of algebraic equations, Wiley, 1979.
[A8] Wasserstrom, E., Numerical solution by the continuation method, *SIAM Review*, **15** (1973), 89 – 119.
[A9] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962 (中译本: R. S. 瓦格, 矩阵迭代分析, 上海科学技术出版社, 1966).

张宝琳、袁国兴 译

迭代法 [**iteration methods**; **итерационные методы**], 应用于矩阵本征值问题

不利用本征多项式的初等计算而去寻求矩阵本征值和本征向量(或一组主基)的方法. 这些方法本质上不同于普通规模问题的情形, 那时矩阵可以完全存储在计算机存储器中, 而对高阶的问题信息通常以紧凑形式存储.

第一个迭代法是为了计算实对称矩阵的本征值和本征向量由 C. G. Jacobi([1]) 提出来的 (见**旋转法** (rotation method)). 该方法可推广到复 Hermite 矩阵和一大类正规矩阵.

对任意形式的矩阵 Jacobi 方法有若干推广. 其中一个典型的算法包含了依据下列方法执行的一列基本步骤

$$\widetilde{A}_{k+1}=S_k^{-1}A_kS_k,$$
$$A_{k+1}=T_k^*\widetilde{A}_{k+1}^*T_k.$$

用(初等)矩阵 S 作相似变换的作用这里是使当前矩阵 A_k 的 Euclid 范数减小, 即 A_{k+1} 比 A_k 更加接近正规. 对于 T_k 一般选取一个旋转矩阵或者是它的一个酉类似阵. 用这个矩阵作相似变换的目的, 和 Jacobi 经典的方法一样, 是消除与 A_{k+1} 有关的 Hermite 矩阵, 即 $A_{k+1}+\widetilde{A}_{k+1}^*$ 中的非对角元素. 当 k 增加时, 矩阵 A_k 收敛到一个对角或拟对角形的矩阵, 而累计 S_k 和 T_k 的乘积便得到一个矩阵, 它的列即为近似的本征向量, 或这些矩阵的不变子空间的基向量(见[2], [3]).

与上面提到的方法同时得到发展的另一类算法是所谓幂法(power methods). 在这个方向上, 对于求解普通规模问题的最有效和最常用的方法是 QR 算法 (QR-algorithm) (见[4], [5]). QR 算法的迭代依下法执行:

$$A_k=Q_kR_k,\ A_{k+1}=R_kQ_k. \tag{1}$$

其中, Q_k 为正交矩阵或酉阵, R_k 为右三角阵. 在由 A_k 到 A_{k+1} 的变换中, 首先找出 A_k 的正交三角分解, 之后 Q_k 与 R_k 按照相反的顺序相乘. 如果 $\widetilde{Q}_k=Q_1\cdots Q_k$ 且 $\widetilde{R}_k=R_k\cdots R_1$, 则(1)意味着

$$A_{k+1}=\widetilde{Q}_k^*A_1\widetilde{Q}_k,\ A_1^k=\widetilde{Q}_k\widetilde{R}_k. \tag{2}$$

因此 QR 算法生成了正交相似于初始矩阵 A_1 的矩阵 A_k 的一个序列; 而且, 变换矩阵 $\widetilde{Q}_k$ 是 A_1^k 的分解式(2)中的正交分量.

用方法(1)进行迭代时, 矩阵 A_k 收敛到一个右三角或拟三角矩阵, 次对角元素收敛于零的速度取决于诸本征值绝对值之间的比值, 而且一般说来是相当慢的. 为改进 QR 算法的收敛性可采取所谓移位(shifts), 它是下面的(1)的变形

$$A_k-\kappa_kI=Q_kR_k,\ A_{k+1}=R_kQ_k+\kappa_kI. \tag{3}$$

一般, 利用移位方法 ($\kappa_k=a_{nn}^{(k)}$) 可使得最后一行非对角元素收敛于零的速度加快(一般情形是渐近二次的, 而 Hermite 矩阵是三次的), 同时对角元素 (n, n) 能很快地稳定化. 在该值得到以后, 可对 $n-1$ 阶的主子矩阵继续执行迭代, 等等. 在用正交矩阵 Q_k 累积相乘以后, 结果三角矩阵的本征向量就给出了初

始矩阵 A_1 的本征向量.

由 (1) 或 (3) 给出的迭代还用于事先化成的 Hessenberg 形式的矩阵. 若当 $i>j+1$ 时 $a_{ij}=0$ 则称矩阵 A 是右 Hessenberg 形式. QR 算法保持 Hessenberg 形式, 通常可使迭代的花费下降. 还有其他一些使计算总量下降的重要可能途径, 例如移位的隐含使用, 这种作法能够避免进行复算术运算而得到实矩阵的复共轭本征值.

在高阶 (从几百到几千阶) 问题中, 矩阵通常是稀疏的, 即只有相对很少数目的非零元素. 而且, 一般并不要求计算全部的而是很少数的本征值和相应的本征向量, 一个典型的情况是需要计算绝对值最大或最小的本征值.

上面描述的方法基于相似变换, 从而破坏了矩阵的稀疏性, 所以不值得推荐. 基于使用向量与矩阵相乘的初等变换的方法是高阶问题的基本方法. 为进一步说明这些方法需要作如下假设, 矩阵 A 的本征值是按绝对值减小的次序计数的:

$$|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|.$$

确定绝对值最大的本征值 λ_1 的幂法具有广泛的应用领域. 从某初始近似 x_0 出发, 可构造一个规范化向量序列

$$x_{k+1}=\rho_k A x_k,\ \rho_k=\frac{1}{\|Ax_k\|}. \tag{4}$$

当下列条件满足时, 这个序列收敛到相应于 λ_1 的本征向量: 1) 关于 λ_1 的 A 的所有初等因子都是线性的; 2) 不存在具有相同绝对值的其他本征值; 3) 在 x_0 关于 A 的主基的分解中, 相应于 λ_1 的本征空间中的分量是非平凡的. 但幂法的收敛通常是慢的, 它是由 $|\lambda_1|/|\lambda_2|$ 来决定的.

倘若需求的本征值 λ_0 的一个近似 $\widetilde{\lambda}_0$ 已知, 那么使用逆迭代法可以得到更快的收敛. 代替 (4), 构造一个由下式确定的序列:

$$(A-\widetilde{\lambda}_0 I)\, x_{k+1}=\rho_k x_k,\ \|x_k\|=1,\ \text{对所有}\ k. \tag{5}$$

逆迭代法基本上是 $(A-\widetilde{\lambda}_0 I)^{-1}$ 的幂法, 它有强优势本征值 $1/(\widetilde{\lambda}-\lambda_0)$. 但是, (5) 的实现要求解一个矩阵为 $A-\widetilde{\lambda}_0 I$ 的线性方程组, 而即使是使用稀疏方程组的特殊解法还是比幂法增加了计算机的存储要求.

为计算成组的本征值使用所谓同时迭代法 (methods of simultaneous iteration). 这种方法是幂法的推广, 代替对一个向量的迭代, 去构造整个子空间 A 条件下的迭代. Stewart 法 (Stewart method) 是这类方法的一个典型代表 ([6]). 假设 A 的本征值满足

$$|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n,$$

则可选取具有正交列的初始 $(n\times r)$ 矩阵 Q_0. 从 Q_0 出发, 便可由下面方法构造矩阵 Q_k 的序列

$$\widetilde{Q}_{k+1}=AQ_k,\ \widetilde{Q}_{k+1}=\widetilde{\widetilde{Q}}_{k+1}R_{k+1},$$
$$Q_{k+1}=\widetilde{\widetilde{Q}}_{k+1}W_{k+1}. \tag{6}$$

在第 2 个公式中, R_{k+1} 是右三角 $(r\times r)$ 矩阵, 而 $\widetilde{\widetilde{Q}}_{k+1}$ 具有正交列. 这个分解不需要每步迭代都计算, 其目的在于使 Q_k 的列的线性无关性得以保持, 因为在实际计算的意义上关于 A 的多次迭代有可能破坏这种无关性. (6) 中第 3 式在加速方法的收敛性方面起重要作用. 公式中正交 $(r\times r)$ 矩阵 W_{k+1} 具有以下意义. 如果以 B_{k+1} 表示 $(r\times r)$ 矩阵 $Q_k^{*}AQ_k$, 则 W_{k+1} 化 B_{k+1} 为 Schur 形式 (Schur form), 即为右三角矩阵. 矩阵 W_{k+1} 能由 QR 算法来构造, 其列构成 B_{k+1} 的一个 Schur 基 (Schur basis), 它有以下特征: 对每个 k、$1\leqslant k\leqslant r$, 前 k 个向量的线性张成便形成了 B_{k+1} 的一个不变子空间. Stewart 法的矩阵 Q_k 收敛于一个矩阵 Q, 它的列形成了对应于 λ_1、$\cdots$, λ_r 的 A 的不变子空间的一组 Schur 基. 这里, 第 i 列的收敛性由比值 $|\lambda_{r+1}|/|\lambda_i|$ 决定.

在实对称矩阵的情况下可有更多的结果. 这与把本征值作为 Rayleigh 泛函 (Rayleigh functional) 的平稳点来处理有关

$$\varphi(A,x)=\frac{(Ax,x)}{(x,x)},\ x\neq 0. \tag{7}$$

(7) 的非约束最优化方法可用于确定谱的极值点. 这样, 所得出的理论平行于求解正定线性方程组的迭代法, 并导致了相同的算法: 坐标松弛, 逐次超松弛, 最速下降和共轭梯度 (见 [7]).

所列方法都是逐个计算本征值. Lanczos 法 (Lanczos method) 用于同时按组确定对称矩阵的本征值 ([8]); 方法的提出是为了使 n 阶对称矩阵三对角化. 下面的事实提供了方法的基础: 如果一个向量序列 p_0, Ap_0, $\cdots$, $A^{n-1}p_0$ 线性无关, 那么矩阵可在这个序列标准正交化得到的基 q_1, $\cdots$, q_n 下化为三对角形式 T_n. 向量 q_k 由三项递推公式构造

$$\beta_k q_{k+1}=Aq_k-\beta_{k-1}q_{k-1}-\alpha_k q_k,$$

其中系数 α_k、β_k, $k=1$, $\cdots$, n, 决定了 T_n. 在 k 步正交化过程之后, 向量 q_1, q_2, $\cdots$, q_k 与 T_n 的主子矩阵 T_k 便都知道了. 在许多情况下, T_k 的 $k\ll n$ 的本征值已经是 T_n 的一些本征值的足够好的近似了. 相应的 T_k 的本征向量能够作为 A 的近似本征向量. 假如所要求的精度并没有达到, 则可在 q_1, $\cdots$, q_k 的线性张成中选取另一个初始近似 $\widetilde{p}_0$, 并重复这个过程, 作成 $\widetilde{k}$ 步, 等等. 迭代处理形式的 Lanczos 法包含了这个内容 (见 [9]).

计算高阶稀疏矩阵 A 的谱的内点需要能够对形为

$A - \tau I$ 的矩阵求逆，其中 $\{\tau_k\}$ 为一数列（[10]）.

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen, *J. Reine Angew. Math.*, **30** (1846), 51 − 94.

[2] Eberlein, P. J., A Jacobi-like method for the automatic computation of eigenvalues and eigenvectors of an arbitrary matrix, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, **101** (1962). 1, 74 − 88.

[3] Воеводин, В. В., 《Вычисл. методы и программирование》, **3** (1965), 89 − 105.

[4] Кублановская, В. Н., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **1** (1961), 4, 555 − 570.

[5A] Francis, J. G. F., The QR transformation: A unitary analogue to the LR transformation Ⅰ, *Comput. J.*, **4** (1961), 3, 265 − 271.

[5B] Francis, J. G. F., The QR transformation: A unitary analogue to the LR transformation Ⅱ, *Comput. J.*, **4** (1962), 4, 332 − 345.

[6] Stewart, G. W., Simultaneous iteration for computing invariant subspaces of non-Hermitian matrices, *Numer. Math.*, **25** (1976), 2, 123 − 136.

[7] Ruhe, A., Computation of eigenvalues and eigenvectors, Springer, 1977.

[8] Lanczos, C., An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **45** (1950), 4, 255 − 282.

[9] Paige, C. C., Computational variants of the Lanczos method for the eigenproblem, *J. Inst. Math. Appl.*, **10** (1972), 373 − 381.

[10] Ericsson, T. and Ruhe, A., The spectral transformation Lánczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems, *Math. Comp.*, **35** (1980), 1251 − 1268.

Х. Д. Икрамов 撰

【补注】 Hessenberg 形式不仅对其稀疏结构是可取的，也可保证 QR 算法的收敛性. 而且，利用恰当的选取移位，对角元素到本征值的收敛过程主要产生在最后的位置上，于是使得处理压缩形式的矩阵成为可能.

Lanczos 算法目前是计算大规模稀疏矩阵本征值（不只是"内点"）的最强有力的工具. 有趣的是它计算向量并不需要形成一组正交基，而是执行一个（无穷）迭代过程的若干步. 有时趋向一个本征值的收敛过程会临时中止，过了一会儿它又恢复了. 这是由（数值上）多重本征值引起的. 更多的信息可见[A1].

数值线性代数的标准读物是教科书[A7]，它提供了上面文章所综述的方法的出色导引. 关于矩阵本征值问题的更详细的描述在[A8]，[A2]和[A3]中给出了. Jacobi 法的种种变形的应用可见于[A4]和[A5]，有关 QR 算法的一些讨论见[5]和[A10]. Lanczos 法的补充参考文献为[A9]，[A11]. 最后矩阵本征值的系统的 Fortran 程序收集在[A6]中.

亦见**本征值的完全问题**（complete problem of eigen values）；**本征值的部分问题**（partial problem of eigen values）.

参考文献

[A1] Cullum, J. K. and Willoughby, R. A., Lanczos algorithms for large symmetric eigenvalue computations, Birkhäuser, 1985.

[A2] Parlett, B. N., The symmetric eigenvalue problem, Prentice-Hall, 1980.

[A3] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Clarendom Press, 1965（中译本：J. H. 威尔金森，代数特征值问题，科学出版社，1987）.

[A4] Eberlein, P. J., Solution of the complex eigenproblem by a norm-reducing Jacobi-type method, *Numer. Math.*, **14** (1970), 232 − 245.

[A5] Forsythe, G. E. and Henrici, P., The cyclic Jacobi method for computing the principal values of a complex matrix, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 1 − 23.

[A6] Garbow, B. S., Doyle, J. M., Dongarra, J. J. and Moler, C. B., Matrix eigensystem routines: EISPACK guide extensions, Springer, 1972.

[A7] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, An analysis of the total least squares problem, *SIAM J. Numer. Math.*, **17** (1980), 883 − 893.

[A8] Gourlay, A. R. and Watson, G. A., Computational methods for matrix eigenproblems, Wiley, 1977（中译本：A. R. 高尔腊伊，G. A. 沃特森，矩阵特征值问题的计算方法，上海科学技术出版社，1980）.

[A9] Paige, C. C., Computational invariants of the Lanczos method for the eigenproblem, *J. Inst. Math. Appl.*, **10** (1972), 373 − 381.

[A10] Parlett, B. N., Convergence of the QR algorithm, *Numer. Math.*, **7** (1965), 187 − 193. Correction in ibid., **10** (1967), 163 − 164.

[A11] Parlett, B. N. and Scott, D. S., The Lanczos algorithm with selective orthogonalization, *Math. Comp.*, **33** (1979), 217 − 238.

张宝琳、袁国兴 译

伊藤公式[Itô formula；Ито формула]

用以计算**伊藤过程**（Itô process）函数的**随机微分**（stochastic differential）的公式. 设对 x 和 t 定义的函数 $f(t,x)$，对 x 二次连续可微，对 t 一次连续可微，假定随机过程 X_t 具有随机微分

$$dX_t = a(t)dt + \sigma(t)dW_t,$$

则过程 $f(t,X_t)$ 的随机微分具有形式

$$df(t,X_t)=[f_t'(t,X_t)+a(t)f_x'(t,X_t)+$$
$$+\sigma^2(t)f_{xx}''(t,X_t)/2]dt+\sigma(t)f_x'(t,X_t)dW_t .$$

这一公式由伊藤得到([1]). 对于 $X_t, f(t,x)$ 是向量的情形, 类似的公式也成立. 伊藤公式可以推广到一类非光滑函数([2])和**半鞅**(semi-martingale).

参考文献

[1] Itô, K., On a formula concerning stochastic integration, *Nagoya Math. J.*, **3**(1951), 55 - 65.

[2] Крылов, Н. В.,《Теория вероят. и ее примен.》, **14** (1969), в. 2, 340 - 348.

А. А. Новиков 撰

【补注】近来, 伊藤公式通常更广泛地用来称呼关于半鞅的随机积分的变量替换公式. 无论从狭义和广义上说, 伊藤公式都是现代随机积分和微分计算的基石之一.

参考文献

[A1] Chung, K. L. and Williams, R. J., Introduction to stochastic integration, Birkhäuser, 1983.

[A2] Freedman, D., Stochastic differential equations and applications, 1, Acad. Press, 1975.

[A3] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1981.

[A4] Itô, K. and McKean, H. P., jr., Diffusion processes and their sample paths, Acad. Press, 1964.

[A5] McKean, H. P., jr., Stochastic integrals, Acad. Press, 1969.

[A6] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusions, Markov processes and martingales, 2, Itô calculus, Wiley, 1987.

[A7] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G., Markov processes, Wiley, 1986.

刘秀芳 译

伊藤过程 [Itô process; Ито процесс]

一类具有**随机微分**(stochastic differential)的**随机过程**(stochastic process). 确切地说, 称一个定义在具有 Ω 的非减 σ 域族 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上的连续随机过程 X_t 为关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的伊藤过程(Itô process), 如果存在对每个 t 关于 $\mathscr{F}_t$ 可测的过程 $a(t)$ 和 $\sigma(t)$(分别称为漂移系数(drift coefficient)和扩散系数(diffusion coefficient)), 以及关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的 **Wiener 过程**(Wiener process) W_t, 使得

$$dX_t=a(t)dt+\sigma(t)dW_t .$$

在文献[1],[2]中称这种过程为伊藤过程. 同一个过程 X_t 可以关于两个不同的 σ 域族 $\{\mathscr{F}_t\}$ 都是伊藤过程. 在这种情形下对应的两个随机微分可以有本质的区别. 称一个伊藤过程为扩散型过程(process of diffusion type)(见**扩散过程**(diffusion process)), 如果它的漂移系数 $a(t)$ 和扩散系数 $\sigma(t)$ 对每个 t 都是关于 σ 代数

$$\mathscr{F}_t^X=\sigma\{\omega: X_s, s\leqslant t\}$$

可测的.

在相当一般的条件下, 可以把一个伊藤过程表示成一个扩散型过程, 但一般说来, 它应具有一个新的 Wiener 过程(见[3]). 如果一个伊藤过程可表示成一个具有某个 Wiener 过程 $\bar{W}_t$ 的扩散伊藤过程, 且满足方程 $\mathscr{F}_t^{\bar{W}}=\mathscr{F}_t^X$, 则称 $\bar{W}_t$ 为 X_t 的新息过程(innovation process).

例 给定一个关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的 Wiener 过程 $W_t (t\geqslant 0)$, 假定

$$dX_t=Ydt+dW_t ,$$

其中 Y 是一个关于 $\mathscr{F}_0$ 可测的具有均值 m 和方差 γ 的正态分布随机变量.

X_t 看作关于 $\{\mathscr{F}_t^X\}$ 的过程, 则具有随机微分

$$dX_t=\frac{m+\gamma X_t}{1+\gamma t}dt+d\bar{W}_t ,$$

其中新的 Wiener 过程 $\bar{W}_t$ 就是 X_t 的新息过程, 定义为

$$\bar{W}_t=\mathsf{E}(X_t-Yt\,|\,\mathscr{F}_t^X) .$$

参考文献

[1] Гирсанов, И. В.,《Теория вероят. и ее примен.》, **5** (1960), 3, 314 - 330.

[2] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Statistics of random processes, 1 - 2, Springer, 1977).

[3] Ширяев, А. Н.,《Проблемы передачи информации》, **11** (1966), 3, 3 - 22.

А. А. Новиков 撰 刘秀芳 译

Iversen 定理 [Iversen theorem; Иверсена теорема]

如果 a 是复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的孤立本质奇点, 则其每个 E. Picard 意义下的**例外值**(exceptional value) α 都是 $f(z)$ 在 a 处的**渐近值**(asymptotic value). 例如, 值 $\alpha_1=0$ 与 $\alpha_2=\infty$ 是 $f(z)=e^z$ 在本质奇点 $a=\infty$ 处的例外值和渐近值. F. Iversen 的这个结果([1])是关于解析函数在其本质奇点邻域中性态的 Picard 大定理(见 **Picard 定理**(Picard theorem))的补充.

参考文献

[1] Iversen, F., Récherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Helsinki, 1914.

[2] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】Iversen 定理特别为 W. K. Hayman 推广到 $\mathbf{R}^n$ 上的次调和函数, 见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Hayman, W. K., Kennedy, P. B., Subharmonic functions, 1, Acad. Press, 1976.

[A2] Hayman, W. K., Subharmonic functions, 2, Acad. Press, 待出版.

沈永欢 译

岩沢分解 [Iwasawa decomposition; Ивасавы разложение]

将一个非紧的连通半单实 **Lie 群** (Lie group) G 的任意一个元素 g 表成分别属于解析子群 K, A, N 的元素 k, a, n 的乘积 $g = kan$ 的唯一的表示式, 这里 K, A 和 N 是如下定义的. 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ 是 G 的 **Lie 代数** (Lie algebra) $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 分解** (Cartan decomposition); 令 $\mathfrak{a}$ 是空间 $\mathfrak{p}$ 的极大交换子空间, $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的这样一个幂零子代数, 它是关于 $\mathfrak{a}$ 的某个正根系内根向量的线性包. 把这个 Lie 代数分解成子代数 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{n}$ 的直和的分解称为半单实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的岩沢分解 (见[1]). 群 K, A 和 N 定义为 G 的分别对应于子代数 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{n}$ 的解析子群. 群 K, A 和 N 是闭的; A 和 N 是单连通的; K 包含 G 的中心, 并且 K 在 G 的伴随表示之下的象是 G 的伴随群的一个极大紧子群. 映射 $(k, a, n) \mapsto kan$ 是流形 $K \times A \times N$ 到 Lie 群 G 上一个解析微分同胚. 岩沢分解在半单 Lie 群的表示论中占着基本的地位. 岩沢分解也可以对于一个 p 进域上连通半单代数群 (或者更一般地, 对于 p 进类型的群) 来定义 (见 [4], [5]).

参考文献

[1] Iwasawa, K., On some types of topological groups, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 507 – 558.

[2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naĭmark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[3] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[4] Bruhat, F., Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps $\mathfrak{p}$-adique, *Publ. Math. IHES*, **23** (1964), 45 – 74.

[5] Iwahori, N. and Matsumoto, H., On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, *Publ. Math. IHES*, **25** (1965), 5 – 48.

А. С. Феденко А. И. Штерн 撰

【补注】 一个岩沢分解的例子是 $SL_n(\mathbf{R}) = KAN$, 其中 $K = SO_n(\mathbf{R})$, A 是 $SL_n(\mathbf{R})$ 的对角矩阵所构成的子群, N 是对角线上元素都是 1 的下三角形矩阵所构成的子群. 因此, 特别地, $SL_n(\mathbf{R})$ 的每一个元素都可以写成一个特殊正交矩阵与一个下三角形矩阵的乘积.

参考文献

[A1] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

郝钢新 译

J

Jackson 不等式[**Jackson inequality**; **Джексона неравенство**]

用三角多项式或代数多项式对某个函数作**最佳逼近**(best approximation)时，估计误差衰减速度对该函数可微性及有限差分性依赖关系的一个不等式．令 f 为实轴上周期为 2π 的连续函数，$E_n(f)$ 为 n 次三角多项式 T_n 对 f 所作的最佳一致逼近的误差，即

$$E_n(f)=\inf_{T_n}\max_{x}|f(x)-T_n(x)|,$$

并设

$$\omega(f;\delta)=\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}|f(t_1)-f(t_2)|$$

为 f 的**连续模**(continuity, modulus of)．D. Jackson([1])证明了

$$E_n(f)\leqslant C\omega[f;\frac{1}{n}] \qquad (*)$$

(其中 C 是一绝对常数)，如果 f 有 r 阶连续导数 $f^{(r)}(r\geqslant 1)$，则

$$E_n(f)\leqslant\frac{C_r}{n^r}\omega[f^{(r)};\frac{1}{n}],$$

其中常数 C_r 仅依赖于 r．С.Н. Бернштейн([3])对

$$\omega(f;t)\leqslant Kt^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

的情形独立地得到了不等式(*)．如果 f 在闭区间 $[a,b]$上连续或 r 次连续可微，$r=1,2,\cdots$，且 $E_n(f;a,b)$ 是 n 次代数多项式在 $[a,b]$上对 f 所作的最佳一致逼近的误差，则对 $n>r$，关系式 $(f^0=f)$

$$E_n(f;a,b)\leqslant\frac{A_r(b-a)^r}{n^r}\omega[f^{(r)};\frac{b-a}{n}]$$

成立，其中 A_r 为仅依赖于 r 的常数．

在函数逼近论中，Jackson 不等式也称为 Jackson 定理(Jackson theorem)或正定理．Jackson 不等式可沿不同的方向推广到：使用积分度量的逼近，有限阶整函数的逼近，借助于 k 阶光滑模对逼近所作的估计，或推广到多变量函数．在某些情形下，Jackson 不等式中的精确常数值已被定出．

参考文献

[1] Jackson, D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebenen Ordnung, Göttingen, 1911. Thesis.

[2] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[3] Бернштейн, С. Н., 《Сооб. Харьк. матем. общест-ва》, сер. 2, **13**(1912), 49–194.

[4] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976 (中译本: Н. П. 考涅楚克, 逼近论的极值问题, 上海科学技术出版社, 1982).

[5] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart & Winston, 1966 (中译本: G. G. 洛伦茨, 函数逼近论, 上海科学技术出版社, 1981).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】亦见函数逼近，正定理与逆定理．

设 $\omega_k(f;\delta)$ 是 k 阶连续模，

$$\omega_k(f;\delta)=\sup_{\substack{|h|\leqslant t\\ x,x+kh\in[a,b]}}\left|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f(x+\nu h)\right|,$$

则更一般地有

$$E_n(f)\leqslant C_k\omega_k(f;n^{-1}),$$

其中 C_k 与 f 无关．最小系数 C_k 已由 J. Favard 给出．就区间$[-1,1]$而言，常数 C_1 为 6．С. Б. Стечкин

证明了如下结果

$$\omega_k[f;\frac{1}{n}]\leqslant\frac{C_k}{n^k}\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{k-1}E_i(f).$$

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, 1966, Chapt. 4 (中译本: E. W. 切尼, 逼近论导引, 上海科学技术出版社, 1981).

[A2] Meinardus, G., Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer, 1964, Chapt. I, §5 (中译本: G. Meinardus, 函数逼近: 理论与数值方法, 高等教育出版社, 1986).

[A3] Rivlin, Th. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1981.

王仁宏、檀结庆 译

Jackson 奇异积分 [**Jackson singular integral**; **Джексона сингулярный интеграл**], Jackson 算子 (Jackson operator)

形如

$$U_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+u)K_n(u)du$$

的积分, 其中表达式

$$K_n(u)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left[\frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}\right]^4,\ n=1,2,\cdots$$

称为 Jackson 核 (Jackson kernel). D. Jackson ([1]) 在通过函数 f 的连续模 $\omega(f,1/n)$ 或者 f 的 $k\geqslant1$ 阶导数的连续模来估计 f 的最佳逼近时首先使用了这种积分. Jackson 奇异积分是一个正算子, 并且是 $2n-2$ 阶的三角多项式; 它的核 $K_n(u)$ 可以表示为下列形式:

$$K_n(u)=A+\rho_1^{2n-2}\cos t+\cdots+\rho_{2n-2}^{2n-2}\cos(2n-2)t,$$

其中 $A=1/2$, 而 $\rho_1^{2n-2}=1-3/(2n^2)$, $n=1,2,\cdots$. 估计式

$$|U_n(f,x)-f(x)|\leqslant6\omega\left[f,\frac{1}{n}\right]$$

成立.

参考文献

[1] Jackson, D., The theory of approximation, Amer. Math. Soc., 1930.

[2] Натансон, И. П., Конструктивная теория функций, М., 1949 (中译本: И. П. 纳唐松, 函数构造论, 上、中、下册, 科学出版社, 1958-1959).

А. В. Ефимов 撰 张鸿林 译

Jackson 定理 [**Jackson theorem**; **Джексона теорема**]

函数逼近论中的一个定理, 给出一个函数用代数多项式 (周期函数用三角多项式) 作最佳逼近时的上界估计. Jackson 定理使得研究一个函数最佳逼近性质对其可微性质的依赖关系成为可能. 见 **Jackson 不等式** (Jackson inequality).

В. И. Бердышев 撰 王仁宏、檀结庆 译

Jacobi 括号 [**Jacobi brackets**; **якоби скобки**], Mayer 括号 (Mayer brackets)

微分表达式

$$[F,G]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\left[\frac{\partial G}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial G}{\partial u}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial G}{\partial p_k}\left[\frac{\partial F}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right]\qquad(1)$$

其中函数 $F(x,u,p)$ 和 $G(x,u,p)$ 均含 $2n+1$ 个自变量, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $p=(p_1,\cdots,p_n)$.

主要性质如下:

1) $[F,G]=-[G,F]$;

2) $[F,GH]=G[F,H]+H[F,G]$;

3) 如果 $G=g(y)$, $y=(y_1,\cdots,y_s)$ 而 $y_i=f_i(x)$, 则 $[F,G]=\sum_{i=1}^{s}(\partial g/\partial y_i)[F,f_i]$;

4) $[F,[G,H]]+[G,[H,F]]+[H,[F,G]]=(\partial F/\partial u)[G,H]+(\partial G/\partial u)[H,F]+(\partial H/\partial u)\cdot[F,G]$.

最后一个性质称为 Jacobi 恒等式 (Jacobi identity) (见 [1], [2]).

表达式 (1) 有时写成下列形式:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{dG}{dx_k}-\frac{\partial G}{\partial p_k}\frac{dF}{dx_k}\right],$$

其中采用了符号表示

$$\frac{dH}{dx_k}=\frac{\partial H}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial H}{\partial u}.\qquad(2)$$

如果把 u 和 p_k 看作 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的函数, 而 $p_k=\partial u/\partial x_k(1\leqslant k\leqslant n)$, 则 (2) 具有关于 x_k 的全导数的意义.

如果 F 和 G 不依赖于 u、则它们的 Jacobi 括号 (1) 即是 **Poisson 括号** (Poisson brackets).

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi, J. Reine Angew. Math., **60** (1862), 1-181.

[2] Mayer, A., Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann., **9** (1876), 347-370.

[3] Гюнтер, Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.-М., 1934.

[4] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959 (中译本: В. В. 史捷班诺夫, 高等教育出版社, 1995).

А. П. Солдатов 撰

【补注】 Poisson 括号是经典力学中的重要工具, 例如见 [A1].

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical me-

chanics, Springer, 1978(译自俄文. 中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学中的数学方法, 高等教育出版社, 1993).

张鸿林 译

Jacobi 条件[Jacobi condition; Якоби условие]

变分学问题中最优性的必要条件. Jacobi 条件是极小化泛函的二阶变分在其极小点上为非负的必要条件(这个泛函的一阶变分为零是由一阶必要条件: **Euler 方程**(Euler equation), **横截条件**(transversality condition)和 **Weierstrass 条件(对变分极值)**(Weierstrass conditions (for a variational extremum))保证的).

例如, 提出泛函

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})dt \tag{1}$$

在给定的端点条件

$$x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2 \tag{2}$$

下的极小化问题. 如果 $x(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 是问题(1), (2)的一个解, 则此泛函的一阶变分 δJ 必为零, 因而得到一阶必要条件, 且二阶变分

$$\delta^2 J(\eta)=\int_{t_1}^{t_2}(F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}^2+2F_{x\dot{x}}\eta\dot{\eta}+F_{xx}\eta^2)dt \tag{3}$$

必须大于或等于 0, 对满足零边界条件

$$\eta(t_1)=0,\ \eta(t_2)=0 \tag{4}$$

的任何分段光滑函数 $\eta(t)$.

对 $\delta^2 J(\eta)$ 的 Euler 方程是

$$F_{xx}\eta+F_{x\dot{x}}\dot{\eta}-\frac{d}{dt}(F_{x\dot{x}}\eta+F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta})=0 \tag{5}$$

且称为 Jacobi 方程(Jacobi equation). 它是关于未知函数 $\eta(t)$ 的二阶线性微分方程. (5)中 η 和 $\dot{\eta}$ 的所有系数用对应于已知最优解 $x(t)$ 的 t, x, $\dot{x}$ 的值算出, 因而它们都是 t 的已知函数.

函数 $\eta(t)\equiv 0$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 满足边界条件(4)下的 Jacobi 方程, 即它是 $\delta^2 J(\eta)$ 的一条极值曲线. 另一方面, 对 $\eta(t)\equiv 0$ 二阶变分 $\delta^2 J(\eta)=0$, 且由于对一个最优解 $x(t)$ 二阶变分对任何 $\eta(t)$ 是非负的, 所以函数 $\eta(t)\equiv 0$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 使得 $\delta^2 J(\eta)$ 极小化. 如果 Legendre 的条件 $F_{\dot{x}\dot{x}}\neq 0$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 成立(亦见 **Legendre 条件**(Legendre condition)), 即 $x(t)$ 是一非奇异极值曲线, 则在初始条件 $\eta(t_1)=\dot{\eta}(t_1)=0$ 下, Jacobi 方程的解恒等于零.

点 $t=c$ 称为共轭(conjugate)于点 $t=a$, 如果有一个 Jacobi 方程的解使得在 $t=a$ 和 $t=c$ 上为零而在 a 与 c 之间不恒为零. 根据这个必要的 Jacobi 条件, 如果非奇异极值曲线 $x(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 给出泛函(1)的一个极小值, 则 (t_1, t_2) 不包含共轭于 t_1 的点.

Jacobi 条件的实际意义可以解释如下. 设它不成立, 即存在一点 $a(t_1<a<t_2)$ 共轭于 t_1, 则可以构造连续函数

$$\eta_1(t)=\begin{cases}\eta(t),\ t_1\leqslant t\leqslant a,\ \eta\neq 0,\\ 0.\quad a\leqslant t\leqslant t_2,\end{cases}$$

它是(5)的解, 且 $\delta^2 J(\eta_1)=0$. 这样 $\eta_1(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 是 $\delta^2 J(\eta)$ 的一条多角极值曲线, 在 $t=a$ 有隅角. 但是, 由 Weirestrass-Erdmann 的必要条件(见 **Euler 方程**(Euler equation)), 它要求 $F-\dot{x}F_{\dot{x}}$ 和 $F_{\dot{x}}$ 在这隅角连续, 在 $t=a$, 必定有 $\dot{\eta}_1(a)=0$. 这连同 $\eta_1(a)=0$, 给出 $\eta_1(t)\equiv 0$, 与假设 $\eta(t)\neq 0$ $(t_1\leqslant t_2\leqslant a)$ 矛盾.

为了直接验证 Jacobi 条件必须考虑(5)满足初始条件

$$\eta(t_1)=0,\ \dot{\eta}(t_1)=1$$

的解. 设这个解为 $\Delta(t_1, t)$. 为了一个点 $t=a$ $(t_1<a<t_2)$ 共轭于 t_1, 必要充分条件是 $\delta(t_1, t)$ 在 $t=a$ 为零. 所以, 满足 Jacobi 条件等价于 $\Delta(t_1, t)$ 在 (t_1, t_2) 上不为零.

在更一般的情况下, 当考虑一个变分问题(Lagrange 的, Mayer 的或 Bolza 的形式的问题)时, Jacobi 条件的陈述有某种专门的特征. 泛函的二阶变分极小化问题表述为一个 Bolza 问题. 这问题称为相伴问题(associated problem), 而其极值曲线称为相伴极值曲线(associated extremals). 二阶变分极小化问题的相伴问题中的微分约束条件和边界条件作为原变分问题相应条件变形的结果得出. 共轭点的定义保持同样的形式. 为了这泛函的二阶变分在端点满足相伴条件的相伴极值曲线类上是非负的, Jacobi 条件必须成立; 这要求 (t_1, t_2) 不包含共轭于 t_1 的点.

Jacobi 条件由 C. G. J. Jacobi(1837)建立.

参考文献

[1] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 Jacobi 条件和 **Legendre 条件**(Legendre condition)两者与变分学中的充分条件有关(见[A1]). Legendre-Clebsch 条件(Legendre-Clebsch condition)是后者对最优控制问题的推广(见[A2]). 对奇性控制问题, Legendre-Clebsch 条件的推广已由 H. J. Kelley 得到(见[A3]).

参考文献

[A1] Elsgolc, L. E. [L. E. El'sgolts], Calculus of variations, Pergamon, 1961 (译自俄文)(中译本: 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).

[A2] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Ginn, 1969.

[A3] Kelley, H. J., Kopp, R. E. and Moyer, H. G., Singular extremals, in G. Leitmann (ed.): Topics of optimization, Acad. Press, 1967, Chapt. 3.

[A4] Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962 (译自俄文).

[A5] Cesari, L., Optimization: theory and applications: problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

葛显良 译 鲁世杰 校

Jacobi 椭圆函数 [Jacobi elliptic functions; Якоби эллиптические функции]

由 Legendre 正规形式的**椭圆积分** (elliptic integral) 的直接反演得出的**椭圆函数** (elliptic function). 这个反演问题是由 C. G. J. Jacobi 和 N. H. Abel 在 1827 年以稍为不同形式独立地解决的. Jacobi 的构造是基于应用 θ **函数** (**theta-function**).

设 τ 是一个复数, 具有 $\operatorname{Im}\tau>0$. Jacobi θ 函数 $\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$ 和 $\theta_3(v)$ 是用复变量 v 的在紧集上绝对一致收敛的下列级数表示的:

$$\theta_0(v)=\theta_0(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi m^2\tau}e^{2i\pi mv}=$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi m^2\tau}\cos(2\pi mv);$$

$$\theta_1(v)=\theta_1(v;\tau)=$$

$$=i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi(m-1/2)^2\tau}e^{(2m-1)i\pi v}=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi(m+1/2)^2\tau}\sin[(2m+1)\pi v];$$

$$\theta_2(v)=\theta_2(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi(m-1/2)^2\tau}e^{(2m-1)i\pi v}=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}e^{i\pi(m+1/2)^2\tau}\cos[(2m+1)\pi v];$$

$$\theta_3(v)=\theta_3(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi m^2\tau}e^{2i\pi mv}=$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{i\pi m^2\tau}\cos(2\pi mv).$$

这些级数收敛得相当快. 记号 $\theta_0(v)$, $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$, $\theta_3(v)$ 可追溯到 K. Weierstrass. $\theta_0(v)$ 常常写成 $\theta_4(v)$, 且有另外的记号系统. Jacobi 用记号 $\Theta(v)=\theta_0(v/2K)$, $H(v)=\theta_1(v/2K)$, $H_1(v)=\theta_2(v/2K)$, 和 $\Theta_1(v)=\theta_3(v/2K)$, 这里 $K=\pi\theta_3^2(0)/2$.

所有 Jacobi θ 函数都是复变量 v 的整超越函数; $\theta_1(v)$ 是奇函数, 而其余的函数 $\theta_0(v)$, $\theta_2(v)$ 和 $\theta_3(v)$ 是偶的.

以下的周期关系 (periodicity relations) 成立:

$$\theta_0(v\pm1)=\theta_0(v),$$

$$\theta_0(v\pm\tau)=-e^{i\pi\tau}\cdot e^{\mp2i\pi v}\cdot\theta_0(v);$$

$$\theta_1(v\pm1)=-\theta_1(v),$$

$$\theta_1(v\pm\tau)=-e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp2i\pi v}\cdot\theta_1(v);$$

$$\theta_2(v\pm1)=-\theta_2(v),$$

$$\theta_2(v\pm\tau)=e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp2i\pi v}\cdot\theta_2(v);$$

$$\theta_3(v\pm1)=\theta_3(v),$$

$$\theta_3(v\pm\tau)=e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp2i\pi v}\cdot\theta_3(v).$$

这些关系蕴涵 θ 函数是 Hermite 第三类椭圆函数 (亦见 **Hermite 函数** (Hermite function)).

各种 θ 函数由以下的变换公式 (transformation formulas) 相联系:

$$\theta_0\left[v\pm\frac{1}{2}\right]=\theta_3(v),$$

$$\theta_0\left[v\pm\frac{1}{2}\tau\right]=\pm ie^{-i\pi\tau/4}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\theta_1(v);$$

$$\theta_1\left[v\pm\frac{1}{2}\right]=\pm\theta_2(v),$$

$$\theta_1\left[v\pm\frac{1}{2}\tau\right]=\pm ie^{-i\pi\tau/4}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\theta_0(v);$$

$$\theta_2\left[v\pm\frac{1}{2}\right]=\theta_1(v),$$

$$\theta_2\left[v\pm\frac{1}{2}\tau\right]=e^{-i\pi\tau/4}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\theta_3(v);$$

$$\theta_3\left[v\pm\frac{1}{2}\right]=\theta_0(v),$$

$$\theta_3\left[v\pm\frac{1}{2}\tau\right]=e^{-i\pi\tau/4}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\theta_2(v).$$

所有四个 θ 函数满足同一个微分方程 (**热传导方程** (heat equation)):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=4i\pi\frac{\partial\theta}{\partial\tau}.$$

所谓 θ 函数的零值 $\theta_0(0)$, $\theta_1'(0)$, $\theta_2(0)$, $\theta_3(0)$ 是重要的值; 这里 $\theta_1(0)=0$. 它们之间的关系是:

$$\theta_1'(0)=\pi\theta_0(0)\theta_2(0)\theta_3(0),$$

$$\theta_3^4(0)=\theta_0^4(0)+\theta_2^4(0).$$

特别地,

$$\theta_0(0)=H_0H_3^2,\ \theta_2(0)=2e^{i\pi\tau/4}H_0H_1^2,$$

$$\theta_3(0)=H_0H_2^2,\ \theta_1'(0)=2\pi e^{i\pi\tau/4}H_0^3,$$

其中

$$H_0=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2i\pi m\tau}),$$

$$H_1=\prod_{m=1}^{\infty}(1+e^{2i\pi m\tau}),$$

$$H_2=\prod_{m=1}^{\infty}(1+e^{(2m-1)i\pi\tau}),$$

$$H_3=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{(2m-1)i\pi\tau}),$$

$$H_1H_2H_3=1.$$

函数 $\theta_0(v)$ 在 $m+(n-1/2)\tau$ 上有单零点; $\theta_1(v)$ 在 $m+n\tau$ 上有单零点; $\theta_2(v)$ 在 $m-1/2+n\tau$ 上有单零点; 而 $\theta_3(v)$ 在 $m-\frac{1}{2}+(n-\frac{1}{2})\tau$ 上有单零点; $m, n=0, \pm 1, \cdots$.

由周期性关系可知, θ 函数的某些比是严格意义下的椭圆函数. 基本 Jacobi 椭圆函数是: $\operatorname{sn} u$ (**椭圆正弦** (sine amplitude)), $\operatorname{cn} u$ (**椭圆余弦** (cosine amplitude)) 和 $\operatorname{dn} u$ (**椭圆** δ (delta amplitude)). 这种记号是由 C. Gudermann (1838) 引入的. 这些术语起源于 Jacobi 老的已过时的记号: $\operatorname{sn} u=\sin\operatorname{am} u$, $\operatorname{cn} u=\cos\operatorname{am} u$, $\operatorname{dn} u=\Delta\operatorname{am} u$.

新变量 u 由 $u=v\pi\theta_3^2(0)$ 与 v 相联系. 用 $k=\theta_2^2(0)/\theta_3^2(0)$ 表示椭圆函数的模数 (modulus of the elliptic functions), Jacobi 椭圆函数可用 θ 函数表示, 或用在原点邻域内收敛的幂级数表示如下:

$$\operatorname{sn} u=\operatorname{sn}(u;k)=\frac{\theta_3(0)\theta_2(v)}{\theta_2(0)\theta_0(v)}=$$

$$=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-\cdots,$$

$$\operatorname{cn} u=\operatorname{cn}(u;k)=\frac{\theta_0(0)\ \theta_2(v)}{\theta_2(0)\ \theta_2(v)}=$$

$$=1-\frac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\frac{u^4}{4!}+$$

$$-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!}+\cdots,$$

$$\operatorname{dn} u=\operatorname{dn}(u;k)=\frac{\theta_0(0)\theta_3(v)}{\theta_3(0)\ \theta_0(v)}=$$

$$=1-k^2\frac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}+$$

$$-k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!}+\cdots.$$

它们的逆和比的方便的记号是由 J. Glaisher (1882) 引入的:

$$\operatorname{ns} u=\frac{1}{\operatorname{sn} u},\ \operatorname{nc} u=\frac{1}{\operatorname{cn} u},\ \operatorname{nd} u=\frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{cs} u=\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},\ \operatorname{ds} u=\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},\ \operatorname{dc} u=\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{sc} u=\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},\ \operatorname{sd} u=\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},\ \operatorname{cd} u=\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

Jacobi 椭圆函数 $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$ 是具有以下周期的二阶椭圆函数: 对 $\operatorname{sn} u$, $4K$ 和 $2iK'$; 对 $\operatorname{cn} u$, $4K$ 和 $2(K+iK')$; 而对 $\operatorname{dn} u$, $2K$ 和 $4iK'$, 其中 $K=K(k)=\pi\theta_3^2(0)/2$ 和 $K'=K(k')=-i\tau K$ 是第一类完全椭圆积分的值, 且 $k'=(1-k^2)^{1/2}$ 称为椭圆函数的补模数 (complementary modulus of the elliptic functions). Jacobi 椭圆函数只有单极点, 位于 $2mK+(2n+1)iK'$; $m, n=0, \pm 1, \cdots$.

这三个 Jacobi 椭圆函数由以下关系式联系着:

$$\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1,$$

$$\operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn}^2 u=1,$$

$$\operatorname{dn}^2 u-k^2\operatorname{cn}^2 u=1-k^2=k'^2,$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{cn} u=-\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{dn} u=-k^2\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} u;$$

且由以下微分方程联系:

$$\left[\frac{d}{du}\operatorname{sn} u\right]^2=(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u),$$

$$\left[\frac{d}{du}\operatorname{cn} u\right]^2=(1-\operatorname{cn}^2 u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2 u),$$

$$\left[\frac{d}{du}\operatorname{dn} u\right]^2=(1-\operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u-k'^2).$$

关于 Jacobi 椭圆函数的加法定理 (addition theorems) 是:

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2)=$$

$$=\frac{\operatorname{sn} u_1\cdot\operatorname{cn} u_2\cdot\operatorname{dn} u_2+\operatorname{sn} u_2\cdot\operatorname{cn} u_1\cdot\operatorname{dn} u_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u_1\cdot\operatorname{sn}^2 u_2},$$

$$\operatorname{cn}(u_1+u_2)=$$

$$=\frac{\operatorname{cn} u_1\cdot\operatorname{cn} u_2-\operatorname{sn} u_1\cdot\operatorname{dn} u_1\cdot\operatorname{sn} u_2\cdot\operatorname{dn} u_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u_1\cdot\operatorname{sn}^2 u_2},$$

$$\operatorname{dn}(u_1+u_2)=$$

$$=\frac{\operatorname{dn} u_1\cdot\operatorname{dn} u_2-k^2\operatorname{sn} u_1\cdot\operatorname{cn} u_1\cdot\operatorname{sn} u_2\cdot\operatorname{cn} u_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u_1\cdot\operatorname{sn}^2 u_2}.$$

Jacobi 椭圆函数与椭圆积分之间的联系如下. 如果

$$u=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^\varphi \frac{ds}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s}}$$

是 Legendre 正规形式的第一类椭圆积分, 则它的反函数是 $z=\operatorname{sn}u$; 这构成了 Jacobi 理论的出发点. 变量 $\varphi=\operatorname{am}u$ 是变量 u 的无穷多值函数, 且称为椭圆积分 u 的振幅 (amplitude of the elliptic integral),

$$\operatorname{cn}u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2u}=\cos\operatorname{am}u,$$

$$\operatorname{dn}u=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2u}=\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u}.$$

这些常数之间的主要关系是:

$$K=K(k)=\frac{1}{2}\pi\theta_3^2(0;\tau),\ K'=K(k'),$$

$$\tau K=iK',\ k=\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)},\ k'=\frac{\theta_0^2(0)}{\theta_3^2(0)}.$$

在应用问题中模 k 通常是已知的, 且正规情况 $0<k<1$ 常常成立, 或补模 $k'=(1-k^2)^{1/2}$ $(0<k<1)$ 已给出. 需要找 K, K', 和 τ 或 $q=e^{i\pi\tau}$. 令 $2\varepsilon=(1-\sqrt{k'})/(1+\sqrt{k'})$, 其中 $0<k<1$, 则有 $0<\varepsilon<1/2$, 为了求 q, 用以下级数

$$q=e^{i\pi\tau}=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+O(\varepsilon^{17}),$$

如果 $0<\varepsilon<1/2$, 它很快收敛. 完全椭圆积分的数 K 和 K' 由公式

$$K=\frac{1}{2}\pi\theta_3^2(0;\tau)=\frac{\pi}{2}\left\{1+2\sum_{m=1}^{\infty}q^{m^2}\right\},$$

$$K'=\frac{1}{\pi}K\ln\frac{1}{q},$$

决定, 或由表中找到.

当 $k=0$ 或 $k=1$ 时, Jacobi 椭圆函数分别地退化成三角函数或双曲函数:

$$\operatorname{sn}(u;0)=\sin u,\ \operatorname{cn}(u;0)=\cos u,$$
$$\operatorname{dn}(u;0)=1;\ \operatorname{sn}(u;1)=\tanh u,$$
$$\operatorname{cn}(u;1)=\operatorname{dn}(u;1)=\frac{1}{\cosh u}.$$

理论上, 椭圆函数理论的更简单的构造由 Weierstrass 给出 (1862 - 1863) (见 **Weierstrass 椭圆函数** (Weierstrass elliptic functions)). 对给定的 $k(0<k<1)$, Weierstrass 不变量 e_1, e_2, e_3, 例如, 由公式: $e_1=(2-k^2)/3$, $e_2=(2k^2-1)/3$, $e_3=-(1+k^2)/3$ 求得, 从而 $g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)$ 和 $g_3=4e_1e_2e_3$ 可以找到. 半周期由 $w_1=K/(e_1-e_3)^{1/2}$ 和 $w_3=iK'/(e_1-e_3)^{1/2}$ 确定; 这些结果使得可以计算与 Weierstrass 椭圆函数有关的所有其余的量.

参考文献

[1A] Jacobi, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Königsberg, 1829.

[1B] Jacobi, C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, in Gesammelte Werke, Vol. 1, Chelsea, reprint, 1969, 49 - 239.

[2] Ахиезер, Н. И., Элементы теории Эллиптических функций, 2 изд., М., 1970.

[3] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964, Chapt. 8.

[4] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[5] Enneper, A., Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte, Halle, 1890.

[6] Tannery, J. and Molk, J., Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, 1-2, Chelsea, reprint, 1972.

[7] Журавский, А. М., Справочник по эллиптическим функциям, М.-Л., 1941.

[8] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mumford, D., Tata lectures on Theta, 1-2, Birkhaüser, 1983 - 1984.

[A2] Weil, A., Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, 1976.

[A3] Bowman, F., Introduction to elliptic functions with applications, Dover, reprint, 1961.

[A4] Igusa, J.-I., Theta functions, Springer, 1972.

[A5] Hancock, H., Theory of elliptic functions, Dover, reprint, 1958.

葛显良 译

Jacobi 方程 [Jacobi equation; Якоби уравнение]

一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Axy+By^2+ax+by+c}{Ax^2+Bxy+\alpha x+\beta y+\gamma},$$

或者较对称的形式

$$(a_1x+b_1y+c_1)(xdy-ydx)+$$
$$+(a_2x+b_2y+c_2)dx-(a_3x+b_3y+c_3)dy=0,$$

其中一切系数都是常数. 这个方程是 **Darboux 方程** (Darboux equation) 的特殊情况, 由 C. G. J. Jacobi ([1]) 首先进行研究. Jacobi 方程总可以用下述算法积分为封闭形式. 首先通过直接代换至少求出一个线性特解

$$y=px+q.$$

然后进行变量变换

$$\xi = \frac{x}{px - y + q}, \eta = \frac{y}{px - y + q},$$

结果得到一个可约化为齐次方程的方程.

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., De integratione aequationis differentialis $(A + A'x + A''y)(x\partial y - y\partial x) - (B + B'x + B''y)\partial y + (c + c'x + c''y)\partial x = 0$, *J. Reine Angew. Math.*, **24** (1842), 1–4.

[2] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959 (中译本: В. В. 史捷班诺夫, 微分方程教程, 高等教育出版社, 1955).

[3] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, reprint, 1947 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1947).

H. X. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

张鸿林 译

Jacobi 反演问题 [Jacobi inversion problem; Якоби проблема обращения]

任意代数函数域 (见**代数函数** (algebraic function)) 的第一类 **Abel 积分** (Abelian integral) 的反演问题. 也就是对应于已给代数方程 $F(z, w) = 0$ 的亏格 $p \geqslant 1$ 的紧 **Riemann 曲面** (Riemann surface) F 上的第一类 Abel 积分的反演问题.

设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 是 F上第一类 **Abel 微分** (Abelian differential) 的基. 一个单独的 Abel 积分, 例如$\int_{c_1}^{w_1} \varphi_1 \equiv u_1(w_1) = z_1$ 的反演, 就是把 w_1 的所有可能的有理函数, 特别是把 w_1, 表示成 z_1 的一个函数, 即 $w_1 = w_1(z_1)$. 这种反演仅当 $p = 1$ 时才有意义. 在这种情形, 人们讨论的是**椭圆积分的反演** (inversion of an elliptic integral), 而且导出了双周期**椭圆函数** (elliptic function). 举例来说, Legendre 标准形式下的第一类积分

$$u_1(w_1) = \int_0^{w_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = z_1$$

的反演导出了 **Jacobi 椭圆函数** (Jacobi elliptic function) $w_1 = \operatorname{sn} z_1$.

如同 C. G. J. Jacobi 已经观察到的 (1832), $p > 1$ 时的反演问题必须考虑所有第一类 Abel 积分$\int \varphi_1, \cdots, \int \varphi_p$的集合, 这是因为得到的是有 $2p$ 个周期的函数. 在 $p \geqslant 1$ 的一般情形里, 以下是 Jacobi 反演问题的合乎情理的表述: 设有方程组

$$\int_{c_1}^{w_1} \varphi_j + \cdots + \int_{c_p}^{w_p} \varphi_j = z_j, \ j = 1, \cdots, p, \qquad (1)$$

其中 $c_1, \cdots, c_p$ 是 F 的固定点, $w_1, \cdots, w_p$ 是 F上的变动点, $z = (z_1, \cdots, z_p)$ 是任意取定的复数. 要求确定方程组 (1) 在什么条件下可逆以及如何求逆, 也就是说把 $w_k(k = 1, \cdots, p)$ 的所有可能的对称有理函数表示成 $z = (z_1, \cdots, z_p)$ 的函数.

由于 (1) 里的 Abel 积分作为上限 w_k 的函数依赖于 F 上连接 c_k 和 w_k 的道路, 它们是多值的: 当道路改变时它们的改变量是周期的一个整线性组合. 因此实质上 (1) 是以微分 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 为模的同余方程式组. 通过解 Jacobi 反演问题后得到的 $z = (z_1, \cdots, z_p)$ 的函数的值当自变量增加微分 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 的周期的整线性组合后, 仍保持不变. 所以它们是有 $2p$ 个独立周期的特殊 **Abel 函数** (Abelian function).

在 $p = 1$ 的情形, 即对于**椭圆积分** (elliptic integral), 解反演问题得到的椭圆函数可以通过利用相对简单的单复变量 z 的 Jacobi θ 函数来构造, 而半纯椭圆函数可以用整 θ 函数的商来构造. 在解一般 Jacobi 反演问题时也有可能利用具有半整特征数 H 的 p 个复变量的一阶 **θ 函数** (theta-function) $\theta_H(z) = \theta_H(z_1, \cdots, z_p)$.

基本 Abel 微分 φ_j 的周期矩阵 W 具有如下形状:

$$W = \begin{bmatrix} \pi i & 0 & 0 & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \pi i & 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \pi i & a_{p1} & \cdots & a_{pp} \\ & & a_{jk} & = & a_{kj}, & & \end{bmatrix} \qquad (2)$$

周期之间的 Riemann 关系式 (见 **Abel 函数** (Abelian function)) 保证了利用 W 的元素构造的 θ 函数 $\theta_H(Z)$ 的级数表达式在 $\mathbf{C}^p$ 内的紧集上一致收敛. 通过利用零特征数的 θ 函数 $\theta(z) = \theta_0(z)$, 可以构造叠加

$$\Phi(w) = \theta(u(w) - z),$$

这里

$$u(w) = \left\{ u_1(w_1) = \int_{c_1}^{w_1} \varphi_1, \cdots, u_p(w_p) = \int_{c_p}^{w_p} \varphi_p \right\}$$

是 Abel 积分的向量, $w = (w_1, \cdots, w_p)$ 是 F 的点系. $\Phi(w)$ 称为 **Riemann θ 函数** (Riemann theta-function). 对于给定的数集 $z \in C^p$, 或者 $\Phi(w)$ 在 F 上有唯一的零点系 $\eta_1, \cdots, \eta_p$ (正常情形), 或者它恒等于零 (例外情形). 零点 $\eta_1, \cdots, \eta_p$ 给出了 Jacobi 反演问题的解. 使 $\Phi(w) \equiv 0$ 的例外点 z 在 C^p 内构成了较低维数的集合.

完全解决 Jacobi 反演问题的特殊 Abel 函数的明显表达式可以通过利用形如 $\theta_H(z)/\theta(z)$ 的 θ 函数的商来构造, 这里的公分母是零特征数的 θ 函数. 当自变量被加上周期时, θ 函数被乘上特殊的乘数. 对于 θ 函数的商, 经消去后, 仅有的非平凡乘数是 -1. 从而当自变量加上周期时, 商的平方保持不变, 这样就得到了有 $2p$ 个周期的 Abel 函数.

与 Jacobi 反演问题有密切关系的是以下的重要问题: 对于给定的 θ 函数组 $\theta_H(z)$, 它们具有共同的满足

收敛性条件的矩阵 W，构造相应的代数函数域以及相应的 Riemann 曲面．要使这个构造成为可能，W 的不同元素（共 $p(p+1)/2$ 个）必须满足 $(p-2)\cdot(p-3)/2$ 个附加条件．当 $p>3$ 时对这些条件的研究是非常困难的问题（见[1],[3],[4],[5]）．

参考文献

[1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.

[2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[3] Clebsch, A. and Gordan, P., Theorie der Abelschen Funktionen, Teubner, 1866.

[4] Conforto, F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer, 1956.

[5] Mumford, D., Structure of moduli spaces of curves and Abelian varieties, in Actes Congress internat, mathématiciens Nice, 1970, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 457-465.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Siegel, C. L., Topics in complex function theory, 2, Interscience, 1971.

[A2] Mumford, D., Tata lectures on Theta, 1, Birkhäuser, 1983.

陈志杰 译

Jacobi 矩阵 [Jacobi matrix; Якоби матрица]

具有实元素的方阵 $J=\|a_{i,k}\|$，对 $|i-k|>1$，有 $a_{i,k}=0$．若记 $a_{i,i}=a_i(i=1,\cdots,n)$、$a_{i,i+1}=b_i$，和 $a_{i+1,i}=c_i$ $(i=1,\cdots,n-1)$，则 Jacobi 矩阵有形式

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{array}\right\|.$$

Jacobi 矩阵 J 的任何**子式**（minor）都是 J 的某些主子式与 J 的某些元素的积．Jacobi 矩阵 J 是完全非负的（即它的所有子式是非负的），当且仅当它的所有主子式和所有元素 b_i 和 $c_i(i=1,\cdots,n-1)$ 都是非负的．若 $b_ic_i>0$，$i=1,\cdots,n-1$，则 J 的**特征多项式**（characteristic polynomial）的根是实的且相异的．

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Крейн, М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2 изд., М.-Л., 1950（英译本：Gantmakher, F. R. and Krein, M. G., Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems Dept. Commerce USA. Joint Publ. Service, 1961）.

Д. А. Супруненко 撰 杜小杨 译

Jacobi 法 [Jacobi method; Якоби метод]

1）用未知量的三角形变换把**二次型**（quadratic form）化简为标准型（也见**二次型的简化**（quadratic forms, reduction of））的一种方法；为 C. G. J. Jacobi 所建立（1834）（见[1]）．

设

$$f=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ki}x_iy_k$$

是域 P 上给定的**双线性型**（bilinear form）（不一定是对称的）．假定其矩阵 $A=(a_{kl})$ 满足条件

$$\Delta_k\neq 0,\ k=1,\cdots,n, \tag{1}$$

其中 Δ_k 是左上角 k 阶**子式**（minor），则 f 可写为

$$f=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_kv_k}{\Delta_{k-1}\Delta_k} \tag{2}$$

的形式（$\Delta_0=1$），其中 $u_1=\partial f/\partial y_1$，$v_1=\partial f/\partial x_1$，而对 $k=2,\cdots,n$，

$$\left.\begin{aligned} u_k&=\left\|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,k-1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,k-1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k\,k-1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_k} \end{array}\right\|, \\ v_k&=\left\|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k-1\,1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k-1\,2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{k-1\,k} & \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \end{array}\right\|. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

特别地，如果 A 是对称矩阵且满足（1），f 是以 A 为其系数矩阵的二次型，则 f 可通过未知量的变换：

$$u_k=\left\|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk-1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \end{array}\right\|,\ k=2,\cdots,n \tag{4}$$

和

$$u_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

化简为标准型

$$f=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k^2}{\Delta_{k-1}\Delta_k}, \Delta_0=1. \quad (5)$$

上述变换具有三角形矩阵，且可写成

$$u_k=\sum_{i=k}^{n}C_{ki}x_i, \quad (6)$$

其中 C_{ki} 是 A 的 $1, \cdots, k$ 行，$1, \cdots, k-1, i$ 列子式.

公式(2)-(7)称为 Jacobi 公式(Jacobi formulas).

当 f 的矩阵只满足条件

$$\Delta_i\neq 0, i=1, \cdots, r$$
$$\Delta_{r+1}=\cdots=\Delta_n=0$$

时(其中 r 是所给型的秩)，f 可通过未知量的三角形变换化简为标准型

$$f=\sum_{k=1}^{r}\frac{u_k^2}{\Delta_{k-1}\Delta_k} \quad (7)$$

(其中 $\Delta_0=1$). 这一化简可用 **Gauss 法**(Gauss method)实现(见[1]). 特别是，如果 $P=\mathbf{R}$，则 f 的正惯性指数等于数列

$$1, \Delta_1, \cdots, \Delta_r$$

中保持符号数，而 f 的负惯性指数则等于该数列中改变符号数.

亦见**惯性律**(law of inertia).

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966(中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵论，上下册，高等教育出版社，1955).

И. В. Проскуряков 撰

2) 对于解线性代数方程，Jacobi 法是一种单步迭代法(见**单迭代法**(simple iteration method))，即对于方程 $Ax=b$，可以通过下述法则实现它到形状 $x=Bx+g$ 的预备变换:

$$B=E-D^{-1}A, g=D_{-1}b, D=(d_{ij}),$$
$$d_{ii}=a_{ii}, i=1, \cdots, n; d_{ij}=0, i\neq j.$$

Г. Д. Ким 撰

【补注】 西方文献中还出现此迭代法的下列别名: Gauss-Jacobi 迭代(Gauss-Jacobi iteration)、点 Jacobi 迭代(point Jacobi iteration)、逐次代换法(method of successive substitutions)、同时置换法(method of simultaneous displacements). 此法已为 C. G. J. Jacobi 于 1845 年所使用(见[A3]). 如果矩阵 A 是不可约对角优势的，则此法对任一起始向量均收敛(见[A1]). 由于新的计算机体系结构诸如向量计算机、并行计算机的引进，Jacobi 法重新引起人们的兴趣，因为它能特别好地向量化和平行化. 对于稀疏矩阵方程的有关迭代方法的综述可在[A2]，[A4]，[A5]和[A6]中找到.

参考文献

[A1] Collatz, L., Ueber die konvergentzkriterien bei iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme, *Math. Z.*, **53** (1950), 149-161.

[A2] Hageman, L. A., Young, D. M., Applied iterative methods, Acad. Press, 1981.

[A3] Jacobi, C. G. J., Ueber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadraten vorkommenden lineare Gleichungen, *Astr. Nachr.*, **22** (1845), no. 523, 297-306.

[A4] Ortéga, J. M., Numerical analysis, Acad. Press, 1972.

[A5] Varga, R. S., A comparison of the successive over-relaxation method and semi-iterative methods using Chebyshev polynomials, *Siam J. Appl. Math.*, **5** (1962), 39-47.

[A6] Young, D. M., Iterative solution of large linear systems, Acad. Press, 1971.

3) 对于解 **Hermite 矩阵**(Hermitian matrix)的本征值和本征向量系的完全问题，Jacobi 法是一种**旋转法**(rotation method).

Г. Д. Ким 撰

【补注】 Jacobi 法的收敛性已由 J. von Neumann 和 H. Goldstein 验证(见[A1]). 与旋转法有关的是 Householder 法(Householder method)和 Francis QR 法(Francis QR method)(见[A2]).

参考文献

[A1] Fröberg, C. E., Introduction to numerical analysis, theory and applications, Benjamin/Cummings, 1985.

[A2] Golub, G. H., Loan, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Acad., 1983.

沈永欢 译

Jacobi 多项式[Jacobi polynomials; Якоби многочлены]

区间[-1, 1]上以

$$h(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \alpha, \beta>-1,$$
$$x\in[-1, 1]$$

为权函数的**正交多项式**(orthogonal polynomials). 标准化 Jacobi 多项式由 **Rodrigues 公式**(Rodrigues formula)

$$P_n(x;\alpha,\beta)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\times$$
$$\times\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x^2)^n]$$

定义；标准正交 Jacobi 多项式具有以下形式:

$$\hat{P}_n(x;\alpha,\beta)=$$

$$= \sqrt{\frac{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}\, P_n(x;\alpha,\beta).$$

多项式 $P_n(x;\alpha,\beta)$ 满足微分方程

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+ \\ +n(n+\alpha+\beta+1)y=0.$$

当 $\alpha\geqslant -1/2$ 和 $\beta\geqslant -1/2$ 时，标准正交 Jacobi 多项式满足下面的加权估计：

$$(1-x)^{(2\alpha+1)/4}(1+x)^{(2\beta+1)/4}|\hat{P}_n(x;\alpha,\beta)|\leqslant c_1, \\ x\in[-1,1],$$

其中常数 c_1 不依赖于 n 和 x. 在点 $x=\pm 1$ 处，序列 $\{\hat{P}_n(x;\alpha,\beta)\}$ 分别以 $n^{\alpha+1/2}$, $n^{\beta+1/2}$ 的速率增长.

按 Jacobi 多项式的 Fourier 级数 (见 **Fourier 级数 (关于正交多项式的)** (Fourier series (in orthogonal polynomials))) 在区间 $(-1,1)$ 内类似于三角 Fourier 级数. 但在该区间端点的邻域内，Fourier-Jacobi 级数的标准正交性态却不同，因为在 $x=\pm 1$ 处标准正交 Jacobi 多项式无界地增长. 函数 f 的 Fourier-Jacobi 级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛，如果 f 在该区间上 p 次连续可微，且 $f^{(p)}\in \mathrm{Lip}\,\gamma$, γ 满足 $p+\gamma>q+1/2$, 其中

$$q=\max\{\alpha,\beta\}>-\frac{1}{2}.$$

在这些条件下，下述不等式成立：

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right|\leqslant \frac{c_2}{n^{p+\gamma}}n^{(2q+1)/2}, \\ x\in[-1,1];$$

其中的常数 c_2 不依赖于 n 和 x. 另一方面，当 $\alpha\geqslant -1/2$, $\beta\geqslant -1/2$ 时，f 的 Fourier-Jacobi 级数的余项满足下面的加权估计：

$$(1-x^2)^{1/4}\sqrt{h(x)}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x;\alpha,\beta)\right|\leqslant \\ \leqslant c_3E_n(f)\ln n,\ x\in[-1,1];$$

其中 $n\geqslant 2$, 常数 c_3 不依赖于 n 和 x, $E_n(f)$ 是连续函数 f 在 $[-1,1]$ 上用次数不超过 n 的多项式逼近时的最佳一致逼近误差 (见**最佳逼近** (best approximation)).

Jacobi 多项式是 C. G. J. Jacobi ([1]) 联系于**超几何方程** (hypergeometric equation) 的解引进的. Jacobi 多项式的特殊情形是：**Legendre 多项式** (Legendre polynomials) (此时 $\alpha=\beta=0$)；第一类 **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials) (此时 $\alpha=\beta=-1/2$)；第二类 Чебышев 多项式 (此时 $\alpha=\beta=1/2$)；**超球多项式** (ultraspherical polynomials) (此时 $\alpha=\beta$).

亦见**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials).

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, *J. Reine Angew. Math.*, **56** (1859), 149 – 165.

[2] Суетин, П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979.

П. К. Суетин 撰

【补注】 亦见 [A4], [A1] 以及 **Fourier 级数 (关于正交多项式的)** (Fourier series (in orthogonal polynomials)).

设 $\alpha,\beta>-1$, $-1<x,y<1$, 则存在具有正测度 $d\mu_{x,y}(z)=d\mu_{x,y}^{\alpha;\beta}(z)$ 的形如

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}\ \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(y)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}= \\ =\int_{-1}^{1}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}\,d\mu_{x,y}(z),\ n=0,1,\cdots$$

的乘积公式当且仅当 $\alpha\geqslant\beta$, 且或者 $\beta\geqslant -1/2$, 或者 $\alpha+\beta\geqslant 0$. 这个公式产生关于 Jacobi 级数的正卷积构造. 对于 $\alpha\geqslant\beta\geqslant -1/2$, 上式中的测度可从 Jacobi 多项式的加法公式明显地计算出来. 见 [A1], 第 4 讲.

至于对偶问题，有

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)= \\ =\sum_{k=|n-m|}^{n+m}C(k,m,n)P_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

此处若 $\alpha\geqslant\beta>-1$, $\alpha+\beta\geqslant -1$, 则有 $C(k,m,n)\geqslant 0$. 这个公式产生关于 Jacobi 级数的正对偶卷积构造. 见 [A1], 第 5 讲.

对 Jacobi 多项式可有多种不同的群论解释. 其中三种最重要的解释是：作为 SU(2) 不可约表示的矩阵元 (见 [A5], 第 3 章)；作为 $\mathbf{R}^{p+1}$ 中单位球面上的 $O(p)\times O(q)$ 不变**球面调和函数** (spherical harmonics) (见 [A2])；作为秩为 1 的紧对称空间上的球带函数 (见 [A3], 第 5 章 § 4.3).

参考文献

[A1] Askey, R., Orthogonal polynomials and special functions, Reg. Conf. Ser. Appl. Math., 21, SIAM, 1975.

[A2] Braaksma, B. L. J., Meulenbeld, B., Jacobi polynomials as spherical harmonics, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **71** (1968), 384 – 389.

[A3] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

[A4] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.
[A5] Виленкин, Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965 (英译本: Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group representations, Amer. Math. Soc., 1968).
沈永欢 译

Jacobi 原理 [Jacobi principle; Якоби принцип]，稳定作用量原理 (principle of stationary action)

由 C. G. J. Jacobi ([1]) 对完整保守系统建立的力学中的一个积分变分原理. 按照 Jacobi 原理，如果一个完整保守系统的初始位置 P_0 和最终位置 P_1 已给定，则对实在运动 Jacobi 作用量

$$S=\int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(U+h)}\;ds,\; ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,dq_i\,dq_j$$

与 P_0 和 P_1 间的与实在运动有同样能量常值 h 的所有其余无限接近运动相比较，有一稳定值. 这里 $U(q_1,\cdots,q_n)$ 是系统上作用力的力函数，而 q_i 是系统的广义 Lagrange 坐标，其动能是

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\;\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}.$$

Jacobi 证明了 (见[1]) 如果 P_0 和 P_1 彼此充分接近，则对实在运动作用量 S 有一个极小值. Jacobi 原理把决定完整保守系统的实在轨道的问题化成具有度量

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,dq_i\,dq_j$$

的 Riemann 空间中求变分问题的极值曲线的几何问题.

亦见**经典力学的变分原理** (variational principle of classical mechanics).

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., Vorlesungen über Dynamik, G. Reimer, 1884.
В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文).
葛显良 译 鲁世杰 校

Jacobi 符号 [Jacobi symbol; Якоби символ]

$$\left[\frac{a}{P}\right]$$

对于与给定的奇数 $P>1$ 互素的一切整数 a 按下述方式定义的函数: 设 $P=p_1\cdots p_r$ 是 P 的素因子 (不必不同) 展开式，则有

$$\left[\frac{a}{p}\right]=\left[\frac{a}{p_1}\right]\cdots\left[\frac{a}{p_r}\right],$$

其中

$$\left[\frac{a}{p_i}\right]$$

是 **Legendre 符号** (Legendre symbol).

Jacobi 符号是 Legendre 符号的推广，并且具有类似的性质. 特别是，互反律

$$\left[\frac{P}{Q}\right]\left[\frac{Q}{P}\right]=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}$$

成立，其中 P 和 Q 是互素的正奇数，并且两个补充公式

$$\left[\frac{-1}{P}\right]=(-1)^{(P-1)/2},\left[\frac{2}{P}\right]=(-1)^{(P^2-1)/8}$$

也成立.

Jacobi 符号是 C. G. J. Jacobi 引入的 (1837).

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke, 1-7, Reimer, 1881 - 1891.
[2] Dirichlet, P. G., Vorlesungen über Zahlentheorie, Vieweg, 1894.
[3] Bachmann, P., Niedere Zahlentheorie, 1-2, Teubner, 1902 - 1910.
С. А. Степанов 撰

【补注】 作为 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ 上的函数，Jacobi 符号是实特征标 (real character) 的一个例子. 实特征标在有理素数在**二次域** (quadratic field) 中的分解中起着重要的作用 (见[A1]).

参考文献

[A1] Zagier, D. B., Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer, 1981.
张鸿林 译

Jacobi 变换 [Jacobi transform; Якоби преобразование]

积分变换

$$J\{F(x)\}=f^{(\alpha,\beta)}(n)=\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)F(x)\,dx,$$

$$n=0,1,\cdots,$$

其中 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 是 n 次 **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials), $\alpha>-1$ 和 $\beta>-1$ 都是实数. 反演公式具有下列形式:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)f^{(\alpha,\beta)}(n),$$

$$-1<x<1,$$

$$\delta_n=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

如果级数收敛.

Jacobi 变换把运算

$$T[F(x)]=\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dF}{dx}+[(\alpha-\beta)+\right.$$

$$+(\alpha+\beta)x]\frac{dF}{dx}\Bigg\}$$

按公式

$$J\{T[F(x)]\}=-(n+1)(n+\alpha+\beta)f^{(\alpha,\beta)}(n)+$$

$$+\{[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)F(x)\}\Big|_{-1}^{1}.$$

化为代数运算．当 $\alpha=\beta=0$ 时，Jacobi 变换即 **Legendre 变换** (Legendre transform)；当 $\alpha=\beta=\gamma-1/2$ 时，它是 **Gegenbauer 变换** (Gegenbauer transform). Jacobi 变换可用来解含算子 T 的微分方程．对于特殊的一类广义函数也可定义 Jacobi 变换．

参考文献

[1] Scott, E. J., Jacobi transforms, *Quart. J. Math.*, **4** (1953), 13, 36 – 40.

[2] Ditkin, V. A. and Prundnikov, A. P., Integral transforms, *Progress in Math.*, 1969, 1 – 85.

[3] Zemanian, A. G., Generalized integral transformations, Interscience, 1968.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 见 **Gegenbauer 变换** (Gegenbauer transform) 的"补注". Jacobi 变换通常写为

$$\int_{-1}^{+1}F(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

它推广了 Gegenbauer 变换中给出的表达式．

张鸿林 译

Jacobi 簇 [**Jacobi variety** 或 Jacobian; **Якоби многообразие, якобиан**], 代数曲线 S 的

由这条曲线构造的主极化 **Abel 簇** (Abelian variety) (亦见**极化代数簇** (polarized algebraic variety)) $(J(S),\Theta)$. 有时候 Jacobi 簇只是被看作一个交换**代数群** (algebraic group). 如果 S 是域 $\mathbf{C}$ 上亏格 g 的光滑射影曲线，或用经典的术语说，是亏格 g 的紧 **Riemann 曲面** (Riemann surface)，则全纯 1 形式在 S 的 1 闭链上的积分定义了一个嵌入

$$H_1(S,\mathbf{Z})\to H^0(S,\Omega_S)^*,$$

它的象是具有极大秩的格 (这里 Ω_S 表示 S 上全纯 1 形式的丛)．曲线 S 的 Jacobi 簇是商簇

$$J(S)=H^0(S,\Omega_S)^*/H_1(S,\mathbf{Z}).$$

可以取

$$H^1(J(S),\mathbf{Z})\wedge H^1(J(S),\mathbf{Z})=$$
$$=H^2(J(S),\mathbf{Z})\subset H^2(J(S),\mathbf{C})$$

中的与 $H_1(S,\mathbf{Z})\cong H_1(J(S),\mathbf{Z})$ 上的相交形式相对应的上同调类 Θ 作为极化．这个极化是主极化，即 $\Theta^g=g!$. 作为 Jacobi 簇的更明显的定义，通常取 $H_1(S,\mathbf{Z})$ 的基 $\delta_1,\cdots,\delta_{2g}$ 以及 $H^0(S,\Omega_S)$ 的微分形式的基 $\omega_1,\cdots,\omega_g$. 它们确定了一个 $(g\times 2g)$ 矩阵 Ω── Riemann 曲面的**周期矩阵** (matrix of periods):

$$\Omega=\left[\int_{\delta_j}\omega_i\right],$$

这时，$J(S)=\mathbf{C}^g/\Lambda$，其中 Λ 是以 Ω 的列向量作为基的格．可以选取基 $\{\delta_j\}$ 及 $\{\omega_i\}$, 使得 $\Omega=\|E_gZ\|$; 这里的矩阵 $Z=X+iY$ 是对称的，并且 $Y>0$ (见 **Abel 微分** (Abelian differential)). 极化类可用微分形式 ω 来表示，在 $\mathbf{C}^g$ 的标准坐标 $(z_1,\cdots,z_g)$ 之下有

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{1\leqslant j,k\leqslant g}(Y^{-1})_{jk}dz_j\wedge d\bar{z}_k.$$

代替上同调类 Θ, 人们常常考虑与其对偶的有效**除子** (divisor), 这个除子仍记为 Θ, 并且在可差一个平移的意义下是唯一的．在几何上，这个除子 Θ 可用以下方式来描述．考虑由

$$\mu(S)=\left[\int_{s_0}^{s}\omega_1,\cdots,\int_{s_0}^{s}\omega_g\right]+\Lambda$$

所定义的 Abel 映射 $\mu:S\to J(S)$, 其中 $s_0\in S$ 是固定点．设 $S^{(d)}$ 是 S 的 d 次对称积，也就是簇 S^d 关于对称群的商簇 ($S^{(d)}$ 的点对应于 S 上的 d 次有效除子)．公式 $\mu(s_1,\cdots,s_d)=\mu(s_1)+\cdots+\mu(s_d)$ 定义了 Abel 映射到 $\mu:S^{(d)}\to J(S)$ 的扩张，这时 $\Theta=W_{g-1}=\mu(S^{(g-1)})$.

$S^{(g)}$ 里由 μ 定义的等价关系等同于除子的有理等价关系 (Abel 定理 (Abel theorem)). 此外，$\mu(S^{(g)})=J(S)$(Jacobi **反演定理** (Jacobi inversion theorem)).C.G. J. Jacobi ([1]) **研究了** $g=2$ 时的反演问题 (亦见 **Jacobi 反演问题** (Jacobi inversion problem)). 上面提到的定理确定了一个同构 $J(S)\cong\mathrm{Pic}^g(S)$, 这里 $\mathrm{Pic}^g(S)$ 是 **Picard 群** (Picard group) $\mathrm{Pic}(S)$ 的对应于 g 次除子的分支．用除子类 $-gs_0$ 相乘后可得出 Abel 簇的典范同构 $J(S)\cong\mathrm{Pic}^0(S)$.

在任意域上完全光滑曲线的情形，Jacobi 簇 $J(S)$ 被定义为 **Picard 簇** (Picard variety) $\mathrm{Pic}(S)$. Abel 映射 μ 把点 $s\in S$ 映到除子 $s-s_0$, 并且极化可用除子 $W_{g-1}=\mu(S^{(g-1)})$ 来定义．

Jacobi 簇在代数曲线理论中的意义可从 **Torelli 定理** (Torelli theorems) 中看出来：非奇异完全曲线被它的 Jacobi 簇 (考虑到极化) 唯一确定 (见 [5]). 从曲线到它的 Jacobi 簇的过渡使得人们有可能把曲线理论里的许多非线性问题线性化．例如，对 S 上特殊除子 (使得 $H^0(S,\mathcal{O}(K-D))>0$ 的有效除子 D) 的描述问题本质上可被翻译成 $J(S)$ 的特殊子簇 $W_d=\mu(S^{(d)})$ 的奇异性的语言．这个翻译是以关于奇点的 Riemann-Kempf 定理为基础的 (见 [1],[5]). 这个定理的推论之

一是：极化除子 $\Theta = W_{g-1}$ 的奇点的簇的余维数不超过 4．如果只考虑属于一条一般曲线的 Jacobi 簇的邻域里的主极化 Abel 簇，那么 Jacobi 簇的上述性质是一个特征性质．更确切地说，如果主极化 Abel 簇的极化除子的奇点簇的余维数 ≤ 4，且 A 不属于参模族的几个特异分支，则 $A \simeq J(S)$，S 是一条光滑曲线（见[2]）．

在 Abel 簇中区分 Jacobi 簇的另一个方法是在特点处确定 θ 函数与它们的导数的方程．寻找这些方程的问题被称为 Schottky 问题（Schottky problem）．

在奇异曲线的情形，Jacobi 簇 $J(S)$ 被看作 $\mathrm{Pic}(S)$ 的子群，由关于 S 的各个不可约分支的 0 次除子所确定（它与 $\mathrm{Pic}(S)$ 的恒等元的连通分支重合）．如果曲线 S 是由一个光滑模型 N 上的模 $\mathfrak{m}$ 所定义，则通常把 $J(S)$ 称为曲线 N（相对于 $\mathfrak{m}$）的广义 Jacobi 簇（generalized Jacobian），记为 $J_{\mathfrak{m}}$（见[6]）．

参考文献

[1A] Jacobi, C. G. J., Considerationes generales de transcendentibus abelianis, *J. Reine Angew. Math.*, **9** (1832), 349–403.

[1B] Jacobi, C. G. J., De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium abelianarum innititur, *J. Reine Angew. Math.*, **13** (1835), 55–78.

[2] Andreotti, A. and Mayer, A., On period relations for abelian integrals on algebraic curves, *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa*, **21** (1967), 189–238.

[3] Griffiths, P. A., An introduction to the theory of special divisors on algebraic curves, Amer. Math. Soc., 1980.

[4] Mumford, D., Curves and their Jacobians, Michigan Univ. Press, 1978.

[5] Griffiths, P. A. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[6] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps des classes, Hermann, 1959.

В. В. Шокуров 撰

【补注】 **Schottky 问题**（Schottky problem）已经解决．

所谓光滑曲线 N 上的模（module），就是一个有效除子，即 N 的一个有限点集 S，对于每个点 $P \in S$ 再指定一个正整数 v_P．给出一个模 $\mathfrak{m}$ 以及 N 上一个有理函数 g，如果对所有的 $P \in S$ 函数 $1-g$ 在 P 处的零点的阶都 $\geq v_P$，就记为 $g \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$．考察其支集不与 S 相交的除子 D．对于这些除子可以定义一个等价关系：$D_1 \sim_{\mathfrak{m}} D_2$ 如果存在有限函数 g 使得 $(g) = D_1 - D_2$ 且 $g \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ 的话．这个等价关系可用来定义广义 Jacobi 簇 $J_{\mathfrak{m}}$，详情可见[6]，第 V 章．一般地说，广义 Jacobi 簇不是完全的，它是 $J(N)$ 通过连通线性代数群的扩张．N 的函数域的任何 Abel 扩张都可通过广义 Jacobi 簇的**同源**（isogeny）而得到．这就是研究它们的主要理由（[6]）．

在任意域的情形，一条完全光滑曲线 S 的 Jacobi 簇 $J(S)$ 的构造首先是由 A. Weil 作为抽象代数簇而得到（见[A1]，[A2]），后来被周炜良作为射影簇而得出（[A3]）．

关于 θ 函数的奇点理论以及 Jorelli 定理，亦见[A4]．

参考文献

[A1] Weil, A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, 1971.

[A2] Lang, S., Abelian varieties, Springer, 1981.

[A3] Chow, W. L., The Jacobian variety of an algebraic curve, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 453–476.

[A4] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985.

陈志杰 译

Jacobi 向量场［**Jacobi vector field**; **Якоби поле**］

沿测地线（geodesic line）满足 **Jacobi 方程**（Jacobi equation）的向量场．

沈一兵 译

Jacobi 行列式［**Jacobian** 或 Jacobi determinant; **Якобиан**］

由一些函数的一阶偏导数组成的一种特殊形式的行列式．设 $x_i = \varphi_i(t_1, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 是一些给定的函数，它们具有对变量 $t_1, \cdots, t_m$ 的一阶偏导数．这些函数的 Jacobi 行列式是行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix},$$

它可以简单地记为

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)}{D(t_1, \cdots, t_m)}.$$

Jacobi 行列式的模表征从变量 $x_1, \cdots, x_m$ 到 $t_1, \cdots, t_m$ 的变换中体积元素的伸缩．由于 C. G. J. Jacobi 首先研究了这种行列式的性质和应用，从而得名．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1–2, М. 1971–1973（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1–2, Mir, 1982）.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., М., 1973.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2. изд., т. 2, М. 1975（中译本：С. М. 尼科尔斯基，数学分析教程，第二卷，高等教育出版社，1992）.

【补注】 上述 Jacobi 行列式也可记为

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)}{\partial(t_1, \cdots, t_m)} \text{ 或 } \frac{\partial(x_1, \cdots, x_m)}{\partial(t_1, \cdots, t_m)}.$$

位置 (i, j)（第 i 行、第 j 列）处的元素是 $\partial \varphi_i / \partial t_j$．

具有这些元素的矩阵也称为 Jacobi 矩阵(Jacobian matrix)(不要同本书中的 **Jacobi 矩阵**(Jacobi matrix)混淆). 在反函数定理的叙述中, 以及在积分和微分形式的变量变换公式中, 都会用到 Jacobi 行列式.

参考文献

[A1] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin/Cummings, 1965(中译本: M. 斯皮瓦克, 流形上的微积分, 科学出版社, 1980).

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953(中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 高等教育出版社, 1979).

张鸿林 译

Jacobson 根 [Jacobson radical; Джекобсона радикал], 环 A 的

结合环 A 的 Jacobson 根 $J(A)$(见**结合环与代数**(associative rings and algebras))是 A 的满足下述两个条件的**理想**(ideal): 1) $J(A)$ 是 A 的最大拟正则理想(环 R 称为拟正则的(quasi-regular), 如果方程 $a+x+ax=0$ 对于 R 中的任一元素 a 均可解); 和 2) 商环 $\overline{A}=A/J(A)$ 不含非零拟正则理想. 该根由 N. Jacobson 在 1945 年引入并详细研究([1]).

Jacobson 根总是存在的且可由很多方法刻画: $J(A)$ 是环 A 的所有不可约表示的核的交; 它是所有模极大右理想(见**模理想**(modular ideal))的交; 它是所有模极大左理想的交; 它含所有拟正则单边理想; 它含所有单边诣零理想, 等等. 若 I 是 A 的一个理想, 则 $J(I)=I\cap J(A)$. 若 A_n 是 A 上 n 阶全矩阵环, 则

$$J(A_n)=(J(A))_n.$$

若在结合环 A 上引入下述 $\circ$ 合成,

$$a\circ b=a+b+ab,$$

则根 $J(A)$ 在**半群**(semi-group) $\langle A, \circ\rangle$ 中关于合成 $\circ$ 为一子群.

拟正则结合环(即与自己的 Jacobson 根重合的结合环)上无非零不可约有限生成模, 但存在单结合拟正则环. 结合环 A 的 Jacobson 根为零, 当且仅当 A 为**本原环**(primitive ring)的一个亚直和.

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

К. А. Жевлаков 撰

【补注】 Jacobson 根是右本原理想的交. 它也是左本原理想的交. 这可能是最常出现的定义. 模理想也称为正则理想(regular ideals). 若 A 有单位元, 则所有理想都是正则的, 在这种情况下, Jacobson 根 $J(A)$ 是所有极大右理想的交, 也是所有极大左理想的交. 中山引理(Nakayama lemma)宣称, 若 M 是有限生成非零右 A 模, 则 $M\neq MJ(A)$.

参考文献

[A1] McConnell, J.C. and Robson, J.C., Noncommutative Noetherian rings, Wiley, 1987.

[A2] Herstein, I. N., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

郭元春 译 牛凤文 校

Jacobson 环 [Jacobson ring; Джекобсона кольцо]

一个包有单位元的**交换环**(commutative ring), 其中任一**素理想**(prime ideal)是包有它的极大理想之交. 也就是说, 这环的任一整的商环其 **Jacobson 根**(Jacobson radical)都是零. 例如, 任一 **Artin 环**(Artinian ring), 任一整数环 (一般地, 任一非半局部的 **Dedekind 环**(Dedekind ring)) 或任一**绝对平坦环**(absolutely-flat ring)都是 Jacobson 环. 反之, 局部的非 Artin 环不是 Jacobson 环.

如果 A 是 Jacobson 环, B 是一个整 A 代数, 或一个有限型 A 代数, 则 B 将是 Jacobson 环. 特别地, Jacobson 环的商环是 Jacobson 环. 域 K 上有限变元的多项式环是 Jacobson 环, 如果变元个数是无限的, 答案将依赖于 K 的势与变元数之间的关系. 如果一环 A 的极大理想空间拟同胚于谱空间 Spec(A), 则 A 是 Jacobson 环. 这个定义导出 Jacobson 概形(Jacobson scheme)的概念.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

В. И. Данилов 撰

【补注】 更一般地, 一个(非交换)环 A 是 Jacobson 环, 如果每个素理想是本原理想的交, 或等价地, 如果每个素商环(prime factor ring) $A/\mathfrak{p}$ 的 Jacobson 根为零, 其中 $\mathfrak{p}$ 为素理想. 一个理想 $\mathfrak{q}\subset A$ 称为本原的(primitive), 如果商环 $A/\mathfrak{q}$ 是本原的.

设 A 是域 k 上代数, 如果 A 是 Jacobson 环, 环中每个本原理想有有限的余维数, 则有时称 A 为 Hillbert 代数(Hilbert algebra). 域上每个有限生成的多项式恒等代数(见 **PI 代数**(PI-algebra))是一个 Hilbert 代数, 上述定理是 Hilbert 零点定理在非交换情形中的推广(见[A1], 第五章). 这个 **Hilbert 代数**(Hilbert algebra)的概念不可以与 Hilbert 代数一文中引入的 Hilbert 代数混淆, 后者所指的是带有对合及内积运算并满足某些性质的一种代数.

参考文献

[A1] Procesu, C., Rings with polynomial identities, M. Dekker, 1973.

[A2] McConnell, J.C. and Robson, J.C., Noncommutative Noetherian rings, Wiley, 1987.

冯绪宁 译

Janet 定理 [Janet theorem; Жане теорема]

在每个 n 维解析 **Riemann** 流形（Riemannian manifold）中，任何选定点都存在一个邻域，它可等距嵌入到 $s_n = n(n+1)/2$ 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{s_n}$ 中．若 $\mathbf{R}^{s_n}$ 用具有指定点（原流形中所选点必须映在其上）的任何 s_n 维解析 Riemann 流形来代替，则 Janet 定理仍真．在伪 Riemann 流形的场合，假如

$$q \geqslant s_n,\ q_+ \geqslant n_+,\ q_- \geqslant n_-,$$

其中 n_+ 和 $n_- = n - n_+$ 是原流形上度量张量的正和负部分的维数，q_+ 和 $q_- = q - q_+$ 是靶流形的相应维数，那么，Janet 定理仍成立（见[3]）．Janet 定理是 Riemann 几何学中第一个一般性的嵌入定理（见**等距浸入**（isometric immersion））．

Janet 定理最先是作为 L．Schläfli 猜想（[1]）出现的，后被 M．Janet 所证明（[2]）．

参考文献

[1] Schläfli，L．，Nota alla Memoria del signor Beltrami Sugli spazi di curvatura costante，*Ann．Mat．Pura．Appl．，Ser*．2，5（1873），178 − 193．

[2] Janet，M．，Sur la possibilité de plonger un espace Riemannien donné dans un espace euclidien，*Ann．Soc．Polon．Math*．，5（1926），38 −43．

[3] Friedman，A．，Isometric imbedding of Riemannian manifolds into Euclidean spaces，*Rev．Modern Physics*，**77**（1965），201 − 203．

А．Б．Иванов 撰

【补注】

该定理也被 E．Cartan 所证明（[A1]）．一个沿着 Janet 的思路的严格证明由 C．Burstin 给出（[A2]）．亦见[A3]．

参考文献

[A1] Cartan，E．，Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidéen，*Ann．Soc．Polon．Math*．，**6**（1927），1 − 7．

[A2] Burstin，C．，*Mat．Sb*．，**38**（1931），74 − 93．

[A3] Spivak，M．，A comprehensive introduction to differential geometry，**5**，Publish or Perish，1975．

沈一兵 译

Jenkins 定理［**Jenkins theorem**；**Дженкинса теорема**］，一般系数定理（general coefficient theorem）

Riemann 曲面上区域族的单叶共形映射理论中的一个定理，包含有映射函数系数的一个不等式以及使该不等式成为等式的函数所满足的条件．Jenkins 定理是 Teichmüller 原理（Teichmüller principle）（叙述而无证明，[1]）的精确表述与推广，按照这一定理，对于单叶函数的一类极值问题的解由相应形式的二次微分所确定．此定理由 J．A．Jenkins 在 1954 年（[1]−[4]）得到．

Jenkins 定理的条件．设 $\mathscr{R}$ 是有限的定向 **Riemann 曲面**（Riemann surface），设 $Q(z)dz^2$ 是 $\mathscr{R}$ 上一个正的**二次微分**（quadratic differential）具有至少一个阶数 $\geqslant 2$ 的极点，并假定 $P_1, \cdots, P_r$ 是所有阶数为 2 的极点，$P_{r+1}, \cdots, P_p$ 是所有阶数高于 2 的极点．设 $\mathscr{R}$ 上处处稠密开集 Δ 是有限条轨线闭包和轨线弧闭包的并集的余集，并设 $P_j \in \Delta$，$j = 1, \cdots, p$．假设函数 $f_0(P)$ 把 Δ 单叶共形地映入 $\mathscr{R}$（见**共形映射**（conformal mapping）），并假定存在映射 $f_0(P)$ 到恒等映射 $f_1(P) \equiv P$ 的同伦

$$f_t(P):(\Delta \times [0,1]) \to \mathscr{R}$$

它保持来自 Δ 的所有极点不变，并且对每个极点 $R \in \mathscr{R}$，$t \in [0,1]$ 以及每个点 $P \neq R$，满足条件 $f_t(P) \neq R$．设 $z_j = z_j(P)$ 是关于极点 P_j 的一个局部参数使 $z_j(P_j) = \infty$，$j = 1, \cdots, p$．对于 $j = 1, \cdots, p$，在极点 P_j 的邻域内令

$$Q(z_j) = \begin{cases} \alpha^{(j)} z_j^{-2} + z_j^{-1} \text{ 的高次幂}, & \text{当 } j \leqslant r, \\ \alpha^{(j)}\left[z_j^{m_j-4} + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s^{(j)} z_j^{m_j-s-4}\right], & \text{当 } j > r; \end{cases}$$

$$f_0(z_j) = \begin{cases} \alpha^{(j)} z_j + z_j \text{ 的非正次幂}, & \text{当 } j \leqslant r, \\ z_j + \sum_{s=n_j}^{\infty} a_s^{(j)} z_j^{-s}, & \text{当 } j > r, \end{cases}$$

其中 n_j 是数 $(m_j - 3)/2$ 的整数部分．令

$$d(P_j) = \lim_{P \to P_j} \operatorname{Arg} z_j[f_t(P)]\Big|_{t=0}^{t=1}, \ j = 1, \cdots, p,$$

而对所有 $j > r$ 且 P_j 位于关于 $Q(z)dz^2$ 的一个带形域的边界上的情形令 $d(P_j) = 0$．最后，令

$$T_j = \alpha^{(j)}\left[a_{m_j-3}^{(j)} + \sum_{s=1}^{n_j} \beta_s^{(j)} a_{m_j-s-3}^{(j)}\right] + $$

$$+ \begin{cases} 0, & \text{对奇数 } m_j, \\ \alpha^{(j)}\left[\dfrac{m_j}{4} - 1\right]\left[a_{n_j}^{(j)}\right]^2, & \text{对偶数 } m_j. \end{cases}$$

Jenkins 定理的叙述．在上述条件下

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \ln a^{(j)} + \sum_{z=r+1}^{p} a^{(j)} T_j\right\} \leqslant 0, \qquad (*)$$

其中 $\ln a^{(j)} = \ln|a^{(j)}| - \mathrm{i}\,d(P_j)$，$j \leqslant r$．

等式情形的 Jenkins 定理．若（*）式中等号成立，则：a）在每个区域 $\Delta_l \subset \Delta$ 中映射 f_0 关于 Q 度量 $|d\zeta| = |Q(z)|^{1/2}|dz|$ 等距，Δ 中每条轨线 $Q(z).dz^2$ 被映射为轨线，且集合 $f_0(\Delta)$ 在 $\mathscr{R}$ 中处处稠密；b）对于 f_0 在某个区域 $\Delta_l \subset \Delta$ 内为恒等映射，下列附加条件之一成立是充分的：

1）Δ_l 包含一个 m_j 阶极点 P_j，$j > r$，使得对于

$s < \min(n_j+1, m_j-3)$, $a_s^{(j)}=0$;

2) Δ_l 包含一个极点 P_j, $j\leqslant r$, 且 $a^{(j)}=1$;

3) Δ_l 包含一条轨线上一点，该轨线以一单极点为端点.

若 (*) 是等式且 $|a^{(j)}|\neq 1$ 对某个 $j\leqslant r$ 成立，则 $\mathscr{R}$ 共形等价于球面，$Q(z)dz^2$ 无零点或单极点且 $r=p=2$. 此外，若 Δ 是区域，则映射 f_0 共形等价于一个线性映射，该线性映射的所有不动点都是极点的象点.

极值度量法 (extremal metric, method of the) 是 Jenkins 定理的证明基础，Jenkins 运用此方法（通过适当修改）得到一些其他结果，特别有所谓特殊系数定理 (special coefficient theorem) ([4]). 关于 Jenkins 定理的补充及发展，见 [5].

参考文献

[1] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

[2] Jenkins, J. A., An extension of the general coefficient theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 3, 387 – 407.

[3] Jenkins, J. A., The general coefficient theorem and certain applications, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 1, 1 – 9.

[4] Jenkins, J. A., Some area theorems and a special coefficient theorem, *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 1, 80 – 99.

[5] Тамразов, П. М., 《Матем. сб.》, **72** (1967), 1, 59 – 71.

П. М. Тамразов 撰 杨维奇 译

Jensen 公式 [Jensen formula; Иенсена формула]

阐明圆盘内**亚纯函数** (meromorphic function) 的值与它在圆周上的边界值以及它在圆盘内的零点和极点之间的联系的一个关系式. 设 $f(z)$ 是圆盘 $|z|\leqslant R$ 上的亚纯函数，a_μ ($|a_\mu|\leqslant R$) 和 b_ν ($|b_\nu|\leqslant R$) 分别是 $f(z)$ 的所有零点和极点，且每个零点和极点都按其重数列出. 如果 $f(0)\neq 0$，则下述 Jensen 公式成立:

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{|b_\nu|<R}\ln\frac{R}{|b_\nu|} - \sum_{|a_\mu|<R}\ln\frac{R}{|a_\mu|}, \qquad (1)$$

其中求和对 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<R$ 内的所有零点和极点进行；公式 (1) 由 J. L. Jensen 于 [1] 中建立. 为使 (1) 适应 $f(0)=0$ 的情形，要作些小的修正.

还有一个更一般的公式，R. Nevanlinna 把它称为 Poisson-Jensen 公式 (Poisson-Jensen formula)，它给出了 $\ln|f(z)|$ 在除零点和极点外的任一点 $z=re^{i\theta}$ 处的值:

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|P(z, Re^{i\varphi})d\varphi + \sum_{|b_\nu|<R}\ln\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu z}{R(z-b_\nu)}\right| - \sum_{|a_\mu|<R}\ln\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu z}{R(z-a_\mu)}\right|, \qquad (2)$$

其中

$$P(z, Re^{i\varphi}) = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}, \quad r<R.$$

公式 (2) 可看作关于圆盘的 **Poisson 积分** (Poisson integral) 的推广. 完全按同样方法推广关于圆盘的 **Schwarz 积分** (Schwarz integral)，就有 Schwarz-Jensen 公式 (Schwarz-Jensen formula):

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi + \sum_{|b_\nu|<R}\ln\frac{R^2-\bar{b}_\nu z}{R(z-b_\nu)} - \sum_{|a_\mu|<R}\ln\frac{R^2-\bar{a}_\mu z}{R(z-a_\mu)}, \quad r<R. \qquad (3)$$

也能对半平面和别的区域构造 (1) – (3) 类公式. 公式 (1) – (3) 在**值分布论** (value-distribution theory) 中起着重要作用.

M. M. Джрбашян 在其亚纯函数类的理论中得到了公式 (1) – (3) 的广泛推广 (见 [3]). 他成功地建立了依赖于某个连续参数 α ($-1<\alpha<+\infty$) 的整个一族这类公式，这里 α 与一个积分微分算子 D^α 相联系，而例如公式 (3) 则是 $\alpha=0$ 时的特殊情形.

可以如下地把公式 (1) 和 (2) 推广到 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n\geqslant 2$) 中球 $|x|\leqslant R$ 上的下调和函数 $u(x)$:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(R)}\int_{|y|=R}u(y)\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-y|^n}d\sigma(y) + \int_{|y|<R}G(x, y)d\mu(y), \qquad (4)$$

其中 $\sigma(R)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中球面 $|y|=R$ 的面积，$G(x, y)$ 是关于球 $|y|<R$ 以 x 为极点的 **Green 函数** (Green function)，μ 是与**下调和函数** (subharmonic function) $u(x)$ 相联系的正测度. (4) 的右端中第一项是 $u(x)$ 在球 $|x|\leqslant R$ 上的**最小调和强函数** (harmonic majorant)，它表示为边界值的 Poisson 积分的形式；第二项是 Green 位势，它在特殊情形下简化为出现于 (2) 中的 **Blaschke 积** (Blaschke product) 的模的对数. 考虑到对于亚纯函数 $f(z)$，$\ln|f(z)|$ 是两个下调和函数之差，就能从公式 (4) 得到公式 (2)；公式 (4) 可应用于这类能表示为两个下调和函数之差的函数.

现设 $f(z)$ 是多复变量 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ ($n\geqslant 1$) 在闭多圆柱

$$\overline{U}^n = \{z : |z_j| \leqslant R_j, j = 1, \cdots, n\}$$

上的全纯函数，此时起非常重要作用的还有 Jensen 不等式（Jensen inequality）：

$$\ln|f(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \int \ln|f(R_1 e^{i\varphi_1}, \cdots, R_n e^{i\varphi_n})| P_n(z, Re^{i\varphi}) dm_n(\varphi), \quad (5)$$

其中

$$P_n(z, Re^{i\varphi}) = P(z_1, R_1 e^{i\varphi_1}) \cdots P(z_n, R_n e^{i\varphi_n})$$

是关于 U^n 的 Poisson 核，m_n 是特异边界

$$T^n = \{z : |z_j| = R_j, j = 1, \cdots, n\}$$

上的正规化 **Haar 测度**(Haar measure)（$m_n(T^n) = 1$）. 此不等式可以容易地由多重下调和函数的性质推出（见**多重下调和函数**（plurisubharmonic function）），而对 $n = 1$ 它可直接由公式（2）推出.（见[5]，[6].）不等式（5）以及公式（2）的某些高维推广在现代高维值分布论中是有用的，见[7].

参考文献

[1] Jensen, J. L., Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions, *Acta Math*., **22** (1899), 359–364.

[2] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970（译自德文）.

[3] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

[4] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937.

[5] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964（英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966）.

[6] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[7] Griffiths, P., King, J., Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic manifolds, *Acta Math*., **130** (1973), 145 – 220.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于把 Jensen 公式推广到扇形以及它同正则增长函数及其零点分布的联系，见[A3]. 关于这一公式的高维形式及其应用，亦见[A1]，[A2]，[A4].

参考文献

[A1] Griffiths, P. A., Entire holomorphic mappings in one and several complex variables, Princeton Univ. Press, 1976.

[A2] Lelong, P., Gruman, L., Entire functions of several complex variables, Springer, 1986.

[A3] Левин, Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956（英译本：Levin, B. Ya., Distribution of zeros of entire functions, Amer. Math. Soc., 1980）.

[A4] Ронкин, Л. И., Введение в теорию целых функций многих переменных, М., 1971（英译本：Ronkin, L. I., Introduction to the theory of entire functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1974）.

[A5] Hayman, W. K., Kennedy, P. B., Subharmonic functions, Acad. Press, 1976.

沈永欢 译

Jensen 不等式 [**Jensen inequality; Иенсена неравенство**]，最简离散形式的

不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n), \quad (1)$$

其中 f 是 **R** 中某个集合 C 上的凸函数（见**凸函数（实变量的）**（convex function (of a real variable)）），$x_i \in C$，$\lambda_i \geqslant 0$，$i = 1, \cdots, n$，且

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 或 f 为线性函数时等号成立. 关于凸函数 f 的 Jensen 积分不等式（Jensen integral inequality）是：

$$f\left[\int_D \lambda(t) x(t) dt\right] \leqslant \int_D \lambda(t) f(x(t)) dt, \quad (2)$$

其中 $x(D) \subset C$，$\lambda(t) \geqslant 0 (t \in D)$ 且

$$\int_D \lambda(t) dt = 1.$$

当且仅当 $x(t)$ 在 D 上为常数或 f 在 $x(D)$ 上为线性函数时等号成立. 如果 f 是凹函数，则（1）与（2）中的不等号应反向. 不等式（1）为 O. Hölder([1]) 所建立，而（2）则为 J. L. Jensen([2]) 所建立.

适当选取凸函数 f 和权 λ_i 或权函数 λ，不等式（1）和（2）就变为一些具体的不等式，其中包括大部分经典不等式. 例如，如果在（1）中令 $f(x) = -\ln x$，$x > 0$，则得到加权**算术平均值**（arithmetic mean）与**几何平均值**（geometric mean）之间的不等式：

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n; \quad (3)$$

对于 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$，不等式（3）取如下形式：

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

参考文献

[1] Hölder, O., Ueber einen Mittelwertsatz, *Göttinger Nachr*., 1889, 38 – 47.

[2] Jensen, J. L., Sur les fonctions convexes et les inéqua-

lités entre les valeurs moyennes, *Acta Math*., **30** (1906), 175 - 193.

[3] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚, 不等式, 科学出版社, 1965). Е. К. Годунова 撰

【补注】 Jensen 不等式可推广到下述情形: μ 为集合 $D\subset\mathbf{R}$ 中一个 σ 代数 $\mathscr{A}$ 上的**概率测度**(probability measure), x 为 $L_1(\mu)$ 中的有界实值函数, f 为 x 的值域上的凸函数; 此时有

$$f\left(\int_D x\,d\mu\right)\leqslant\int_D(f\circ x)\,d\mu.$$

关于别的推广, 见[A2].

参考文献

[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, MacGraw-Hill, 1978(中译本: W. 卢丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1981).

[A2] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M., Means and their inequalities, Reidel, 1988, p. 27ff.

沈永欢 译

节[jet; струя]

一个可微函数 f 的(形式) **Taylor 级数**(Taylor series)截断后给出的多项式 $j^k f$. 更准确地说, 令 M 和 N 为 C^k 流形, $U\subset M$ 为开, $x\in U$, $f:U\to N$ 是 C^k 类映射, 则三元组(x,f,U)的等价类$[x,f,U]$称为由 M 到 N 的一个 k 阶节(k-jet), 等价性定义如下:

$$(x,f,u)\sim(x',f',u')$$

是指 $x=x'$, 而映射 f 与 f' 在 x 点关于一对坐标卡下的局部象之直到 k 阶(在内)的导数均相同. 节的空间 $J^k(M,N)$ 是一个 C^0 流形.

参考文献

[1] Bröcker, P. and Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, Cambridge Univ. Press, 1975.

[2] Golubitsky, M. and Guillemin, W., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973.

[3] Poston, T. and Stewart, I., Catastrophe theory and its applications, Pitman, 1978.

М. И. Войцеховский 撰 齐民友 译

Joachimsthal 曲面[Joachimsthal surface; Ёашимстал поверхность]

由中心位于一直线上的单参数球面族的正交轨线所构成的曲面. 若取此直线为 z 轴, 球面中心的 z 坐标以 u 表示, 球面的半径用 $R=R(u)$ 表示, 则 Joachimsthal 曲面的位置向量是

$$r=\left\{\frac{R\cos u}{\cosh\tau},\ \frac{R\sin u}{\cosh\tau},\ u+R\tanh\tau\right\},$$

其中

$$\tau=\int\frac{du}{R}+V.$$

Joachimsthal 曲面的一族曲率线($u=$常数)位于一束平面上. 这种曲面曾被 F. Joachimsthal ([1]) 所研究.

参考文献

[1] Joachimsthal, F., Demonstratio theorematum ad superficies curvas spectantium, *J. Reine Angew. Math*., **30** (1846), 347 - 350.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G., Leçons sur la theorie génerale des surfaces et ses applications géometriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887.

沈一兵 译

统联[join; соединение], 两个拓扑空间 X 和 Y 的拓扑空间 $X*Y$, 定义为乘积 $X\times Y\times[0,1]$ 对下述分解的商空间, 分解的元素为集合$\{x\}\times Y\times\{0\}$ $(x\in X)$, $X\times\{y\}\times\{1\}(y\in Y)$ 以及集合 $X\times Y\times[0,1]\setminus(X\times Y\times\{0\}\cup X\times Y\times\{1\})$ 中的各个点.

例. 若 X 由单个点组成, 则 $X*Y$ 是 Y 上的**锥**(cone). S^n*Y 同胚于 Y 上的 $(n+1)$ 重**纬垂**(suspension). 特别是 $S^n*S^m\approx S^{n+m+1}$. 统联运算满足交换律和结合律(至少在局部紧的 Hausdorff 空间范畴内). 为了计算统联的同调群(系数群是一个主理想整环), 可以利用与 **Künneth 公式**(Künneth formula)相似的结果:

$$\widetilde{H}_{r+1}(X*Y)\approx$$

$$\approx\sum_{i+j=r}\widetilde{H}_i(X)\otimes\widetilde{H}_j(Y)\oplus\sum_{i+j=r-1}\operatorname{Tor}(\widetilde{H}_i(X),\widetilde{H}_j(Y)).$$

r 连通空间与 s 连通空间的统联是 $(r+s+2)$ 连通空间. 统联运算是 Milnor 构造万有**主纤维丛**(principal fibre bundle)的基础. М. Ш. Фарбер 撰

【补注】 让 K 和 L 是(抽象)单纯复形, 其顶点集分别是$\{a^1,a^2,\cdots\}$和$\{b^1,b^2,\cdots\}$于是 K 和 L 的统联是单纯复形 $K*L$, 其顶点集是$\{a^1,a^2,\cdots\}\cup\{b^1,b^2,\cdots\}$, 其单形全是形如$\{a^{i_1},\cdots,a^{i_k}\}\cup\{b^{j_1},\cdots,b^{j_l}\}$的子集, 其中$\{a^{i_1},\cdots,a^{i_k}\}$是 K 的单形, $\{b^{j_1},\cdots,b^{j_l}\}$是 L 的单形. 若$|K|$表示单纯复形 K 的几何实现, 则 $|K*L|$ 是(同胚于)$|K|*|L|$.

参考文献

[A1] Lefschetz, S., Topology, Chelsea, reprint, 1965, Sect. 47 (Chapt. II §8).

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[A3] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, v. Nostrand Reinhold, 1970.

胡师度、白苏华 译

联合分布[joint distribution; совместное распределение]

定义在同一概率空间上的多个随机变量的分布．设 $X_1, \cdots, X_n$ 是定义在**概率空间**(probability space)$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 上并分别取值于**可测空间**(measurable space)$(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{B}_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的随机变量．这些随机变量的联合分布是集合 $B_1 \in \mathscr{B}_1, \cdots, B_n \in \mathscr{B}_n$ 的函数，定义作

$$P_{X_1, \cdots, X_n}(B_1, \cdots, B_n) = \mathrm{P}\{X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n\}.$$

与联合分布相联系，人们还论及联合分布函数(joint distribution function)和联合概率密度(joint probability density)．

如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是通常的实随机变量，则它们的联合分布是在 n 维 Euclid 空间(见**多维分布**(multi-dimensional distribution)) $\mathbf{R}^n$ 中随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布．如果 $X(t)(t \in T)$ 是一个随机过程，则对于 $t_1, \cdots, t_n \in T$，变量 $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ 的联合分布称之为随机过程 $X(t)$ 的有限维分布．(finite-dimensional distributions)．

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Billingsley, P., Probability and measure, Wiley, 1979.

[A2] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

刘秀芳 译

Jordan 代数[Jordan algebra; Йорданова алгебра]

一种满足恒等式

$$xy = yx, \quad (x^2y)x = x^2(yx)$$

的**代数**(algebra)．此类代数是由 P. Jordan 在研究量子力学的公理基础的文章([1])中首先提出的(亦见[2])，后来被应用于代数学、数学分析以及几何学．

设 A 是特征不为 2 的域上的结合代数(亦见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))．集合 A 以及加法运算和 Jordan 乘法(Jordan multiplication)运算

$$a \circ b = \frac{ab+ba}{2}$$

一起形成的代数 $A^{(+)}$，就是一个 Jordan 代数．对某一结合代数 A 而言，同构于 $A^{(+)}$ 的子代数的 Jordan 代数称为特殊的(special)．特殊代数在 Jordan 代数理论中的作用在很多方面类似于结合代数在交错代数理论中的作用(亦见**交错环和交换代数**(alternative rings and algebras))．由于这种相似，有下述存在定理：Jordan 代数的每个 2 生成子代数都是特殊的．(交错代数的每个 2 生成子代数都是结合的.) 然而，特殊 Jordan 代数类不是一个簇，即它不是由恒等式给定的，因为特殊 Jordan 代数可以有非特殊同态象．不过，已经发现为每个特殊 Jordan 代数所满足的 8 次和 9 次恒等式，但它们不为某些非特殊代数所满足，同时，也已经证明，这样的次数 ≤7 的恒等式不存在．一个代数为特殊的充要条件是：Jordan 代数是特殊的，当且仅当它能同构地嵌入到一个 Jordan 代数中，而后者的每一可数子集都含于一个由两元素生成的子代数．

例 1) 设 V 是带对称双线性型 $f(x, y)$ 的域 F 上的向量空间，而 $F \cdot e_0 + V$ 为比 V 高 1 维的空间，其乘法由

$$(\alpha e_0 + u)(\beta e_0 + v) = (\alpha\beta + f(u, v))e_0 + \alpha v + \beta u$$

确定 $(\alpha, \beta \in F, u, v \in V)$．这样得到的代数称为带对称双线性型 f 的代数．它可同构嵌入到代数 $C(V, f)^{(+)}$ 中，从而是特殊 Jordan 代数，其中 $C(V, f)$ 为 f 的 **Clifford 代数**(Clifford algebra)．

2) 设 A 是一个结合代数且 j 是它的一个对合(二阶的反自同构)．集合

$$H(A, j) = \{a \in A : a^j = a\}$$

是 $A^{(+)}$ 中的一个子代数，从而也是特殊 Jordan 代数．

3) 设 C 是域 F 上的一个交错非结合代数，带有对合 $c \mapsto \bar{c}$，其固定元素属于 C 的结合中心．在 C 上三阶矩阵代数 C_3 中，集合

$$H(C_3, \Gamma) = \{X \in C_3 : X = \Gamma^{-1}\overline{X}'\Gamma\}$$

在加法与 Jordan 乘法运算下是非特殊的 Jordan 代数，其中

$$\Gamma = \mathrm{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \ \gamma_i \neq 0, \ \gamma_i \in F.$$

该代数不是任何特殊代数的同态象．

特征不为 2 的代数闭域 F 上的有限维单 Jordan 代数已被完全分类(见[3])．中心单有限维 Jordan 代数分为五组．(A)组—(D)组是无限的，并由特殊代数组成，(E)组由一个单一的非特殊代数组成：

(A) $F_n^{(+)}$；

(B) $H(F_n, J_1)$，其中 $J_1: X \to X'$；

(C) $H(F_{2n}, J_S)$，其中 J_S: $X \to \overline{S}'X'S$，$S = \mathrm{diag}\{Q, \cdots, Q\}$，

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(D) $F \cdot e_0 + V$ —— 对称非退化双线性型代数；

(E) $H(C_3, J_1)$，其中 C 是带有标准对合的 **Cayley-Dickson 代数**(Cayley-Dickson algebra)．此代数在 F 上是 27 维的．

在每个有限维 Jordan 代数 J 中，根(最大诣零根) N 是对合的，而且商代数 $\bar{J}=J/N$ 是单 Jordan 代数的有限直和．如果 $\bar{J}$ 是可分的，则 J 可分解为根与半单子代数 W 的和 $J=N+W$，其中 W 同构于 $\bar{J}$．在特征为0时，所有半单项 W 都是关于一个特殊类型的自同构共轭的(见[3])．当特征 $p>0$ 时，如果在代数上附加某些限制，则上述结果亦成立．

有限维 Jordan 代数理论的一种推广是带二次(内)理想极小条件的 Jordan 代数理论(见[3],[4],[5])．代数 J 的一个二次理想(quadratic ideal) Q 是一个子空间，在该空间中对所有 $q\in Q$，$x\in J$，有 $\{qxq\}\in Q$，其中 $\{abc\}=(ab)c+(bc)a-(ca)b$ 是三重 Jordan 积．如果 J 是带二次理想极小条件的 Jordan 代数，R 是其二次根(见**环与代数的根**(radical of rings and algebras))，则商代数 J/R 是单代数的有限直和，这些单代数有别于带除法的 Jordan 代数，被另行描述．如果 J 是一个特殊代数，则已证明根 R 是幂零的且是有限维的．

满足非平凡(对特殊代数而言)恒等式的代数的特殊 Jordan 代数(亦见**代数的代数**(algebraic algebra))是局部有限维的；带有非平凡恒等式的特殊 Jordan **诣零代数**(nil algebra)是局部幂零的([6])．特别地，有界指数的特殊的代数的 Jordan(诣零)代数是局部有限维的(幂零的)．有限生成可解 Jordan 代数是幂零的；在一般情况下，对于特殊代数则不然．带幂零生成元的有限生成 Φ 模作为 Jordan Φ 算子环是幂零的([7])．

可通过各种途径将每一个 Jordan 代数与一个 **Lie 代数**(Lie algebra)联系起来(见[3],[8])．一些关于 Jordan 代数的定理是从 Lie 代数的已知定理得到的．例如，已经证明，特征为0的代数闭域上的半单有限维 Jordan 代数具有一个带整结构常数的基．就 Lie 代数理论而言，这个构造也是有用的，因为某些重要的 Lie 代数类可由它实现．例如，(E)型单(Lie)代数的导子 Lie 代数是例外单 Lie 代数 F_4，该代数的使某些三次型不变的线性变换代数是例外单 Lie 代数 E_6．所有 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 五种类型的例外 Lie 代数均可通过把二次交错代数和三次 Jordan 代数同某个 Lie 代数相联系的另一种构造来实现．

最后值得注意的是在遗传学中出现的某些代数是 Jordan 代数([10])．

参考文献

[1] Jordan, P., Ueber verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl.* 1, **41** (1933), 209－217.

[2] Emch, G.G., Algebraic methods in statistic mechanics and quantum field theory, Wiley, 1972.

[3] Jacobson, N., Structure and representations of Jordan algebras, Amer. Math. Soc., 1968.

[4] McCrimmon, K., The radical of a Jordan algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **62** (1969), 3, 671－678.

[5] Слинько, A. M., 《Алгебра и логика》, **11** (1972), 6, 711－724.

[6] Ширшов, А.И., 《Матем. сб.》, **41** (1957), 3, 381－394.

[7] Шестаков, И. П., 《Алгебра и логика》, **10** (1971), 4, 407－448.

[8] Schafer, R.D., An introduction to nonassociative algebras, Acad. Press, 1966.

[9] Gordon, S.R., An integral basis theorem for Jordan algebras, *J. of Algebra*, **24** (1973), 258－282.

[10] Schafer, R.D., Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 121－135.

[11] Koecher, M., An elementary approach to bounded symmetric domains, Rice Univ., 1969.

[12] Слинько, A. M. и др., Йордановы алгебры, в. 1, Новосиб., 1976.

A. M. Слинько 撰

【补注】 遗传学中的 Jordan 代数亦见**遗传代数**(genetic algebra)．

存在一个函子 Kan([A1])，称为 Kantor 函子(Kantor functor)，给出 Jordan 代数范畴与带下述性质的形如 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ 的 **Z** 分次 Lie 代数范畴之间的同构([A2])：

a) 如果 $a\in\mathfrak{g}_0$ 或 $\mathfrak{g}_1$ 且 $[a,\mathfrak{g}_{-1}]=0$，则 $a=0$；

b) $\mathfrak{g}_1$ 含一个元素 p，使得 $\mathfrak{g}_1=[\mathfrak{g}_0,p]+kp$，且 $[\mathfrak{g}_{-1},p]$ 生成子代数 $\mathfrak{g}_0$(k 是基础域)．

Kan^{-1} 的构造很简单：$\mathrm{Kan}^{-1}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}_{-1}$，乘法为 $a\cdot b=[[p,a],b]$．

此构造已被扩张到超代数情形且用于单有限维 Jordan 超代数的分类([A2])．

参考文献

[A1] Kantor, I.L., Classification of irreducible transitively differential groups, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 1404－1407 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **158** (1964), 5, 1271－1274).

[A2] Kac, V.G., Classification of simple **Z**-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. in Algebra*, **5** (1977), 13, 1375－1400.

[A3] Braun, H. and Koecher, M., Jordan-algebren, Springer, 1966.

[A4] Springer, T.A., Jordan algebras and algebraic groups, Springer, 1973.

郭元春 译 牛凤文 校

Jordan 弧[Jordan arc; Жорданова дуга]，简单弧(simple arc)

与实直线上的区间 [0, 1] 同胚的拓扑空间(亦见**同胚**(homeomorphism))．

A. A. Мальцев 撰 白苏华、胡师度 译

Jordan 准则 [**Jordan criterion**; **Жордана признак**], 关于 Fourier 级数收敛性的

如果以 2π 为周期的函数 f 在区间 $[a,b]$ 上具有有界变差，则 f 的 Fourier 级数在每一点 $x\in(a,b)$ 上收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$；此外，如果 f 在 $[a,b]$ 上是连续的，则 f 的 Fourier 级数在每个严格处于区间 $[a,b]$ 内的区间 $[a',b']$ 上一致收敛于 f. 这个准则是 C. Jordan 建立的([1])；它推广了关于分段单调函数的 Fourier 级数收敛性的 **Dirichlet 定理** (Dirichlet theorem).

参考文献

[1] Jordan, C., Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris*. **92** (1881), 228–230.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

Б. И. Голубов 撰

【补注】 Jordan 准则又称为 Dirichlet-Jordan 检验法 (Dirichlet-Jordan test).

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1–2, Cambridge Univ. Press, 1988.

张鸿林 译

Jordan 曲线 [**Jordan curve**; **Жордана кривая**]

圆周的同胚象(亦见**同胚**(homeomorphism)). 以给出此定义的 C. Jordan 命名. 亦见**线(曲线)**(line (curve)).

【补注】 亦称为简单闭曲线(simple closed curve).

白苏华、胡师度 译

Jordan 分解 [**Jordan decomposition**; **Жордана разложение**]

1) 囿变函数 f 的 Jordan 分解是将 f 表示为

$$f=f_1-f_2$$

的形式，这里 f_1, f_2 均为单调增函数. Jordan 分解也指将可测集 E 上的广义测度或**负荷**(Charge) $\mu(E)$ 表示为测度之差:

$$\mu(E)=\mu^+(E)-\mu^-(E),$$

其中要求两**测度**(measure) μ^+ 与 μ^- 中至少有一个为有限的. 由 C. Jordan 建立.

参考文献

[1] Jordan, C., Course d'analyse, 1, Gauthier-Villars, 1893.

[2] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

[3] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974 (中译本: 那唐松, 实变函数论, 第二版, 人民教育出版社, 1958).

М. И. Войцеховский 撰

2) 有限维向量空间的自同态 g 的 Jordan 分解是将 g 表示为可相互交换的半单自同态与幂零自同态之和: $g=g_s+g_n$. 自同态 g_s 与 g_n 分别称为 g 的 Jordan 分解的半单分量(semi-simple component)和幂零分量(nilpotent component). 此分解称为加法 Jordan 分解(additive Jordan decomposition). (半单自同态(semi-simple endomorphism)是指关于基本域的某一扩域有以固有向量为基底的一个自同态，而幂零自同态(nilpotent endomorphism)是指其某个幂为零同态的一个自同态). 如果在此空间的某个基底下，g 的矩阵 $\|a_{ij}\|$ 为 **Jordan 矩阵**(Jordan matrix)(即呈 Jordan 标准型的矩阵)，且 t 是这样的自同态，使以同样的基底 t 的矩阵 $\|b_{ij}\|$ 适合条件 $b_{ij}=0$ (对 $i\neq j$) 且 $b_{ii}=a_{ii}$ (对一切 i)，则

$$g=t+(g-t)$$

为 g 的 Jordan 分解，$g=g_s+g_n, g_s=t, g_n=g-t$.

Jordan 分解关于代数闭域 K 上向量空间 V 的任何自同态 g 是存在唯一的. 此外，$g_s=P(g)$ 与 $g_n=Q(g)$ 对于 K 上某两个常数项为零的多项式 P 与 Q (依赖于 g) 成立. 若 W 为 V 的 g 不变子空间，则 W 在 g_s 与 g_n 作用下不变，且

$$g|_W=g_s|_W+g_n|_W$$

为 $g|_W$ (这里 $|_W$ 表示在 W 上的限制) 的 Jordan 分解. 若 k 为 K 的子域且 g 为 k 上有理式(关于 V 上某个 k 结构)，则 g_s 与 g_n 未必是 k 上有理的；人们只能断定 g_s 与 g_n 是 $k^{p^{-\infty}}$ 上有理的，这里 p 为 k 的特征指数(对 $p=1$, $k^{p^{-\infty}}$ 为 k，而对 $p>1$，它是 K 中一切在 k 上纯不可分的元素的集，见**可分扩张**(separable extension)).

若 g 为 V 的自同构，则 g_s 也是 V 的自同构，且

$$g=g_sg_u=g_ug_s,$$

其中 $g_u=1_V+g_s^{-1}g_n$, 1_V 表示 V 的恒同自同构. 自同构 g_u 是幂幺的(unipotent)，亦即，它的一切固有值均等于一. 将 g 表成交换的半单与幂幺自同构的积的每个表现与上述表现 $g=g_sg_u=g_ug_s$ 相合. 此表现称为自同构 g 的乘法 Jordan 分解(multiplicative Jordan decomposition)，并且 g_s 与 g_u 分别称为 g 的半单与幂幺分量. 若 g 是 k 上有理的，则 g_s 与 g_u 均为 $k^{p^{-\infty}}$ 上有理的. 若 W 为 V 的 g 不变子空间，则 W 在 g_s 与 g_u 作用下不变，且

$$g|_W=g_s|_Wg_u|_W$$

为 $g|_W$ 的乘法 Jordan 分解.

Jordan 分解概念可以推广到无限维向量空间 V 的局部有限自同态上去，也就是使 V 由有限维 g 不变子空间生成的自同态 g. 对于这种 g 有一种表成交换局部有限半单与幂幺自同态的和 $g=g_s+g_n$ 的唯一分解（在自同构情形下，有将 g 表成积 g_sg_u 的唯一分解，相应地，g_s, g_u 为半单与幂幺自同构），这里所谓局部有限半单与幂幺自同态指的是使 V 的每个有限维 g 不变子空间 W 分别在 g_s 与 g_n（对应地，g_s 与 g_u）下不变的自同态（自同构），并且 $g|_W=g_s|_W+g_n|_W$（对应地，$g|_W=g_s|_Wg_u|_W$）为 $g|_W$ 的 Jordan 分解.

Jordan 分解概念的这种推广能使人们引进在代数群与代数中的 Jordan 分解概念. 设 G 为 K 上仿射代数群（见**仿射群**（affine group）），$\mathscr{G}$ 为它的 **Lie 代数**（Lie algebra），ρ 为 G 在代数 $K[G]$ 的自同构群上的表现，这里 $K[G]$ 是 G 上用右平移定义的正则函数的代数，并设 $d\rho$ 为 ρ 的微分. 对 G 中任一 g 与 $\mathscr{G}$ 中任一 X，向量空间 $K[G]$ 的自同态 $\rho(g)$ 与 $d\rho(X)$ 均为局部有限的，因此可以说及它们的 Jordan 分解

$$\rho(g)=\rho(g)_s\rho(g)_u \quad 与$$

$$d\rho(X)=d\rho(X)_s+d\rho(X)_n.$$

代数群论中的一个重要结果是刚才提到的 Jordan 分解可以分别用 G 与 $\mathscr{G}$ 中的元素来实现. 更确切地说，存在唯一的元素 g_s, $g_u\in G$ 与 X_s, $X_n\in\mathscr{G}$ 使

$$g=g_sg_u=g_ug_s, \tag{1}$$

$$X=X_s+X_n,\ [X_s,X_n]=0. \tag{2}$$

且

$$\rho(g_s)=\rho(g)_s,\ \rho(g_u)=\rho(g)_u,$$

$$d\rho(X_s)=(d\rho(X))_s,\ d\rho(X_n)=(d\rho(X))_n.$$

分解（1）称为代数群 G 中的 Jordan 分解，而（2）称为代数的 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 中的 Jordan 分解. 若 G 在 K 的子域 k 上定义且元素 $g\in G$（相应地，$X\in\mathscr{G}$）是 k 上有理的，则 g_s 与 g_u（相应地，X_s 与 X_n）均为 $k^{p^{-\infty}}$ 上有理的. 此外，若 G 是由某个有限维向量空间 V 的自同构所成的一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的闭子群（因此 $\mathscr{G}$ 便成为 $\mathrm{GL}(V)$ 的 Lie 代数的子代数），那么 $g\in G$ 的 Jordan 分解（1）与上述关于 g 的乘法分解相合，而 $X\in\mathscr{G}$ 的分解（2）与关于 X（看作 V 的自同态）的加法 Jordan 分解相合. 若 $\varphi: G_1\to G_2$ 为仿射代数群的有理同态，$d\varphi: \mathscr{G}_1\to\mathscr{G}_2$ 为其 Lie 代数的相应的同态，则对任意的 $g\in G_1$, $X\in\mathscr{G}_1$，有

$$\varphi(g_s)=\varphi(g)_s,\ \varphi(g_u)=\varphi(g)_u,$$

$$d\varphi(X_s)=(d\varphi(X))_s,\ d\varphi(X_n)=(d\varphi(X))_n.$$

在代数群与代数的 Lie 代数中的 Jordan 分解概念能使人们在任意仿射代数群（代数的 Lie 代数）中引进半单与幂幺（幂零）元. 元素 $g\in G$ 称为**半单的**（semi-simple），如果 $g=g_s$；称为**幂幺的**（unipotent），如果 $g=g_u$；元素 $X\in\mathscr{G}$ 称为**半单的**，如果 $X=X_s$；称为**幂零的**（nilpotent），如果 $X=X_n$. 若 G 在 k 上定义，则

$$G_u=\{g\in G: g=g_u\}$$

为 G 的 k 闭子集，而

$$\mathscr{G}_n=\{X\in\mathscr{G}: X=X_n\}$$

为 $\mathscr{G}$ 的 k 闭子集. 一般地，

$$G_s=\{g\in G: g=g_s\}$$

不是闭集，但若 G 是可换的，则 G_s 与 G_u 均为闭子群并且 $G=G_s\times G_u$. 在任意仿射代数群中，集 G_s 与 G_u 均为在内自同构下不变的，并且将这两个集合分解为共轭元的类的研究是特殊领域的课题（[3]）.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Kolchin, E. R., Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 1 - 42.

[3] Borel, A., Carter, R., Curtis, C. W., Iwahori, N., Springer, T. A. and Steinberg, R. (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture notes in math., **131**, Springer, 1970.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Steinberg, R., Conjugacy classes in algebraic groups, Springer, 1974.

郑维行 译 沈祖和 校

Jordan-Hölder 定理 [Jordan-Hölder theorem; Жордана-Гёльдера теорема]

若某个群有**合成序列**（composition sequence），则它的任意两个合成序列同构. C. Jordan（[1]，[2]）和 O. Hölder（[3]）研究置换群并与用根式解方程的可解性问题相联系（见 **Galois 理论**（Galois theory））. Jordan 对这种群引进了合成序列和**主系列**（principal series）并证明了同类型的两个列的指数（即子群 G_i 在 G_{i+1} 中的指数）相同，除了次序可以不同. 换句话说证明了，两个合成（主）列的因子的阶的序列，除了差一个置换，是相同的. Hölder 证明了对应的因子同构. O. Schreier（[4]）证明了更强的断言：任何群的两个正规列有同构的加细（Schreier 定理（Schreier theorem））. 对于带算子的群的 Jordan-Hölder 定理也已得到证明（E. Noether, W. Krull）. 因此类似的定

理对不变序列和全不变序列成立．

Jordan-Hölder 定理后来在下列方向有推广：1）对无限正规系特别是对全序正规列和合成列得到 Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理的推广；还证明了，具有单因子的所有正规升列是同构的（这些列不一定是合成列）（见[5]）．2）Jordan-Hölder 定理被推广到环和其他代数结构中．这些方向被 Ω 群（多重算子群），Ω 代数及具有单元子代数和可换同余的泛代数的一系列结果统一起来（见[6]－[8]）．3）已经用格论语言和偏序集语言来考虑用不同的方法将 Jordan-Hölder 定理推广．对 Dedekind 格的元的链已得到 Schreier 定理的一个推广．为定义格中的元的正规列，在一组文章中对正规性和乘法运算引进了附加的关系（见[6]，[9]－[11]）．4）对正规范畴（见[8]）获得了 Schreier 定理和 Jordan-Hölder 定理的推广．

参考文献

[1] Jordan, C., Thèoreme, sur les èquations algèbriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **68** (1869), 257－258.

[2] Jordan, C., Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, 1870.

[3] Hölder, O., Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.*, **34** (1889), 26－56.

[4] Schreier, O., Uber den Jordan-Holderschen Satz, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 3－4, 300－302.

[5] Курош, А. Г., Теории групп, 3 изд., М., 1967（中译本：A. Г. 库洛什，群论，上、下，高等教育出版社，1987，1982）.

[6] Birkhoff, G., Lattice theory, Collog. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[7] Cohn, P. M., Universal algebra, Riedel, 1981.

[8] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

[9] Итоги науки. Алгебра. 1964 (1966), 237－274.

[10] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966(1968), 109－136; 1968(1970), 101－154.

[11] Фофанова, Т. С., в сб., Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1974, 99－108.

И. В. Стеллецкий 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hall, M., The theory of groups, Chelsea, reprint, 1976（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1982）.

【译注】

[B1] 徐明曜，有限群导引（上），科学出版社，1987.

石生明 译　许以超 校

Jordan 引理[Jordan lemma; Жордана лемма]

设 $f(z)$ 是复变量 z 在 $|z|>c\geqslant 0$, $\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$ 中除一个离散奇点集外的正则**解析函数**（analytic function），如果存在半圆序列

$$\gamma(R_n)=\{z:|z|=R_n,\ \mathrm{Im}\,z\geqslant 0\},\ R_n\uparrow+\infty,$$

使当 $n\to\infty$ 时 $\gamma(R_n)$ 上的最大模 $M(R_n)=\max|f(z)|$ 趋于零，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma(R_n)}e^{iaz}f(z)dz=0,$$

其中 a 是任一正数．Jordan 引理不仅可在 $zf(z)\to 0$ 的条件下，而且可在上半或下半平面的一个半圆序列上一致地有 $f(z)\to 0$ 的条件下用于残数演算；例如，用于计算形如

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos ax\,dx,\quad\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin ax\,dx$$

的积分．此引理为 C. Jordan 所建立（[1]）．

参考文献

[1] Jordan, C., Cours d'analyse, 2, Gauthier-Villars, 1894, pp. 285－286.

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

[3] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 6.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mitrinović, D. S., Kečkić, J. D., The Cauchy method of residues, Reidel, 1984.

沈永欢 译

Jordan 矩阵[Jordan matrix; Жорданова матрица]

具有如下形式的域 k 上方的分块对角矩阵 J

$$J=\left\|\begin{matrix}J_{n_1}(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_s}(\lambda_s)\end{matrix}\right\|,$$

其中，$J_m(\lambda)$ 是有下列形式的 m 阶方阵

$$J_m(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots\\ 0 & & & \lambda\ \ 1\\ & & & \lambda\end{matrix}\right\|,$$

$\lambda\in k$．矩阵 $J_m(\lambda)$ 称为含本征值 λ 的 m 阶 Jordan 块（Jordan block）．每一块由一个**初等因子**（elementary divisor）确定，见[5]．

对代数闭域 k 上任意方阵 A，总存在 k 上方的非奇异的矩阵 C 使得 $C^{-1}AC$ 是 Jordan 矩阵（换言之，A 在 k 上相似（similar）于一个 Jordan 矩阵）．这个结论在关于 k 的较弱限制下也正确：矩阵 A 相似于一个 Jordan 矩阵的必要充分条件是 k 包含 A 的极小多项式的所有根．前面提及的矩阵 $C^{-1}AC$ 称为矩阵 A 的 Jordan 形

式(Jordan form)(或 Jordan 正规形式(Jordan normal form)). C. Jordan([1])是首先考虑这种正规形式的数学家之一(关于历史概述亦见[2]的第Ⅵ与Ⅶ章).

一个矩阵的 Jordan 形式不是唯一确定的，但其差别仅在于 Jordan 块的排列顺序. 更确切地说，两个 Jordan 矩阵在 k 上相似，当且仅当它们由相同的 Jordan 块组成，且不同处仅在于块沿着主对角线的分布. 矩阵 A 的 Jordan 形式中含本征值 λ 的 m 阶 Jordan 块的数目 $C_m(\lambda)$ 由公式

$$C_m(\lambda)=\mathrm{rk}(A-\lambda E)^{m-1}-2\mathrm{rk}(A-\lambda E)^m+\mathrm{rk}(A-\lambda E)^{m+1}$$

确定，其中，E 是与 A 同阶的 n 阶单位矩阵，$\mathrm{rk}B$ 为矩阵 B 的**秩**(rank)，并且，按定义，$\mathrm{rk}(A-\lambda E)^0$ 为 n.

除了 Jordan 正规形式外，还有其他类型的矩阵正规形式. 例如当希望避免约化到 Jordan 正规形式的非唯一性时，或者当基域不含有矩阵极小多项式的全部根时，它们被用到(见[2]－[5]).

从不变量理论观点看，Jordan 矩阵是在一般线性群的伴随表示的轨道内的一种典范表示. 对一个任意的约化代数群，类似表示的确定仍未(1978)完全解决(见[6]－[7]).

参考文献

[1] Jordan, C., Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, 1870, 114－125.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt, 4; 5; 6(译自法文).

[3] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵论(上、下册)，高等教育出版社，1955).

[4] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[5] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975(中译本: А. И. 马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社，1957).

[6] Borel, A., Carter, R., Curtis, C. W., Iwahori, N., Springer, T. A. and Steinberg, R. (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture notes in math., 131, Springer, 1970.

[7] Steinberg, R., Classes of elements of semisimple algebraic groups, in Internat. Congress Mathematicians Moscow, 1966, Mir, 1968, 277－283.

В. Л. Попов 撰 陈公宁 译

Jordan 测度 [Jordan measure; Жордана мера]

空间 $\mathbf{R}^n$ 中的平行多面体(parallelepiped)

$$\Delta=\{x\in\mathbf{R}^n: a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ a_i<b_i,\ i=1,\cdots,n\} \qquad (*)$$

的 Jordan 测度是它的体积 $m\Delta=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$. 对于有界集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 定义如下: Jordan 外测度(outer Jordan measure)

$$m_eE=\inf\sum_{j=1}^k m\Delta_j,\qquad \bigcup_{j=1}^k\Delta_j\supset E,\ k=1,2,\cdots,$$

而 Jordan 内测度(inner Jordan measure)

$$m_iE=\sup\sum_{j=1}^k m\Delta_j,\ E\supset\Delta_j,$$

其中 Δ_j 两两互不相交(这里 Δ_j 是形如(*)的平行多面体). 集合 E 称为 Jordan 可测的(Jordan measurable)(当 $n=2$ 时, 称为可求面积的，当 $n=3$ 时称为可求体积的)，如果 $m_eE=m_iE$，或者等价地，如果

$$m_eE+m_e(\Delta\setminus E)=m\Delta,$$

其中 $\Delta\supset E$. 在此情形下，Jordan 测度是 $mE=m_eE=m_iE$. 一个有界集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是 Jordan 可测的，当且仅当它的边界的 Jordan 测度为零(或者，等价地，如果它的边界的 **Lebesgue 测度**(Lebesgue measure)为零).

这个测度的概念首先由 G. Peano([1])和 C. Jordan([2])提出. E 与 $\bar{E}$(E 的闭包，见**集合的闭包**(closure of a set))的外测度相同，而且等于 $\bar{E}$ 的 **Borel 测度**(Borel measure). Jordan 可测集构成一个集合的环，其上的 Jordan 测度是有限可加函数. 亦见**可求积性**(squarability).

参考文献

[1] Peano, G., Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Bocca, 1887.

[2] Jordan, C., Remarques sur les intégrales définies, J. Math. Pures Appl. 8(1892), 69－99.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973(英译本: Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 2, Mir, 1977).

[4] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. Н., Элементы теории функций и функционального анализа, 4, изд., М., 1976(中译本: А. Н. 柯尔莫戈罗夫、С. В. 福明，函数论与函泛分析初步，高等教育出版社，1957).

А. П. Терехин 撰

【补注】 现在对 Jordan 测度(也称 Jordan 容度)不像历史上那么有兴趣，因为它只是 Lebesgue 测度(Lebesgue measure)在边界测度为零的有界 Lebesgue 可测集的环上的限制.

刘建明 译 苏维宜 校

Jordan 正规形式 [Jordan normal form; Жорданова нормальная форма]，矩阵的

见 **Jordan 矩阵**(Jordan matrix).

Jordan 定理 [Jordan theorem; Жордана теорема]

一条平面简单闭曲线 Γ，把平面 $\mathbf{R}^2$ 分解为两个连通区域，且 Γ 是这两个区域的公共边界. 由 C. Jordan([1])建立. 类似的论断是: 一条简单弧不能分解

平面，这是集论拓扑学中最古老的定理.

两个连通分支中，一个（在 Γ 内部）是有界的；其特征是：它的每一点关于 Γ 的阶都是 ±1；另一个（在 Γ 外部）是无界的，它的点关于 Γ 的阶为 0. 对于有界连通分支 A 的任一点 x 和每一点 $x_0 \in \Gamma$，存在一条以 x_0 和 x 为端点的简单弧，除 x_0 外，它的所有点都属于 A(Schoenflies 定理 (Schoenflies theorem)).

Jordan（曲线）定理可以按维数推广：$\mathbf{R}^n$ 的每个同胚于球面的 $(n-1)$ 维子流形都把该空间分解为两个连通分支，且是这两个连通分支的公共边界；$n=3$ 的情形由 H. Lebesgue 证明，一般情形由 L. E. J. Brouwer 证明，因此，n 维时的定理有时也称为 Jordan-Brouwer 定理 (Jordan-Brouwer theorem) 或 Jordan-Brouwer 分离定理 (Jordan-Brouwer separation theorem).

参考文献

[1] Jordan, C., Course d'analyse, 1, Gauthier-Villars, 1893.

[2] Vallée-Poussin, Ch. J. de la, Cours d'analyse infinitesimal, 2, Libraire Univ. Louvain, 1925.

[3] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947.

[4] Dieudonné, J. A., Foundations of mordern analysis, Acad. Press, 1961 (中译本：J. 迪厄多内，现代分析基础，第一、二卷，科学出版社，1982, 1986).

[5] Hurevicz, W. and Wallman, G., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.

[6] Филиппов, А. Ф., 《Успехи матем. наук》, 5 (1950), 5, 173 – 176.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在 $\mathbf{R}^2$（或 $\mathbf{C}$）中的 Jordan 定理通常称为 Jordan 曲线定理 (Jordan curve theorem)；O. Veblen [A4] 最早给出严格证明.

C. Kuratowski 加强了 Schoenflies 定理，他证明了，实际上存在单位闭圆盘的一个**同胚** (homeomorphism)，把圆盘的边界 S^1 映到 Γ 上，且其内部映成 Γ 的内部；Riemann 映射定理（见 **Riemann 定理** (Riemann theorem)）则真实地给出了一个在内部解析的同胚.

正如 J. W. Alexander ([A1]) 的著名的"带角球面"所示. 上述强化的类似结论在高维情形不真.

参考文献

[A1] Bing, R. H., The geometric topology of 3-manifolds, Amer. Math. Soc., 1983.

[A2] Dugundji, J., Topology, Allyn & Bacon, 1966.

[A3] Mill, J. van, Infinite-dimensional topology, prerequisites and introduction, North-Holland, 1988.

[A4] Veblen, O., Theory of plane curves in non-metrical Analysis Situs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **6** (1905), 83 – 98.

白苏华、胡师度 译

Jourdain 原理 [Jourdian principle; Журдена принцип]

由 P. Jourdian ([1]) 建立的力学中的一个微分变分原理，从满足加在系统上的理想约束条件和对所考虑的瞬时系统中点的位置的相容性条件的运动学上可能的运动类中分离出一个系统的实在的运动. 根据 Jourdian 原理，对于被理想双边（抑制的）约束约束着的一个系统的实在运动，由作用力和对运动学上可能的速度的任意变化的惯性力所作的功元素之和在每个瞬时是零. 亦见**经典力学的变分原理** (variational principles of classical mechanics).

参考文献

[1] Jourdain, P. E. B., Addition to papers on the equations of mechanics, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **39** (1908), 241 – 250.

В. В. Румянцев 撰

【补注】 这个原理在 Jourdain 以前在 18 世纪已经被应用，只是后来才得到"Jourdain 原理"这一名称.

葛显良 译 鲁世杰 校

Julia 集 [Julia set; Жулия множество]

【补注】 G. Julia ([A1]) 和 P. Fatou ([A2]) 研究过有理映射 $f:\overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ 的迭代. 用 f^n 表示函数 f 与其自身的 n 重复合. 一点 $z \in \mathbf{C}$ 称为 f 的所谓 Fatou 集 (Fatou set) 之元素，如果有 z 在 $\mathbf{C}$ 中的邻域 U，使得迭代族 $\{f^n|_U\}$ 为一**正规族** (normal family). Julia 集 $J(f)$ 就是 Fatou 集的补集. $J(f)$ 有以下性质：1) $J(f)$ 是非空的**完满集** (perfect set)；2) $J(f)$ 等于排斥**周期点** (periodic point) 之集合的闭包；3) $J(f)$ 或为全不连通的 (见**全不连通空间** (totally disconnected space))，或可由 Jordan 弧连接，或即为整个 $\mathbf{C}$；4) $J(f)$ 对 f 和 f^{-1} 是不变的；5) $J(f)$ 是逆迭代映射 f^{-n} 的吸引子 (见**奇怪吸引子** (strange attractor)). 在几乎所有情况下，$J(f)$ 具有**分形维数** (fractal dimension) 而可称为**分形集** (fractals). D. Sullivan 对于 Fatou 集的元素就它们的动力学给出了一个完整的分类. $F(f)$ 的各分支，或为周期的，或为预周期的. 令 D 为这样一个周期域，其周期为 n. 记 $g=f^n$，其动力学有以下五种情况：

a) D 是吸引域；D 中含一吸引周期点 p，使 $0<|g'(p)|<1$.

b) D 为超吸引域；D 包含一个同时为临界点的周期点 p，即 $g'(p)=0$.

c) D 为抛物域；其边界含一个使 $g'(p)=1$ 的周期点 p.

d) D 为一 Siegel 圆盘 (见 **Siegel 域** (Siegel domain))；D 是单连通的，且 $g|_D$ 解析等价于一旋转.

e) D 是一 Herman 环 (Herman ring). D 共形等价于一圆环，而 $g|_D$ 解析共轭于圆环的刚性旋转.

这里讲的预周期点 (pre-periodic point) 就是这样的点，其某次迭代是周期的. f 的不动点 z_0 是超吸引

的(super-attractive)，若 $f'(z_0)=0$（回忆一下，设 z_0 为 f 的不动点，z_0 为吸引的是指 $|f'(z_0)|<1$；z_0 为排斥的(repelling)，若 $|f'(z_0)|>1$）．

Herman 环的存在性已被证明，但迄至 1989 还一直没有找到．

研究最多的情况是二次映射 $f=z^2+c$．这时，除了 Herman 环，所有的现象都出现了．所有使 $J(f)$ 为连通的 c 成一 Mandelbrot 集(Mandelbrot set)，即 $J(f)$ 之参数 c 空间的分支图．亦见**混沌**(chaos)和**通向混沌的道路**(routes to chaos)．

参考文献

[A1] Julia, G., Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles, *J. de Math.*, **8** (1918), 47 – 245.

[A2A] Fatou, P., Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919), 161 – 271.

[A2B] Fatou, P., Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, **48** (1920), 33 – 94.

[A2C] Fatou, P., Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, **48** (1920), 208 – 314.

[A3] Brolin, H., Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.*, **6** (1965), 103 – 144.

[A4] Blanchard, P., Complex analytic dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **11** (1984), 84 – 141.

[A5] Devaney, R. L., An introduction to chaotic dynamical systems, Benjamin/Cummings, 1986.

[A6] Peitgen, H.-O. and Richter, P. H., The beauty of fractals, Springer, 1986（中译本：H.-O. 派特根，P. H. 里希特，分形——美的科学，科学出版社，1994）.

齐民友 译

Julia 定理 [Julia theorem; Жюлиа теорема]

如果 a 是复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的一个孤立**本质奇点**(essential singular point)，则至少存在从 a 出发的一条射线 $S=\{z: \arg(z-a)=\theta_0\}$，使得在每个对称于此射线的角域

$$V=\{z: |\arg(z-a)-\theta_0|<\varepsilon\},\ \varepsilon>0$$

内，除可能有一个例外值外，$f(z)$ 在一个收敛于 a 的无限点列 $\{z_k\}\subset V$ 上取每个有限值．G. Julia 的这个结果（见[1]）是关于解析函数在本质奇点邻域中的性态的 Picard 大定理（见 **Picard 定理**(Picard theorem)）的补充．

Julia 定理中占有重要地位的射线称为 Julia 射线(Julia ray)．例如，对于 $f(z)=e^z$，$a=\infty$，Julia 射线是虚轴的正部和负部．与 Julia 定理有关，关于在例如单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 内亚纯函数 $w=f(z)$ 的 Julia 线段(Julia segment)或 Julia 弦(Julia chord)，是以圆周 $|z|=1$ 上点 $e^{i\theta_0}$ 为终点的一条弦 S，使在每个以 $e^{i\theta_0}$ 为顶点且包含 S 的开角域内，除可能有两个例外值外，函数 $w=f(z)$ 取到 Riemann w 球面上的所有值．如果以 $e^{i\theta_0}$ 为端点的每条弦 S 都是 $f(z)$ 的 Julia 弦，则 $e^{i\theta_0}$ 称为 $f(z)$ 的 Julia 点(Julia point)．存在具有有界特征的亚纯函数，使得 $|z|=1$ 上每个点都是 Julia 点．

亦见**渐近值**(asymptotic value)；**Iversen 定理**(Iversen theorem)；**聚值集**(cluster set)．

参考文献

[1] Julia, G., Leçons sur les fonctions uniformes à une point singulier essentiel isolé, Gauthier-Villars, 1924.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第八章）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 也用术语 Julia 方向(Julia direction)代替 Julia 射线．

沈永欢 译

跳跃函数 [jump function; скачков функция]

有界变差函数的 **Lebesgue 分解**(Lebesgue decomposition)的三部分之一．设 f 为区间 $[a, b]$ 上的**有界变差函数**(function of bounded variation)．当 $a<x\leqslant b$ 时，令 $d_L(x)=f(x)-f(x^-)$，而当 $a\leqslant x<b$ 时令 $d_R(x)=f(x^+)-f(x)$，则 $d_L(x)$ 称为 f 在 x 的左跃度(jump from the left)，而 $d_R(x)$ 称为 f 在 x 的右跃度(jump from the right)．若 $a<x<b$，则

$$d(x)=f(x^+)-f(x^-)=d_L(x)+d_R(x)$$

称为 f 在 x 的跃度(jump)．设 $\{x_i\}$ 为 f 在 $[a, b]$ 上所有不连续点的序列，并令

$$s(x)=\sum_{a\leqslant x_i<x} d_R(x_i)+\sum_{a<x_i\leqslant x} d_L(x_i)\ \ (s(a)=0),$$

则 s 称为 f 的跳跃函数(jump function)．注意：差 $f-s=\varphi$ 是 $[a, b]$ 上的连续有界变差函数，并且有 $V_a^b(f)=V_a^b(\varphi)+V_a^b(s)$，这里 $V_a^b(F)$ 表示 F 在 $[a, b]$ 上的变分（见**函数的变分**(variation of a function)）．此外，有

$$V_a^b(s)=\sum_{a\leqslant x_i<b}|d_R(x_i)|+\sum_{a<x_i\leqslant b}|d_L(x_i)|.$$

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974（中译本：И. П. 那唐松，实变函数论，第二版，人民教育出版社，1958）.

Б. И. Голубов 撰

【补注】 函数 s 也称为 f 的跃度函数(saltus function)．一个有界变差函数 f 若与它的跃度函数 s 相等，则 f 本身也称为跃度函数．

参考文献

[A1] Sz.-Nagy, B., Introduction to real functions and

orthogonal expansions, Oxford Univ. Press, 1965.
[A2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).
郑维行 译 沈祖和 校

跳过程 [jump process; скачкообразный процесс]

一种**随机过程** (stochastic process), 它的状态只在一递增的随机时刻才会改变. 跳过程这一术语有时也用于具有逐段常值轨道的任意过程.

Марков 跳过程是一类重要的跳过程. 一个 **Марков 过程** (Markov process) 是跳过程, 如果它的**转移函数** (transition function) $P(s,x,t,B)$ 使得

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{P(s,x,t,B)-I_B(x)}{t-s}=q(s,x,B), \quad (1)$$

其中 $I_B(x)$ 是相空间 $(E,\mathscr{E})$ 中集合 B 的指示函数, 且正则性条件成立, 即 (1) 中的收敛是一致的, 且核 $q(s,x,B)$ 满足某些有界性和连续性条件.

令

$$a(t,x)=-q(t,x,\{x\}),$$

$$a(t,x,B)=q(t,x,B\setminus\{x\}),$$

$$\Phi(t,x,B)=\begin{cases}\dfrac{a(t,x,B)}{a(t,x)} & \text{如果 } a(t,x)>0,\\ 0 & \text{其他情形}.\end{cases}$$

这些量可作如下解释: 在相差 $o(\Delta t)$ (当 $\Delta t\to 0$ 时) 的意义下, $a(t,x)\Delta t$ 是在时间区间 $(t,t+\Delta t)$ 内过程离开状态 x 的概率, $\Phi(t,x,B)$ (对 $a(t,x)>0$) 是过程在时刻 t 离开状态 x 的条件下进入集合 B 的条件概率.

当正则性条件成立时, 跳过程的转移函数当 $t>s$ 时对 t 可微, 而当 $s<t$ 时对 s 可微, 并且满足带有相应的边界条件的向前和向后 **Колмогоров 方程** (Kolmogorov equation):

$$\frac{\partial P(s,x,t,B)}{\partial t}=-\int_B a(t,y)P(s,x,t,dy)+$$
$$+\int_E a(t,y,B)P(s,x,t,dy),$$
$$\lim_{t\downarrow s}P(s,x,t,B)=I_B(x);$$
$$\frac{\partial P(s,x,t,B)}{\partial s}=a(s,x)\Big[P(s,x,t\ B)+$$
$$-\int_E P(s,y,t,B)\Phi(s,x,dy)\Big],$$
$$\lim_{s\uparrow t}P(s,x,t,B)=I_B(x).$$

设 $X=(X_t)_{t\geq 0}$ 是严格右连续的 Марков 跳过程, T_n 是过程第 n 次跳跃时刻, $T_0=0$, 再设 $Y_n=X_{T_n}$, S_n 是在第 n 个状态持续的时间, 设 $T_\infty=\lim T_n$ 是截止时刻, 且令 $X_{T_\infty}=\delta$, 其中 δ 是 E 外的一点, 则序列 (T_n,Y_n) 形成一个时齐 **Марков 链** (Markov chain). 注意: 如果 X 是时齐 Марков 过程, 则在指定 $Y_n=x$ 时, S_n 具有参数 $\lambda(x)$ 的指数分布.

Марков 跳过程的自然推广是半 Марков 跳过程, 即序列 Y_n 是 Марков 链, 但在第 n 个状态持续的时间依赖于 Y_n 和 Y_{n+1} 并具有任意分布.

在一般跳过程的研究中, 所谓的鞅方法是卓有成效的. 在这个方法的范围内, 不需要附加关于过程的概率构造的假定, 就能获得有意义的结果. 在鞅方法中, 我们假定在给定跳过程 X 的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上, 有一非减右连续 σ 代数族 $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$, 使得对每一 t, 随机变量 X_t 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的, 从而 T_n 是 Марков 时.

设 $\mathscr{P}$ 是 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 上的**可料 σ 代数** (predictable sigma-algebra), 再令 $\widetilde{\mathscr{P}}=\mathscr{P}\times\mathscr{E}$. $(\mathbf{R}_+\times E,\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)\otimes\mathscr{E})$ 上的随机测度 η 称为可料的 (predictable), 如果对任意非负 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 可测函数 f, 过程 $(f*\eta_t)_{t\geq 0}$ 是可料的, 其中

$$f*\eta_t=\int_{(0,t]\times E}f(t,x)\eta(dt,dx).$$

设 $\mu=\mu(dt,dx)$ 是 X 的跳测度 (jump measure), 即在 $(\mathbf{R}_+\times E,\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)\otimes\mathscr{E})$ 上用

$$\mu([0,t]\times B)=\sum_{n\geq 1}I_{[0,t]\times B}(T_n,Y_n),t\in\mathbf{R}_+,\ B\in\mathscr{E}$$

给定的整值随机测度.

在关于 $(E,\mathscr{E})$ 非常一般的条件下 (例如, 当 E 是具有 Borel σ 域 $\mathscr{E}$ 的完全可分度量空间时), 存在可料随机测度 $\nu=\nu(dt,dx)$, 使得下面两个等价条件中任何一个成立:

1) 对任何非负 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 可测函数 f, $\mathsf{E}f*\mu_\infty=\mathsf{E}f*\nu_\infty$;

2) 对任何 $n\geq 1$ 和 $B\in\mathscr{E}$, 过程

$$(\mu([0,t\wedge T_n]\times B)-\nu([0,t\wedge T_n]\times B))_{t\geq 0}$$

是一个零初值**鞅** (martingale).

可料随机测度 ν 除一 P 零测集外是唯一决定的, 称为 μ 的补偿 (compensator)(或对偶可料投影 (dual predictable projection)). 可以选择 ν, 使得

$$\nu((T_\infty,\infty)\times E)=0, \nu(\{t\}\times E)\leq 1, \text{对一切 } t. \quad (2)$$

设 Ω 是取值在 $(E,\mathscr{E})$ 中的跳过程 X 的轨道空间, 设 $\mathscr{F}_t=\sigma(X_s,s\leq t)$, $\mathscr{F}=\bigcup_{t>0}\mathscr{F}_t$, 且 P_0 是使 (2) 成立的概率测度, 则在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得 ν 是 μ 的关于 P 的补偿, 且使 P 在 $\mathscr{F}_0$ 上的限制与 P_0 相同. 其证明依赖于与变量 (T_n, Y_n) 对补偿的条件分布有关的明显公式, 在若干情形下这是描述跳过程更方便的办法.

一个跳过程是**独立增量随机过程** (stochastic process with independent increments), 当且仅当相应的补偿是决定性的.

参考文献

[1] Kolmogoroff, A. N., Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitstheorie, *Math. Ann.*, **104** (1931), 415–458.

[2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (中译本: И. И. 基赫曼等, 随机过程论, 科学出版社, 1986).

[3] Jacod, J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, Springer, 1979.

Ю. М. Кабанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Chapt. 3, Springer, 1965).

[A2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Chapt. X, Wiley, 1966.

[A3] Rosenblatt, M., Random processes, Springer, 1974.

[A4] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.

刘秀芳 译

Jung 定理 [Jung theorem; Юнга теорема]

Euclid 空间 E_n 中每个直径为 d 的集合包含于 E_n 中某个半径 $r=d(n/2(n+1))^{1/2}$ 的球中. Jung 定理有一些类似命题与推广(例如用其他度量代替 Euclid 距离)(见[2]).

此定理为 H. W. E. Jung 所证明([1]).

参考文献

[1] Jung, H. W. E., Ueber den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschliesst, *J. Reine Angew. Math.*, **130** (1901), 310 – 313.

[2] Danzer, L., Grünbaum, B., Klee, V., Helly's theorem and its relatives, 载于 V. Klee (ed.), Convexity, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 7, Amer. Math. Soc., 1963, 101 – 180.

[3] Hadwiger, H., Debrunner, H., Combinatorial geometry in the plane, Holt, Rinehart & Winston, 1964 (译自德文).

П. С. Солтан 撰

【补注】 关于内切球的对应命题是 Steinhagen 定理 (Steinhagen theorem) (见[A1]).

参考文献

[A1] Bonnesen, T., Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper, Springer, 1974.

沈永欢 译

K

K 函子 [K-**functor**; K-**функтор**], 代数几何中的

代数 K 理论 (algebraic K-theory) 里与概形相关联的上同调类型的不变量. 更精确地说, 在代数 K 理论里可以构造一个从概形的范畴到分次交换环范畴的逆变函子 ([1]):

$$X \mapsto K_*(X) = \sum_{i \geqslant 0} K_i(X).$$

K 函子与**艾达尔上同调** (étale cohomology) 有关, 但两者又有区别: K 理论具有整体的"整数"信息, 而艾达尔上同调则没有, 它只取有限系数.

在 K 理论诞生之时, 它就给出了在代数几何中的第一个应用. 这就是经典 **Riemann-Roch 定理** (Riemann-Roch theorem) 的一个推广的证明 (特别是指推广到任意维数的光滑簇) (见 [2]). 在高阶代数 K 理论, 即函子 $K_i (i>0)$ 的上同调理论建立后 (见 [1], [2]), 它的思想开始深入代数几何. 在这个方向上, 目前可列举以下几个研究领域:

1) 代数簇上代数闭链的研究. 设 X 是光滑**代数簇** (algebraic variety), $\mathrm{CH}(X)$ 是 X 上**代数闭链** (algebraic cycle) 的有理等价类的**周 (炜良) 环** (Chow ring), 则有同构

$$\mathrm{CH}(X) \otimes \mathbf{Q} \cong K_0(X) \otimes \mathbf{Q},$$

$$\mathrm{CH}(X) \cong \sum_{i \geqslant 0} H^i(X, \mathscr{K}_i),$$

这里 $\mathscr{K}_i$ 是与预层 $U \to K_i \cdot \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ 相关联的层 (在 Zariski 拓扑下). 这些事实是利用 K 理论方法对环 $\mathrm{CH}(X)$ 作研究的基础. 特别地, 算术曲面上 0 闭链的周群的有限性定理就是用这些方法证明的 ([4]).

2) 代数簇的 ζ **函数** (zeta function) 及 L **函数** (L-function) 在整点的值. 关于代数数域的 Z 函数在整点的值与它的代数整数环的 K 函子里的挠子群的阶之间的联系、以及关于代数数域上簇的 L 函数在整点的值与它们的群 K_i 的秩以及 K 函子在上同调环里的象所生成的格的体积之间的联系, 有着一些猜测 (见 [1], [9]). 在一些特殊情形里, 这些猜测已被证实, 而且它们是 Birch-Swinnerton-Dyer 猜测的补充 (见代数几何中的 ζ **函数** (zeta-function)).

3) 高维**类域论** (class field theory) 描述了维数 $i \geqslant 1$ 的算术概形的有理函数域的极大 Abel 扩张的 Galois 群, 也描述了相应的局部对象 (i 维局部域 ([7], [10])) 的 Galois 群. 在这种描述中, 1 维情形通常由乘法群起的作用现在被 Milnor 群 K_i 所代替.

4) 在结晶上同调与 K 函子的形变间的联系 (见 [3]).

5) 代数 K 理论里的示性类理论以及 Riemann-Roch-Grothendieck 定理 (见 [5], [11]).

6) 对很大一类概形的代数 K 函子的计算. 特别, 在代数闭域的情形已计算了具有有限系数的 K 函子 ([8]).

参考文献

[1A] Quillen, D., Higher algebraic K-theory I, in H. Bass (ed.): Algebraic K-theory I, Lecture notes in math., Vol. 341, Springer, 1973, 85–147.

[1B] Lichtenbaum, S., Values of zeta-functions, étale cohomology and algebraic K-theory, in H. Bass (ed.): Algebraic K-theory II, Lecture notes in math., Vol. 342, Springer, 1973, 489–501.

[2] Berthelot, P., et al. (eds.), Théories des intersections et théorème de Riemann-Roch, SGA 6, Lecture notes in math., 225, Springer, 1971.

[3] Bloch, S., Algebraic K-theory and crystalline cohomology, *Publ. Math. IHES*, **47** (1977), 187–268.

[4] Colliot-Thélène, J. L., Sansuc, J. J. and Soulé, C., Que-

lques théorèmes de finitude en théorie des cycles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* 1, **294** (1982), 749−752.

[5] Gillet, H., Riemann-Roch theorems for higher *K*-theory, *Adv. in Math.*, **440** (1981), 203−289.

[6] Harris, B. and Segal, G., K_1 groups of rings of algebraic integers, *Ann. of Math.*, **101** (1975), 1, 20−33.

[7A] Kato, K., A generalization of local class field theory by using *K*-groups Ⅰ, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A*, **26** (1979−1980), 2, 303−376.

[7B] Kato, K., A generalization of local class field theory by using *K*-groups Ⅱ, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A*, **27** (1980), 3, 603−683.

[8] Suslin, A. A., On the *K*-theory of algebraically closed fields, *Invent. Math.*, **73** (1983), 2, 241−245.

[9] Бейлинсон, А. А., 《Функциональный анализ》, **14** (1980), 2, 46−47.

[10] Паршин, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **234** (1978), 4, 855−858.

[11] Шехтман, В. В., 《Успехи матем. наук》, **35** (1980), 6, 179−180.

[12] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, **20** (1982), М., 71−152.
В. В. Шехтман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beĭlinson, A. and Manin, Yu., The value of the Selberg zeta-function at integral points, Funct. Anal Appl., **21** (1987), 58−59.
陈志杰 译

K空间 [*K*-space; *K*-пространство], Канторович 空间 (Kantorovich space)

一种有序完全向量空间，即其中每一上方有界集有上确界的半序向量空间（见**半序空间**（semi-ordered space)）. 这概念是由 Л. В. Канторович ([1])引进的.

参考文献

[1] Канторович, Л. В., 《Матем. сб.》, **2** (1937), 121−168.
М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Freudenthal, H., Teilweise geordnete Moduln, *Proc. K. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **39** (1936), 641−651.

[A2] Riesz, F., Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 174−206.

[A3] Steen, S. W. P., An introduction to the theory of operators Ⅰ, *Proc. London. Math. Soc.*, (2), **41** (1936), 361−392.

[A4] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, Ⅰ, North-Holland, 1971.

[A5] Zaanen, A. C., Riesz spaces, Ⅱ, North-Holland, 1983.

[A6] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Springer, 1974.

[A7] Vulikh, B. Z., Introduction to the theory of partially ordered spaces, Noordhoff, 1967 (译自俄文).
葛显良 译 李慧陵 校

K系统 $\{T^t\}$ [*K*-system; *K*-система]

Lebesgue 空间 (Lebesgue space) 中的一个**可测流** (measurable flow) (*K* 流 (*K*-flow)) 或称为 *K* 瀑布 (*K*-cascade)，使得存在一个相空间的具有下述性质的可测分划 (见**可测分解** (measurable decomposition)) ξ: a) 它对 $\{T^t\}$ 是递增的 (increasing) (以前称为不变的 (invariant))，即 $T^t\xi$ 当 $t>0$ 时是 ξ 的 mod 0 加细; b) 它是 $\{T^t\}$ 的一个双侧生成元 (two-sided generator)，即唯一的比一切 $T^t\xi$ 都 mod 0 更细的 mod 0 可测剖分就是剖分为点; c) 唯一的 mod 0 粗于一切 $T^t\xi$ 的 mod 0 可测剖分就是平凡剖分，其唯一元即整个相空间.

可测空间的自同构若其迭代构成一个 *K* 瀑布，则称为一个 *K* 自同构 (*K*-automorphism). 若 $\{T^t\}$ 是一个 *K* 系统，则当 $t\neq 0$ 时，所有 T^t 均为 *K* 自同构. 反之，已给一个可测流或瀑布 $\{T^t\}$，只要有一个 T^t 为 *K* 自同构，则 $\{T^t\}$ 是一 *K* 系统. *K* 系统有很强的遍历性质: 正熵 (见**动力系统的熵理论** (entropy theory of a dynamical system)) 和**遍历性** (ergodicity); 各次的**混合** (mixing)，而且有可数重 Lebesgue 谱 (见**动力系统的谱** (spectrum of a dynamical system); 亦见 [2]).

Lebesgue 空间的自同态具有完全正熵 (completely-positive entropy)，如果其一切非平凡商自同态都有正熵. 其中就有 *K* 自同构 (即是说，它们即具有完全正熵的自同构) 和另一些有趣的对象 (**正合自同态** (exact endomorphism)). *K* 系统概念也可以在其他方向上推广: 推广到具有无限不变测度的情况 (见 [6], [7], [11]) 和 **R**, **Z** 以外的群的作用的情况 (见 [8]−[10], [12]).

K 系统有时亦随其创始人之名称为 Колмогоров 系统 (或流) (Kolmogorov systems (flows)) (见 [1])，Колмогоров 用的词是"拟正则". 这里强调了它和正则随机过程的类似 (见 [4]). 如果一个狭义平稳的随机过程 $\{X_t\}$ 按动力系统来解释，则该过程"在过去"的值定义了某个递增的可测剖分 ξ，它是使所有 $X_t (t<0)$ 为可测的最小的可测剖分. 若 ξ 有上述的性质 b) 与 c) (即"全有或全无"定律)，则这过程称为正则的 (regular). 这个概率形式给出了 *K* 自同构的最简单的例子: **Bernoulli 自同构** (Bernoulli automorphism).

在一 Lebesgue 空间中给定一个可测流或可测瀑布，若某一个 T^t 同构于一 Bernoulli 自同构，则当 $t\neq 0$ 时它们都是这样. 这时这个动力系统称为 Bernoulli 的 (Bernoullian, 见 [5]). 也有非 Bernoulli 的 *K* 系统存在. *K* 系统 (甚至 Bernoulli 系统) 不仅在概率论中自然

出现，而且也在代数、几何乃至物理性质的问题中出现(见[2],[3],[5],[13],[14])．

参考文献

[1A] Колмогоров, А.Н.,《Докл. АН СССР》, **119**(1958), 5, 861 – 864.

[1B] Колмогоров, А.Н.,《Докл. АН СССР》, **124**(1959), 4, 754 – 755.

[2] Корнфельд, И.П., Синай, Я.Г., Фомин, С.В., Эргодическая теория, М., 1980.

[3] Итоги науки и техники. Математический анализ, М., **13**(1975), 129 – 262.

[4] Розанов, Ю.А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary random processes, Holden Day, 1967).

[5] Ornstein, D., Ergodic theory, randomness, and dynamical systems, Yale Univ. Press, 1974.

[6] Parry, W., Ergodic and spectral analysis of certain infinite measure preserving transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**(1965), 5, 960 – 966.

[7] Dugdale, J.K., Kolmogorov automorphisms in σ-finite measure spaces, *Publ. Math. Debrecen*, **14**(1967), 79–81.

[8] Conze, J.P., Entropie d'un groupe abélien de transformations, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **25**(1972), 1, 11–30.

[9] Burton, R.M., An asymptotic definition of K-groups of automorphisms, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **47**(1979), 2, 207 – 212.

[10] Dani, S., Kolmogorov automorphisms on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, **98**(1976), 1, 119 – 163.

[11] Krengel, U. and Sucheston, L., Note on shift-invariant sets, *Ann. Math. Statist.*, **40**(1969), 2, 694 – 696.

[12] Kaminski, B., A note on K-systems, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.*, **26**(1978), 2, 95 – 97.

[13] Sinaĭ, Ya.G., et al., Dynamical systems, 4, Springer, 1988(译自俄文).

[14] Martin, N.F.G. and England, J.W., Mathematical theory of entropy, Addison-Wesley, 1981.

Д.В. Аносов 撰 齐民友 译

K 理论 [*K*-**theory**; *K*-**теория**]

代数拓扑学 (algebraic topology) 中，用代数和拓扑的方法来研究向量丛的性质的那一部分学问．为了和代数 **K 理论** (algebraic K-theory) 相区别，有时也称为拓扑 K 理论 (topological K theory)．广义上讲，"K 理论"表示数学中的这样一个分支，它包含有代数 K 理论和拓扑 K 理论，它的特点就是使用所谓的 K 理论方法．这是一些具有自己特色的代数和拓扑方法．狭义上讲，K 理论是一种源自**向量丛** (vector bundle) 范畴的**广义上同调论** (generalized cohomology theories)．

K 理论来自代数拓扑学中有关斜向量积(丛)的研究，以及它们的许多同伦和代数性质．在 K 理论中所使用的、有关丛的最重要的性质是丛的**示性类** (characteristic class)，**分类空间** (classifying space)，丛上的代数运算(直和，张量积，外项数)以及丛的反象的性质．K 理论的第二个来源，是和代数 K 理论的联系，这种联系表现在，向量丛的连续截面空间可以看成连续函数所构成的代数上的一个模，这个模是**投射模** (projective module)．

类似于代数 K 理论中的 K 函子，群 $K(X)$ 定义为底空间 X 上的向量丛范畴的 **Grothendieck 群** (Grothendieck group)．利用**诱导纤维丛** (induced fibre bundle) 概念，群 $K(X)$ 决定一个由拓扑空间范畴到可换群范畴的函子．通常 K 函子不是在拓扑空间这个大范畴上来予以考虑，而是在较小的子范畴上研究．最常用的子范畴是胞腔空间(复形，见 **CW 复形** (CW-complex)) 子范畴．K 函子的定义可以推广到带基点的拓扑空间和拓扑空间偶范畴．此时有群 $K^i(X, A)$，$i \leqslant 0$，其定义为

$$K^i(X, A) = K(X \times D^{-i}, X \times S^{-i-1} \cup A \times D^{-i}),$$

这里 D^{-i} 是 $(-i)$ 维圆盘，S^{-i-1} 是它的边界．函子 K^i $(i < 0)$ 的全体满足广义上同调论的公理，这时当然要就 $i \leqslant 0$ 做些变动．

在实向量丛上所做的 K 理论(实 K 理论 (real K-theory)) 和复向量丛上所做的 K 理论(复 K 理论 (complex K-theory)) 是不同的．K 理论的其他变形也有考虑，它们对丛添加一些别的结构，如等变 K 理论．

复 K 理论中的 Bott 周期性(见 **Bott 周期定理** (Bott periodicity theory)) 是群 $K(X)$ 成为广义上同调理论时的一个重要性质．特别，它可以将限制 $i \leqslant 0$ 去掉，而使函子 K^i 成为一个 $\mathbf{Z}_2$ 分次的广义上同调论．Bott 周期性的根本重要性在于它对所构做出的 K 理论的众多计算提供了可能．

广义上同调论的计算方法也适用于 K 理论，特别是**谱序列** (spectral sequence) 方法，它们可以用来计算许多经典的有限维或无限维空间的群 $K(X)$．例如，若 $X = \mathbf{C}P^n$ 是复投影空间，那么

$$K(\mathbf{C}P^n) = \mathbf{Z}[u]/(u^{n+1}),$$

这里 $u = [\eta] - 1$，而 η 是 $\mathbf{C}P^n$ 上的一维正则丛．

对于实 K 理论，利用 **Bott 周期定理**，可以得到一个 $\mathbf{Z}_8$ 分次广义上同调论、利用向量丛上其他的辅助性代数结构，可以做出原先只为复、实和辛 K 理论的其他广义上同调理论．

在 20 世纪 60 年代，拓扑学及数学的其他分支中

许多问题，在 K 理论的帮助下曾被重新考虑．K 理论中一些最重要的成果，是和示性类，**上同调运算**(cohomology operation)的系统研究有关．利用这些成果，有关整性的定理（类似于 **Riemann-Roch 定理**(Riemann-Roch theorem)）得到证明，另外涉及可除代数和球上向量场的经典问题也得到了简单而清晰的证明．

K 理论的方法是拓扑学中许多分支，例如配边论发展的动力．有关在 K 理论中用上同调运算来描述 J 函子的 Adams 猜测的证明，在代数拓扑学的发展中是极其重要的（见[2]）．

最精彩的是 K 理论的方法用于椭圆算子指数的计算．利用向量丛的几何构造，对微分算子和**伪微分算子**(pseudo-differential operator)，它们的符号 **Соболев 空间**(Sobolev space)，椭圆算子和它们的指数的概念做了影响巨大的推广．此外，还获得了 Atiyah-Singer 公式（[3]）:

$$\operatorname{ind}\sigma(D)=\langle \operatorname{ch}\sigma\cdot T(X),[X]\rangle .$$

它将紧闭流形 X 上的一个具有符号 σ 的椭圆算子的指数，用 **Todd 类**(Todd class) $T(X)$ 和算子 $\sigma(D)$ 的**陈（省身）特征标**(Chern character)来表述．作为 Atiyah-Singer 公式的推论，对于那些在几何学、拓扑学和数学其他分支中最重要的一些不同的算子类，也建立起了许多特殊的公式．例如，用可定向的紧闭流形的 **Понтрягин 数**(Pontryagin number)来表示它的**符号差**(signature)的 Hirzebruch 公式就是一例．这个公式以及它在非单连通流形上的推广，在微分拓扑里面，用来作流形的光滑结构的分类问题．

在 20 世纪 70 年代，随着泛函分析方法在 K 理论中的应用，以及 K 理论在许多拓扑、几何和微分方程理论中的使用，更广的 K 理论出现了．其中一种是用下述的**局部平凡纤维丛**(locally trivial fibre bundle)范畴来代替向量丛范畴．这种局部平凡纤维丛的纤维是某种 **C^* 代数**(C^*-algebra) A 上的有限生成投射模，而它的结构群是这些模的自同构群．利用这一类纤维丛，对无限离散群 π 的无穷维表示，造出了非平凡的上同调不变量．如果离散群 π 是具有 Riemann 度量，其二维曲率非正的紧流形的基本群，那么形

$$\tau_x(M)=\langle L(M)x,[M]\rangle$$

的示性数，即高维符号差(higher signatures)是同调不变量．（这里 x 是基本群为 π 的流形 M 的任意一个有理 Понтрягин-Hirzebruch 类．）

广义上讲，K 理论的方法极大地影响了微分拓扑的思想发展．利用代数和拓扑 K 理论的结合，微分拓扑里有关流形上的光滑结构，片状线性结构的分类，以及 Понтрягин 示性类的同调和拓扑不变性，得到了解决．K 理论的方法广泛应用于泛函分析，特别用于 **Banach 代数**(Banach algebra)．

参考文献

[1] Atiyah, M. F. and Hirzebruch, F., Vector bundles and homogeneous spaces, in C. B. Allendoerfer (ed.): Differential geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 3, Amer. Math. Soc., 1961, 7－38.

[2] Sullivan, D., Genetics of homotopy theory, *Ann. of Math.*, **100** (1974), 1－79.

[3] Atiyah, M. F. and Singer, I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63** (1963), 422－433.

[4] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[5] Atiyah, M. F., *K*-theory: lectures, Banjamin, 1967.

[6] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[7] Karoubi, M., *K*-theory: an introduction, Springer, 1978.

А. С. Мищенко 撰

【补注】 计算 K 群的一个最有用公式如下：设 E 是 X 上的一个 n 维复向量丛．用 $\mathbf{P}(E)$ 表示相应的 $\mathbf{C}P^{n-1}(\mathbf{C})$ 丛，它在点 $x\in X$ 上的纤维是 E 在 $x\in X$ 上的纤维 E_x 中的直线所构成的 $(n-1)$ 维投影空间．所以 $\mathbf{P}(E)$ 的点就是 E_x 中的直线，即一维子空间．在 $\mathbf{P}(E)$ 上，存在一个典范线丛(canonical line bundle) ξ_E，它在 $y\in\mathbf{P}(E)$ 上的纤维"就是"一维向量空间 y．当 $E=\mathbf{C}^{n+1}$，$X=\{\mathrm{pt}\}$ 是孤点空间时，这就是 $P_n(\mathbf{C})=\mathbf{C}P^n$ 上的典范线丛 $\xi_n=\{(x,v)\in P_n(\mathbf{C})\times\mathbf{C}^{n+1}: v\in x\}$．设 $t=[\xi_E]$ 是 ξ_E 在 $K(\mathbf{P}(E))$ 中的类，那么 $K^*(\mathbf{P}(E))$ 是以 $1,t,\cdots,t^{n-1}$ 为基的自由 $K^*(X)$ 模，而 t^n 由关系

$$t^n-[\lambda^1(E)]t^{n-1}+\cdots+(-1)^n[\lambda^n(E)]=0$$

决定．

在等变 K 理论中，考虑空间 X，这时有一个(Lie)群 G 作用在它上面．G 向量丛(G-vector bundle)是这样一个向量丛 $\pi: E\to X$，这时 G 同时作用在 E 和 X 上，而 π 为 G 空间间的映射（即 π 和 G 的作用可交换）．又 G 在 E 上的作用为向量丛的自同构（即它在纤维上的限制 $g: E_x\to E_{gx}$ 是线性的）．G 向量丛上的直和和张量积，使同构类 $\mathrm{Vect}_G(X)$ 成为一个半环．在 X 为紧空间时，定义等变 K 群 $K_G(X)$ 为 $\mathrm{Vect}_G(X)$ 的 **Grothendieck 群**(Grothendieck group)．

当 $X=\mathrm{pt}$ 时，$K_G(\mathrm{pt})=R(G)$ 是 G 的表示环(representation ring)．对于有基点的空间 (X,x_0)，约化群定义为 $\widetilde{K}_G(X)=\mathrm{Ker}(K_G(X)\to K_G(x_0))$．对于（有真正(proper) G 作用的）局部紧的非紧空间，$K_G(X)=\widetilde{K}_G(X^+)$，这里 X^+ 是 X 的孤点紧

化. 高阶群由

$$K_G^{-n}(X)=\widetilde{K}_G^{-n}(X^+)=\widetilde{K}_G(S^n(X^+)),$$

$$K_G^{-n}(X,A)=\widetilde{K}_G(S^n(X^+\cup_{A^+}CA^+))$$

定义, 这里当 X 为紧时, $X^+=X\cup\{\mathrm{pt}\}$; 当 X 为局部紧的非紧空间时, X^+ 为 X 的孤点紧化, 而 S^nY 为 Y 的 n 重同纬, CZ 为 Z 上的锥.

这样定义的 $K_G^*(X,A)$ 也是一个广义上同调理论. 有关 K_G^* 的细节和应用见[A1], [A6] - [A9].

有关 K 理论的 C^* 代数推广及其衍生物的综述, 可见[A2]. 此外, R. W. Thomason 对光滑复簇上的拓扑 K 理论和代数 K 理论发现了一个极其重要的联系 (见[A3], [A4]). 实质上, Thomason 证明了, 光滑簇上的代数 K 理论, 如果取有限系数, 那么按 Bott 周期性那样的方式取局部化, 它就变成拓扑 K 理论. 前不久, 在 C^* 代数的 K 理论, Connes 循环同调和空间的 Waldhausen 代数 K 理论之间发现了一些联系. 详情可见[A5].

K 理论和表示论之间有直接的关系, 因为对紧群 G 而言, 它的分类空间 BG 的复 K 理论 $K^*(BG)$ 是复表示环 $R(G)$ 对于由增广理想 I_G 所决定的拓扑的完全化: $K^*(BG)=\widehat{R(G)}$ ([A10]).

参考文献

[A1] Segal, G. B., Equivariant *K*-theory, *Publ. Math. IHES*, **34** (1968), 129 - 151.

[A2] Blackadar, B., *K*-theory for operator algebras, Springer, 1986.

[A3] Dwyer, W. C., Friedlander, E. M., Snaith, V. P. and Thomason, R. W., Algebraic *K*-theory eventually surjects on topological *K*-theory, *Inven. Math.*, **66** (1982), 481 - 491.

[A4] Thomason, R. W., Algebraic *K*-theory and étale cohomology, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **18** (1985), 437 - 552.

[A5] Goodwillie, T. G., On the general linear group and Hochshild homology, *Ann. of Math.* (2), **121** (1985), 383 - 407.

[A6] Petrie, T. and Randall, J. D., Transformation groups on manifolds, M. Dekker, 1984.

[A7] Atiyah, M. F. and Segal, G., The index of elliptic operators II, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 531 - 545.

[A8] Illusie, L., Nombres de Chern et groupes finis, *Topology*, 7 (1968), 255 - 270.

[A9] Atiyah, M. F., Lectures on *K*-theory, Math. Inst. Harvard Univ., 1964, Mimeographed notes.

[A10] Atiyah, M. F. and Segal, G., Equivariant *K*-theory and completion, *J. Diff. Geometry*, **3** (1969), 1 - 18.

沈信耀 译 黄华乐 校

$K3$曲面 [$K3$-**surface**; $K3$-**поверхность**]

一个光滑射影**代数曲面** (algebraic surface) X, 它的**典范类** (canonical class) 是平凡的, 并且 X 上一维微分形式的空间的维数 $\dim H^1(X,\Omega^1)=0$. $K3$ 曲面的下列不变量的值是已知的: **几何亏格** (geometric genus) $p_g=\dim H^2(X,\Omega^2)=1$, 结构层的 **Euler 示性数** (Euler characteristic) $\chi(\mathcal{O})=2$, 艾达尔或 (复数域上的) 拓扑 **Betti 数** (Betti number) $b_0=b_4=1, b_1=b_3=0, b_2=22$, Euler-Poincaré 特征标 $e(X)=24$. $K3$ 曲面上的一维可逆层 D 的 Riemann-Roch 公式为:

$$\dim H^0(X,D)+\dim H^0(X,D^{-1})=$$

$$=\frac{(D)^2}{2}+2+\dim H^1(X,D),$$

其中 $(D)^2$ 是 D 所对应的除子类的自相交指数 (见 **Riemann-Roch 定理** (Riemann-Roch theorem)). 如果 D 对应于有效不可约**除子** (divisor), 则 $H^1(X,D)=0$.

X 上不可约曲线 C 的**算术亏格** (arithmetic genus) 有以下的简单公式:

$$p_a(C)=\frac{(C)^2}{2}+1.$$

因此可得 $(C)^2\geqslant-2$, 仅当光滑有理曲线时才有 $(C)^2=-2$. 而且对任何除子 D, $(D)^2$ 是偶数. 设 $N(X)$ 是曲面 X 的 Néron-Severi 群, 即 X 上除子的代数等价类群, 则 $N(X)$ 是秩为 ρ 的自由 Abel 群, 当基域 k 的特征数等于 0 时, $1\leqslant\rho\leqslant20$, 当 $\mathrm{char}\,k>0$ 时, $1\leqslant\rho\leqslant20$ 或 $\rho=22$. 相交指数在 $N(X)$ 上定义了一个整值双线性型, 使得任何元素的平方都是偶数. $\rho=20$ 的曲面 (当 $\mathrm{char}\,k=0$ 时) 称为奇异的 (singular), 而 $\rho=22$ 的曲面 (当 $\mathrm{char}\,k>0$ 时) 称为超奇异的 (supersingular).

曲面 X 的另一个数值不变量是 X 上极丰富有效除子的极小自交指数 π, 也就是 X 上极化次数的极小值. 当 $\pi=2n-2$ 时, 曲面 X 可被嵌入 n 维射影空间而不能被嵌入更低维数的射影空间.

研究 $K3$ 曲面的一个重要方法是把它们表示成椭圆曲线的族 (束). 如果给出了一个正则映射 $\tau:X\to P^1$, 使得除有限条纤维外, 其他纤维都是非异椭圆曲线, 就称曲面 X 可以表示成椭圆曲线的族. 一个曲面 X 能表示成上述形式的充分必要条件是群 $N(X)$ 含有自交指数为 0 的非零元, 所有这样的表示都与自交指数为 0 的有效除子类相对应. 如果一个被表示成椭圆曲线族的曲面是 $K3$ 曲面, 那么它没有重纤维. 从这样一个族构造出来的 Jacobi 椭圆曲线族仍是 $K3$ 曲面.

Kummer 曲面是一类重要的 $K3$ 曲面. **Kummer 曲面** (Kummer surface) 就是 2 维 Abel 簇 A 关于由变 (符) 号映射所生成的自同构子群的商的非奇异模型. 例如 P^3 内由方程 $x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4=0$ 给出的

曲面是 Kummer 曲面．P^3 里的 4 次光滑曲面都是 $K3$ 曲面．P^5 内三个二次超曲面相交而成的光滑曲面以及以 6 次光滑曲线作为分岐除子的 P^2 的二次覆叠都是 $K3$ 曲面．

复数域上的所有 $K3$ 曲面都是微分同胚的．它们的参模簇是连通的，维数等于 19．利用**周期映射**（period mapping）可以考察这个簇的结构以及 $K3$ 曲面自同构的结构．对于复数域上的 $K3$ 曲面，周期映射是一一映射（Torelli 型的定理）（[2]）．

如果给出了（C上）$K3$ 曲面的一维的族，带有一条奇异纤维，则通过基的覆盖，可以将曲面重排，而不改变奇异纤维的外部，使得这条纤维或者成为非异的，或者变成下述两种类型之一：a）奇异纤维的分支以及相交曲线是有理的，而且奇异纤维的对偶多面体的拓扑类型为 2 维球面；b）奇异纤维的分支构成一个链，只有相邻的曲面才有非空的相交，而两端的曲面是有理曲面，中间的曲面是椭圆直纹面，相交曲线是椭圆曲线．型 a）和 b）出现在当族的单演为非平凡的时候（[2]）．

正特征代数闭域上的 $K3$ 曲面可被提升到特征 0，它们的结晶上同调空间是无挠的，它们的秩等于相应的Betti 数．对于超奇异曲面也已经构造了类似的周期映射以及证明了 Torelli 型的定理．在这种情形下，周期簇是不可约、完全的、维数等于 9 而且是单有理的．对于超奇异曲面已经得出了 $N(X)$ 上所有可能的相交形式，而且对于基域的每个特征数，有 9 种相交形式（[4]）．

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965.（Тр. Матем ин-та АН СССР, т. 75）.

[2] Куликов, В.С.,《Изв.АН СССР.Сер.матем.》, 41（1977）, 5, 1008－1042.

[3] Рудаков, А. Н., Шафаревич, И. Р.,《Изв.АН СССР. Сер. матем.》, 45（1981）, 3, 646－661.

[4] Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 18, М., 1981.

[5] Bombieri, E. and Husemoller, D., Classification and embeddings of surfaces, in Algebraic geometry, Arcata 1975, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 329－420.

А. Н. Рудаков 撰

【补注】正特征数的域上 $K3$ 曲面的某些被提到的结果的证明可在[A3]和[A5]中找到．$K3$ 曲面的概念也被应用到（不一定代数的）复曲面上．每个这样的曲面有一个 Kähler 簇的结构（见 **Kähler 流形**（Kähler manifold））（[A4]）．对于复 $K3$ 曲面也有类似于 **Torelli 定理**（Torelli theorems）的定理（[A1]）．

参考文献

[A1] Burns, D. and Rappoport, M., On the Torelli theorem for Kählerian $K3$ surfaces, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 8（1975）, 235－274.

[A2] Beauville, A., et al.（ed.）, Géométrie des surfaces $K3$: modules et périodes. Sem. Palaiseau, *Astérisque*, **126**（1985）.

[A3] Ogus, A., Periods of integrals in characteristic p, in Internat, Congress Mathematicians Warszawa, 1982, PWN & North-Holland, 1983, 753－762.

[A4] Siu, Y., Every $K3$ surface is Kähler, *Invent. Math.*, 73（1983）, 139－150.

[A5] Giraud, J. et al.（eds.）, Surfaces algébriques, Lecture notes in math., 868, Springer, 1981.

[A6] Beauville, A., Surfaces algébriques complexes, *Astérisque*, **54**（1978）,

[A7] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

陈志杰 译

Kac-Moody 代数 [**Kac-Moody algebra**; **Кац-Муди алгебра**]

【补注】 设 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是满足条件

$$\left.\begin{array}{c} a_{ii}=2;\ 对\ i\neq j,\ a_{ij}\leqslant 0\ 且\ a_{ij}\in\mathbf{Z}, \\ a_{ij}=0\Rightarrow a_{ji}=0, \end{array}\right\}\quad (A1)$$

的 $n\times n$ 矩阵（见 **Cartan 矩阵**（Cartan matrix））．对应的 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 是 $\mathbf{C}$ 上由 $3n$ 个元素 e_i, f_i, h_i（称为 Chevalley 生成元（Chevalley generators））生成，且满足下述定义关系的一个 Lie 代数：

$$\left.\begin{array}{l} [h_i, h_j]=0,\ [e_i, f_i]=h_i, \\ [e_i, f_j]=0,\ 若\ i\neq j, \\ [h_i, e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i, f_j]=a_{ij}f_j, \\ (\mathrm{ad}\,e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0, \\ (\mathrm{ad}\,f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0,\ 若\ i\neq j. \end{array}\right\}\quad (A2)$$

Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 是有限维的，当且仅当矩阵 A 是正定的（即 A 的主子式均为正，亦见**子式**（minor））．用这种方法可以得到 $\mathbf{C}$ 上所有的有限维半单 **Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple）．从而，Kac-Moody 代数是有限维半单 Lie 代数的无穷维类似．

关于 Kac-Moody 代数的系统性研究是由 V. G. Kac（[A1]）和 R. V. Moody（[A2]）相互独立地开始的，紧接着有限维半单 Lie 代数理论中很多结果被引入 Kac-Moody 代数．这个理论的主要技术工具是广义 Casimir 算子（见 **Casimir 元素**（Casimir element）），它要在 A 是可对称化的假定下，即对某个可逆对角矩阵 D 和某个对称矩阵 B，有 $A=DB$（[A3]），才可以构造出来．在非可对称化的情况下要使用更牵强的几何方法（[A4]，[A5]）．

Kac-Moody 代数理论的最重要的部分之一是可积最高权表示（亦见**具有最高权向量的表示**（representation with a highest weight vector））. 给定一个 n 元非负整数向量 $\Lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 的可积最高权表示 π_Λ 是在复向量空间 $L(\Lambda)$ 上的一个不可约表示，它由下述性质确定，即有非零向量 $v_\Lambda\in L(\Lambda)$, 使得

$$\pi_\Lambda(e_i)v_\Lambda=0, \text{ 且 } \pi_\Lambda(h_i)v_\Lambda=\lambda_i v_\Lambda, i=1,\cdots,n.$$

注意，π_Λ 恰好是一个有限维 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 的所有的有限维不可约表示.

可积最高权表示理论的最基本的结果是 Weyl-Kac 特征标公式（[A3]），它给出了 x_i 的形式幂级数 $\mathrm{tr}_{L(\Lambda)}e^{\sum_i x_i\pi_\Lambda(h_i)}$ 用 Λ 表达的显示（亦见**特征标公式**（character formula））.

Kac-Moody 代数的大量应用主要与下述事实有关，即由一个半正定不可分解 Cartan 矩阵（称为仿射矩阵（affine matrices））确定的 Kac-Moody 代数有一个非常明确的结构.（一个矩阵称为不可分解的（indecomposable），如果它不能由指标集的任意置换变成分块对角阵.）这些 Kac-Moody 代数称为仿射代数（affine algebras））.

下面给出一个"非扭曲（non-twisted）"的仿射代数的结构. 设 A 是一个正定的不可分解 Cartan 矩阵，并设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ 是由 A 确定的带有 Chevalley 生成子 $E_i, F_i, H_i(i=1,\cdots,r)$ 的有限维单 Lie 代数. 在 $\mathfrak{g}$ 中有唯一的（不计常数乘）非零元素 E_0（相应地，F_0），使得 $[E_0,F_i]$（相应地，$[F_0,E_i]$）对于 $i=1,\cdots,r$ 等于零. 那么，$[E_0,F_0]=H_0$ 是 $H_i(i=1,\cdots,r)$ 的一个线性组合且可用条件 $[H_0,E_0]=2E_0$, $[H_0,F_0]=-2F_0$ 把 E_0 和 F_0 标准化. 于是，对 $i=1,\cdots,r$, $[H_0,E_i]=a_{0i}E_i$, $[H_i,E_0]=a_{i0}E_0$, 其中 a_{0i} 是确定的非正整数，且可令

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} 2 & a_{01} & \cdots & a_{0r} \\ a_{10} & & & \\ \cdot & & A & \\ a_{r0} & & & \end{bmatrix}.$$

这是一个满足（A1）的半正定 $(r+1)\times(r+1)$ 矩阵（称为 $\mathfrak{g}$ 的扩充 Cartan 矩阵（extended Cartan matrix））. 这些矩阵和所有的仿射矩阵，均已在**分次 Lie 代数**（Lie algebra, graded）中列出. 由 $A^{(1)}$ 确定的仿射代数

$$\mathfrak{g}(A^{(1)})=\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\mathfrak{g}^{(n)}\right)+\mathbf{C}k,$$

其中 $\mathfrak{g}^{(n)}$ 是处于第 n 个位置上的 $\mathfrak{g}$, k 是一个中心元（central element）（即 $[k,\mathfrak{g}(\hat{A}^{(1)})]=0$），并有下列交换关系

$$[x^{(m)},y^{(n)}]=[x,y]^{(m+n)}+m\delta_{m,-n}(x|y)k.$$

这里 $x,y\in\mathfrak{g}$, $x^{(n)}$ 表示取之于 $\mathfrak{g}^{(n)}$ 的元素 x, 而 $(\cdot|\cdot)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上用条件 $(H_0|H_0)=2$ 正规化了的 **Killing 型**（Killing form）.（注意，对于 $\mathfrak{g}=\mathrm{sl}_n(\mathbf{C})$, 有 $(x|y)=\mathrm{tr}\,xy$.）$\mathfrak{g}(A^{(1)})$ 的标准生成元是

$$e_0=E_0^{(1)}, f_0=F_0^{(-1)}, h_0=c-H_0^{(0)},$$
$$e_i=E_i^{(0)}, f_i=F_i^{(0)},$$
$$h_i=H_i^{(0)}, i=1,\cdots,r.$$

用更几何化的术语，$\mathfrak{g}(A^{(1)})$ 乃是圈代数（loop algebra）（由 $\mathbf{C}k$）的中心扩张，即 $\mathbf{C}^*$ 到 $\mathfrak{g}$ 的正则映射的 Lie 代数，

$$\mathfrak{g}(A^{(1)})=(\mathbf{C}(z,z^{-1}]\otimes_C\mathfrak{g})+\mathbf{C}k.$$

这种考查引出了仿射代数及其相应的群（称为圈群（loop group））的几何应用（见[6]）.

在一个可积最高权表示 π_Λ 中，中心元 k 的作用可看作一个非负整数的纯量乘，仍记作 k, 称之为 π_Λ 的水平（level）. 仅有的水平为 0 的 π_Λ 是平凡表示. 仿射代数表示理论的一个显著特点是水平为 1 的 π_Λ 存在明显的典型结构. 下面阐述对于 $\pi=\pi_{\Lambda_0}(\Lambda_0=(1,0,\cdots,0))$ 的最简单的"顶点算子"的构作. 顶点算子（vertex operators）定义如下. 设 $\mathfrak{h}$ 是一个带有对称双线性形 $(\cdot|\cdot)$ 的 r 维复空间，Q 是 $\mathfrak{h}$ 中的一个秩为 r 的格. 对每个 $n\in\mathbf{Z}$, 将 $\mathfrak{h}$ 记作 $\mathfrak{h}^{(n)}$, 并令 $\mathfrak{h}^-=\otimes_{n<0}\mathfrak{h}^{(n)}$. 设 $S(\mathfrak{h}^-)$ 是 $\mathfrak{h}^-$ 上的对称代数，并设 $\mathbf{C}(Q)$ 是 Q 的群代数，带有一个用 $\alpha\mapsto e^\alpha$ 表示的 $Q\to\mathbf{C}(Q)$ 的包含关系. 考虑复数域上的交换结合代数，

$$V=S(\mathfrak{h}^-)\otimes_C\mathbf{C}[Q].$$

对于 $u\in\mathfrak{h}$ 和 $n\in\mathbf{Z}$ 如下定义 V 上的一个算子 $u(n)$. 对于 $n>0$, $u(-n)$ 是 $u^{(-n)}\in\mathfrak{h}^{(-n)}$ 的乘法算子；对于 $n\geqslant 0$, $u(n)$ 是由

$$u(n)(u_1^{(-n_1)})=n(u|u_1)\delta_{n,n_1},$$
$$u(n)(e^\alpha)=\delta_{n,0}(u|\alpha)e^\alpha$$

确定的导子. 对于使 $(\gamma|\gamma)=2$ 的 $\gamma\in Q$, 定义顶点算子

$$X(\gamma,z)=\left[\exp\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^j}{j}\gamma(-j)\right]\times$$
$$\times\left[\exp-\sum_{j\geqslant 1}\frac{z^{-j}}{j}\gamma(j)\right]e^\gamma z^{\gamma(0)},$$

其中 $z\in\mathbf{C}^*$. 展成 z 的幂，$X(\gamma,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}X_n(\gamma)$

$\times z^{-n-1}$，可得 V 上一系列算子 $X_n(\gamma)$．现在设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有 Cartan 矩阵 $A=A_l, D_r$ 或 E_r 的单 Lie 代数，选取 $\mathfrak{g}$ 的一个 **Cartan 子代数**（Cartan subalgebra）$\mathfrak{h}$，令 $Q\subset\mathfrak{h}$ 是根格（用形式（·|·）把 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}^*$ 等同起来），再设 $\Delta=\{\alpha\in Q:(\alpha|\alpha)=2\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的**根系**（root system）．选择 Q 上取值 ±1 的双乘法函数 $\varepsilon(\alpha,\beta)$，使得 $\varepsilon(\alpha,\alpha)=(-1)^{(\alpha|\alpha)/2}$．对于 $\gamma\in Q$，定义 V 上的一个算子 c_γ，使得 $c_\gamma(f\otimes e^\beta)=\varepsilon(\gamma,\beta)f\otimes e^\beta$．那么，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbf{C}E_\alpha$ 具有交换关系：

$$\text{对 } h\in\mathfrak{h},\ [h,h]=0;\ [h,E_\alpha]=(a|h)E_\alpha;$$

$$\text{如果 } \alpha+\beta\notin\Delta\cup\{0\},\ [E_\alpha,E_\beta]=0;$$

$$[E_\alpha,E_\alpha]=-\alpha;\ \text{如果 } \alpha+\beta\in\Delta,\ [E_\alpha,E_\beta]=$$

$$=\varepsilon(\alpha,\beta)E_{\alpha+\beta}.$$

于是 $\mathfrak{g}(A^{(1)})$ 的基础表示可由下列公式在 V 上定义（[A11]）：

$$\pi(u^{(n)})=u(n),\ u\in\mathfrak{h};$$

$$\pi(E_\alpha^{(n)})=X_n(\alpha)c_\alpha;\ \pi(\dot{k})=1.$$

称为基础表示的齐性顶点算子结构．

顶点算子是 1969 年前后在根链理论中被引入的，但顶点算子结构进入根链理论是在 20 世纪 80 年代中期它自身兴起以后．这样，仿射代数的表示论就变成了**根链理论**（string theory）的一个重要组成部分．

顶点算子甚至在有限单群理论中也是有用的．事实上，在 Leech 格（Leech lattice）上的齐次顶点算子结构的一个扭曲产生了 196883 维 Griess 代数及其自同构群——著名的有限单 Monster 群（见**散在单群**（sporadic simple group））（[A13]）．

顶点算子结构还相当出人意料地被用于**孤立子**（soliton）方程理论．它基于这样的考察（见[A14]），即基础表示的向量 v_{Λ_0} 在圈群作用下的轨道满足偏微分方程的一个无限谱系，这些方程中最简单的就是经典孤立子方程，如 **Korteweg-de Vries 方程**（Korteweg-de Vries equation）．

仿射代数表示理论与保形场论的联系可由菅原正博构造（Sugawara construction）给出．设 $\mathfrak{g}(A)$ 是个有限维单代数，而 $\mathfrak{g}(A^{(1)})$ 是相应的仿射代数．选择 $\mathfrak{g}(A)$ 的基 u_i 和 v_i，使得 $(u_i|v_j)=\delta_{ij}$．令

$$L_0=\frac{1}{2(k+h^v)}\left[\sum_i\left(u_iv_i+2\sum_{n>0}u_i^{(n)}v_i^{(n)}\right)\right],$$

$$L_m=\frac{1}{2(k+h^v)}\sum_i\sum_{n\in\mathbf{Z}}u_i^{(n)}v_i^{(m+n)},\ \text{若 } m\neq0.$$

这里 h^v 是对偶 Coxeter 数（由 Killing 形 $=2h^v\times(\cdot|\cdot)$ 定义）．那么，就有

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}\delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12}c(k),$$

其中

$$c(k)=\frac{k\dim\mathfrak{g}(A)}{k+h^v},$$

从而产生了 **Virasoro 代数**（Virasoro algebra）的一个表示．

用 $\exp2\pi i\tau$ 的适当的方幂去乘，一个仿射代数的水平 k 的可积最高权表示的特征标可以写成如下形式：

$$\chi_\Lambda(\tau,z)=\operatorname{tr}_{L(\Lambda)}e^{2\pi i\tau(L_0-c(k)/24)+2\pi iz},$$

其中 $\tau\in\mathbf{C}$，且 $z\in\mathfrak{h}$．这是一个序列，对 $\operatorname{Im}\tau>0$，它收敛于一个**模函数**（modular function）．进一步，一个固定水平 k 的 Λ 的函数 $\chi_\Lambda(\tau,0)$ 的线性张成在模变换

$$\tau\mapsto\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$$

之下是不变的，且变换 $\tau\mapsto-1/\tau$ 的矩阵 S 是明确知道的（[A7]）．例如，在 $\mathfrak{g}=\mathrm{sl}_2(\mathbf{C})$ 的情形下，

$$S=\left[\sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\frac{\pi(r+1)(s+1)}{k+2}\right]_{r,s=0}^{k}.$$

这一结果成为仿射代数表示理论的一个关键事实，如同它对保形场论（见[A8]），2 维格模型（[A9]），甚至**扭结理论**（knot theory）（[A10]）的应用一样．

参考文献

[A1] Кац, В. Г.,《Изв. АН СССР. Сер. матем》, **32** (1968), 6, 1323 - 1367.

[A2] Moody, R. V., A new class of Lie algebras, J of Algebra, **10** (1968), 211 - 230.

[A3] Kac, V. G., Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's η-function, *Funct. Anal. Appl.*, **8** (1974), 68 - 70.

[A4] Kumar, S., Demazure character fomula in arbitrary Kac-Moody setting, *Invent. Math.*, **89** (1987), 395 - 423.

[A5] Mathieu, O., Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales, Astérisque, **159 - 160** (1988), 1 - 266.

[A6] Presseley, A. and Segal, G., Loop groups, Oxford Univ. Press, 1986.

[A7] Kac, V. G. and Peterson, D. H., Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, *Adv. in Math.*, **53** (1984), 125 - 264.

[A8] Verlinde, E., Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, *Nucl. Phys*, **B300**,

360 – 375.

[A9] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T. and Okado, M., Exactly solvables SOS models, *Nucl. Phys*, **B 290** (1987), 231 – 273.

[A10] Yang, C. N. and Ge, M. L.(eds.), Braid group, knot theory and statistical mechanics, World Scientific, 1989.

[A11] Frenkel, I. B. and Kac, V. G., Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, *Invent Math.*, **62** (1980), 23 – 66.

[A12] Green, M. B., Schwarz, J. H. and Witten, E., Superstring theory, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A13] Frenkel, I., Lepowsky, J. and Meurman, A., Vertex operator algebras and the Monster, Acad. Press, 1989.

[A14] Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M. and Miwa, T., Transformation groups for soliton equations, in M. Jimbo and T. Miwa (eds.), Proc. RIMS Symp., World Scientific, 1983, 39 – 120.

[A15] Kac, V. G., Infinite-demensional Lie algebras, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A16] Kac, V. G. and Raina, A. K., Bombay lectures on highest weight representations, World Scientific, 1987.

牛凤文 译

Kähler 形式 [Kähler form; Кэлерова форма]

复流形(complex manifold)上 **Kähler 度量**(Kähler metric)的基本形式. Kähler 形式是(1, 1)型的调和实**微分形式**(differential form). 复流形 M 上微分形式 ω 是 Kähler 度量的 Kähler 形式, 当且仅当每点 $x\in M$ 都有一个邻域 U, 使得在 U 中

$$\omega = i\partial\bar{\partial}p = i\sum \frac{\partial^2 p}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

其中 p 是 U 中的严格**多重次调和函数**(plurisubharmonic function), $z_1, \cdots, z_n$ 是复局部坐标.

若一个 Kähler 形式对应一 Hodge 度量, 即它具有整数周期, 或等价地, 它定义一整数上同调类, 则它称为 Hodge 形式(Hodge form).

参考文献

[1] Wells, Jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

关于 Kähler 度量的基本形式, 见 **Kähler 度量**(Kähler metric).

参考文献

[A1] Weil, A., Introduction à l'étude des variétés kahlériennes, Hermann, 1958.

沈一兵 译

Kähler 流形 [Kähler manifold; Кэлерово многообразие]

容许 **Kähler 度量**(Kähler metric)的**复流形**(complex manifold). 有时它称为 Kähler 型流形(manifold of Kähler type), 而术语"Kähler 流形"专指已确实具备一 Kähler 度量的流形([1]). Kähler 流形的任何复子流形是 Kähler 流形. 特别, 一切无奇点的射影复代数簇都是 Kähler 流形, 而且它们的 Kähler 度量是由复射影空间上的 **Fubini-Study 度量**(Fubini-Study metric)所诱导的. 类似地, 仿射空间 $\mathbf{C}^n$ 中的每个复子流形(特别是每个 **Stein 流形**(Stein manifold))是 Kähler 流形. 若考虑由一 Kähler 流形 M 被保持 Kähler 度量的解析自同构离散群 Γ 作用所得的商空间 M/Γ, 则可得 Kähler 流形的其他例子. 特别是, 每个**复环面**(complex torus)是 Kähler 流形. 任何一维的复流形是 Kähler 的.

紧 Kähler 流形 M 上的调和形式理论产生 M 上 de Rham 和 Dolbeault 上同调群的下述性质(见[1], [2], 或[5], 在那里这些性质最早是对射影代数簇建立的):

$$H^r(M, \mathbf{C}) \cong \oplus \sum_{p+q=r} H^{p,q}(M),$$

$$H^{p,q}(M) \cong H^{q,p}(M),$$

$$\dim H^{2r+1}(M, \mathbf{C}) \text{ 是偶数},$$

$$\text{若 } r = 1, \cdots, \frac{1}{2}\dim_{\mathbf{C}} M, \text{ 则 } H^{2r}(M, \mathbf{C}) \neq 0.$$

紧 Kähler 流形上的全纯形式是闭的. 特别,

$$H^1(M, \mathbf{C}) \cong A^1 \oplus \bar{A}^1,$$

其中 A^1 是 M 上所有全纯 1 形式的空间. 若 $\dim_{\mathbf{C}} M = 1$, 则数

$$\dim A^1 = \frac{1}{2}\dim H^1(M, \mathbf{C})$$

是 M 作为紧 Riemann 曲面的亏格(见**曲面的亏格**(genus of a surface); **Riemann 曲面**(Riemann surface)). 上述性质为构造非 Kähler 的紧流形提供了基础, 最简单的是 Hopf 曲面, 它微分同胚于 $S^1 \times S^3$.

Kähler 流形 M 被称为 **Hodge 簇**(Hodge variety), 若它的 Kähler 度量是 Hodge 度量. 无奇点的射影代数簇关于由 Fubini-Study 度量诱导的度量是 Hodge 簇. 反之, 任何具备 Kähler-Hodge 度量 η 的紧复流形 M 都能双全纯地嵌入复射影空间中, 使得 Fubini-Study 度量在 M 上诱导的度量可表示为 $k\eta$, 其中 k 是某个自然数(小平射影嵌入定理(Kodaira projective imbedding theorem [1], [3]). 因此, 一个紧复流形 M 同构于一射影代数簇, 当且仅当它是 Hodge 簇. 这个特征的另一形式是: 一个紧复流形 M 是一射影代数簇, 当且仅当它容许一个**负向量丛**(negative vector bundle). 小平定理可推广到复空间(见[4], [6]). 在二维复环面中可找到非 Hodge 簇的紧

Kähler 流形. 例如，环面 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ 就是这样的情形，其中 Γ 是由向量 $(1,0)$，$(0,1)$，$(\sqrt{-2},\sqrt{-3})$，$(\sqrt{-5},\sqrt{-7})$ 张成的格(见[1]，[3]). 一个 n 维紧 Kähler 流形 M 是射影的另一充分必要条件是 M 上存在 n 个代数独立的亚纯函数([8]).

具有正**截面曲率** (sectional curvature) 的任何非紧完全 Kähler 流形是 **Stein 流形** (Stein manifold). 对于非正截面曲率的任何单连通的完全 Kähler 流形，同样的论断也真([7]).

参考文献

[1] Wells, Jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[2] Weil, A., Introduction à l'ètude des variétés kählériennes, Hermann, 1958.

[3] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

[4] Gunning, R. C. & Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[5] Hodge, W. V. D., The theory and application of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 1952.

[6] Grauert, H., Ueber Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 331 – 368.

[7] Green, R. E. & Wu, H., A theorem in complex geometric function theory, in Value-distribution Theory, Vol. A, M. Dekker, 1974, 145 – 167.

[8] Moishezon, B. G., On n-dimensional compact complex manifolds possessing n algebraically independent meromorphic functions Ⅰ－Ⅲ, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **30** (1966), 133 – 174; 345 – 386; 621 – 656 (俄文).

A. Л. Онищик 撰

【补注】 一个紧复曲面是 Kähler 的，当且仅当它的第一 **Betti 数** (Betti number) 是偶数.

设 M 是(复) m 维的紧复流形，g 是 M 的 Kähler 度量，ω 是它伴随的 $(1,1)$ 形式. (若在局部坐标下 $g=\sum g_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha\otimes d\bar z^\beta$，则 $\omega \doteq \sum g_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha\wedge d\bar z^\beta$；这里使 ω 与所给的 g 有相同的分量.) 用 Ric_g 表示 (M,g) 的 Ricci 曲率张量，并设 γ_ω 是与 Ric_g 相伴随的 $(1,1)$形式. 那么，[A1]，γ_ω 的上同调类是 2π 乘以 M 的第一陈类：$[\gamma_\omega]=2\pi c_1(M)$.

现设 $\tilde\gamma$ 是 (M,ω)上给定的 $(1,1)$ 形式，使得 $[\gamma]=2\pi c_1(M)$. Calabi 猜想说，在 ω 的同一类里恰好存在一 Kähler 形式 $\tilde\omega$，使得 $\tilde\gamma=\gamma_{\tilde\omega}$. E. Calabi 证明了唯一性.

一个相关的猜想是：设 M 是具有负第一陈类的紧复流形，则存在唯一的 Kähler 形式 ω 使得 $\gamma_\omega=-\omega$.

这样的度量称为 Einstein-Kähler 度量. (若 Riemann 度量 g 使 $\mathrm{Ric}_g=kg$，k 是某个常数，则 g 称为 Einstein 度量.)

Calabi 猜想(存在性)被丘成桐(S. T. Yau)证得([A4]，[A5])，而第二个猜想被 T. Aubin([A6])和丘成桐([A5])分别证得.

若 Kähler 流形 M 的第一陈类消失(因而 M 上存在 Ricci 平坦度量)，则 M 称为 Calabi-丘流形.

在理论物理中，这些流形作为 10 维超弦理论中"剩余 6 维"的最佳候选者，是最普遍感兴趣的，即这个 10 维空间的载体空间似乎是 $M^4\times K$，其中 M^4 是 4 维 Minkowski 空间，K 是 6 维("小的") Calabi-丘流形.

(具有非零 Euler 数(= **Euler 示性数** (Euler characteristic))的) Calabi-丘流形提供了与超弦运动方程相一致的仅有的"紧化" $M^4\times K$. 与这方面有关的部分参考文献是[A8]－[A12].

参考文献

[A1] Chern, S. S., Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 85 – 121.

[A2] Calabi, E., The space of Kähler metrics, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Amsterdam, Vol. 2, Noordhoff, 1954, 206 – 207.

[A3] Calabi, E., On Kähler manifolds with vanishing canonical class, in R. H. Fox, D. C. Spencer and A. W. Tucker (eds.): Algebraic geometry and topology. Symp. in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press, 1955, 78 – 89.

[A4] Yau, S.-T., On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74** (1977), 1798 – 1799.

[A5] Yau, S.-T., On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation Ⅰ, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31** (1978), 339 – 411.

[A6] Aubin, T., Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **283** (1976), 119 – 121.

[A7] Bourguignon, J.-P., Premières formes de Chern des variétés Kähleriennes compactes, in Sem. Bourbaki 1977/1978, Exp. 507, Springer, 1979, 1 – 21.

[A8] Huebsch, T., Calabi-Yau manifolds-motivations and constructions, *Comm. Math. Phys.*, **108** (1987), 291 – 318.

[A9] Green, M. B., Schwarz, J. H. and Witten, E., Superstring theory, 2. Loop amplitudes, anomalies & phenomenology, Cambridge Univ. Press, 1987, p. 438 ff.

[A10] Candelas, P., Horowitz, G., Strominger, A. and Witten, E., Vacuum configurations for superstrings, Nuclear Physics, **B258** (1958), 46 – 74.

[A11] Wit, B. de, Smit, D. J. and Hari-Dass, N. D.,

Residual supersymmetry of compactified d =10 supergravity, Nuclear Physics, **B 283** (1987), 165 – 191.
[A12] Gepner, D., Exactly solvable string compactifications on manifolds of SU(N) holonomy, Physics Letter, **B 199** (1987), 380 – 388.
[A13] Première classe de Chern et courbure de Ricci: preuve de la conjecture de Calabi, Sem. Palaiseau 1978, Soc. Math. France, 1978.
[A14] Siu, Y.-T., Lectures on Hermitean-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics, Birkhäuser, 1987. 沈一兵 译

Kähler 度量 [Kähler metric; Кэлера метрика]

Kähler 度量(Kählerian metric),**复流形**(complex manifold)上的一种 **Hermite 度量**(Hermitian metric),它的基本形式 ω 是闭的,即满足条件 $d\omega=0$. 例子: $\mathbf{C}^n$ 中的 Hermite 度量 $\sum_{k=1}^n |dz_k|^2$; 复射影空间 $\mathbf{C}P^n$ 的 **Fubini-Study 度量**(Fubini-Study metric); 在 $\mathbf{C}^n$ 的一个有界域上的 Bergman 度量(见 **Bergman 核**(Bergman kernel)). 复流形上的 Kähler 度量在任何复子流形上诱导一个 Kähler 度量. 一维(复)流形上的任何 Hermite 度量是 Kähler 度量.

这个概念最早由 E. Kähler ([1]) 所研究. 同时,在代数几何中,射影代数流形上由 Fubini-Study 度量诱导的度量得到了系统的应用(见[5]). 这就是 Hodge 度量(Hodge metric),即它的基本形式具有整数周期.

复流形上的一个 Hermite 度量 h 是 Kähler 度量,当且仅当它满足下列条件之一: 沿任何曲线的平行移动(关于 Levi-Civita 联络)是复线性映射,即它与复结构算子可交换; 作用在微分形式上的对应于度量 h 的复 Laplace 算子 $\square$ 满足条件 $\overline{\square}=\square$,即 **Laplace 算子**(Laplace operator) Δ 恰好是 $2\square$; 在任一点的邻域内可引入局部坐标,使得 h 的矩阵在二阶量范围内与单位矩阵重合.

参考文献

[1] Kähler, E., Ueber eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **9** (1933), 173 – 186.
[2] Weil, A., Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, 1958.
[3] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976 (译自法文).
[4] Wells, Jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.
[5] Hodge, W. V. D., The theory and application of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 1952.
[6] Deligne, P., Griffiths, P., Morgan, J. and Sullivan, D., The real homology of Kaehler manifolds, *Invent. Math.*, **29** (1975), 245 – 274. А. Л. Онищик 撰

【补注】 在复流形上 Hermite 度量 h 可用局部坐标表示为 Hermite 对称张量:

$$h=\sum_{\mu,\nu} h_{\mu\nu}(z)\,dz_\mu \otimes d\bar{z}_\nu,$$

其中 $(h_{\mu\nu})$ 是正定的 Hermite(对称)矩阵(即 $\overline{(h_{\mu\nu})}^T=(h_{\mu\nu})$ 并且对一切 $w_0\in\mathbf{C}^n$ 有 $\bar{w}_0^T(h_{\mu\nu})w_0>0$). 于是,伴随的基本形式是

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu} h_{\mu\nu}(z)\,dz_\mu \wedge d\bar{z}_\nu.$$

沈一兵 译

角谷定理 [Kakutani theorem; Какутани теорема]

设 X 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空紧子集, X^* 为其子集的集合. 再设 $f: X \to X^*$ **为上半连续映射**(semi-continuous mapping),使得对所有 $x\in X$, $f(x)$ 是非空闭凸集; 则 f 具有不动点(即存在点 $x\in X$, 使得 $x\in f(x)$). 角谷静夫指出([1]): 由此定理可得出有限对策的**极小化极大原理**(minimax principle).

参考文献

[1] Kakutani, S., A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 3, 457 – 459.
[2] Fan, Ky, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38** (1952), 121 – 126.
[3] Nikaido, H., Convex structures and economic theory, Acad. Press, 1968. А. Я. Кирута 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dugundji, J. and Granas, A., Fixed point theory, 1, PWN, 1982. 白苏华、胡师度 译

Канторович 方法 [Kantorovich process; Канторовича процесс]

改进近似求解非线性泛函(算子)方程的根的一种迭代法(**Newton 法**(Newton method)的一种推广). 对于方程 $P(x)=0$, 其中 P 是从一个 Banach 空间到另一个 Banach 空间的非线性算子,其根的计算公式为

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n).$$

(这里 P' 为 **Fréchet 导数**(Frechet derivative).) 有时还使用由下式给出的改进方法

$$\tilde{x}_{n+1}=\tilde{x}_n-[P'(x_0)]^{-1}P(\tilde{x}_n).$$

假设算子 P 为二次连续可微且下列条件成立(见[2]):

1) 线性算子 $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$ 存在;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leqslant\eta$;

3) $\| \Gamma_0 P''(x) \| \leqslant K$, 当 $\| x - x_0 \| \leqslant r$;

4) $h = k\eta \leqslant 1/2$;

5) $r \geqslant r_0 = (1 - \sqrt{1-2h})\eta / h$.

那么，方程 $P(x) = 0$ 有解 x^*，满足

$$\| x^* - x_0 \| \leqslant r_0 .$$

序列 x_n 和 $\tilde{x}_n$ 都收敛到这个解，而且有

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{(2h)^{2^n}\eta}{2^n h} .$$

当 $h < 1/2$ 时

$$\| x^* - \tilde{x}_n \| \leqslant \frac{(1 - \sqrt{1-2h})^{n+1}\eta}{h} .$$

若 P 充分光滑，$[P'(x^*)]^{-1}$ 存在，而且初始值 x_0 取得充分接近 x^*，则 Канторович 过程总能收敛到方程 $P(x) = 0$ 的根 x^*. 假如 $P''(x)$ 存在、连续，则基本方法的收敛是二次的．改进方法的收敛速度与某递降几何级数相当，该级数的通项当 $x_0 \to x^*$ 时趋向于零.

此方法是由 Канторович, Л. В. ([1]) 提出的.

参考文献

[1] Канторович, Л. В., 《Докл. АН СССР》, 59 (1948), 1237 - 1240.

[2] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959 (英译本: Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P., Functional analysis in normed spaces, Pergamon, 1964).

[3] Красносельский, М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

[4] Collatz, L., Funktional analysis und numerische Mathematik, Springer, 1964.

И. К. Даугавет 撰

【补注】改进方法亦称为 Newton-Raphson 法 (Newton-Raphson method).

参考文献

[A1] Denis, Jr. J. E. and Schnable, R., Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations, Prentice-Hall, 1983.

[A2] Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad. Press, 1970 (中译本: J. M. 奥特加, W.C. 莱因博尔特, 多元非线性方程组迭代解法, 科学出版社, 1983).

张宝琳、袁国兴 译

κ 曲线 [kappa; каппа]

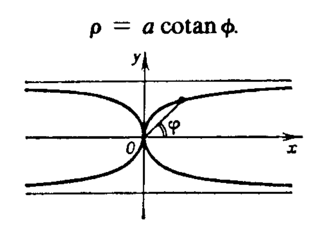
一种四次平面代数曲线，其方程在 Descartes 直角坐标中为

$$(x^2 + y^2)y^2 = a^2 x^2;$$

在极坐标中为

$$\rho = a \operatorname{cotan} \varphi .$$

$$\rho = a \operatorname{cotan} \phi.$$



坐标原点为结点，具有两条重合的切线 $x = 0$ (见图)．两条渐近线是直线 $y = \pm a$. 它与所谓结点有关 (见几何学中的**结点** (node)).

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

河口空间 [Kawaguchi space; Кавагути пространство]

一个光滑的 n 维流形 V_n，其上正则曲线 $x = x(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$ 的弧素 ds 可用下列公式表示：

$$ds = F\left[x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^p x}{dt^p} \right] dt, \qquad (1)$$

其中函数 F 满足 Zermelo 条件：

$$\sum_{s=1}^{p} s x^{(s)i} F_{(s)i} = F, \quad \sum_{s=r}^{p} \binom{s}{p} x^{(s-r+1)i} F_{(s)i} = 0,$$

$$r = 2, \cdots, p, \qquad (2)$$

这里

$$x^{(s)i} = \frac{d^s x^i}{dt^s}, \; F_{(s)i} = \frac{\partial F}{\partial x^{(s)i}} .$$

条件 (2) 保证弧素 ds 与曲线 $x = x(t)$ 的参数化无关.

河口空间的一般理论最先由河口商次提出 (见 [1])．研究河口空间的基础在于在各种齐性空间中会遇到形如 (1) 式的弧素 (例如，仿射弧和射影弧)．后来证实 (见 [2]): 在任何**齐性空间** (homogeneous space) 中都存在一不变河口度量 (1)，它的自同构群与齐性空间的变换群相同．河口空间的一般理论的基本原理是沿着广义张量分析和平行移动的公式化思路来发展的．河口把纤维空间考虑作他的基本空间，此纤维空间的底空间是 $q = 2p - 1$ 阶线素 $(x^i, x^{(s)i})$ $(s = 1, \cdots, q)$ 的空间，而它的纤维是与 V_n 相切的 n 维向量空间 T^n. 反变向量 $V^i(x^k, x^{(s)k})$ 的共变微

分由下列共变微分算子来定义：

$$\nabla V^i = dV^i + \sum_{s=0}^{q} \overset{(s)}{\Gamma}{}^i_{kj} V^k dx^{(s)j},$$

$$\nabla x^{(s)i} = \mu_j^{si}\left[dx^{(s)j} + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \Lambda_{\sigma k}^{sj} dx^{(\sigma)k}\right],$$

$$s = 1, \cdots, q,$$

其中 $\overset{(s)}{\Gamma}{}^i_{kj}$，$\mu_j^{si}$ 和 $\Lambda_{\sigma k}^{sj}$ 依赖于 $q = 2p - 1$ 阶线素．这些算子可以用度量函数和由它定义的度量张量 g_{ij} 的三重扩张来构造，后者也依赖于 $2p-1$ 阶线素．利用上述构造，河口空间的一般理论并未能十分完全地发展，部分因素是，线素底空间的阶数 q 表明它比定义度量函数 F 的空间的阶数 p 更高，而且河口空间的所有微分不变量也必定义在后者空间上．

研究河口空间的其他可能性是基于纤维空间的现代理论、射流理论和非线性联络理论．沿着这种思路，并应用扩张和包络的微分代数方法，对于一大类河口空间，在适当选择的纤维空间下，已找到了一种可简约的线性联络，这种纤维空间的底空间是 p 阶线素的空间．这个联络的（联络）形式的结构方程给出了河口空间的张量不变量的完整系，在此基础上人们可以对于某些重要的河口空间类叙述不变量准则．

在广义空间微分几何学中，研究具下列形式的度量的特殊河口空间有着重大的作用：

$$ds = (A_i x''^i + B)^{1/k} dt,$$

其中 A_i 和 B 是 x' 和 x'' 的函数．这就使这些空间接近于 **Finsler 空间**（Finsler space）．在此情况下，河口的一般理论变得不能适用，因为度量张量 g_{ij} 是蜕化的．所以，引入下列不对称张量：

$$G_{ik} = 2A_{i(k)} - A_{k(i)}, \quad A_{i(k)} = \frac{\partial A_i}{\partial x'^k},$$

它在一般情况下是非蜕化的．与这类空间孑然不同，一般型的河口空间是高阶的**微分几何结构**（differential-geometric structure）．

河口空间的研究也被用来寻找研究下列形状积分的变分问题的几何途径：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F\left[x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^p x}{dt^p}\right] dt.$$

参考文献

[1] Kawaguchi, A., Theory of connections in a Kawaguchi space of higher order, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **13** (1937), 237 – 240.

[2] Лосик, М. В., в кн., Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, **12** (1963), 213 – 237.

[3] Близникас, В. И., в кн., Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия., 1967, М., 1969, 73 – 125.

Л. Е. Евтушик 撰 沈一兵 译

Келдыш - Лаврентьев 例 [**Keldysh - Lavrent'ev example**; **Келдыша - Лаврентьева пример**]

复数 z 平面中单连通区域 Δ 的例子，它由可求长 Jordan 曲线围成但不属于 Смирнов 区域类 S（见 **Смирнов 区域**（Smirnov domain））．

设 $z = f(w)$ 是一个函数，实现单位圆盘 $E = \{w: |w| < 1\}$ 到一个由可求长 Jordan 曲线围成的单连通区域 D 的**共形映射**（conformal mapping）．已知 $f(w)$ 在闭圆盘 $\overline{E}$ 内一一连续且其导数模的对数 $\ln|f'(w)|$ 在 E 内可用 Poisson-Stieltjes 积分表示

$$\ln|f'(\rho e^{i\varphi})| = \int \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi - \theta)} d\mu(\theta), \qquad (*)$$

其中 μ 是 ∂E 上的规范化 Borel 测度，$\int d\mu(\theta) = 1$．类 S 由那样一些闭区域 D 所组成：表示式（*）中的测度 μ 关于 ∂E 上的 Lebesgue 测度绝对连续，积分（*）成为边界值 $\ln|f'(e^{i\theta})|$ 的 Poisson-Lebesgue 积分（见 **Poisson 积分**（Poisson integral））并且在 E 上几乎处处存在．

М. В. Келдыш 与 М. А. Лаврентьев（[1]）对任一 h，$0 < h < 1$，构造出一个单连通区域 Δ，它由可求长 Jordan 曲线 Γ 围成，位于圆盘 $|z| < h$ 内，$0 \in \Delta$，使得在 Δ 到 E 的共形映射下

$$z = 0 \longleftrightarrow w = 0,$$

并且圆周 $\partial E = \{w: |w| = 1\}$ 上任一弧 Γ 的象是具有同一长度的弧．这一区域 Δ 不属于类 S，因为在 ∂E 上几乎处处有 $\ln|f'(e^{i\theta})| = 0$．

S 类特征区域（Смирнов 型区域）的问题的完全解答到目前（1989）为止尚未得到（见[2]，[3]）．

参考文献

[1] Keldysh, M. V. and Lavrent'ev, M. A., Sur la représentation conforme des domains limités par des courbes rectifiables, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **54** (1937), 1 – 38.

[2] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950.

[3] Ловатев, А., Итоки науки и техники. матем. анал., т. 11, М., 1973, 99 – 179.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Келдыш 和 Лаврентьев 的构造非常复杂．一种较易接受的处置见[A1]和[A2]．

参考文献

[A1] Duren, P. L., Shapiro, H. S. and Shields, A. L., Singular measures and domains not of Smirnov type, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 247 – 254.

[A2] Piranian, G., Two monotonic, singular, uniformly almost smooth functions, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 254 – 262.

杨维奇 译

Келдыш - Лаврентьев 定理 [**Keldysh - Lavrent'ev theorem**; **Келдыша - Лаврентьева теорема**]，关于用整函数一致逼近的

为使对于连续统 E 上每个连续复值函数 $f(z)$ 与每个在任一有限区间上具有正下界且当 $r\to\infty$ 时急减的正函数 $\varepsilon(r)$ $(r\geqslant 0)$，存在整函数 $g(z)$，满足

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon(|z|),\ z\in E,$$

其必要充分条件是：E 没有内点；存在递增趋于 $+\infty$ 的函数 $\eta(t)$ $(0<t<+\infty)$，使得补集 CE 中任一点 z 能为位于 E 外且位于圆盘 $|\zeta|<\eta(|z|)$ 外的 Jordan 曲线连接到无穷远点．

М. В. Келдыш 和 М. А. Лаврентьев 的这个结果（[1]）概括了由 **Carleman 定理**（Carleman theorem）（该条第 3 节；亦见 [2]）起始的关于用整函数逼近的许多研究．

参考文献

[1] Келдыш, М. В., Лаврентьев, М. А., 《Докл. АН СССР》, **23** (1939), 8, 746 – 748.

[2] Мергелян, С. Н., 《Успехи матем. наук》, **7** (1952), 2, 31 – 112.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gaier, D., Lectures on complex approximation, Birkhäuser, 1987 (中译本：D. 加意耳，复变函数逼近论，湖南教育出版社，1985).

沈永欢 译

Келдыш 定理 [**Keldysh theorem**; **Келдыша теорема**]

1) 关于用多项式逼近连续函数的 Келдыш 定理．设 $f(z)$ 是复变量 z 的函数，在区域 G 内全纯，在闭域 $\overline{G}$ 上连续，则为使对于每个 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(z)$，满足

$$|f(z)-P(z)|<\varepsilon,\ z\in\overline{G},$$

其必要充分条件为：补集 $C\overline{G}$ 是含有无穷远点的单个区域 G^{*}．此定理为 М. В. Келдыш 所建立（[1]）．这是在复域内用多项式一致逼近函数的理论中的基本结果之一（见 [2]）．

2) 位势论中的 Келдыш 定理是 М. В. Келдыш 于 1938 – 1941 年间建立的关于 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的可解性的几条定理．

a) 设 D 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 中的有界域，其边界为 $\Gamma=\partial D$．为使在 Γ 上存在由**非正则边界点**（irregular boundary point）构成的一个可数集 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 D 中的在 Γ 上具有连续边值函数 $f(y)$ 的 Dirichlet 问题可解，当且仅当此问题在 y_k $(k=1,2,\cdots)$ 处可解，即当且仅当

$$\lim_{\substack{x\to y_k\\ x\in D}} u(x)=f(y_k),\ k=1,2,\cdots,$$

这里 $u(x)$ 是 Dirichlet 问题按 Wiener - Perron 意义的广义解（见 **Perron 法**（Perron method），亦见 [3]，[4]）．

b) 设 A 是从 Γ 上的连续函数空间 $C(\Gamma)$ 作用到 D 内有界调和函数空间（见**调和函数**（harmonic function））中的算子，满足下列条件：1) $A(\alpha f+\beta g)=\alpha A(f)+\beta A(g)$，$f,g\in C(\Gamma)$，$\alpha,\beta$ 是实数，即 A 是线性的；2) 如果 $f(y)\geqslant 0$，$f\in C(\Gamma)$，则 $A(f)(x)\geqslant 0$；3) 如果对 $f\in C(\Gamma)$ 的 Dirichlet 问题可解，则 $A(f)$ 给出问题的解．在这些条件下，对 $f\in C(\Gamma)$，A 是唯一的，且 $A(f)$ 给出 Dirichlet 问题按 Wiener - Perron 意义的广义解（见 [5] – [7]）．

c) 为使每个在 D 内可解的 Dirichlet 问题在 $\overline{D}$ 上是稳定的，其必要充分条件是 $C\overline{D}$ 的非正则边界点集与 CD 的非正则边界点集相同．Dirichlet 问题关于任一函数 $f\in C(\Gamma)$ 在 D 的内部为稳定，当且仅当 $C\overline{D}$ 的属于 Γ 的非正则边界点的集合在 D 中具有零**调和测度**（harmonic measure）（见 [4] 或 [6]）．

参考文献

[1] Келдыш, М. В., 《Матем. сб.》, **16** (1945), 3, 249 – 258.

[2] Мергелян, С. Н., 《Успехи матем. наук》, **7** (1952), 2, 3 – 122.

[3] Келдыш, М. В., 《Докл. АН СССР》, **18** (1938), 315 – 318.

[4] Келдыш, М. В., 《Успехи матем. наук》, **8** (1941), 171 – 292.

[5] Келдыш, М. В., 《Докл. АН СССР》, **32** (1941), 308 – 309.

[6] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 4, 5 (英译本：Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[7] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于 Келдыш 逼近定理，亦见 [A2]，第 30 章．

b) 中所说的算子 A 称为 Келдыш 算子（Keldysh operator）．关于 Келдыш 算子的公理位势论论述，见 [A1]．

参考文献

[A1] Netuka, I., The classical Dirichlet problem and its generalizations, 载于 Potential Theory, Copenhagen, 1979, Lecture notes in math., Vol. 787, Springer, 1980, 235 – 266.

[A2] Gaier, D., Lectures on complex approximation, Bir-

khäuser, 1987(中译本: D. 加意耳, 复变函数逼近论, 湖南教育出版社, 1985).

【译注】

参考文献

[B1] 沈燮昌, 复变函数逼近论, 科学出版社, 1992.

沈永欢 译

Kellogg-Evans 定理 [Kellogg-Evans theorem; Келлога-Эванса теорема], Kellogg 引理 (Kellogg lemma)

对于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) 里任意一个区域 D, 关于 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 在 Wiener-Perron 意义下 (见 **Perron 法** (Perron method)) 的一个广义解, 其边界的所有非正则点的集合 (见**非正则边界点** (irregular boundary point)) 具有**零容量** (capacity), 是一个**极集** (polar set) 且为 F_σ 型的 (见 **$F_\sigma(G_\delta)$ 型的集合** (set of type $F_\sigma(G_\delta)$)). Kellogg-Evans 定理的一个推论: 如果 K 是 $\mathbf{R}^n$ 一个正容量的紧集, D 是余集 CK 的包含无穷远点的连通分支, 则在边界 $\partial D \subset K$ 上至少有一个正则点. Kellogg-Evans 定理是 O. D. Kellogg 作为一个推测提出的 ([1]), 由 G. C. Evans 首先证明 ([2]).

参考文献

[1] Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, F. Ungar, 1929. Re-issue: Springer, 1967.

[2] Evans, G. C., Application of Poincaré's sweeping-out process, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **19** (1933), 457-461.

[3] Келдыш, М. В., 《Успехи матем. наук》, **8** (1941), 171-231.

[4] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰 高琪仁、吴炯圻 译

Kellogg 定理 [Kellogg theorem; Келлога теорема]

设 $w = f(z)$ 是实现圆盘 $\{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ 到区域 D 上的单叶**共形映射** (conformal mapping) 的函数, 这里 D 由光滑 Jordan 闭曲线 S 所围成, 而 S 的切线对实轴的倾角作为 S 的弧长 l 的函数 $\theta(l)$ 满足 **Hölder 条件** (Hölder condition):

$$|\theta(l_1) - \theta(l_2)| \leqslant K|l_1 - l_2|^\alpha, \ 0 < \alpha < 1.$$

这时, 导数 $f'(z)$ 在闭圆盘 $|z| \leqslant 1$ 上连续, 且在圆周 $|z| = 1$ 上满足下列关于同一指数 α 的 Hölder 条件:

$$|f'(e^{i\theta_1}) - f'(e^{i\theta_2})| \leqslant K_1 |\theta_1 - \theta_2|^\alpha,$$

$$|\ln f'(e^{i\theta_1}) - \ln f'(e^{i\theta_2})| \leqslant K_2 |\theta_1 - \theta_2|^\alpha.$$

上述 Kellogg 定理是 O. D. Kellogg 关于**调和函数** (harmonic function) u 的 r 阶 ($r \geqslant 1$) 偏导数的边界性态的更一般结果 (见 [1], [2]) 的一个直接推论, 此调和函数 u 是关于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) 中由充分光滑的 Ляпунов 曲面 S ($n \geqslant 3$ 的情形) 或 Ляпунов 曲綫 S ($n = 2$ 的情形) (见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)) 所围区域 D 的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的解, 而给定函数 f 也假定为在边界 S 上是充分光滑的.

在 [3], [4] 中还有关于上述映射函数的导数的边界性态的其他一些结果.

参考文献

[1] Kellogg, O. D., Harmonic functions and Green's integral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **13** (1912), 1, 109-132.

[2] Kellogg, O. D., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 2, 486-510.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[4] Warschawski, S. E., On differentiability at the boundary in conformal mapping, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 614-620.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦见**共形映射的边界性质** (conformal mapping, boundary properties of a).

关于类似的问题见 [A1], p. 15.

参考文献

[A1] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

沈永欢 译

Kelvin 函数 [Kelvin functions; Кельвина функции], Thomson 函数 (Thomson functions)

由下列各式定义的函数 ber(z) 和 bei(z), her(z) 和 hei(z), ker(z) 和 kei(z):

$$\mathrm{ber}_\nu(z) \pm \mathrm{bei}_\nu(z) = J_\nu(z e^{\pm 3i\pi/4}),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) + i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z e^{3i\pi/4}),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) - i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(z e^{-3i\pi/4}),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) + i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} H_\nu^{(1)}(z e^{3i\pi/4}),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) - i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = -\frac{i\pi}{2} H_\nu^{(2)}(z e^{-3i\pi/4}),$$

其中 H_ν 是 **Hankel 函数** (Hankel functions), J_ν 是 **Bessel 函数** (Bessel functions). 当 $\nu = 0$ 时, 把这个指标略去. Kelvin 函数构成方程

$$z^2 y'' + z y' - (i z^2 + \nu^2) y = 0$$

的**基本解组** (fundamental system of solutions), 当 $z=\sqrt{i}\,x$ 时，这个方程化为 Bessel 方程.

级数表示为

$$\operatorname{ber}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2},$$

$$\operatorname{ber}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2},$$

$$\operatorname{ker}(z)=\left[\ln\frac{2}{z}-C\right]\operatorname{ber}(z)+\frac{\pi}{4}\operatorname{bei}(z)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2}\sum_{m=1}^{2k}\frac{1}{m},$$

$$\operatorname{kei}(z)=\left[\ln\frac{2}{z}-C\right]\operatorname{bei}(z)-\frac{\pi}{4}\operatorname{ber}(z)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2}\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{1}{m}.$$

渐近表示为

$$\operatorname{ber}(z)=\frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\cos\beta(z),$$

$$\operatorname{ber}(z)=\frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\sin\beta(z),$$

$$\operatorname{ker}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{\alpha(-z)}\cos\beta(-z),$$

$$\operatorname{kei}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{\alpha(-z)}\sin\beta(-z),$$

$$|\arg z|<\frac{5}{4}\pi,$$

其中

$$\alpha(z)\sim\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8z\sqrt{2}}-\frac{25}{384z^3\sqrt{2}}-\frac{13}{128z^4}-\cdots,$$

$$\beta(z)\sim\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8z\sqrt{2}}-\frac{1}{384z^3\sqrt{2}}+\cdots.$$

这些函数是由 W. Thomson (Lord Kelvin [1]) 引入的.

参考文献

[1] Thomson, W., Mathematical and physical papers, 3, Cambridge Univ. Press, 1980, p. 492.

[2] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

[3] Рыжик, И. М., Градштейн, И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3 изд., М.-Л., 1951 (英译本: Gradshtein, I. S. and Ryzhik, I. M., Tables of integrals, series and products, Acad. Press, 1973).

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1965.

张鸿林 译

Kelvin 变换 [Kelvin transformation; Кельвина преобразование]

定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n\ (n\geqslant 3)$ 的区域里的函数的一个变换，在这个变换下，调和函数变成调和函数. W. Thomson 得到这个变换 (Lord Kelvin, [1]).

如果 u 是区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 里的一个**调和函数** (harmonic function)，那么它的 Kelvin 变换是函数

$$v(y)=\left[\frac{R}{|y|}\right]^{n-2}u\left[\frac{R^2}{|y|^2}\,y\right],\ v(\infty)=0,$$

这个函数在区域 D^* 里是调和的，D^* 是 D 关于球面 $S_R=\{x:|x|=R\}$ 的**反演** (inversion)，即 $\mathbf{R}^n$ 的映射

$$x\to y=\frac{R^2}{|x|^2}\,x,\quad 0\to\dot{\infty},$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$.

在这个反演下，**Александрову 紧化** (Aleksandrov compactification) $\overline{\mathbf{R}^n}$ 的无穷远点 ∞ 变成原点 0，反之亦然. 在 Kelvin 变换下，包含 ∞ 的区域 D 里的调和函数 u，当它在 ∞ **点正则** (regular at ∞)，即满足 $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0$ 时，变成包含原点 0 的有界区域 D^* 里的调和函数 v，且 $v(0)=0$. 由于这个性质，Kelvin 变换能把位势论的外部问题变成内部问题，反之亦然 (见 [2], [3]).

除了 Kelvin 变换以外，在形为 $v(y)=\varphi(y)\cdot u(\psi(y))$ 的解析变换下，能保持 $\mathbf{R}^n\ (n\geqslant 3)$ 里函数的调和性，只当这样情况: $\varphi(y)\equiv 1$ 和 ψ 是一个**位似变换** (homothety)，平移或者是关于平面的对称; 当 $n=2$ 时，保形映照 ψ 这一大类具有这种性质.

参考文献

[1] Thomson, W., Extraits de deux letters adressées à M. Liouville, *J. Math. Pures Appl.*, **12** (1847), 256–264.

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976, гл. 5 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984, Chapt. 5).

[3] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 这些结果当 $n=2$ 时也成立. 在这种情况下，u 在无穷远点的调和性对应于 u 在 0 点的有界性. 例如，见 [A1] 或 [A2].

参考文献

[A1] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Wiley, 1969 (译自德文).

[A2] Wermer, J., Potential theory, Lecture notes in math., 408, Springer, 1974.

[A3] Kelogy, O. D., Foundations of potential theory, Dover, reprint, 1954.

[A4] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

高琪仁、吴炯圻 译

Kendall 等级相关系数 [Kendall coefficient of rank correlation; Кендалла коэффициент ранговой корреляции]

两个随机变量(特征) X 和 Y 间相依关系的样本度量之一、基于样本元素 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ 的等级评定．这样，Kendall 等级相关系数属于**秩统计量** (rank statistic) 并且定义为

$$\tau = \frac{2S(r_1, \cdots, r_n)}{n(n-1)},$$

其中 r_i 是在 X 秩为 i 的数偶 (X, Y) 中 Y 的秩，$S=2N-n(n-1)/2$，N 是样本中 $j>i$ 和 $r_j>r_i$ 同时成立的元素个数．总有 $-1\leqslant\tau\leqslant1$．M.Kendall 广泛使用 Kendall 等级相关系数做相依性度量(见 [1])．

Kendall 等级相关系数被用于检验随机变量独立的假设．如果独立性的假设成立，则 $\mathrm{E}\tau=0$, $D\tau=2(2n+5)/[9n(n-1)]$．当样本容量较小时 $(4\leqslant n\leqslant10)$，独立性假设的统计检验借助于专门的数表(见 [3])来进行．当 $n>10$ 时，利用 τ 的分布的正态逼近：如果

$$|\tau| > u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

则否定关于独立的假设，否则接受假设．这里，α 是显著性水平，$u_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的 $100(\alpha/2)$ 百分位点．像任何秩统计量一样，Kendall 等级相关系数可以用于揭示两个属性特征的相依性，只要样本的元素可以按这些特征评定等级．如果 X 和 Y 有联合正态分布且相关系数为 ρ，则 ρ 与 Kendall 等级相关系数有如下关系：

$$\mathrm{E}\tau = \frac{2}{\pi}\arcsin\rho.$$

亦见 **Spearman 等级相关系数** (Spearman coefficient of rank correlation)；**秩检验** (rank test)．

参考文献

[1] Kendall, M.G., Rank correlation methods, Griffin, 1970.

[2] Waerden, B.L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[3] Большев, Л.Н., Смирнов, Н.В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

[4] Pearson, E.S. and Hartley, H.O., Biometrica tables for statisticians, 1, Cambridge Univ. Press, 1966.

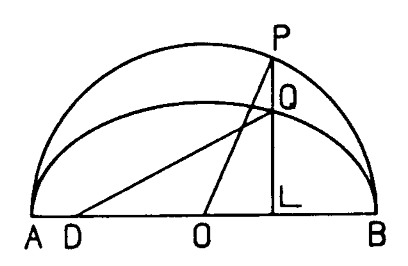
А.В.Прохоров 撰 周概容 译

Kepler 方程 [Kepler equation; Кеплера уравнение]

形式为

$$y - c\sin y = x$$

的超越方程．情况 $0\leqslant c<1$ 对于应用来说是重要的；这里 y 由给定的 c 和 x 唯一确定．J. Kepler (1609) 在研究行星运动问题时首先考虑了这个方程：设椭圆 AQB (见图) 是一行星轨道，焦点为 D，外切圆为 APB．这时，Kepler 方程给出了偏近点角 $y=\angle POA$ 和平均



近点角 x 之间的关系，c 是椭圆的离心率．在天文学中当确定行星轨道截面时，Kepler 方程起着重要的作用．

参考文献

[1] Субботин, М. Ф., Курс небесной механики, 2 изд., т. 1, Л. -М., 1941.

БСЭ-3

【补注】 平均近点角是行星通过点 Q 的时间的线性函数．一些详细情况，包括对应双曲运动和抛物运动的方程，例如见 [A1]．

参考文献

[A1] Fitzpatrick, P. M., Principles of celestial machanics, Acad. Press, 1970.

张鸿林 译

核同余 [kernel congruence; ядерная конгруэнция]

代数系统的一个同态 $\varphi: A\to A'$ 的核同余是指由满足 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 的所有对 $(a,b)\in A\times A$ 组成的 A 上的同余(见**同余(代数学中的)** (congruence (in algebra))) θ．对于一个代数系统上的任何同余 θ，存在这个系统的一个同态 φ，使得 θ 是它的核同余．如果 θ 是代数系统 A 到系统 A' 上的强同态 φ 的核同余，则典范映射 $a/\theta\to\varphi(a)$，是商系统 A/θ 到 A' 上的同构，这里 $a/\theta=\{x\in A:(x,a)\in\theta\}$．

参考文献见**同态** (homomorphism)．

Д.М.Смирнов 撰 陈公宁 译

核函数 [kernel function; керфункция]

见 **Bergman 核函数** (Bergman kernel function)．

复序列的核[kernel of a complex sequence; ядро комплексной последовательности]

对于序列$\{z_n\}$，在扩充复平面上如下定义的点集：设R_n是复平面上含有$z_{n+1}, z_{n+2}, \cdots$的最小闭凸域. 如果不存在含有这些点的半平面，则R_n是包括无穷远点的整个复平面；如果存在含有这些点的半平面，则R_n是这些半平面之交. 如果$\{z_n\}$无界，则无穷远点属于R_n，否则无穷远点不属于R_n，交$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$称为序列$\{z_n\}$的核(kernel of the sequence).

如果$\{z_n\}$有界，则其核与其极限点集的闭凸包相同；如果$\{z_n\}$收敛到z_0 ($z_0 \neq \infty$)则其核是$\{z_0\}$. 实序列$\{z_n\}$的核(kernel of a real sequence)是实直线上端点为

$$a = \varliminf_{n\to\infty} z_n, \quad b = \varlimsup_{n\to\infty} z_n$$

的区间. 序列的核不可能是空集，但它可能只含有无穷远点，例如，序列$\{z_n\}$，$z_n = n + in$. 具有仅由无穷远点构成的核的序列$\{z_n\}$有时称为定发散的(definitely divergent). 对于实数列，这意味着$z_n \to +\infty$或$z_n \to -\infty$.

在可求和性理论中要考虑求和法的核包含问题. 求和法A称为在序列集U上比求和法B具有较强核，如果对任一$\{z_n\} \subset U$有$K_A \subset K_B$，这里K_A, K_B分别表示A, B的核，即$\{z_n\}$的平均序列的核.

参考文献

[1A] Knopp, K., Zur Theorie des Limitierungsverfahren I, *Math. Z.*, **31** (1930), 97 – 127.

[1B] Knopp, K., Zur Theorie des Limitierungsverfahren II, *Math. Z.*, **31** (1930), 276 – 305.

[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

[3] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon Press, 1949.

И. И. Волков 撰 沈永欢 译

对策的核[kernel of a game; k-ядро игры]

见**对策论中的核心**(core in the theory of games).

线性算子的核[kernel of a linear operator; ядро линейного оператора]

线性算子定义域中由所有映射到零的向量组成的线性子空间. 定义在**拓扑向量空间**(topological vector space)上的连续线性算子的核是该空间的一个闭线性子空间. 对**局部凸空间**(locally convex space)来说，一个连续线性算子具有零核(即它是从定义域到值域的一对一映射)，当且仅当**伴随算子**(adjoint operator)具有弱稠值域.

Г. Л. Литвинов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kelley, J. L. and Namioka, I., Linear topological spaces, v. Nostrand, 1963, Chapt. 5, Sect. 21.

鲁世杰 译 葛显良 校

幺拟群的核[kernel of a loop; ядро лупы]

幺拟群中元素的集合，这些元素同时是左、右、中间结合的(或等价地，幺拟群的左、右、中间核的交). 幺拟群中元素a称为左结合的(left-associative)，若对幺拟群中元b, c满足$a(bc) = (ab)c$. 左结合元的集合称为幺拟群的左核(left kernel). 类似地可定义右结合元、中间结合元和对应的核. 对拟群也可定义左核、右核，但仅有幺拟群有非空的中间核. 幺拟群中所有的核都是它的子群. JP幺拟群的三个核是一致的，对**Moufang 幺拟群**(Moufang loop)它们构成正规子幺拟群(见**幺拟群**(loop)).

О. А. Иванова 撰 石生明 译 许以超 校

范畴中态射的核[kernel of a morphism in a category; ядро морфизма категории]

一个概念，它是线性空间中线性变换的核，群同态的核，环同态的核等概念的推广. 设$\mathfrak{K}$为一个具有零态射的**范畴**(category). 一个态射$\mu: K \to A$称为态射$\alpha: A \to B$的核，如果$\mu\alpha = 0$，并且如果每一个态射φ，当$\varphi\alpha = 0$时必能唯一地表成$\varphi = \psi\mu$. 一个态射α的核常表以$\ker\alpha$.

如果μ与μ'都是α的核，则有唯一的**同构**(isomorphism)ξ，使$\mu' = \xi\mu$. 反过来，如果$\mu = \ker\alpha$且若ξ为一同构，则$\mu' = \xi\mu$也是α的一个核. 因此，一个态射α的诸核形成A的一个子对象，表以$\ker\alpha$.

如果$\mu = \ker\alpha$，则μ是一个**单态射**(monomorphism). 一般说来，反之不真；一个单态射恰是一个核时就称为一个**正规单态射**(normal monomorphism). 零态射$0: A \to B$的核是恒等态射1_A. 1_A的核存在，当且仅当$\mathfrak{K}$包含一个零对象(见**范畴的零对象**(null object of a category)).

有零态射的范畴中，核并不总是存在的. 另一方面，在一个有零对象的范畴$\mathfrak{K}$中，一个态射$\alpha: A \to B$有一个核当且仅当α与$0: 0 \to B$在$\mathfrak{K}$中的拉回存在.

"态射的核"这个概念与"态射的余核"的概念是对偶的.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】"一对态射的核"(不要同"一个态射的核偶"相混)这个概念也是经常用到的. 在英文中，这个概念的通常名称是等化子(equalizer). 平行的一对态射α, $\beta: A \to B$的等化子是一个态射$\mu: E \to A$使$\mu\alpha = \mu\beta$，并且使每一个满足$\varphi\alpha = \varphi\beta$的$\varphi$都能唯

一地通过 μ 来分解因式．核是等化子的特殊情况：μ 是 α 的一个核当且仅当它是 α 与 $0:A\to B$ 的一个等化子．反过来，在一个**加性范畴**（additive category）中，α 与 β 的一个等化子与 $\alpha-\beta$ 的核是一回事；但在一般情况，等化子的概念是更广泛地被应用的，因为它并不要求存在零态射．一个单态射恰是一个等化子时称为一个正则单态射（regular monomorphism）．

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

[A2] Adámek, J., Theory of mathematical structures, Reidel, 1983.

周伯埙 译

半群的核[**kernel of a semi-group**; **ядро полугруппы**]

半群的最小双边理想．不是每个半群有核．关于半群核的性质及有核的半群，参见**极小理想**（minimal ideal）；**Archimedes 半群**（Archimedean semi-group）；半群的**圈积**（wreath product）；以及**拓扑半群**（topological semi-group）．

Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 许以超 校

集合的核[**kernel of a set**; **ядро множества**]，集合的开核（open kernel of a set）

集合 M 的所有内点的集合 $\langle M\rangle$．如果 A 和 B 在拓扑空间 X 中互为补集，即是说，若 $B=X\backslash A$，则 $X\backslash[A]=\langle B\rangle$ 且 $X\backslash[B]=\langle A\rangle$，这里 $[A]$ 表示 A 的闭包（见**集合的闭包**（closure of a set））.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 $\langle M\rangle$ 通常称为集合 M 的内部（interior）(见**集合的内部**（interior of a set）)，亦用 M^0 和 $\operatorname{Int} M$ 表示．英文数学文献中，很少在这种情形使用“核”这个词．

白苏华、胡师度 译

求和法的核[**kernel of a summation method**; **ядро метода суммирования**]

一个函数 $K_n(t)$（依赖于一个参数），其值是给定的求和法作用于级数

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu t \qquad (1)$$

的平均值．

求和法的核给出该方法在求 **Fourier 级数**（Fourier series）之和时平均值的积分表示．如果所给求和法由使用矩阵 $\|a_{nk}\|_{n,k=0}^{\infty}$ 把序列映为序列的变换来定义，则此求和法的核（kernel）是函数

$$K_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}D_k(t),$$

其中 $D_k(t)$ 是级数（1）的部分和：

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t=\frac{\sin\{(k+1/2)t\}}{2\sin(t/2)}. \qquad (2)$$

此时周期为 2π 的函数 f 的 Fourier 级数的平均值可通过 f 与核由公式

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(t-x)dt$$

表示．特别地，算术平均法的核（见**算术平均求和法**（arithmetical averages, summation method of））具有形式

$$K_n(t)=\frac{2}{n+1}\left[\frac{\sin\{(n+1)t/2\}}{2\sin(t/2)}\right]^2,$$

它称为 Fejér 核（Fejér kernel）．**Abel 求和法**（Abel summation method）的核由

$$K(r,t)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2},\ 0\leqslant r<1$$

给出，它称为 Poisson 核（Poisson kernel）．（2）中的函数 $D_k(t)$ 称为 Dirichlet 核（Dirichlet kernel）．

其值为一种求和法作用于级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu t$$

的平均的函数 $\bar{K}_n(t)$，称为此求和法的共轭核（conjugate kernel）．

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.

И. И. Волков 撰 沈永欢 译

积分算子的核[**kernel of an integral operator**; **ядро интегрального оператора**]

二元函数 $K(x,y)$，通过下列等式定义了一个**积分算子**（integral operator）A：

$$\psi(y)=A[\varphi(x)]=\int K(x,y)\varphi(x)d\mu(x),$$

其中 x 遍及一个**测度空间**（measure space）$(X,d\mu)$，而 φ 属于在 X 上定义的某一函数空间．

Г. Л. Литеинов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I. and Goldberg, S., Basic Operator theory, Birkhäuser, 1981.

[A2] Halmos, P. R. and Sunder, V. S., Bounded integral operators on L^2 spaces, Springer, 1978.

[A3] Jörgens, K., Lineare Integraloperatoren, Teubner,

1970.

[A4] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4, 1957(中译本:B. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷,人民教育出版社, 1958).

[A5] Zabreyko, P. P., et al. (eds.), Integral equations——a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).

张鸿林 译

核偶[kernel pair; ядерная пара], 范畴中一个态射的一种等价关系在范畴中的推广, 这种等价关系是由从一个集合到另一集合的映射所引导出来的. 一个范畴(category) $\mathfrak{K}$ 中一对态射 $\varepsilon_1, \varepsilon_2: R \to A$ 称为态射 $\alpha: A \to B$ 的核偶(kernel pair of the morphism), 如果 $\varepsilon_1\alpha = \varepsilon_2\alpha$, 且对任何一对态射 $\varphi, \psi: X \to A$, 若当 $\varphi\alpha = \psi\alpha$ 时恒有唯一的态射 $\gamma: X \to R$ 使 $\varphi = \gamma\varepsilon_1$ 与 $\psi = \gamma\varepsilon_2$.

设 $\mathfrak{Y}$ 是给定类型的泛代数的任意一个范畴, 而且它们之间的所有同态对于取有限积都是封闭的, 并设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2: R \to A$ 为 $\mathfrak{Y}$ 中一个同态 $f: A \to B$ 的一个核偶. 于是, 由一对态射 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 所引出的同态

$$\varepsilon_1 \times \varepsilon_2: R \to A \times A$$

的象就是代数 A 上的一个同余(也见**同余(代数学中的)** congruence (in algebra)). 反之, 若 $R \subset A \times A$ 是 A 上任意一个同余, i 是 R 到 $A \times A$ 中的嵌入, 而 p_1, p_2 是 $A \times A$ 到 A 上的投射, 则 $ip_1, ip_2: R \to A$ 这一对同态就是 A 到商代数 A/R 上的自然同态的一个核偶.

在一个具有有限积, 并且任何一对态射都有核(见**范畴中态射的核**(kernel of a morphism in a category))的任意一个范畴中, 态射 $\alpha: A \to B$ 的核偶可如下构造. 我们选取积 $A \times A$, 以 π_1 与 π_2 表投射, 求出一对态射 $\pi_1\alpha, \pi_2\alpha: A \times A \to B$ 的核 μ, 那么, $\mu\pi_1, \mu\pi_2$ 这一对态射就是 α 的一个核偶.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 余核偶(cokernel pair)可以对偶地定义.

参考文献

[A1] Manes, F. G., Algebraic categories, Springer, 1976, Chapt. 2, §1.

[A2] Schubert, H., Kategorien, 2, Springer, 1970, Sect. 18.4.

[A3] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971, Sect. 3.3, 3.4.

周伯埙 译

Kerr 度规[Kerr metric; Керра метрика]

描述具有质量 m 和角动量 L 的转动的外引力场的 Einstein 方程的解. 根据 A. 3. Петров 的分类, 它属于类型 D. 最简单的描述如 Kerr-Schild 度规:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2hK_\mu K_\nu,$$

其中 K_μ 是零向量 $(K_\mu K_\nu g^{\mu\nu} = 0)$, 与具(非梯度类型)转动的特殊主零线汇相切, 而 $\eta_{\mu\nu}$ 是 Minkowski 空间的度规张量. Kerr 度规的特征参数是 $a = L/m$. 存在电荷 e 的一般情况(Kerr-Newman 度规)下, 标量函数 h 具有形式

$$h = \frac{m}{2}(\rho^{-1} + \overline{\rho^{-1}}) - \frac{e^2}{2\rho\bar{\rho}},$$

其中

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + (z + ia)^2.$$

在半径为 a 的环线上(当 $\rho = 0$)场是奇异的. 对 $a = 0$ 时奇异性收缩为一奇点; 当 $a = e = 0$ 时, Kerr 度规变成 **Schwarzschild 度规**(Schwarzschild metric).

Kerr 度规是由 R. P. Kerr ([1]) 获得的.

参考文献

[1] Kerr, R. P., Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special matrices, *Phys. Rev. Letters*, **11** (1963), 237-238.

[2] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J., Gravitation, Freeman, 1973.

[3] Rees, M., Ruffini, R. and Wheeler, J., Black holes, gravitational waves and cosmology, Gordon & Breach, 1974.

А. Я. Буринский 撰 徐锡申 译

Kervaire 不变量[Kervaire invariant; Кервера инвариант]

维数为 $k+2$ 的殆可平行光滑流形 M 的一个不变量, 定义为在 M 的 $2k+1$ 维同调空间格上的模 2 二次型的 **Arf 不变量**(Arf-invariant).

设 M 是维数为 $4k+2$ 的单连通殆可平行闭光滑流形, 它的同调群除 $V = H_{2k+1}(M; \mathbf{Z})$ 外, $H_i(M; \mathbf{Z})$ 为零, $0 < i < 4k+2$.

在自由 Abel 群 V 上, 存在循环 $\Phi(x,y), \Phi: V \times V \to \mathbf{Z}$, 的斜对称相交形式, 在 V 中整数格的维数等于 $2m$. V 上存在一个函数 $\Phi_0: V \to \mathbf{Z}_2$, 定义如下: 若 $x \in V$, 则存在球面 S^{2k+1} 到 M 中的一个光滑嵌入. M 实现了给定的元素 $x (k \geq 1)$. 这个球面 S^{2k+1} 在 M 中的管状邻域是可平行的, 它可能或者是平凡的, 或者同构于积 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ 中的对角线的管状邻域. 这里 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ 中的对角线的管状邻域是非平凡的, 当且仅当 $2k+1 \neq 1, 3, 7$ (见 **Hopf 不变量**(Hopf invariant)). Φ_0 的值是 0 还是 1 取决于 M 中实现 x 的 S^{2k+1} 的管状邻域是不是平凡的, $2k+1 \neq 1, 3, 7$. 函数 $\Phi_0: V \to \mathbf{Z}_2$ 满足条件

$$\Phi_0(x+y) \equiv \Phi_0(x) + \Phi_0(y) + \Phi(x,y) \bmod 2.$$

Φ_0 的 Arf 不变量也称为流形 $M^{4k+2}(2k+1 \neq 1, 3, 7)$ 的 Kervaire 不变量(Kervaire invariant).

若 M^{4k+2} 的 Kervaire 不变量等于零，则存在 V 的辛基 (e_i, f_i) 使得 $\Phi_0(e_i) = \Phi_0(f_i) = 0$. 此时，$M^{4k+2}$ 是球面积的连通和

$$M^{4k+2} = (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_1 \# \cdots \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_m.$$

另一方面，若 M^{4k+2} 的 Kervaire 不变量是非零的，则 V 存在辛基 (e_i, f_i) 使得对 $i \neq 1$, $\Phi_0(e_i) = \Phi_0(f_i) = 0$，而 $\Phi_0(e_1) = \Phi_0(f_1) = 1$. 在该情形中，嵌入 M^{4k+2} 在一点横截且实现元素 e_1, f_1 的二个 $2k+1$ 维球面的管状邻域之并给出了流形 K^{4k+2}. 它就称为 Kervaire 流形 (Kervaire manifold)(见**无圈流形** (dendritic manifold)); 它的边界 ∂K^{4k+2} 微分同胚于标准球面，而流形 M^{4k+2} 本身可表示为连通和

$$M^{4k+2} = \\ = \hat{K}^{4k+2} \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_1 \# \cdots \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_{m-1},$$

其中，光滑闭流形 $\hat{K}^{4k+2}$ 是从 K^{4k+2} 粘上一个胞腔得到的.

如果 $M^{4k+2}(k \neq 0,1,3)$ 是带同伦于球面的边界的光滑可平行 $2k$ 连通流形，那么 M^{4k+2} 的 Kervaire 不变量恰好如上所定义，并且有相同的性质，差别在于，在 M^{4k+2} 分解成单流形的连通和中，分支 K_0^{4k+2} 是 Kervaire 流形，具有边界 $\partial K^{4k+2} = \partial M^{4k+2}$(一般地，它不微分同胚于标准球面).

在 $k = 0, 1, 3$ 时，初始流形 M^2, M^6, M^{14} 可以表示为连通和 $(S^{2k+1} \times S^{2k+1}) \# \cdots \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})$ (如果边界是空的)或者 $(S^{2k+1} \times S^{2k+1})_0 \# \cdots \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_{m-1}$(如果边界不空)，其中 $(S^{2k+1} \times S^{2k+1})_0$ 是通过从 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ 移动一个开胞腔所得到的.

进一步，对闭流形 M^2, M^6, M^{14} 可以定义 Kervaire 不变量 (见 **Понтрягин 不变量** (Pontryagin invariant); **Kervaire-Milnor 不变量** (Kervaire-Milnor invariant)) 和在这些维数中，依赖于框架的选择，换言之，在 $k = 0, 1, 3$ 时，它是偶对(M^{4k+2}, f_r) 的框架割补术的一个不变量. 在维数 $k \neq 0, 1, 3$ 时，流形 M^{4k+2} 可以改变到球面 S^{4k+2} 当且仅当偶对 (M^{4k+2}, f_r) 在初始流形 M^{4k+2} 上 f_r 的任何选择下到偶对 (S^{4k+2}, f_r) 有框架割补术 (见流形上的**割补术** (surgery)).

对任何稳定可平行流形 M^{4k+2}, 定义 Kervaire 不变量为框架割补术的不变量，在球面的稳定同伦群中的任何一个元素或者可以表示为一个框架同伦球面，或者可以表示为一个闭光滑框架 Kervaire 流形 (这时 $m = 4k+2, k \neq 0, 1, 3$), 或者，如果 $k = 0, 1, 3$, 可表示为框架流形 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$.

换言之，Kervaire 不变量可以被当作"延伸"流形上给定的框架到同样维数 ($k \neq 0, 1, 3$) 的球面的一个障碍. 在这个意义上，Kervaire 不变量起了对值 $k = 0, 1, 3$ 时同样的作用: $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ $(k = 0, 1, 3)$ 上给定的框架通常不能通过框架割补术"延伸"到球面 S^{4k+2} 上 $(k = 0, 1, 3)$.

Л. С. Понтрягин 是在流形 $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ (对 $k = 0$) 上构造这样框架的第一人. 说得更精确些，2 维环面 $((S^1 \times S^1), f_r)$ 上的框架不能"延伸"到 S^2 上. 在流形 $S^3 \times S^3$ 和 $S^7 \times S^7$ 上也存在这样的框架的例子.

涉及 Kervaire 不变量的基本问题如下: 对奇数 n, 是否存在具非零 Kervaire 不变量的偶对 (M^{2n}, f_r)? 对 $n \neq 2^i - 1$, 该问题的回答是否定的，对 $n = 2^i - 1$, 回答是肯定的，其中 $i = 1$ (Понтрягин, 见 [2]), $i = 2, 3$ (M. A. Kervaire 和 J. W. Milnor, [5], [6]), $i = 4$ (W. Browder [3]), $i = 5, 6$ (M. Barratt, M. Mahowald, A. Milgram). 对 i 的其他值，回答是未知的 (1989).

参考文献

[1] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 365 – 474.

[2] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

[3] Browder, W., The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization, *Ann. of Math.*, **90** (1969), 157 – 186.

[4] Browder, W., Surgery on simply-connected manifolds, Springer, 1972.

[5] Kervaire, M., A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comm. Math. Helv.*, **34** (1960), 257 – 270.

[6] Kervaire, M. A. and Milnor, J. W., Groups of homotopy spheres I, *Ann. Mat.*, **77** (1963), 3, 504–537.

M. A. Шманько 撰 徐森林 译

Kervaire-Milnor 不变量 [**Kervaire-Milnor invariant; Кервера-Милнора инвариант**]

闭 6 维或 14 维的框架流形的框架**割补术** (surgery) 的一个不变量.

设 M^6 是稳定可平行的二连通流形，其上已给出了稳定的 N 维框架 (M^6, U), 即稳定的 N 维**法丛** (normal bundle) 的平凡化. 设 S_i^3 是一个实现 M^6 的三维同调空间的基的球面. 通过将给定的 N 平凡化 U 与 M^6 中的球面 S_i^3 的管状邻域的某个平凡化 $\alpha_i \in \pi_3(SO_3)$ 相加，可以得到球面 S_i^3 上的稳定法丛的 $N+3$ 维平凡化和相应的元素 $\alpha_i^1 \in \pi_3(SO_{N+3})$. 对 $n = 3$、稳定同态 $S: \pi_n(SO_{N+3}) \to \pi_n(SO_{N+n})$ 的余核同构于 $\mathbf{Z}_2$, 使得每个球面 S_i^3 与群 $\pi_3(SO_{N+3})/\mathrm{Im}\, s$ 的一个元素相对应 (依照通过 α_i^1 的因子分解后在群 $\mathbf{Z}_2$ 中所取到元素 α_i^1 的值), 该值不依赖于元素 α_i 的选择,

而仅依赖于由球面 S^3 及框架 U 所实现的同调类，函数 $\varphi_0: H_3(M^6, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}_2$ 的 **Arf 不变量**(Arf-invariant)满足公式 $\varphi_0(x+y) = \varphi_0(x) + \varphi_0(y) + \varphi(x,y) \bmod 2$，其中 $\varphi(x,y)$ 是在流形 M^6 上的 3 维同调空间的相交形式，并且它被称为这个具有框架 U 的流形的 Kervaire-Milnor 不变量．偶对 (M^6, U) 关于偶对 (S^6, V) 有框架割补术，当且仅当 (M^6, U) 的 Kervaire-Milnor 不变量为零．

对 M^{14} 已得出了类似的结构，6维情形的 Kervaire-Milnor 不变量是稳定的 6 维框架配边的唯一不变量，并对 $n \geqslant 7$ 定义了一个同构 $\pi_{n+6}(S^n) \approx \mathbf{Z}_2$．然而，在 14 维情形中，它不是稳定的 14 维框架配边的唯一不变量，即稳定群 $\pi_{n+14}(S^n)$, $n \geqslant 16$，通过在球面 S^{14} 上和在 $S^7 \times S^7$ 上的框架而被定义．

参考文献见 **Kervaire 不变量**(Kervaire invariant).

М. А. Штанько 撰　徐森林 译

Хинчин 不等式 [Khinchin inequality; Хинчина неравенство]，关于独立函数的

独立函数(见**独立函数系**(independent functions, system of))的和依 L_p 的一个估计．假设 $\{f_k\}$ 为独立函数系，并设对某个 $p>2$，有

$$\sup_k \|f_k\|_{L_p} < \infty, \quad \int_0^1 f_k(t)\,dt = 0,$$

那么

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k \right\|_{L_p} \leqslant M \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right\}^{1/2}.$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$，$r_k(t) = \operatorname{sign}\sin 2^k \pi t$ 为 Rademacher 函数(见 **Rademacher 系**(Rademacher system))，且若 $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t)$，则对任何 $p>0$，

$$A_p \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \int_0^1 |f(t)|^p\,dt \right\}^{1/p} \leqslant B_k \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right\}^{1/2},$$

其中 $B_p = O(\sqrt{p})$，当 $p \to \infty$．此不等式为 А. Я. Хинчин 在 [1] 中建立．A_1 的精确值是 $1/2$．

类似的 Хинчин 不等式在 Banach 空间中成立([4])．存在常数 $C(p, q)$ $(0<p, q<\infty)$，使对 Banach 空间 E 中任何元 x_k 有

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_E \right\|_{L_p} \leqslant C(p, q) \left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_E \right\|_{L_q}.$$

Хинчин 不等式的许多应用之一如下．若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty$，则对几乎所有选择 ± 1 函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

属于一切 $L_p(p<\infty)$(见[5]).

参考文献

[1] Khinchin, A. Ya., Ueber dyadische Brüche, *Math. Z.*, **18** (1923), 109 – 116.

[2] Karlin, S., Orthogonal properties of independent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 44 – 64.

[3] Гапошкин, В. Ф., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 6, 3 – 82.

[4] Kahane, J.-P., Some random series of functions, Cambridge Univ. Press, 1985.

[5] Zygmund, A., Trigonometric series, 1, Cambridge Univ. Press, 1988.

Е. М. Семенов 撰　郑维行 译　沈祖和 校

Хинчин 积分 [Khinchin integral; Хинчина интеграл]

由 А. Я. Хинчин 引进的([1])狭义 **Denjoy 积分**(Denjoy integral)的一种推广．

函数 f 称为在 $[a, b]$ 上依 Хинчин 意义可积，如果它是广义 Denjoy 可积并且它的不定积分是几乎处处可微的．Хинчин 积分有时也称为 Denjoy-Хинчин 积分(Denjoy-Khinchin integral).

参考文献

[1] Khinchin, A. Ya., Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **162** (1916), 287 – 291.

[2] Хинчин, А. Я., 《Матем. сб.》, **30** (1918), 543 – 557.

[3] Песин, И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966.

[4] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

Т. П. Лукашенко 撰　郑维行 译　沈祖和 校

Хинчин 定理 [Khinchin theorem; Хинчина теорема]

1) 关于分布的因子分解的 Хинчин 定理：任一概率分布都容许(在概率分布的卷积半群中)作因子分解

$$P = P_1 \otimes P_2, \tag{*}$$

其中 P_1 是类 I_0 的分布(见**无穷可分分布的因子分解**(infinitely-divisible distributions, factorization of))，而 P_2 或者是退化分布，或者可表示成有限或可数个不可分解的分布的卷积(见**不可分解的分布**(indecomposable distribution))．因子分解 (*) 一般不是唯一的．

这个定理由 А. Я. Хинчин ([1]) 对于直线上的分布给出证明，此后成为显然的是，对于相当一般的群上的分布此定理也是正确的(见[2])．现在已经知道，在包括直线上分布的卷积半群在内的一大类拓扑半群(见[3]—[5])中，都成立类似于 Хинчин 定

理的因子分解定理.

参考文献

[1] Хинчин, А. Я., 《Бюлл. МГУ. Секц. А》, 1 (1937), 1, 6－17.

[2] Parthasarathy, K. R., Rao, R. Ranga, Varadhan, S. R., Probability distribution on locally compact Abelian groups, *Illinois J. Math.*, 7 (1963), 337－369.

[3] Kendall, D. G., Delphic semi-groups, infinitely divisible phenomena, and the arithmetic of p-functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **9** (1968), 3, 163－195.

[4] Davidson, R., Arithmetic and other properties of certain Delphic semi-groups, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **10** (1968), 2, 120－172.

[5] Ruzsa, I. Z., Székely, G. J., Algebraic probability theory, Wiley, 1988.

И. В. Островский 撰

【补注】 类 I_0 的分布是没有不可分解因子的分布.

参考文献

[A1] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970.

2) 关于 Diophantine 逼近的 Хинчин 定理(见 **Diophantine 逼近的度量理论**(Diophantine approximation, metric theory of)).

潘一民 译

Killing 型 [Killing form; Киллинга форма]

由 W. Killing ([1]) 引入的有限维 **Lie 代数**(Lie algebra)上的一种特定的双线性型. 设 𝔊 是域 k 上的一个有限维 Lie 代数. 𝔊 上 Killing 型指双线性型

$$B(x, y)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\cdot\operatorname{ad}y),\ x, y\in\mathfrak{G},$$

其中 tr 表示一个线性算子的迹, ad$x$ 是 x 在 𝔊 上的伴随表示(亦见 **Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group))下的象, 即由规则 $z\to[x, z]$ 确定的 𝔊 上的线性算子, 其中 [,] 是 Lie 代数 𝔊 的换位算子. Killing 型是对称的. 算子 ad$x$ ($x\in\mathfrak{G}$) 对于 Killing 型是斜对称的, 即

$$B([x, y], z)=B(x, [y, z]),\ \text{对所有}\ x, y, z\in\mathfrak{G}.$$

如果 $\mathfrak{G}_0$ 是 𝔊 的一个理想, 那么该 Killing 型在 $\mathfrak{G}_0$ 上的限制是 $\mathfrak{G}_0$ 的 Killing 型. 每个交换的理想 $\mathfrak{G}_0$ 都包含在 Killing 型的核中. 如果 Killing 型是非退化的, 则 Lie 代数 𝔊 是半单的(见 **Lie 代数**(Lie algebra), **半单**(semi-simple)).

设域 k 的特征为 0. 则 𝔊 的导代数 $\mathfrak{G}'=[\mathfrak{G}, G]$ 相对于 Killing 型的正交补恰为 𝔊 的根. 代数 𝔊 是可解的(见**可解 Lie 代数**(Lie algebra, solvable)), 当且仅当 $\mathfrak{G}\perp\mathfrak{G}'$, 也就是对所有 $x, y, z\in\mathfrak{G}$, $B([x, y], z)=0$(Cartan 可解性判别准则(Cartan solvability criterion)). 如果 𝔊 是幂零的(见**幂零 Lie 代数**(Lie algebra, nilpotent)), 则对所有 $x, y\in\mathfrak{G}$, $B(x, y)=0$. 代数 𝔊 是半单的, 当且仅当其 Killing 型是非退化的(Cartan 半单性判别准则(Cartan semi-simplicity criterion)).

每个复半单 Lie 代数都包含一个实型 Γ(紧 Weyl 型, 见 **Lie 代数的复化**(complexification of a Lie algebra)), Killing 型在其上是负定的.

参考文献

[1A] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen transformationsgruppen Ⅰ, *Math. Ann.*, **31** (1888), 252－290.

[1B] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen transformationsgruppen Ⅱ, *Math. Ann.*, **33** (1889), 1－48.

[1C] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen transformationsgruppen Ⅲ, *Math. Ann.*, **34** (1889), 57－122.

[1D] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen transformationsgruppen Ⅳ, *Math. Ann.*, **36** (1890), 161－189.

[2] Cartan, E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, in Oevres Complètes, Vol. 1, CNRS, 1984, 137－288.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975(译自法文).

[4] Kaplansky, I., Lie algebras and locally compact groups, Chicago Univ. Press, 1971.

[5] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976(英译本: Naĭmark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

Д. П. Желобенко 撰

【编者注】 Killing 型是特征为 0 的域 k 上半单 Lie 代数 Killing-Cartan 分类的关键性工具. 如果 char $k\neq 0$, 半单 Lie 代数上的 Killing 型可能是退化的.

Killing 型也称为 Cartan-Killing 型(Cartan-Killing form).

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是 Lie 代数 L_1 的一个基, 对应的结构常数是 γ_{ij}^k, 从而 $[X_i, X_j]=\sum_{k=1}^n\gamma_{ij}^kX_k$(求和约定). 那么, Killing 型可用这些结构常数给出

$$B(X_a, X_b)=g_{ab}=\gamma_{ac}^d\gamma_{bd}^c.$$

度量(张量) g_{ab} 称为 Cartan 度量(Cartan metric), 常见于理论物理的文献中. 利用 g_{ab} 可以降低指标(见**向量空间上的张量**(tensor on a vector space))以得到"结构常数" $\gamma_{abc}=g_{da}\gamma_{bc}^d$, 在它们的指标上是完全反对称的(这是 Jacobi 恒等式的一个直接推论且等价于算子 ad y 关于 $B(x, z)$ 的反对称性; 参考文中所述).

参考文献

[A1] O'Raifeartaigh, L., Group structure of gauge theories, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A2] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras and their representations, Springer, reprint, 1984.

[A3] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972(中译本：J. E. 汉弗莱斯，李代数及其表示理论导引，上海科技出版社，1981).
牛凤文 译

消灭空间 (X, n) [killing space; убивающее пространство]

纤维空间 (fibre space) $p_n: (X, n) \to X$ 使同伦群 $\pi_i(X, n)$，当 $i < n$ 时为零，而 $p_{n_*}: \pi_i(X, n) \to \pi_i(X)$ 在 $i \geqslant n$ 时为同构. 空间 (X, n) 可以按 n 归纳地构作. 如果 $(X, n-1)$ 已造好，则 (X, n) 可取为典则映射

$$(X, n-1) \to K(\pi_{n-1}(X), n-1)$$

的同伦纤维，这里 $K(\pi_{n-1}(X), n-1)$ 是 **Eilenberg-MacLane 空间** (Eilenberg-MacLane space). 空间 (X, n) 和映射 p_n 的序列，是映射 $^* \to X$ 的 Moore-Постников 系统. А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 亦见[A1]，第 8 章第 3 节.

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.
沈信耀 译 佘建明 校

Killing 向量 [Killing vector; Киллинга вектор]

更确切地说，Killing 向量场 (Killing vector field) 或无穷小运动 (infinitesimal motion). Riemann 流形 M 上(局部)单参数运动群的速度场. 更确切地说，M 上向量场 X 称为 Killing 向量场，如果它满足 Killing 方程 (Killing equation)

$$L_X g = 0, \qquad (*)$$

其中 L_X 是沿 X 的 **Lie 导数** (Lie derivative)，g 是 M 的 **Riemann 度量** (Riemann metric). 这种场最早被 W. Killing([1]) 系统地研究过，他也导出了它们的方程(*). 在完全 Riemann 流形上任何 Killing 向量场都是完全的 (complete)，即它是一单参数运动群的速度场. M 上所有 Killing 向量场的集合 $i(M)$ 构成一个维数不超过 $n(n+1)/2$ 的 Lie 代数，这里 $n = \dim M$，并且仅当常曲率空间时这个维数等于 $n(n+1)/2$. 所有完全 Killing 向量场的集合构成 $i(M)$ 的子代数，它是 M 上运动群的 Lie 代数. 沿 Killing 向量场方向的 Lie 导数不仅使度量 g 消失，而且也使一切由度量规范构造的场消失，如 Riemann 曲率张量、Ricci 算子等. 这使人们能建立 Killing 向量场和曲率张量的性质之间的联系. 例如，在 Ricci 算子的特征值均不相等的点，Killing 向量场不可能消失.

Killing 向量场 X 作为余切丛 T^*M 上的函数

$$X: T^*M \ni \alpha \to \alpha(X)$$

是 T^*M 上由 Riemann 度量确定的 (Hamilton) 测地流的首次积分. 类似地，M 上一个反变对称张量场 S 称为 Killing 张量场 (Killing tensor field)，如果与它对应的 T^*M 上的函数(纤维上的多项式)

$$S: \alpha \to S(\alpha, \cdots, \alpha)$$

是测地流的首次积分. 确定 Killing 张量场的方程也称为 Killing 方程 (Killing equation). 作为 T^*M 上的函数，所有 Killing 张量场的集合，关于由 T^*M 上标准辛结构定义的 Poisson 括号，构成一 Lie 代数(一般是无限维的).

更一般地，设 $Q: \mathrm{Rep}^k M \to W$ 是流形 M 上的 k 阶几何对象，即 M 上 k 标架的流形到空间 W 的 $\mathrm{GL}^k(n)$ 等变映射，这里 $\mathbf{R}^n$(保持原点不变)的微分同胚在零点的 k 射流群 $\mathrm{GL}^k(n)$ 作用在 W 上. M 上向量场 X 称为对象 Q 的无穷小自同构 (infinitesimal automorphism) 或 Killing 场 (Killing field)，如果 M 上对应的(局部)单参数变换群 φ_t 诱导了标架流形 $\mathrm{Rep}^k M$ 的一个保持 Q 不变的变换群 $\varphi_t^{(k)}: Q \circ \varphi_t^{(k)} = Q$. 确定对象 Q 的 Killing 场的方程称为 Lie-Killing 方程 (Lie-Killing equation)，而对应的算子称为 Lie 算子 (Lie operator) ([6]).

参考文献

[1] Killing, W., Ueber die Grundlagen der Geometrie, *J. Reine Angew. Math.*, **109** (1892), 121 – 186.

[2] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3. изд., М., 1967 (中译本：洛薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955).

[3] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[4] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[5] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[6] Kumpera, A. and Spencer, D., Lie equations, 1. General theory, Princeton Univ. Press, 1972.

[7] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2, Interscience, 1969.

[8] Егоров, И. П., Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965, 5 – 179.
Д. В. Алексеевский 撰 沈一兵 译

动理学方程 [kinetic equation; кинетическое уравнение]

非平衡统计物理中的方程，它被应用于气体理论、空气动力学、等离子体物理、粒子穿越物质的理论，以及辐射转移理论中. 动理学方程的解确定单个粒子动

力学态的分布函数，它通常依赖于时间、坐标和速度.

1872 年 L. Boltzmann 以公式表述了气体理论的基本动理学方程. 它是一个非线性积分微分方程（见 **Boltzmann 方程**（Boltzmann equation）），它把分子运动描述作为分子两体碰撞机理所确定的某种随机过程，进入方程中的系数（有效截面）由经典力学方程计算. 通过研究动理学方程解的性质，Boltzmann 给出了热力学第二定律的分子动理学解释，并确立了熵概念的统计意义（见 **Boltzmann *H* 定理**（Boltzmann *H*-theorem））. 量子统计物理中的 Boltzmann 方程，最简单情况下是通过类比于经典情况予以描述，但是要应用量子有效截面和考虑到对称性要求. 对于相对论性气体，Boltzmann 方程以协变形式予以表述. 为了获得气体理论中能考虑到分子的动力学态之间关联的动理学方程，已经发展了一个系统方法（见 **Боголюбов 方程系列**（Bogolyubov chain of equations））. 利用这个方法，从 **Liouville 方程**（Liouville equation）出发，若应用按气体密度的幂级数展开，在最低级近似下可以获得 Boltzmann 方程.

按相互作用能强度的幂级数展开导致带自洽场的 **Власов 动理学方程**（Vlasov kinetic equation）；在随后后近似下，空间均匀情况导致 **Ландау 动理学方程**（Landau kinetic equation），描述所谓"速度空间中的扩散".

已经知道非线性动理学方程的少数几个严格解. 关于数值求解，即使应用计算机也很困难. 较透彻研究过的是线性化动理学方程，它描述对非线性方程平衡解的小偏差. 它与辐射转移和中子输运的理论（见 **辐射转移理论**（radiative transfer theory））中，以及与粒子穿越物质的理论中，出现的线性输运方程形式上相同.

辐射转移理论，就其问题和求解方法而言，与中子输运理论接近. 有关核反应堆及核辐射防护的计算曾要求创造出求解中子和 γ 量子输运的动理学方程的有效方法，也推动了线性动理学方程数学理论的创立. 非线性 Boltzmann 方程的解的存在性和唯一性定理以及其渐近行为曾经被广泛研究过（[1]）. 对于线性方程的情况，在核反应堆数学理论的最一般表述中获得了这些定理（[2]，[3]，[4]）. 许多问题曾经用解析方法求解过，而在一般情况下，曾经发展了对其求解的许多近似数值方法，对计算机上的程序运算是方便的（见 **输运方程的数值方法**（transport equations, numerical methods））.

关于带电粒子穿越物质的问题，经常归结为存在各向异性散射情况下线性输运方程的求解，或者归结为线性化 Ландау 方程的求解（例如，在粒子从物体表面散射的角分布的确定中、或者在物质中带电粒子能谱的确定中）.

参考文献

[1] Montroll, E. W. and Lebowitz, J. (eds.), Nonequilibrium phenomena, 1. The Boltzmann equation, North-Holland, 1983.
[2] Владимиров, В. С., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, № 61, 1961.
[3] Шихов, С. Б., Вопросы математической теории реакторов, Линейный анализ, М., 1973.
[4] Case, K. and Zweifel, P., Linear transport theory, Addison-Wesley, 1967.
[5] Коган, М. Н., Динамика разреженного газа (кинетическая теория), М., 1967 (英译本: Kogan, M. N., Rarified gas dynamics, Plenum Press, 1969).
[6] Силин, В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971.
[7] Соболев, В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956.

В. А. Чуянов 撰

【补注】 亦见 **Boltzmann 方程**（Boltzmann equation）的参考文献.

参考文献

[A1] Cercignani, C., Mathematical methods in kinetic theory, Plenum Press, 1969.
[A2] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988.
[A3] Carleman, T., Problèmes mathématiques dans la théorie kinétique des gaz, Mittag-Leffler Inst., 1957.

徐锡申 译

Kirchhoff 公式［**Kirchhoff formula**；**Кирхгофа формула**］，Kirchhoff 积分（Kirchhoff integral）

公式

$$u(x, t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{f(y, t-r)}{r}\,d\Omega_y+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial(1/\Gamma)}{\partial n}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial r}{\partial n}\right]_{\tau=t-r}d\sigma_y, \qquad (1)$$

给出了非齐次**波动方程**（wave equation）

$$u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}=f(x, t) \qquad (2)$$

的解 u 在点 $x=(x_1, x_2, x_3)\in\Omega$ 及瞬时 t 时的值 $u(x, t)$. 此公式利用了具密度 f 的推迟体位势

$$v_1(x, t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{f(y, t-r)}{r}\,d\Omega_y,$$
$$y=(y_1, y_2, y_3)$$

以及在区域 Ω 的边界 σ 上函数 $u(y, t)$ 及其一阶导数于瞬时 $\tau=t-r$ 时的值. 此处 Ω 是三维 Euclid 空

间内的有界区域，它带有逐段光滑的边界 σ、n 表示 σ 的外法向，$r=|x-y|$ 是 x 和 y 间的距离．

令

$$v_1(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial \mu_1(y,t-r)}{\partial n}d\sigma_y,$$

$$v_2(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial^*}{\partial n^*}\frac{\mu_2(y,t-r)}{r}d\sigma_y,$$

此处

$$\frac{\partial^*}{\partial^* n}\frac{\mu_2(y,t-r)}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial \mu_2(y,t-r)}{\partial t}+$$

$$-\mu_2(y,t-r)\frac{\partial(1/r)}{\partial n},$$

积分 $v_1(x,t)$ 和 $v_2(x,t)$ 分别称为单层（single layer）及双层（double layer）的推迟势（retarded potentials）．

Kirchhoff 公式（1）表示方程（2）的任何两次连续可微的解 $u(x,t)$，可表示为一个单层，一个双层及一个体位势的推迟势之和：

$$u(x,t)=v_1(x,t)+v_2(x,t)+v_3(x,t).$$

当 $u(x,t)=u(x)$ 及 $f(x,t)=f(x)$ 不依赖于 t 时，Kirchhoff 公式表示为

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{f(y)}{r}d\Omega_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right]d\sigma_y,$$

且它给出了 **Poisson 方程**（Poisson equation）$\Delta u=-f(x)$ 的解．

Kirchhoff 公式广泛地应用于一系列问题的解决．例如，若 Ω 是以 x 为心，t 为半径的球 $|y-x|\leqslant t$，则公式（1）变成关系式

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{r\leqslant t}\frac{f(y,t-r)}{r}dy+$$

$$+tM_t[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}tM_t[\varphi], \qquad (3)$$

其中

$$M_t[\varphi]=\frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1}\varphi(x+ty)ds_y$$

是 $\varphi(x)$ 在球面 $|y-x|=t$ 上的平均值，

$$\varphi(x)=u|_{t=0},\ \psi(x)=u_t|_{t=0}. \qquad (4)$$

若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在球 $|x|\leqslant R$ 内给定，且分别有三次及二次的连续偏导数，$f(x,t)$ 对 $|x|<R$ $(0\leqslant t\leqslant R-|x|)$ 二次连续可微，则由（3）确定的函数 $u(x,t)$ 是方程（2）在 $|x|<R$ $(t<R-|x|)$ 内的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）（4）的一个正则解．

公式（3）也称为 Kirchhoff 公式．

波动方程

$$\Delta u=u_{tt} \qquad (5)$$

的 Kirchhoff 公式表示为

$$u(x,t)=tM_t[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}tM_t[\varphi].$$

此公式值得注意，因由它可得 **Huygens 原理**（Huygens principle）：在自变量 x_1，x_2，x_3，t 的空间内，（5）在点 (x,t) 的解（波）$u(x,t)$ 完全可由 φ，$\partial\varphi/\partial n$ 及 ψ 在以 x 为中心，$|t|$ 为半径的球面 $|y-x|=t$ 的值确定．

考虑如下正规双曲型（normal hyperbolic type）方程

$$\sum_{i,j=1}^{m+1}a^{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{m+1}b^j(x)u_{x_j}+c(x)u=f(x). \qquad (6)$$

其中 $a^{ij}(x)$，$b^j(x)$，$c(x)$ 及右边 $f(x)$ 均在某 $(m+1)$ 维区域 Ω_{m+1} 内充分光滑．所谓此方程是正规双曲型的，是指在任一点 $x\in\Omega_{m+1}$ 处，借助一个非奇异线性变换，可将形式

$$\sum_{i,j=1}^{m+1}a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

化为形式

$$y_0^2-\sum_{i=1}^{m}y_i^2.$$

当独立变量 $x_1,\cdots,x_{m+1}$ 的个数 $m+1$ 是偶数时，则 Kirchhoff 公式可推广到方程（6）（[4]）．在此，本质的一点是函数 $\varphi^{(k)}$ 的构造，此 $\varphi^{(k)}$ 的作用是要将 **Newton 位势**（Newton potential）$1/r$ 推广到方程（6）的情形．对方程（6）的特殊情形，

$$u_{tt}-\sum_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}=0,\ m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2), \qquad (7)$$

推广的 Kirchhoff 公式是

$$u(x,t)=\gamma\int_\sigma\sum_{i=1}^{k}(-1)^k\left\{\frac{\partial\varphi^{(k-i+1)}}{\partial n}\left[\frac{\partial^{i-1}u}{\partial t^{i-1}}\right]+\right.$$

$$\left.-\varphi^{(k-i+1)}\left[\frac{\partial^i u}{\partial n\partial t^{i-1}}-\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right]\right]\right\}d\sigma_x, \qquad (8)$$

此处 γ 是一正数，σ 是 m 维有界区域 Ω_m 的逐段光滑的边界，点 y 包含在 Ω_m 的内部，n 是 σ 的外法向．进而

$$\varphi^{(i)}=\gamma_i r^{-k-i+1},\ \varphi^{(k)}=r^{2-m},\ r=|y-x|;$$

$$\gamma_i=\text{常数},\ i=1,\cdots,k-1;\ k=\frac{m-1}{2};$$

且 $[\psi]$ 表示 $\psi(x,t)$ 的迟后值:

$$[\psi(x, t)] = \psi(x, t - r).$$

对方程（6），公式（8）有时称为 Kirchhoff-Соболев 公式（Kirchhoff-Sobolev formula）.

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976.

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976(英译本：Vladimirov, V. S., The equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[3] Bateman, H., Partial differential equations of mathematical physics, Dover, 1944.

[4] Mathisson, M., Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus, *Math. Ann.*, **107** (1932), 400 − 419.

[5] Mathisson, M., Le problème de M. Hadmard rélatifs à la diffusion des ondes, *Acta Math.*, **71** (1934), 3 − 4, 249 − 282.

[6] Михлин, С. Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977.

[7] Соболев, С. Л., 《Докл. АН СССР》, **1** (1933), 6, 256 − 262.

[8] Соболев, С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962(中译本：С. Л. Соболев, 泛函分析在数学物理中的应用，吉林大学出版社，1990).

[9] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957(中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷，人民教育出版社，1958).

[10] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972(中译本：А. Н. 吉洪诺夫，А. А. 萨马尔斯基，数学物理方程（上、下册），高等教育出版社，1956, 1957).

А. М. Нахушев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baker, B. B., Copson, E. T., The mathematical theory of Huygens's principle, Clarendon Press, 1950.

[A2] Schwartz, L., Théorie des distributions, 2, Hermann, 1951.

[A3] Kirchhoff, G. R., Vorlesungen über mathematischen Physik, *Ann. der Physik*, **18** (1883).

仇庆久 译

Kirchhoff 法 [Kirchhoff method; Кирхгофа метод]

短波衍射理论中问题的一种近似求解方法，由 G. R. Kirchhoff 提出．在其最简单形式中，Kirchhoff 的方法归结如下：令一波动过程由 **Helmholtz 方程**（Helmholtz equation）来描述，并考虑平面波被凸曲面 Σ 散射的问题，在此曲面上经典（Dirichlet）边界条件 $u|_\Sigma = 0$ 成立．求解归结为寻求在指定边界条件下满足 Helmholtz 方程 $(\Delta + k^2)u = 0$ 的函数，它可描述为和式 $u = e^{ikx_1} + U$，其中 U 满足 Sommerfeld **辐射条件**（radiation conditions）．问题的解存在，它具有积分表示

$$u(x) = e^{ikx_1} - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}} \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} d\Sigma_{x'}, \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ x' = (x_1', x_2', x_3'),$$

$$|x - x'| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_i')^2},$$

其中 $\partial/\partial n_{x'}$ 是沿 Σ 的法线的导数．法线取为相对于以 Σ 为内界的无限域是向外的．假定在 Σ 受平面波 e^{ikx_1} 所照的部分上 $\partial u/\partial n_{x'}$ 近似等于由**射线法**（ray method）所得到的表达式．在阴影部分令 $\partial u(x')/\partial n_{x'} = 0$，这样获得的表达式 u_K 称为 u 的 Kirchhoff 近似．

在受照区，u_K 和 u 的**几何近似**（geometric approximation）在其主要项上是相同的．在受照区和阴影区之间的边界邻域，u_K 的渐近展开式的主要项用 Fresnel 积分 $\int_0^\infty e^{i\alpha^2} d\alpha$ 来表达，而在阴影区 $u_K = O(1/k)$（事实上在阴影区 u 减小得比 $1/k$ 显著快得多）．

Kirchhoff 法给出对 u 的一个公式，它在主要项上是渐近正确的，并且当 $|x| \to \infty$ 时仍正确．在 k 的后续各阶，Kirchhoff 近似已不再适用．

参考文献

[1] Hönl, H., Maue, A.-W. and Westpfahl, K., Theorie der Beugung, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. 25/1, Springer, 1961, 218−573.

В. М. Бабич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinowicz, A., Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung, PWN, 1957.

徐锡申 译

Kleene-Mostowski 分类 [Kleene-Mostowski classification; Клини-Мостовского классификация]

由 S. C. Kleene ([1]) 和 A. Mostowski ([2]) 各自独立提出的数论谓词的一种分类．所有递归谓词的类同时用 Π_0 和 Σ_0 表示．对每一个 $k > 0$，类 Σ_k 定义为由一切能表示为 $\exists y R(y, x_1, \cdots, x_n)$ 形状的谓词构成的类，其中 ∃ 是存在**量词**（quantifier），并且 $R(y, x_1, \cdots, x_n)$ 是类 Π_{k-1} 中的一个谓词；而 Π_k 定义为由一切能表示为 $\forall y R(y, x_1, \cdots, x_n)$ 形状的谓词构成的类，其中 ∀ 是全称量词，并且谓词 $R(y, x_1, \cdots, x_n)$ 属于类 Σ_{k-1}．用这个方法得到类的两个序列：

$$\Sigma_0 = \Pi_0 \begin{matrix} \Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3\ \cdots\cdots \\ \Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3\ \cdots\cdots \end{matrix}.$$

如果一个谓词属于 Σ_k 或 Π_k，那么对任意 $j > k$，它也属于 Π_j 和 Σ_j，即对任意 $j > k$，$\Sigma_k \subseteq \Sigma_j \cap \Pi_j$，并且 $\Pi_k \subseteq \Sigma_j \cap \Pi_j$．如果 $k > 0$，那么 Σ_k 中存在不

属于 Π_k 的谓词，并且 Π_k 中也存在不属于 Σ_k 的谓词，即 $\Sigma_k \setminus \Pi_k \neq \phi$，并且 $\Pi_k \setminus \Sigma_k \neq \phi$. 一个谓词属于类 Σ_k 或类 Π_k 之一，当且仅当它可以用**形式算术**(arithmetic, formal)的语言表示．如果一个谓词 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 属于 Σ_k（或 Π_k），那么 $\neg Q(x_1, \cdots, x_n)$ 属于 $\Pi_k(\Sigma_k)$，其中 $\neg$ 是否定符号．一个谓词 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 是递归的（见**递归谓词**(recursive predicate)），当且仅当 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\neg Q(x_1, \cdots, x_n)$ 都属于 Σ_1，即 $\Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Sigma_0 = \Pi_0$. 如果 $k > 0$，那么 $(\Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}) \setminus (\Sigma_k \cup \Pi_k) \neq \varnothing$.

定义于形式算术的语言中的集合的分类(classification of sets)依据谓词的分类进行：一个集合 M 属于 Π_k（或 Σ_k），如果谓词“$x \in M$”属于这个类．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Recursive predicates and quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 41 – 73.

[2] Mostowski, A., On definable sets of positive integers, *Fund. Math.*, **34** (1947), 81 – 112.

В. Е. Плиско 撰

【补注】 $\Pi_j \cap \Sigma_j$ 通常用 Δ_j 表示．Kleene-Mostowski 分类一般也叫做算术谱系(arithmetical hierarchy).

参考文献

[A1] Enderton, H. B., Elements of recursion theory, in J. Barwise (ed.): Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, 527 – 566.

卢景波 译

Klein 坐标 [Klein coordinates; Клейна координаты]

见 **Plücker 坐标**(Plücker coordinates).

Klein-Gordon 方程 [Klein-Gordon equation; Клейна-Гордона уравнение]

描述零自旋标量或赝标量粒子，例如 π 介子和 K 介子的相对论性不变的量子方程．该方程先是由 O. Klein ([1]) 和稍后由 Ф. А. Фок 作为第五个坐标为循环坐标的条件下的波动方程建立起来的，不久以后由多位作者（例如，W. Gordon ([2])）在不用对第五个坐标的这个要求的条件下推导了出来．

后来的应用证明了，Klein-Gordon 方程作为相对论性量子方程只有在**量子场论**(quantum field theory)中才是可能的，而不是在量子力学中．在[3]中给出了 Klein-Gordon 方程作为零自旋粒子的场的方程的解释．Klein-Gordon 方程适用于描述 π 介子及相应场；它作为量子场论基本方程之一起作用．

Klein-Gordon 方程是常系数线性齐次二阶偏微分方程：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \mu^2\right]\varphi = 0, \quad (1)$$

其中 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 是一个（赝）标量函数，在一般情况下为复函数，$\mu = mc/\hbar$，m 是粒子的静质量．若 φ 是实函数，则 Klein-Gordon 方程描述中性（赝）标量粒子；而当 φ 是复函数时，则它描述带电粒子．

在后一情况下，(1) 要补充以复共轭标量函数 φ^* 的方程：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \mu^2\right]\varphi^* = 0. \quad (2)$$

（赝）标量粒子与电磁场的相互作用，由最省代换 $\partial/\partial x^\alpha \to \partial/\partial x^\alpha - ieA_\alpha/\hbar$ 来描述．任何自旋粒子波函数的每个分量也满足 Klein-Gordon 方程，但只有对于自旋为 0 的情况，函数相对于 Lorentz-Poincaré 群才是不变的．

Klein-Gordon 方程可借助于狭义相对论中粒子的能量 E 和动量 p 之间的关系

$$\frac{1}{c^2} E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2 ,$$

通过将物理量用算子代替（见[4]，[5]）：

$$E \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad p \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

而获得．像所有相对论性方程那样，Klein-Gordon 方程可以表达成 **Dirac 方程**(Dirac equation)的形式，也就是说，它可以化成一阶线性方程：

$$\left[\Gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \mu\right]\psi = 0, \quad (3)$$

其中系数 Γ^α 是类似于 **Dirac 矩阵**(Dirac matrices) γ^α 的矩阵．在 Klein-Gordon 方程的情况下，矩阵 Γ^α 满足对易关系：

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho + \Gamma_\rho \Gamma_\nu \Gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\Gamma_\rho + \eta_{\rho\nu}\Gamma_\mu . \quad (4)$$

例如，$(\Gamma_\alpha)^3 = \eta_{\alpha\alpha}\Gamma_\alpha$（Kemmer-Duffin 矩阵(Kemmer-Duffin matrices)）．这里 $\eta_{\mu\nu}$ 是 **Minkowski 空间**(Minkowski space)的度规张量．所有 Γ^α 都是退化矩阵($\det \Gamma_\alpha = 0$)．因此，它们并不具有逆矩阵．

除了对 (4) 的平凡解 $\Gamma_\alpha = 0$，$\psi = 0$ 以及描述标量场 φ 本身和其梯度的四个分量的五行矩阵形式的一个解以外，关系式 (4) 还有十行矩阵形式的一个解．相应十分量函数包括势 A_α 的四个分量和应力 $F_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ 的六个分量，也就是说，方程 (3) 和 (4) 可以同时给出描述具有自旋 1 的矢量粒子的 Proca 方程的一个表示；对 $\mu = 0$ 和实 φ，它们给出 **Maxwell 方程组**(Maxwell equations)的一个表示．

当按照广义相对论考虑到（赝）标量粒子与引力场的相互作用时，Klein-Gordon 方程推广到任意 Riemann 空间为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}\right] - \mu^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 是度规张量，g 是矩阵 $\|g_{\alpha\beta}\|$ 的行列式．在方程(5)中经常加上项 $R\varphi/6$，其中 R 是标量曲率，由于此项，当 $\mu=0$ 时，广义相对论性 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}\right]-\frac{R\varphi}{6}=0$$

变成保形不变的．

参考文献

[1] Klein, O., *Z. Phys.*, **37** (1926), 895–906.

[2] Gordon, W., *Z. Phys.*, **40** (1926–1927), 117–133.

[3] Pauli, W. and Weisskopf, V., Ueber die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung, *Helv. Phys. Acta*, 7 (1934), 709–731.

[4] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976 (英译本: Bogolyubov, N. N. and Shirkov, D. V., Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, 1959).

[5] Schweber, S., An introduction to reletivistic quantum field theory, Harper & Row, 1962. В. Г. Кречет 撰

【补注】 在[A1],[A2]中推导出了 Klein-Gordon 方程(1)的基本解的显示公式．关于对易关系(4)的推导亦见[A3]．

参考文献

[A1] Hilgevoord, J., Dispersion relations and causal description, North-Holland, 1960.

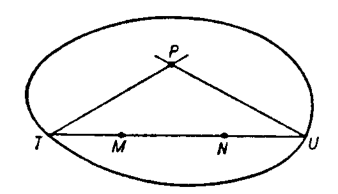
[A2] Jager, E. M. de, The Lorentz-invariant Solutions of the Klein-Gordon equation Ⅰ–Ⅲ, *Indag. Math.*, **25** (1963), 4, 515–531; 532–545; 546–558.

[A3] Roman, P., Theory of elementary particles, North-Holland, 1960.

[A4] Björken, J. D. and Drell, S. D., Relativistic quantum mechanics, McGraw-Hill, 1964. 徐锡申 译

Klein解释 [Klein interpretation; Клейна интерпретация]

实现 Лобачевский **几何学** (Lobachevski geometry) 公理系统的一个模型．在 Klein 解释中 Лобачевский 平面被解释为 Euclid 平面的一个实非退化绝对形二次曲线的内部．Лобачевский 平面的直线实现为此绝对形二次曲线的弦(不包含顶点)．直线 MN 的通过一点 P 的平行线由与直线 MN 相交于绝对形二次曲线上的点 U 和 T 的直线 PU 和 PT 实现(见图)．



Klein 解释中运动是保持绝对形二次曲线不变的射影变换．与度量有关的量是变换的数值不变量：距离用四点的交比表达，角度用四直线的交比表达．绝对形二次曲线可视为 Лобачевский 平面的广义点的集(即双曲平行线束)．Klein 解释可推广至多维情形．

Klein 解释是 F. Klein ([1]) 提出的．

参考文献

[1] Klein, F., Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Gött. Nachr*, (1871), 419–433.

[2] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 2. М., 1956.

[3] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971.

[4] Погорелов, А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968 (英译本: Pogorelov, A. V., Foundations of geometry, Noordhoff, 1966). А. Б. Иванов 撰

【补注】 Klein 解释又称为 Klein **模型** (Klein model)．亦见 **Poincaré 模型** (Poincaré model)．

参考文献

[A1] Norden, A. P., Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1958 (译自俄文).

[A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1957. 杨路、曾振柄 译

Klein 空间 [Klein space; Клейна пространство], **齐性空间** (homogeneous space)

一个拓扑空间，在它上面定义了一个该空间到其自身的同胚映射构成的群，对该空间任意两点 A 和 B 该群有一变换将 A 映至 B．

Klein 空间一词的来源与 F. Klein (1872) 的**埃尔兰根纲领** (Erlangen program) 有关，其中各种几何学由相应的变换群定义． А. Б. Иванов 撰

【补注】 又见**齐性空间** (homogeneous space)．

参考文献

[A1] Klein, F., The Erlangen program, *Math. Intelligence*, **0** (1977), 22–30. 杨路、曾振柄 译

Klein 曲面 [Klein surface; Клейна поверхность], Klein **瓶** (Klein bottle)

亏格 1 的闭单侧曲面(见图 1, a, b)．

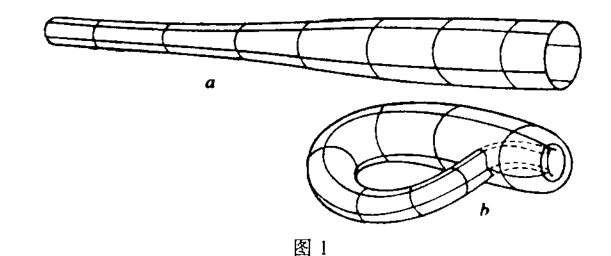


图 1

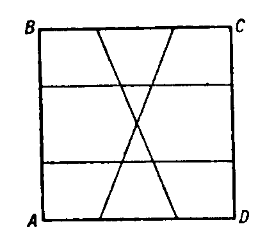


图 2

Klein 曲面可以从正方形 $ABCD$ (见图 2) 沿平行于边 AD 的直线叠合直线段 AB 和 CD 的点和关于正方形 $ABCD$ 的中心对称地叠合线段 BC 和 AD 而得到. Klein 曲面可以拓扑嵌入 4 维 Euclid 空间, 但不能嵌入 3 维空间.

F. Klein 引起对 Klein 曲面的关注 (1874).

Е. В. Шикин 撰

【补注】 Klein 瓶可由沿两个交叉帽 (**Möbius 带** (Möbius strip)) 的边界, 将其粘合一起得到. Klein 瓶 K 的同调群是 $H_0(K;\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, $H_1(K;\mathbf{Z})=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/(2)$, $H_2(K;\mathbf{Z})=0$. 它的 Euler 示性数是 $\chi(K)=0$. 连同环面一起, 是唯一允许具有无不动点的恒同映射的形变的光滑 2 维曲面.

参考文献

[A1] Blackett, D. W., Elementary topology, Acad. Press, 1967.

[A2] Jänich, K., Topology, Springer, 1984.

[A3] Mayer, J., Algebraic topology, Prentice-Hall, 1972.

徐森林 译

Klein 群 [Kleinian group; Клейнова группа]

扩充的复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的所有**分式线性映射** (fractional-linear mapping)

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc=1$$

的群的**离散子群** (discrete subgroup) Γ, 它是真不连续群. 这是说, 对所有点 $z_0\in\mathbf{C}$, 轨道 $\{\gamma(z_0):\gamma\in\Gamma\}$ 的聚点集 $\Lambda(\Gamma)$, 它称为群 Γ 的极限集 (limit set of the group), 是 $\overline{\mathbf{C}}$ 的真子集. 补集 $\Omega(\Gamma)=\overline{\mathbf{C}}\setminus\Lambda(\Gamma)$ 称为 Γ 的的间断集 (discontinuity set), 是开集, 且具有下述性质: 它的每一点 z 有一个邻域 U_z, 对于所有 $\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_z$ 都有 $\gamma(U_z)\cap U_z=\emptyset$, 其中

$$\Gamma_z=\{\gamma\in\Gamma:\gamma(z)=z\}$$

是 z 在 Γ 中的**稳定化子** (stabilizer). 若某点 $z\in\Omega(\Gamma)$ 不是 Γ 的椭圆元的不动点, 则 $\Gamma_z=\{J\}$, 这里 J 是恒等映射, 而对于每个椭圆不动点, Γ_z 是有限**循环群** (cyclic group). Klein 群的基本理论是在 19 世纪时 H. Poincaré 和 F. Klein 的基本文章 [1], [2] 中奠定的; Klein 群的名称要回溯到 Poincaré.

极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 或是空集, 或由一到二个点组成或是无限集. 前两种情况对应于初等群 (elementary group) (特别地, 全是循环群). 若 $\Lambda(\Gamma)$ 是无限集, 则它是 $\overline{\mathbf{C}}$ 的无处稠密的、具有正**对数容量** (logarithmic capacity) 的完满子集 (见**完满集** (perfect set)). 通常, 初等群不包括在 Klein 群中.

商空间 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 有自然的复 (保形的) 结构, 到它的投影

$$\pi:\Omega(\Gamma)\to\Omega(\Gamma)/\Gamma$$

是全纯的, 且可表为有限或可数个 Riemann 曲面 S_j 的并集 $\bigcup_j S_j$; 该覆盖在点具有非平凡稳定化子 Γ_z 的 $z\in\Omega(\Gamma)$ 的投影上是分歧的. $\Omega(\Gamma)$ 本身分裂成连通分支 Ω_j, 其数目为 1, 2 或 ∞. 若子群

$$\Gamma_{\Omega_j}=\{\gamma\in\Gamma:\gamma(\Omega_j)=\Omega_j\}$$

与 Γ 相同, 则 Ω_j 称为不变分支 (invariant component). 最多能有两个不变分支. 有不变分支的 Klein 群获得名称 Klein 函数群 (Kleinian function groups).

例 1) **Fuchs 群** (Fuchsian group). 每个这样的群使某个圆 (或线) l 不变, 保持环流的定向并且 $\Lambda(\Gamma)\subset l$. 为使 (非-初等) Klein 群 Γ 是 Fuchs 群, 其必要和充分条件是它不含斜驶元素. 按照 Kleinian-Poincaré 单值化定理, 除少数简单情况外每个 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 可被例如作用在上半平面 $H=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ 的一个 Fuchs 群所单值化, 也即精确到保形等价它可表成形式 H/Γ. 若在 H 上引进双曲的 Poincaré 度量

$$ds=\frac{|dz|}{\operatorname{Im}z},$$

则 Γ 的元素成为非 Euclid (双曲) 运动. Poincaré 根据 Γ 的作用在半空间

$$\mathbf{R}^3_+=\{x=(x_1,x_2,x_3):x_1+ix_2\in\mathbf{C},\ x_3>0\}$$

上的延拓, 也对任意 Klein 群 Γ 提出一个相似的解释. 即, 由于 Γ 的每个元是对于圆 $L\subset\overline{\mathbf{C}}$ 的可数个反演的合成, 故可考虑 $\mathbf{R}^3_+$ 中由 L 支撑的半球相应的反演. 上述延拓的群 Γ 不连续地作用在 $\mathbf{R}^3_+$ 上, 且它的元素成为 $\mathbf{R}^3_+$ 的双曲运动.

2) 拟 Fuchs 群 (quasi-Fuchsian groups). Fuchs 群的直接推广. 拟 Fuchs 群是 Klein 群 Γ, 且它使某个有向的 **Jordan 曲线** (Jordan curve) $l\subset\mathbf{C}$ 不变. 于是 $\Lambda(\Gamma)\subset l$. 若 $\Lambda(\Gamma)=l$, 则 Γ 称为亏格为 1 的群, 若 $l\setminus\Lambda(\Gamma)\neq\emptyset$, 称它亏格为 2 的群. Riemann 曲面 D_1/Γ 和 D_2/Γ 是同胚的, 其中 D_1 是 l 的内部而 D_2 是 l 的外部. 进而, 例如, 两个同胚的有限

型 Riemann 曲面（即具有有限个孔的闭曲面）可用同一个拟 Fuchs 群单值化．有限生成的拟 Fuchs 群可用平面的拟保形自同构化成 Fuchs 群（共轭与它们）．

3）Schottky 群（Schottky group）．具有生成元 $\gamma_1, \cdots, \gamma_p (p \geqslant 1)$ 的 Klein 群 Γ，且存在 $2p$ 个不相交的 Jordan 曲线 $l_1, l_1', \cdots, l_p, l_p'$，界定了一个 $2p$ 连通的区域 D，满足

$$\gamma_j(D) \cap D = \phi,\ \gamma_j(l_j) = l_j',\ j = 1, \cdots, p.$$

这里 Γ 是自由群，$\Omega(\Gamma)$ 是亏格为 p 的闭曲面且所有元素 $\gamma \in \Gamma \setminus \{J\}$ 是双曲的或斜驶的．所有闭 Riemann 曲面皆可被 Schottky 群单值化（这是 Koebe 单值化（Koebe uniformization））．

4）退化群（degenerate group）．非初等有限生成 Klein 群且它的间断集是单连通区域．这类群的存在性的证明极端复杂；同时还未构造出明显的例子（1978）．退化群是具有一个不变单连通分支的群的特殊情形，后者称为 b 群（b-group）．

研究 Klein 群的几何方法的基点是基本域（fundamental domain），它是一个集合 $\omega \in \Omega(\Gamma)$，包含每个轨道 $\Gamma_{z_0}(z_0 \in \Omega(\Gamma))$ 中的一个点，且它的每个非空分支 $\omega \cap \Omega_j$ 是连通的．例如，对 Schottky 群可取它的定义中指出的区域 D，且附加上曲线 $l_1, l_2, \cdots, l_p$ 上的点来作为 ω．通常仅将 ω 的内部作为基本区域．对任何 Klein 群，都能选择标准的基本区域，它由圆弧所界定．基本区域的性质使人们能阐明 Klein 群 Γ 的结构．作出 Klein 群的方法之一是所谓组合定理（combination theorem），它指出了由若干 Klein 群生成的群 Γ 在何种条件下仍为 Klein 群．例如，设取 Fuchs 群 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$，它们分别作用在离开得足够远的圆盘 $U_1, \cdots, U_n$ 上，又设取代表它们的紧曲面 U_j/Γ_j，分别有亏格 p_j，则 $\Gamma = \langle \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n \rangle$ 是函数群，它代表了亏格为 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 和 $p_1 + \cdots + p_n$ 的 $n+1$ 个曲面．3 维流形 $(\mathbf{R}_+^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ 的研究中，当 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 是边界时，三维拓扑的方法是很合适的．

Klein 群理论的解析处理与**自守形式**（automorphic form）有关．设 Γ 是非初等 Klein 群且 $\infty \in \Omega(\Gamma)$，则对整数 $q \geqslant 2$，级数 $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(z)|^q$ 收敛（在 $\Gamma_z = \{J\}$ 的点 $z \in \Omega(\Gamma)$ 上）；相应的 Poincaré θ 级数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma(z))\gamma'^q(z)$$

给出权为 $(-2q)$ 的自守形式，其中 f 是 $\Omega(\Gamma)$ 中的亚纯函数．对有限生成的 Klein 群，这种形式的空间的维数能利用 **Riemann-Roch 定理**（Riemann-Roch theorem）来计算．这样的群 Γ 的几何结构由 Ahlfors 定理（Ahlfors theorem）所描述，按照该定理，对这些 Γ，空间 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 由有限个有限型曲面 $S_1, \cdots, S_n$ 所组成，且 π^{-1} 在每个 S_j 上仅在有限个点上分歧．该结果准许定量方面的改进．同调的方法也被用到，这是基于 Γ 在多项式的向量空间上作用的研究（见 [5]）．**拟共形映射**（quasi-conformal mapping）理论的方法（[6]，[7]）在平面上 Klein 群的理论中起了主要的作用．特别地，Klein 群的形变理论依赖于这些方法，而形变理论是与 Riemann 曲面的参模理论密切联系的（见 **Riemann 曲面的参模**（moduli of a Riemann surface）与 **Riemann 曲面的共形类**（Riemann surfaces, conformal classes of））．沿着这些方向出现了 Klein 群的某些新的类．然而未得到完全分类甚至对有限生成的 Klein 群也未分类．

与平面上 Klein 群相类比，多维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ $(n>2)$ 中的 Klein 群被定义成空间 $\overline{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ 的保形自同构群的真不连续子群，它研究得很不深入；此中出现了完全新的现象．

参考文献

[1] Poincaré, H., Mémoire sur les groupes Kleinéens, *Acta Math.*, 3 (1883), 49 – 92.

[2] Klein, F., Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, *Math. Ann.*, **21** (1883), 141 – 218.

[3] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951.

[4] Lehner, J., Discontinues groups and automorphic functions, Amer. Math. Soc., 1964.

[5] Kra, I., Automorphic forms and Kleinian groups, Benjamin, 1972.

[6] Крушкаль, С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975.

[7] Bers, L. and Kra, I. (eds.), A crash course on Kleinian groups, Lecture notes in math., 400, Springer, 1974.

[8] Maskit, B., Kleinian groups, Springer, 1988.

С. Л. Крушкаль 撰

【补注】 对斜驶的，椭圆的，双曲的，…、分式线性变换等定义，见**分式线性映射**（fractional-linear mapping）．

Ahlfors 有限性定理的"量化的"或更精确地，定量的推广的结果之一为 Bers 面积不等式（Bers area inequality）

$$\frac{1}{2\pi}\{\Omega \setminus \Gamma \text{ 的双曲面积}\} \leqslant 2(N-1),$$

其中 N 是 Γ 的生成元的（极小）数目．

参考文献

[A1] Kra, I. and Maskit, B. (eds.), Riemann surfaces and related topics, Proc. 1978 Stony Brook Conf., Princeton Univ. Press, 1981.

[A2] Farkas, H. M. and Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.

石生明 译 许以超 校

Knaster 连续统 [**Knaster continuum**; **Кнастера континуум**], 遗传不可分解连续统 (hereditarily indecomposable continuum)

一个连续统, 它的每个子连续统都是不可分解的. 一个空间 X 称为不可分解的 (indecomposable), 如果它是连通的, 且不能表作它的两个连通的闭真子集之并集.

这种连续统存在性的第一个证明由 B. Knaster ([1])给出. 在普通正方形 I^2 的所有子连续统组成的空间中, 所有 Knaster 连续统的集合是一个处处稠密的 G_δ 集 ([2]).

参考文献

[1] Knaster, B., Un continu dont tout sous-continu est indécomposable, *Fund. Math.*, **3**(1922), 247 – 286.

[2] Mazurkiewicz, S., Sur les continus absolument indécomposables, *Fund. Math.*, **16**(1930), 151 – 159.

Л. Г. Замбахидзе 撰

【补注】 亦见**伪弧** (pseudo-arc) 和**遗传不可分解连续统** (hereditarily indecomposable continuum).

白苏华、胡师度 译

Kneser 定理 [**Kneser theorem**; **Кнезера теорема**], 亏格为零的闭曲面上无奇点的一维叶状结构上的

建立了依赖于闭叶子的出现或不出现的下列**叶状结构** (foliation) 性质的定理, 并且描述了在以闭叶子为边界的区域中的非闭叶子的性状. 这个定理归功于 H. Kneser (他宁可说"曲面上的正规曲线族"而不说叶状结构 ([1]). 对 Kneser 定理的基本状况的近代叙述, 见 [2], [3]). Kneser 定理最常见用于与环面或 Klein 瓶上的无平衡位置的流的轨道有关的方面 (见 **Klein 曲面** (Klein surface)). 轨道形成了在 Kneser 定理中所考虑的型的叶状结构.

曲面上一个一维叶状结构 (one-dimensional foliation) (无奇点) 是完全充满曲面的一族不交曲线 ("叶子"), 使得在每一点, 存在一个有叶状结构出现的坐标邻域 U, 按照相应的局部坐标 x_1, x_2 为一族直线 $x_2 =$ 常数 (更精确地说, 是叶子与 U 相交的连通分支有此方程). 一个叶状结构称为可定向的 (orientable), 如果在它的每个叶子上可以定义"正"向 (使叶子定向), 使对不同的叶子, 这些方向是相容的 (compatible), 也就是, 在从叶子到叶子的连续变动下, 正向永不改变符号. 只有可定向的叶状结构是由没有平衡位置的一些流的轨道所组成的.

假设在曲面 M 上定义了方向场 (direction field) (线元场 (field of line elements)), 也就是说, 与每一个点 $x \in M$ 相联系的是在这个点处的切平面 $T_x M$ 的 1 维子空间 $l(x)$ (如果 M 在 Euclid 空间中, 那么 $l(x)$ 可以用在 x 处与 M 相切的直线来表示, 见图 1). 如果 $l(x)$ 光滑地依赖于 x, 则这个方向场的积分曲线组成了可定向或不可定向的一维叶状结构.

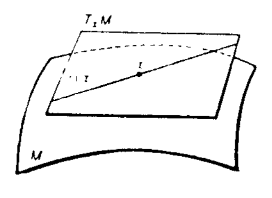


图 1

Kneser 定理的主要内容与叶子具有闭和非闭两者的情况有关, 它说明后者充满了由前者围成的区域, 其中这些区域只能有三种类型 (见图 2, 它被理解成长方形 a), b) 和 c) 中的每一个, 上面的边必须与下面的边粘合, 使 A 与 A', B 与 B' 相粘合. 例如, 从 a) 可以得到"Kneser 环", 见**环面上的微分方程** (differential equations on a torus) 条中的图). 如果曲面只有一片闭叶子, 那么, 在长方形中, 必须再加上粘合左、右两边.

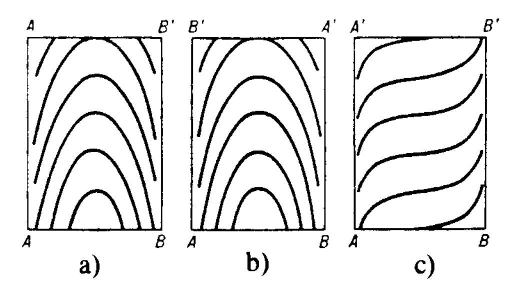


图 2

若处于这些区域之一中的非闭叶子可沿一个方向无限地扩张, 则它越来越紧地将自己卷到给定区域的闭叶上或者到围成该区域的两个闭叶中的一个上. 若非闭叶子扩张到另一边, 则它将自己卷到同一闭叶上 (在另一边) 或卷到上述第二个闭叶上.

只能存在有限个类型 a) 和 b) 的区域, 类型 b) 的一个不可定向的区域只能在 Klein 瓶上和只对不可定向的叶状结构; 类型 c) 的区域可以是有限或可数个.

Kneser 还证明了叶状结构没有闭叶子的情形只对环面上的不可定向的叶状结构是可能的, 并且在此情形中, 存在一闭直线 L 横截于该叶状结构并与所有的叶子相交. (在一般情况下, 当不假设叶子是光滑的和叶状结构由某些方向场定义时, 横截理解为: 在 L 的每个点上, 存在一个坐标邻域, 在其中, 叶子是由方程 $x_2 =$ 常数定义的. L 是由方程 $x_1 = 0$ 定义的.) 有关这方面, 也可见**环面上的微分方程** (differential equations on a torus).

参考文献

[1] Kneser, H., Reguläre Kurvenscharen auf Ringflächen, *Math. Ann.*, **91** (1924), 1-2, 135 – 154.
[2] Reinhart, B. L., Line elements on the torus, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 3, 617 – 631.
[3] Aepply, A. and Markus, L., Integral equivalence of vector fields on manifolds and bifurcation of differential systems, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 4, 633 – 654.

Д. В. Аносов 撰

【补注】在文献中, 上面所涉及的分类的以下结果常称为 Kneser 定理: Klein 瓶的任何叶状结构都具有紧的叶子.

上面提到的"Kneser 环"也称为二维 Reeb 分支 (two-dimensional Reeb components), 例如见 [A1] 和 [A2].

参考文献

[A1] Camacho, C. and Neto, A. L., Geometric theory of foliations, Birkhäuser, 1985.
[A2] Hector, G. and Hirsch, U., Introduction to the geometry of foliations, Viehweg & Sohn, 1981.

徐森林 译

Kneser-Tits 假设 [Kneser-Tits hypothesis; Кнезера-Титса гипотеза], Kneser-Tits 猜想 (Kneser-Tits conjecture)

与域 k 上迷向的, 单连通、k 单代数群结构有关的一个猜想. 这个猜想说: 域 k 上迷向的, 单连通, k 单代数群 (algebraic group) G 的 k 有理点的群 G_k 由它的幂么元生成. 此猜想的稍欠一般的形式是 M. Kneser 叙述的, 一般的陈述属于 J. Tits ([1]). 对 A_n 型群 (见**半单代数群** (semi-simple algebraic group)), Kneser-Tits 猜想等价于淡中-Artin 问题 (Tannaka-Artin problem): 有限维体 D 上的简约范数为 1 的元素的群 SL(1, D) 与乘法群 D^* 的换位子群 $[D^*, D^*]$ 是否重合? Kneser-Tits 猜想与代数群中的逼近问题, 群簇的有理性问题及代数 K 理论有密切联系.

Kneser-Tits 猜想在局部紧域 ([2]) 以及全局函数域 ([3]) 的情形已被证明. 进而对特征零的全局域, 用 [2] 中的下降法证明了, Kneser-Tits 猜想对所有代数群除去 E_6 和 E_8 型皆成立. 然而, 由淡中-Artin 问题的否定解答知 Kneser-Tits 猜想一般是不对的 ([4]). 由此而对 SL(1, D) 与 $[D^*, D^*]$ 偏差的尺度问题的研究取得进展, 这个尺度被表示为简约 **Whitehead 群** (Whitehead group) (亦见**线性群** (linear group)). 这条路线上所取得的成果 ([5] – [6]) 构成了简约 K 理论的基础. [7] 中证明了 Kenser-Tits 猜想对酉群也不对, 这转而为简约酉 K 理论的发展开辟了一条道路.

参考文献

[1] Tits, J., Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.*, **80** (1964), 2, 313 – 329.
[2] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **33** (1969) 6, 1211 – 1220.
[3] Платонов, В. П., 《Proc. Internat. Congr. Mathematicians Vancouver》, 1974, 471 – 476.
[4] Платонов, В. П., 《Докл. АН СССР. Сер. матем.》, **221** (1975) 5, 1038 – 1041.
[5] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **40** (1976) 2, 227 – 261.
[6] Платонов, В. П., 《Матем. сб.》, **100** (1976), 2, 191 – 200.
[7] Платонов, В. П., Янчевский, В. И., 《Докл. АН СССР》, **225** (1975) 1, 48 – 51.

В. И. Янчевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Prasad, G. and Raghunathan, M. S., On the Kneser-Tits problem, *Math. Helv.*, **60** (1985), 107 – 121.
[A2] Tits, J., Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps (d'après V. P. Platonov et al.), in Sém. Bourbaki Exp. 505 (1976/77), Lecture Notes in Math., Vol. 677, Springer, 1978, 218 – 236.

石生明 译 许以超 校

Knopp 求和法 [Knopp summation method; Кноппа метод суммирования]

数项级数和函数项级数的求和法之一. 它是 Euler 求和法的推广, 在文献中也称为 Euler-Knopp 求和法 (Euler-Knopp summation method), 见 **Euler 求和法** (Euler summation method).

И. И. Волков 撰 张鸿林 译

纽结图和连接图 [knot and link diagrams; узлов и зацеплений диаграммы]

纽结和连接的图表示. 基本上由平面投影组成. 设 $k \subset \mathbf{R}^3$ 是一个**连接** (link) 和设 $\pi: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$ 是投影 $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. 点 $p \in \pi(k)$ 的阶定义为集合 $\pi^{-1}(p) \cap k$ 中元素的数目. 一个 2 阶点称为二重点 (double point) 阶大于 1 的点为多重点 (multiple point). 所谓多角连接 k 位于正则位置 (regular position), 如果: 1) 它的所有的重点是二重点且它们的数目是有限的; 2) 没有一个二重点是顶点的象. 每一个连接可以通过一个任意小的空间旋转变到正则位置. 如果 k 在正则位置, 则对每个二重点, 位于它上面的分支 (在 z 轴方向) 称为上过桥 (overpass), 位于它下面的分支称为下过桥 (underpass), 为给出在正则位置的连接图 (diagram), 给出它的投影 $\pi(k) \subset \mathbf{R}^2$ 和在二重点截取一个下过桥的象 (见图 1) 是必要的. 如果连接是定向的, 即横截每一个分支的方式已给出.

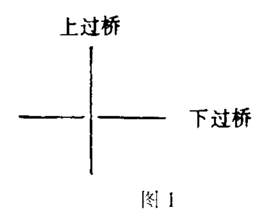


图 1

则在图解 D 中用箭头表示它．如果对一个连接的每个分支的这种横截面，上过桥和下过桥在它的投影中交错，则该图称为交错的（alternating）．至少有一个交错图的连接称为交错连接（alternating link）（见**交错纽结和连接**（alternating knots and links））．

每一个区域 f_i，映到其中的连接的投影划分平面 $\mathbf{R}^2$，并有相应的指数 $\nu(f_i)$，等于通过在 f_i 的内点附近的连接的每一个分支的投影所得到的回路的数目之总和．通过对相邻的区域的转变，指数变化到 1 为止，这蕴涵着每个区域 f_i 可以像棋盘一样着上黑白颜色．

平面上所有图的集合中，等价关系可以引入，其中两个图称为等价的，当且仅当相应于它们的连接是同痕的（见**同痕**（isotopy））．这使得将纽结的研究简化到平面拓扑成为可能．因此，如果 D_1 可从 D_2 通过应用图 2 中显示的有限次初等运算 Ⅰ－Ⅲ 和同痕形变得到，则 $D_1 \sim D_2$．用这种方法建立起来的对**纽结理论**（knot theory）的探讨是组合拓扑学的典型．它出现于纽结理论发展的第一阶段（大约直到 20 世纪 40 年代）．在这个探讨的构架工程中，纽结的不变量从图开始定义，然后证明了结果不依赖于图的选择（见[1]）．在现代发展中，不变量的定义由代数拓扑更好地给出，这使它首先从几何实体中脱离开来．

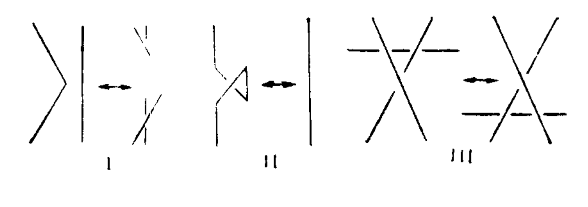


图 2

定向连接的图通常在它的 Seifert 曲面（Seifert surface）的结构之中．设 x 是连接 k 的定向区域 D 中任意一点（非二重点）．在从 x 出发的给定定向的方向中，图 D 被横截．在第一次遇到二重点时，产生了转向并且运动在 D 的定向的方向中是连续的，直到再一次回到 x；因此，画出了简单的闭围道，称作 Seifert 圆（Seifert circle）．图 D 被分成这些 Seifert 圆，C_j，它们只能互相切触．对每一个圆 C_j，用 D_j 表示处于平行于 $\mathbf{R}^2$ 的平面中的圆盘，使得它的边界投影在 C_j 上．对每个二重点 α_i，考虑垂直地位于 α_i 上的矩形 H_i，扭曲 90°，以使上面的边位于 D_{j_1} 的边界上，而下面的边位于 D_{j_2} 的边界上，如果 C_{j_1} 和 C_{j_2} 是在 α_i 中相遇的 Seifert 圆．如果每一次转变到一个合适的一边，则从曲面 $F=\bigcup_j D_j \cup \bigcup_i H_i$ 产生的边界同痕于连接 k．这样得到的曲面是可定向的．一个较简单的但可能不可定向的连接张成的曲面可以由在棋盘图上每一块黑的区域上放一圆盘得到，并且如上所附加，转过一个直角．

通过连接的图来刻画连接的群的表示的各种方法为大家所知．为得到 Wirtinger 表示（Wirtinger presentation），考虑一个连接（上过桥集）的图的连通分支 $t_1,\cdots,t_n$ 的集合，它们是依照由定向给出的方向中的连接的所交叉的每一个分支的次序而编号的．设 γ_i 是与 t_i 相关的某个符号．对每一个二重点有 $\gamma_i=\gamma_j\gamma_{i+1}\gamma_j^{-1}$ 或者 $\gamma_i=\gamma_j^{-1}\gamma_{i+1}\gamma_j$，依赖于这个二重点的邻域中的连接的图是图 3a 还是图 3b 所表示的形式．由生成元 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$（对每个上过桥）表示和上面所提及的关系（对每个二重点）所给出的群同构于所考虑的连接的群．这样所得的表示称为上 Wirtinger 表示（upper Wirtinger presentation）．对偶地定义下 Wirtinger 表示（lower Wirtinger presentation）．

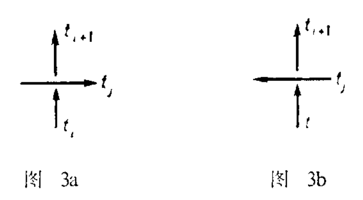


图 3a　　图 3b

为寻找 Dehn 表示（Dehn presentation），考虑区域 f_i，连接在其中的投影分开了平面并且对每个区域 f_i 引进符号 $\bar{f}_i$．符号 $\bar{f}_1,\bar{f}_2,\cdots$ 取作生成元，而关系从开始于点 α_i 的横截得到：一个接一个地写相应于切于 α_i 的区域的符号，其中，如果 f_1 和 f_2 都位于一个上过桥的左边，则 $\bar{f}_1$ 和 $\bar{f}_3$ 的度数是 -1，而 f_2 和 f_4 等于 1．更进一步，设 $\bar{f}_0=1$，其中 f_0 是外部区域．

将连接变换到闭辫中的纽结和连接图的用途．（见**辫论**（braid theory））在 D 外选取一点 $o\in\Pi$ 使得从 o 出发的射线不包含二重点或离开 D 的线段．只要连接的分支 k_i 之一的完全横截可以产生 k 的投影中的相应的横截发生在绕 o 的相同方向．设 l 是相反方向的第一段和取点 c 使得三角形 cab 将 o 包含在它的内点中，其中 a 和 b 是 l 的端点，边 ac 和 bc 关于 $D(k)$ 处于一般位置．可以证明，在 l 上至多存在一个二重点．用 $ac\cup bc$ 代替 $D(k)$ 中的 l，其中，如果 l 不包含二重点或是一个上过桥，那么，可设想 ac 和 bc 在以 $D(k)$ 为它们的交的所有点处是上过桥．如果 l 有一下过桥，则取它们为下过桥．拓展 k_i 的结构并一个接一个地将它应用到所有的分支；则得

到 k 的一个新的图，在其中，每个分支的投影一直绕 o 在同一边运动，即 k 被表示为闭辫的形式([2]).

参考文献

[1] Reidemeister, K., Knotentheorie, Chelsea, reprint, 1948.

[2] Alexander, J. W., A lemma on systems of knotted curves, *Proc Nat. Acad. Sci. USA*, **9**(1923), 93-95.

А. В. Чернавский 撰

【补注】图 A1 表明了 Seifert 曲面的构造：在嵌入一圆盘之后，在每个"分裂"二重点，正如图 A1 中所指出的那样，必须嵌入一条扭曲的带子.

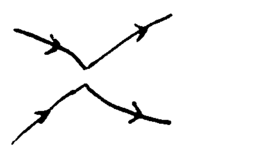



图 A1

对每一个连接像闭辫一样可以得到的 Alexander 定理的详细证明见[A1]第Ⅱ章.

参考文献

[A1] Birman, J. S., Braids, links and mapping class groups, Princeton Univ. Press, 1975.

[A2] Kauffman, L. H., On knots, Princeton Univ. Press, 1987.

[A3] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[A4] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976.

徐森林 译

纽结群和连接群[**knot and link groups**; **узлов и зацеплений группы**]

同构于球面 S^n 中的维数为2的**连接**(link)k 的补空间 $M(k)=S^n\setminus k$ 的**基本群**(fundamental group) $G(k)=\pi_1(M(k))$ 的一类群.

对 $n\geqslant 5$ 的情形，重数 μ 的光滑连接的群 G 以具有下列性质([3])而被识别：1)G 由 μ 个元素形成为正规子群；2)G 的具有整系数的2维同调群 $H_2(G;\mathbf{Z})$ 和 G 在 $\mathbf{Z}$ 上的平凡作用为0；3)G 除以它的换位子群 G' 的商群是秩为 μ 的自由 Abel 群 J^μ. 如果 G 是连接 k 的群，那么由于在使子午线等于1后，G 变成平凡群，则性质1)成立(见下面)，性质2)从 Hopf 定理(Hopf theorem)导出，依照它，$H^2(G;\mathbf{Z})$ 是 $H^2(M(k);\mathbf{Z})$ 的商群，由 **Alexander 对偶性**(Alexander duality)，它等于0；性质3)从事实 $G/G'\approx H_1(M(k);\mathbf{Z})$ 和 $H_1(M(k);\mathbf{Z})=J^\mu$ 通过 Alexander 对偶得出.

在 $n=3$ 或4时，充分必要条件还未找到(1984). 如果 $n=3$，则 k 不分裂当且仅当 $M(k)$ 是非球面的，即是型 $K(G,1)$ 的 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space). 连接 k 分裂当且仅当群 G 具大于1的亏格的表示([3]). 有多于一个分支的高维($n\geqslant 4$)连接的补必不是非球面的，高维纽结的补只在 $G\approx\mathbf{Z}$ 的条件下可能是非球面的([5]). 更进一步，对 $n\geqslant 6$，每一个具有非球面补的 n 维纽结是平凡的. 还熟知，对 $n=3$，连接是平凡的当且仅当它的群是自由的([3]). 现假设 $n=3$. 为了通过一般的规则得到群 $G(k)$ 的表示(见**基本群**(fundamental group))，在 S^3 中建立包含初始纽结的2维复形 K 且使 $\pi_1(S^3-K)=1$. 之后，K 的2链为 $G(K)$ 给出的一组生成元和在 $K\setminus k$ 中提供1链给出了关系. 如果为 K 在 k 上从射影平面下面的一个点发出取一个锥，就得到 Wirtinger 表示(见**纽结图和连接图**(knot and link diagrams)). 如果对 K 取从 k 的图(移动外部区域)得到的黑和白的曲面的并，就可获得 Dehn 表示.

k 在闭辫(见**辫论**(braid theory)；**纽结图和连接图**(knot and link diagrams))形式中的详述导致了 $G(k)$ 在形式 $\{s_i:s_i=L_is_kL_i^{-1}\}$ 中的表示，其中 L_i 是自由群 $\{s_i\}$ 中的字母表 s_i,s_i^{-1} 和 $\prod_{i=1}^{N}(L_is_kL_i^{-1})=\prod_{i=1}^{N}s_i$ 上的一个词. 此外，这种类型的每个表示是从闭辫中得到的. 另外的表示见[1],[2],[4],[7],[8]. 上、下 Wirtinger 表示的对照导致了 $G(k)$ 中特殊类型的对偶(见[7]). 这可以按照 Fox 计算用公式来表示：$G(k)$ 有两种表示 $(x_i;r_j)$ 和 $(y_i;s_j)$ 使得对一些等价 $\theta:(x_i;r_j)\to(y_i;s_j)$ 有 $\theta x_i\equiv y_i^{-1}$ 和 $\theta(\partial r_i/\partial x_j(x_j-1))\equiv(\partial s_j/\partial y_i)(y_i-1)$，其中，等式取模自由群的群环到群环 G/G' 上的同态核，这个对偶蕴涵着 **Alexander 不变量**(Alexander invariants)的对称性.

恒等问题只对纽结的孤立类(例如环面和一些椒盐卷饼状的纽结，见[6]，等)已解决. 没有算法(见[1])区别3维纽结群和它们的表示. k 的更强的不变量是由 $G(k)$ 和共轭子群类的系统 T_i 组成的群系统 $<G,T_i>$. T_i 中的子群 S_i 称为分支 k_i 的边缘子群(peripheral subgroup)；它是在基本群 $\pi_1(\partial\dot{N}(\dot{k}_i))$ 的浸入同态下的象，它的边界是分支 $k_i\subset k$ 的正规邻域 $N(k_i)$. 如果 k_i 不是从另外的2球面的分支上分离出来的平凡纽结，那么 $s_i\approx\pi_1(\partial N(k_i))$. $\partial N(k_i)$ 中的子午线和平行线在 s_i 中生成二个元素，称为在群系统中的 k_i 的子午线(meridian)m_i 和平行线(parallel)l_i. 在 $\mu=1$ 时，平行线为群 G 本身在子群 s_i 中唯一地决定，但子午线只是决定到形式 l_i^n 的因子. 对 $<G_i,T_i>$ 作为不变量见**纽结理论**(knot theory). 群 G 的自同构群只对环面连接，对 **8字纽结**(listing knot)和对高阶的，关于 **Neuwirth 纽结**(Neuwirth knot)([2])有完全的研究. G 在不同的群中，尤其关于 $<G_i,T_i>$

的表示是非常有意义的特异纽结．例如 Лобачевский 平面的运动群中的表示允许刻画非可逆纽结．亚循环的表示已系统地研究过．

如果 k 不分裂，则对 $G(k)$ 的子群 F，型 $K(F;1)$ 的空间通常作为 M 的覆叠，它（像 M）有 2 维复形的**同伦型**（homotopy type）．由此得到，$G(k)$ 的 Abel 子群同构于 J 或 $J \oplus J$；特别地，$G(k)$ 不包含有限阶的非平凡元素．对 $\mu = 1$，边缘子群 S_i 是 Abel 子群的集合中的极大的．只有超环面连接的群能有中心（[10]），基本作用由包含 $G(k)$ 的元素的子群 $L(k)$ 起到，它的具有定向分支 k_i 的并的连接系数是 0．如果 $\mu = 1$，那么 $L(k)$ 是换位子群；一般地，$G(k)/L(k) \approx J$．因此，$L(k)$ 可以取作 $M(k)$ 上的覆叠 $\widetilde{M}_0$ 的群，$M(k)$ 带有覆叠变换的无限循环群 J．如果 $F(k)$ 是 S^3 中以 k 为边界的连通定向曲面，那么它在 $\widetilde{M}_0$ 中被可数多个曲面 $\widetilde{F}_j$ 所覆盖，并将 $\widetilde{M}_0$ 分解为可数片 M_j（其中 $\partial M_j = F_j \cup F_{j+1}$）．因此，得到 $L(k)$ 是图

$$\cdots \xleftarrow{i_{j*}} \pi_1 F_j \xrightarrow{i_{j*}} \pi_1 M_j \xleftarrow{i'_{j+1*}} \pi_1 F_{j+1} \xleftarrow{i_{j+1*}}$$

的极限，其中所有 i_{j*}, i'_{j*} 是诱导包含．结果是或者它们都是同构或者没有两个是满同态的（[2]）．如果连接 $F(k)$ 的亏格等于它的连接的亏格 $\gamma(k)$（这样的 k 称为完全非分裂的），则所有 i_{j*}, i'_{j*} 是同态，$L(k)$ 或者是秩为 $2\gamma + \mu - 1$ 的自由群，或者不是有限生成元（并且不自由，如果约化 Alexander 多项式不是零；特别地，纽结就是这样的）．一个完全非分裂有有限生成元的 $L(k)$ 的连接称为 Neuwirth 连接（Neuwirth link）．

参考文献

[1] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[2] Neuwirth, L. P., Knot groups, Princeton Univ. Press, 1965.

[3] Hillman, J. A., Alexander ideals of links, Springer, 1981.

[4] Gordon, C. McA., Some aspects of classical knot theory, in Knot theory, Proc. Sem. Plans-sur-Bex, 1977, Lecture notes in math., Vol. 685, Springer, 1978, 1－60.

[5] Eckmann, B., Aspherical manifolds and higher-dimensional knots, *Comm. Math. Helv.*, **51** (1976), 93 － 98.

[6] Reidemeister, K., Ueber Knotengruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 56 － 64.

[7] Hotz, G., Arkandenfadendarstellung von Knoten und eine neue Darstellung der Knotengruppe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **24** (1960), 132 － 148.

[8] Trotter, H. F., Homology of group systems with applications to knot theory, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 464 － 498.

[9] Trotter, H. F., Non-invertible knots exist, *Topology*, **2** (1964), 275 － 280.

[10] Burde, G. and Zieschang, H., Eine Kennzeichnung der Torusknotten, *Math. Ann.*, **167** (1966), 169－176.

A. B. Чернавский 撰

【补注】一个 n 连接 $L \subset S^{n+2}$ 是可分裂的（splittable），如果存在一个 $(n+1)$ 球面 $S^{n+1} \subseteq S^{n+2} \setminus L$ 使得 L 碰到 $S^{n+2} \setminus S^{n+1}$ 的两个分支中的每一个．

由生成元 $x_1, \cdots, x_n$ 和关系 $r_1, \cdots, r_m$ 得的群的表示的亏格（deficiency of a presentation）是 $n - m$（[A1]）．

参考文献

[A1] Lyndon, R. C. and Schapp, P. E., Combinatorial group theory, Springer, 1977, p. Chapt. II, Sect. 2.

[A2] Kauffman, L., On knots, Princeton Univ. Press, 1987.

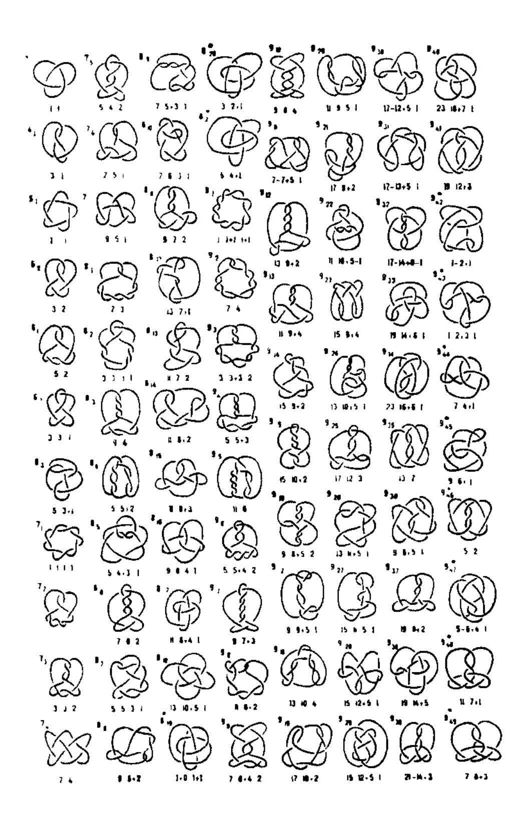
[A3] Birman, J. S., Braids, links and mapping class groups, Princeton Univ. Press, 1974.

[A4] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976.

徐森林 译

纽结表 [knot table; узлов таблица]

允许具有不多于 9 个重点的平面上的投影的所有三叶纽结图的表．在这个表中，纽结的记号是标准



的；第一个数目表示重点的个数，第二个数目（注在下标）表示纽结的序数．例如，纽结 7_5 是表中第 5

个具有7个交叉的纽结. 在每个纽结旁边用编码形式给出它的 Alexander 多项式 $\Delta(t)=a_{2n}t^{2n}+\cdots+a_nt^n+\cdots+a_0$ (见 Alexander **不变量** (Alexander invariants)). 由于每个纽结的 Alexander 多项式是偶数阶的并且是互换的 (即 $a_i=a_{2n-i}$), 因此, 给出后面的系数集合 $a_n,\cdots,a_0$ 就足够了; 它们在表中被表明. 例如, 紧挨纽结 8_9 写着 7-5+3-1. 这意味着 Alexander 多项式等于 $\Delta(t)=-t^6+3t^5-5t^4+7t^3-5t^2+3t-1$. 非交错纽结用星号标明 (见**交错纽结和连接** (alternating knots and links)). 纽结表选自 [1], 并作了较小的修正.

参考文献

[1] Burde, G., Knoten, Jahrbuch Ueberblicke Mathematik, B. I. Mannheim, 1978, 131-147. М.Ш.Фарбер 撰

【补注】 直到10个交叉的纽结表可在 [A1] 中找到.

参考文献

[A1] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976. 徐森林 译

纽结理论 [knot theory; узлов теория]

一维流形在三维 Euclid 空间或球面 S^3 中的嵌入的研究. 在更广泛的意义上, 纽结理论研究的课题是球面在流形中的嵌入 (见**多维纽结** (multi-dimensional knot)) 和流形的一般嵌入.

纽结理论的基本概念. $\mathbf{R}^3$ 或 S^3 中的一个圆的 μ 片不交并的嵌入 (更常用——它的象) 称为重数为 μ 的连接 (link of multiplicity μ). 重数 $\mu=1$ 的连接称为纽结 (knot). 造出一个给定的连接的纽结称作它的分支 (components). 一个连接的包络同痕类 (见**同痕** (isotopy)) 称为它的型 (type). 相同型的连接称为等价的 (equivalent). 位于 $\mathbf{R}^3$ 中平面上的连接"$0,\cdots,0$"的型称为平凡的 (trivial). 某些简单的纽结有特殊的名字, 例如纽结 3_1 (见**纽结表** (knot table)) 是三叶形纽结 (trefoil kont), 4_1 是 8 字图或**八字纽结** (listing knot). 由连接 L 的一些分支组成的连接称为 L 的部分连接 (partial link). 说连接 L 分裂 (splits) (或分解 (decomposes)), 如果它的部分连接的两个在 S^3 中被一个 2 维球面分离开. 一个连接称为 Brunn (Brunn), 如果每一个部分连接除它本身外分裂.

最多研究的是分片线性纽结. 通过考虑 $\mathbf{R}^3$ 中光滑的或局部平坦的拓扑嵌入, 理论本质上归于分片线性情况.

连接通常是通过图来说明的 (见**纽结图和连接图** (knot and link diagrams)). 如果在一条有 $2n$ 条线的辫子中 (见**辫论** (braid theory)) 上下连接是由 n 对线段的相邻端点作出的, 则得到一个称为 $2n$ 交错 (interlacing) 的连接. 从一条辫子造出一个连接的另一个方法组成了辫子的闭包. 如果 $\mathbf{R}^3$ 中在二个平行平面 Π_1 和 Π_2 之间, 取 $2m$ 条正交的线段并且通过 Π_1 中的 m 条和 Π_2 中的 m 条不交的弧将它们两两连接起来, 那么, 所有这些弧及线段的和形成了一个连接. 容许如此表示的连接称为具有 m 座桥的连接 (link with m bridges). 每个连接可以由 $\mathbf{R}^3$ 中一个标准的嵌入安装在一个闭曲面上; 如果连接可以安装到一个不打结环面或椒盐卷饼上, 则称它为环面 (torus) 或椒盐卷饼状的 (pretze-like) (见**环面纽结** (torus knot)). 位于一个纽结 k 的管状邻域的边界上的连接称为 k 的分支 (winding). 通过从一个平凡纽结出发的重复分支得到的纽结称为管状纽结 (tubular knot) 或复杂的索 (complex cable). 这样的连接在代数曲线的奇点研究中会遇到; 它们可以解析地定义为二个变量的多项式的孤立奇点的曲线 ([2]).

一个定向连接 L 的 Seifert 曲面 (Seifert surface) 是紧定向曲面 $F\subset S^3$, $\partial F=L$, 其中, 要求 L 的定向为 F 的定向所诱导. 一个定向连接 L 的亏格 (genus) 是 L 的 Seifert 曲面的最小的亏格. 一般地说, 亏格依赖于分支的定向. 为了从图 (见**纽结图和连接图** (knot and link diagrams)) 构造一个 Seifert 曲面, 一个算法是众所周知的; 在某些情形 (例如对**交错纽结和连接** (alternating knots and links)), 立即得出最小亏格的曲面. 平凡纽结 (但不是连接) 的特性由亏格为零这个事实所刻画.

在纽结的型的集合 K 中, 有一个连通和的运算 (粗略地讲来, 将一个纽结系在另一个纽结的后面); 这给出了一个带零元素的 Abel 半群结构的 K. 亏格定义了一个从 K 到非负整数的加法半群的满同态. 这导致了非平凡纽结不能有与连通和有关的反纽结和每一个纽结是简单 (simple) (即不可分解) 纽结的和. 如所熟知, 这个分解是唯一的. 因此, K 同构于自然数的乘积半群.

重数 μ 的连接 $L=k_1\cup\cdots\cup k_\mu\subset\mathbf{R}^3$ 的正则邻域由 μ 个完全环面 N_i 组成. 空间 $M(L)=\mathbf{R}^3-\bigcup\operatorname{Int}N_i$ 称为 (余) 空间 ((complementary) space) 或连接 L 的外部 (exterior). 在 $F_i=\partial N_i$ (它的具 K_i 的**连接系数** (linking coefficient) 为零) 上的简单闭曲线 l_i 都是彼此同痕的并称作第 i 分支的平行线 (parallels). 在 N_i 中但不在 F_i 上同调于零的 F_i 上的简单闭曲线 m_i 也是彼此同痕的, 并且称为第 i 个分支的子午线 (meridians). 一个连接的空间 $M(L)$ 连同子午线 $m_1,\cdots,m_\mu\subset\partial M(L)$ 一起决定了 L 的型. 这是连接的主要的几何不变量. 存在一个猜想: 对于一个纽结 k, 外部 $M(k)$ 的拓扑型决定了 k 的型. 对所有的三叶纽结, 所有的环面纽结, 对大多数分支和对纽结的许多其他类都已被证明了 (见 [10]). 然而存在具有同胚余空间的不等价的连接 ([1]).

除了包络同痕的关系，在纽结理论中，还研究了其他关系，粗略地讲，连接之间的等价关系．两个连接（有相同数目的分支）称为同痕的（isotopic）（没有包络的词），如果它们作为嵌入是同痕的．图1所显示的连接是同痕的，但不包络同痕．




图1

这样，连接的同痕忽略了"小"纽结，并因此它的研究可以看作是连接理论模纽结理论．该陈述在下面的 Rolfsen 的定理（theorem of Rolfsen）（[12]）中准确地用公式表达了出来：如果两个同痕连接相应的分支是等价的（作为定向纽结），则它们是包络同痕的．鉴于这个结果，同痕的研究简化为包络同痕．

在纽结理论中研究的另一个等价关系是和谐性（concordance）或配边（cobordism）．流形 X 在流形 Y 中的两个局部平坦嵌入 i_0 和 i_1 称为和谐的（concordant）若存在局部平坦嵌入

$$i: X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$$

使得对所有 $x \in X, i(x,0)=(i_0(x),0), i(x,1)=(i_1(x),1)$．如果 X 是几个圆的不交并，Y 是 $\mathbf{R}^3$ 或 S^3，则得到和谐连接的定义．这个连通和提供了具有 Abel 群结构的纽结的和谐类的集合．该群的零元素是含有平凡纽结的类．与平凡纽结相和谐的纽结称为片纽结（slice knot）．纽结 k 的类的负元是如下得到的纽结类：改变 k 的定向，并取它在任何平面中的反射的象．关于和谐类的群的结构见**纽结的配边**（cobordism of knots）．为了构造一个片纽结，简单地取平凡的2分支连接，在其中任何一个分支上粘一根带子，用某种方法扭动它，越过最初的连接，之后把它粘到第二分支上．在此之后，必须移动带子的所有的内点以及移动已粘过的边界点．作为结果，片纽结得到了（例如，见图2）．

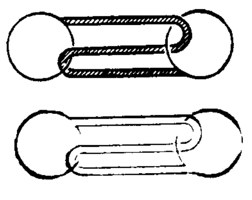


图2

这个构造的推广导致带状纽结（ribbon knot）的概念（[1]）．有一个猜想：每一个片纽结是一个带状纽结．连接的同痕不蕴涵它们的和谐（事实上，每个纽结同痕于平凡纽结，但不是每个纽结是片的）．然而，同痕的连接是和谐的，如果所有它们对应的分支是两两和谐的（[12]）．

在连接之间的另一些等价关系也已经被研究过，例如，同伦和 I 等价（见[8]）．

纽结理论的注解．余空间 $M(L)$ 的**基本群**（fundamental group）$G(L)$ 称为连接 L 的群（group of the link L）．它是连接的一个最重要的代数不变量，在纽结和不可分解连接的条件下，外部 $M(L)$ 是非球面的，因此它的**同伦型**（homotopy type）决定了 $G(L)$．连接是平凡的当且仅当它的群是自由的（[8]）．两个环面纽结是等价的当且仅当它们有同构的群，更进一步，群决定了连接的型这个断言对纽结早已不正确（[1]）．为了从其图来表示连接的群，有一些算法的描述．最广为知道的是 Wirtinger 表现（Wirtinger presentation）．对于连接群的性质见**纽结和连接群**（knot and link groups）．

连接的更强的不变量是群系（group system）$<G(L);T_1,\cdots,T_\mu>$，由连接群 $G(L)$ 和通过子午线类和第 i 分支的平行线生成的子群 T_i 的共轭类组成．纽结的群系决定了它的分支的拓扑型．一个完全的代数纽结不变量被由纽结群 G，边缘子群（见**纽结和连接群**）$T \subset G$ 和子午线 $m \in T$ 组成的三元组（G, T, m）提供：两个纽结是等价的当且仅当在它们的群之间有一个同构，保持了边缘子群和将一个群的子午线转到另一个群的子午线或到 k 的反面．如何将用纽结的群所表示的它们的不变量分类是众所周知的．与纽结 k 相连的一个如此的不变量（[11]）是纽结 k 和八字纽结 4_1 的连通和的某些分支的群的自由积．在这个定义中，可以用任何另一个纽结来替代纽结 4_1，并且这样得到的群虽然有改变，但依旧是一个完全不变量．

可以找到（见[5]）更自然的完全代数纽结不变量．设纽结 k 由它在平面上的正则投影给出，并设它的所有上过桥是从1数到 n．进一步假设在某个二重点中，如图3所示，编号 p, q, r 的桥相遇，又设 $\Gamma(k)$ 是由具有关系 $a_p \circ a_q = a_r$（每个二重点之一）的生成元 $a_1,\cdots,a_n$（它们的数目等于桥的数目）给出的分配广群．

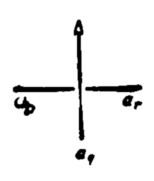


图3

可以证明（见[5]），首先，广群 $\Gamma(k)$ 是纽结的一个不变量，即不依赖于投影的选择，其次，具有同构的广群的纽结是等价的．

纽结的群、群系和广群是十分复杂的代数对象，

并且区分它们常常不是一件容易的事．在计算中，用纽结和连接的 Abel 不变量（Abelian invariants）是方便的，用了它，操作比较容易（例如，它们可以用交换代数来描述），而同时，它提供了足够的信息．最主要的代数不变量是定义如下的 Alexander 模（Alexander module）．重数 μ 的连接的外部的**同调群**（homology group）$H_1(M(L))$ 是秩 μ（这里是 **Alexander 对偶**（Alexander duality）的结果）的自由 Abel 群．因此，对应于 $G(L)$ 的换位子群的覆叠映射 $p: \widetilde{M}(L) \to M(L)$ 有 $\mathbf{Z}^{\mu}$ 作为覆叠变换的群．如果 $x_0 \in M(L)$ 是一个基点及 $\widetilde{X}_0 = p^{-1}(x_0)$，则群 $H_1(\widetilde{M}(L), \widetilde{X}_0)$ 存在 $\Lambda_{\mu} = \mathbf{Z}[\mathbf{Z}^{\mu}]$ 上的一个模的自然结构（有 μ 个变量的整 Laurent 多项式的环），该结构称为连接 L 的 Alexander 模（Alexander module）．在 $\mu = 1$ 的条件下，模 $H_1(\widetilde{M}(L), \widetilde{X}_0)$ 同构于 $H_1(\widetilde{M}(L))$ 和 Λ_1 的直和；因此在纽结的研究中，也称 Λ_1 模 $H_1(\widetilde{M}(L))$ 为 Alexander 模．给出 Alexander 模的表示的矩阵称为 Alexander 矩阵（Alexander matrix）．为了从群 $G(L)$ 的表现中找出 Alexander 矩阵，人们使用 Fox 的自由微积分（free differential calculus of Fox）（[1]）．Alexander 模按标准方式（见 **Alexander 不变量**（Alexander invariants））给出环 Λ_{μ} 的理想（称作初等理想（elementary ideals））的一个升链和一系列整多项式 $\Delta_1(t_1, \cdots, t_{\mu}), \Delta_2(t_1, \cdots, t_{\mu}), \cdots$，定义直到 Λ_{μ} 中的单位．第一个多项式 $\Delta_1(t_1, \cdots, t_{\mu})$ 称为 Alexander 多项式（Alexander polynomial）．Alexander 模也定义了理想的 Steinitz-Fox-Smythe 类（Steinitz-Fox-Smythe class of ideals）（[8]）．藉此帮助，能够证明，例如，某些纽结的不可逆性（纽结 $k \subset S^3$ 称为可逆的（invertiable），如果存在一个 S^3 到它自身的保持定向的同胚，使得将 k 变到相反定向的 k）．一个纽结的可逆性蕴涵着 Alexander 模的下列性质：存在一个群自同构 $f: H_1(\widetilde{M}(k)) \to H_1(\widetilde{M}(k))$ 对任何 $a \in H_1(\widetilde{M}(k))$，有 $f(ta) = t^{-1}f(a)$．

连接多项式有以下的互反性质：对任意 $i \geqslant 1$，由 $\Delta_i(t_1, \cdots, t_{\mu})$ 和 $\Delta_i(t_1^{-1}, \cdots, t_{\mu}^{-1})$ 生成的环 Λ_{μ} 的主理想重合．这个事实揭示了在连接的外部的万有 Abel 覆叠的同调中的一种基本类的对偶性（duality）．对偶性不仅给 Alexander 模强加了一个限制，而且也赋于它附加的乘法结构．例如，在纽结条件下，有一个称为 Blanchfield 形式（Blanchfield form）的恒定的非退化 Hermite 形式

$$H_1(\widetilde{M}(L)) \times H_1(\widetilde{M}(L)) \to Q(\Lambda)/\Lambda.$$

这里 $\Lambda = \Lambda_1$ 和 $Q(\Lambda)$ 是 Λ 的分式的域．关于这个定义和连接的该形式的类似性质见[8]．与 Blanchfield 形式紧密相连的是 Milnor 形式（Milnor form）．它在 Q 中取值（见[6]）．对应于一个纽结的任何一个 Seifert 曲面的 **Seifert 矩阵**（Seifert matrix）决定了在它上的 Alexander 模和 Blanchfield 和 Milnor 形式（[13]）．如果 k_1 和 k_2 是两个纽结，那么下列性质是等价的：1）k_1 和 k_2 有同构的 Blanchfield 形式；2）k_1 和 k_2 有同构的 Milnor 形式；3）k_1 和 k_2 的 Seifert 矩阵是 S 等价的（见[6]）．

连接的群 $G(L)$ 到任何群 H 上的每个满同态 φ 定义了一个以 H 为覆叠变换群的外部 $M(L)$ 的正则**覆叠**（covering）．如果 H 是有限群，则通过给覆叠的边界粘进一个相应模式的半环面，就得到流形 $\Sigma_{\varphi}(L)$ 和映射 $\Sigma_{\varphi}(L) \to S^3$，它是在 L 上有分歧的分歧覆叠．群 H 作用在 $\Sigma_{\varphi}(L)$ 上．因此，$B_{\varphi} = H_1(\Sigma_{\varphi}(L))$ 是一个 $\mathbf{Z}[H]$ 模．更进一步，由于 $\Sigma_{\varphi}(L)$ 是闭的定向 3 维流形，因此，它定义了连接系数的形式

$$\{\,,\,\}: \ \mathrm{Tors}_Z B_{\varphi} \times \mathrm{Tors}_Z B_{\varphi} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

这样，对有限群 H 上的每一个表现 $\varphi: G(L) \to H$，对应着一个 $\mathbf{Z}[H]$ 模 B_{φ} 和配对 $\{\,,\,\}$．

循环中连接的群及亚循环群的表现已经彻底地研究过．一个定向连接的群允许在循环群 $\mathbf{Z}_n$ 上有一个典型表现（圈 α 的类由带 L 的 α 的连接系数的模 n 剩余组成）．这个表现对应于分歧覆叠 $\Sigma_{\varphi}(L) \to S^3$，称为连接 L 的一个 n 层循环分歧覆叠（n-sheeted cyclic ramified covering of the link L）．它对应于一个不变量 $(B_{\varphi}, \{,\})$，通常用于识别纽结，它用 Seifert 矩阵，因而用具有 Blanchfield 配对的 Alexander 模来表示．

纽结和连接的非常有效的不变量是 Conway 多项式（Conway polynomial）．它的计算大大地简单于 Alexander 多项式的计算（不必找 Alexander 矩阵计算它的行列式，等等）．为了计算 Conway 多项式，不需要它的定义，仅只需下面的三个性质：1）Conway 多项式 $\nabla_L(Z)$ 是定向连接 L 的包络同痕型的一个不变量；2）如果 L 是平凡纽结，那么 $\nabla_L(Z) = 1$；3）如果三个连接 L_+, L_- 和 L_0 有图解，它除在图 4 中所显示的部分外相重合，则

$$\nabla_{L_-}(z) - \nabla_{L_-}(z) = Z\nabla_{L_0}(z).$$

图 4

这些性质蕴涵着，例如，分裂连接的 Conway 多项式等于零．感谢性质 3），在分离的二重点中，当图表改变时，可以导出 Conway 多项式的变化；清楚地，在有限次这样的修正后，连接变成平凡的了，并且在那个点，计算完成了．使得能容易地找出 Conway 多项式的理论在[14]中已得到发展．对于纽结，Conway

和 Alexander 多项式彼此唯一地决定．例如，从 Conway 多项式的知识，Alexander 多项式 $\Delta(t)$ 由等式 $\Delta(t^2)=t^{2n}\nabla_L(t-t^{-1})$ 所确定．

纽结和连接的分类．以上，由识别不同的纽结简化到代数的帮助，完全代数纽结不变量已受到注意．计算纽结的亏格的算法由 H.Haken 造出，但这不很实际．对某些类，例如对**交错纽结和连接**，有简单的算法（也见 **Neuwirth 纽结**（Neuwirth knot））．

所有用图表示的至多有 11 个重点的纽结已被列举，对少于 11 个交叉的所有纽结也一样（见[17]）．但是，还没有证明在这个表上的有 11 个交叉的纽结中间不存在重复．对有 9 个或更少交叉的三叶纽结的表，见**纽结表**（knot table）．

环面纽结，作为具有二座桥的纽结，已完全分类（见[16]）．

与流形的拓扑学发展有关，对多维纽结和连接有研究；多维纽结理论在几个方面的发展已优于经典理论．因此，通过配边（见**纽结的配边**（cobordism of knots）），多维纽结的分类问题的解决是完全的，根据稳定同伦，多维纽结的包络同痕类的描述已经得到（[15]），多维纽结最重要的形式已被代数不变量区分开了（[6]）．更进一步，多维纽结的同调不变量已被发现，并决定了它们的型直到有限多个可能性．

纽结理论的应用．纽结理论的价值对 3 维流形的研究首先在于每一个闭定向 3 维流形能表示为球面 S^3 的覆叠使得在某个连接上分叉（Alexander定理（Alexander theorem））．进一步（见[16]），每个亏格 1（即一个**透镜空间**（lens space））的定向连通 3 维流形同胚于一个带 2 座桥的某个连接的二层分歧覆叠，带 2 座桥的连接等价当且仅当它们的二层分歧覆叠同构．这个事实在 3 维流形的描述中以及在纽结的分类中是有用的．

每一个亏格 2 的定向连通 3 维流形同胚于带 3 座桥的某个连接的二层分歧覆叠；同胚于二层分歧覆叠的带 3 座桥的不等价的纽结的例子已经构造出（见[4]）．

由纽结理论在 3 维流形的研究中提供的另一个重要结果是 R.C.Kirby 的框架连接的计算（calculation of framed links）（[3]）．框架连接（framed link）是圆 $l_1,\cdots,l_\mu\subset S^3$（每个取某个数 n_i）（扭或不扭）的不交光滑嵌入的有限集 L．一个框架连接 L 定义了一个 4 维流形 M_L，通过在一个 4 维球面上粘上指数 2 的环柄，其中第 i 个环柄的粘合映射 $f_i:S^1\times D^2\to S^3$ 具有性质：1) $f_i(S^1\times 0)=l_i$；2) 对任何 $x\in D^2\setminus 0$，具 l_i 的曲线 $f_i(S^1\times\{x\})$ 的连接系数是 n_i，边界 $W_L=\partial M_L$ 是一个闭定向 3 维流形．结果是，首先对某个框架连接 L，每一个闭定向 3 维流形同胚于 W_L，其次，W_{L_1} 和 W_{L_2} 同胚当且仅当框架连接 L_1 能从 L_2 通过下面叙述的变换 $\mathscr{O}_1$ 和 $\mathscr{O}_2$ 或者它们的逆得到．变换 $\mathscr{O}_1$ 由用一个不打结的圆增补一个框架连接组成，隔开嵌入 2 球面的余留分支取 +1 或 −1．变换 $\mathscr{O}_2$ 用下面的方式产生了 2 个分支 l_i 和 l_j 的"合成"：设 $\widetilde{l_i}$ 是 l_i 在 S^3 中的小管状邻域的边界上的一条曲线，在该管状邻域中，同痕于 l_i 和 l_i 的连接系数为 n_i．用圆周 $l_j'=l_j\#_b\widetilde{l_i}$ 代替分支 l_i，其中 b 是某个联系 l_j 和 $\widetilde{l_i}$ 但不接触连接 L 的剩余部分的带子，且如果新分支 l_j' 分配给了数目 $n_j'=n_i+n_j\pm 2a_{ij}$ 就得到一个新的连接 L'．这里 a_{ij} 是 l_i 和 l_j（用任何方式定向）的连接系数，符号 + 还是 − 的选择只依赖于带子的定向被固定的方式．例如，对图 5 中所示的框架连接，流形 W_L 在情形 a）中是相应的透镜空间 $L(n,1)$，在情形 b）中是透镜空间 $L(pq-1,p)=L(pq-1,q)$，而在 c）和 d）中是**十二面体空间**（dodecahedral space）．

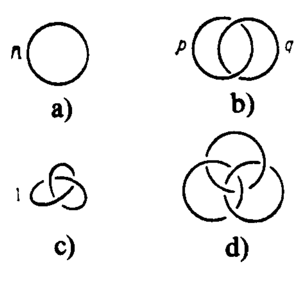


图 5

除了这些和在拓扑学中纽结理论的许多其他用途，它的应用还包括平面代数曲线的奇点的研究，以及在多维情形中，复超曲面孤立奇点的研究（[2]），球面上的光滑结构和动力系统及层化的结构．存在将纽结理论用于动力系统（[18]）和湍流的数学理论的尝试（[19]）．

历史信息．显而易见，是 C.F.Gauss 首先把纽结认作为数学对象．他认为纽结和连接的分析是"几何部位"的基本对象之一．Gauss 本人几乎没写过有关纽结和连结的文章（见**连接系数**（linking coefficient）），但是他的学生 J.B.Listing 贡献了很多纽结的专题文章（[7]）．

19 世纪末，至少有 10 个交叉点的三叶纽结表通过 P.G.Tait 和 C.Little 的努力已造出．至少具有 11 个交叉的交错三叶纽结表也同样被造出．将纽结列表的问题有二个方面：第一必须自己确信列表表示是完全的，第二必须证明表中列举的所有纽结确实是不同的．那时，第一个问题的解答只需要组合的推理（虽然足够麻烦），对第二个问题的回答，代数拓扑学的不变量是必要的．这样的不变量在 19 世纪不存在，所以，表中所列的纽结的不等价被经验式地证明．随后，分析发现了 19 世纪表中的几个谬误．

1906 年，H.Tietze 第一个将基本群应用于纽结的非平凡性的证明．1927 年，J.W.Alexander 和 G.B.

Briggs 应用2或3层分歧循环覆叠的同调挠系数区分了具有8个交叉的列入表中的纽结和具有9个交叉的除3以外的所有纽结．1928年，Alexander多项式出现了，但它的帮助仍不能消除关于84个至多有9个交叉的纽结的相异的怀疑．最后一步是由K. Reidemeister通过考虑在由二个平面构成的分歧覆叠中的连接系数得到的．

纽结理论当前的叙述的表示在问题([10])的表中给出；其中，注释和参考文献也能找到．关于纽结理论的类似的文献也能在[1],[8],[9]中找到．

参考文献

[1] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[2] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

[3] Mandelbaum, R., Four-dimensional topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2(1980), 1-159.

[4] Виро, О. Я.,《Матем. сб.》, **87**(1972), 216-228.

[5] Матвеев, С. В., 《Матем. сб.》, **119**(1982), 78-88.

[6] Фарбер, М. Ш., 《Успехи матем. наук》, **38** (1983), 5, 59-106.

[7] Listing, J. B., Vorstudien zur Topologie, Göttingen, 1848.

[8] Hillman, J. A., Alexander ideals of links, Springer, 1981.

[9] Gordon, C. McA., Some aspects of classical knot theory, in Knot Theory, Lecture notes in math., Vol. 685, Springer, 1978, 1-60.

[10] Kirby, R. C., Problems in low dimensional manifold theory, in Algebraic geometry and geometric topology, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 32, Amer. Math. Soc., 1978, 273-312.

[11] Simon, J., An algebraic classification of knots in S^3, *Ann. of Math.*, **97**(1973), 1-13.

[12] Rolfsen, D., Isotopy of links in codimension two, *J. Indian Math. Soc.*, **36**(1972), 263-278.

[13] Levine, J., Knot modules I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **229**(1977), 1-50.

[14] Giller, C. A., A family of links and the Conway calculus, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **270**(1982), 75-109.

[15] Farber, M. Sh., Isotopy types of knots of codimension two, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261**(1980), 185-209.

[16] Schubert, H., Knoten mit zwei Brücken, *Math. Z.*, **65** (1956), 133-170.

[17] Conway, J. H., An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, in Computational problems in abstract algebra, Pergamon, 1970, 329-358.

[18] Franks, J. M., Knots, links and symbolic dynamics, *Ann. of Math.*, **113**(1981), 529-552.

[19] Birman, J. S. and Williams, R. F., Knotted periodic orbits in dynamical systems. I Lorenz's equations, *Topology*, **22**(1983), 47-82.

М. Ш. Фарбер, А. В. Чернавский 撰

【补注】在纽结理论中，最近已发生了非凡的突破性的进展．这开始于1984年，发现了一个新的(二个变量的)多项式不变量，Jones多项式(Jones polynomial)，能区分开有相同的Alexander多项式的一些纽结([A4]，[A5])．继Jones多项式之后，立即又有另一些新多项式不变量，第一个是所谓HOMFLY多项式(HOMFLY polynomial)([A9])，不久之后，又有几个其他的独立发现．

这些"来自"数学中的域的多项式，以前主要认为不涉及到纽结理论：von Neumann代数(Jones多项式)，格子统计力学中的精确-可解模型，量子场论．因此，例如起初的Jones多项式"属于"Potts模(Potts model)，且HOMFLY多项式和Kauffman多项式(Kauffman polynomial)两者都有属于另一个"Yang-Baxter模"(Yang-Baxter models)的特性．在所有这些中，**Yang-Baxter方程**(Yang-Baxter equation)起了中心的作用．

有关这些内容的最近的文献选集是[A4]-[A12]．

像Conway多项式(见上面的主体文章)，Jones多项式能用某些"运动"来说明变化的纽结．明显地，在复制DNA中，本身出现不打结和打结，这些运动是相同的([A13])．对包括连接数(linking number)，全扭(total twist)和纽结的编号(writing number of a knot)的DNA的其他方面，见[A14]．

参考文献

[A1] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976.

[A2] Kauffman, L., On knots, Princeton Univ. Press, 1987. Sect. 18; Appendix.

[A3] Birman, J. S., Braids, links and mapping class groups, Princeton Univ. Press, 1975.

[A4] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots and links via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**(1985), 103-111.

[A5] Jones, V. F. R., Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math.*, **126** (1987), 335-388.

[A6] Kauffman, L. H., State models for link polynomials, Reprint, M/88/46, IHES, 1988.

[A7] Turaev, V. G., The Yang-Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.*, **92**(1988), 527-553.

[A8] Witten, E., Quantum field theory and the Jones polynomial, in IAMP congress, Swansea, July 1988.

[A9] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. R. R., Millett, K. and Ocneanu, A., A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 239-246.

[A10] Kauffman, L., State models and the Jones polynomial, *Topology*, **26**(1987), 395-407.

[A11] Przytycki, J. H. and Traczyk, P., Invariants of links of Conway type, *Kobe J. Math.*; 4(1987), 115–139.

[A12] Akutsu, Y. and Wadati, M.. Knots, links, braids and exactly solvable models in statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.*, **117** (1988), 243 – 259.

[A13] Kolata, G., Solving knotty problems in math and biology, *Science*, **231** (1986), 1506 – 1508.

[A14] Pohl, W. F., DNA and differential geometry, *Math. Intelligencer*, 3(1980), 20 – 27.

徐森林 译

纽结和连接的二次型 [**knots and links, quadratic forms of; узлов и зацеплений квадратичные формы**]

与三维纽结和连接有关的形式；这些形式的某些不变量是纽结和连接的同痕型的拓扑不变量．纽结和连接的二次型是作为 Seifert 配对（见 **Seifert 矩阵**（Seifert matrix））的对称化的结果产生的．如果 V^2 是**连接**（link）$L=(S^3,l)$ 的 **Seifert 流形**（Seifert manifold），而

$$\theta: H_1(V;\mathbf{Z})\otimes H_1(V;\mathbf{Z})\to\mathbf{Z}$$

是 Seifert 配对，则由等式

$$q(v_1\otimes v_2)=\theta(v_1\otimes v_2)+\theta(v_2\otimes v_1)$$

给出的对称双线性形式

$$q: H_1(V;\mathbf{Z})\otimes H_1(V;\mathbf{Z})\to\mathbf{Z}$$

称为连接 L 的二次型（quadratic form of the link）．形式 q 由矩阵 $M+M'$ 所描述，其中 M 是 Seifert 矩阵且符号"′"表示转置．形式 q 本身不是连接 L 的不变量；然而它的符号差 $\sigma(q)\in\mathbf{Z}$ 和 Minkowski 单位 $C_p(q)\in\{-1,1\}$ 不依赖于 Seifert 流形的选择，其中 p 是一个素数．它们分别称为连接 L 的符号差（signature）和 Minkowski 单位（Minkowski unit）并表示为 $\sigma(L)=\sigma(q), C_p(L)=C_p(q)$．形式 q 的根基的维数 $n(q)$ 也是 L 的一个不变量．数 $n(L)=n(q)+1$ 称为连接 L 的零化度（nullity of the link）．有不等式：$d(L)\leqslant n(L)\leqslant\mu(L)$，其中 $d(L)$ 是连接 L 的 Seifert 流形可能有的连通分支的最大数，$\mu(L)$ 是重数，即连接 L 的分支数．

设 N 是具有 $N\cap S^3=\partial N=l$ 的球 D^4 的局部平坦 2 维定向子流形．N 的亏格 $h(N)$ 由下面的不等式估计：

$$2h(N)+\mu(L)-\mu(N)\geqslant|\sigma(L)|+|n(L)-\mu(N)|,$$

其中 $\mu(N)$ 是 N 的分支数目．$h(N)$ 的下界称为 L 的 4 亏格（4-genus）或低亏格（lower genus）．计算各种连接的低亏格的任务与通过最小可能亏格的闭定向曲面所实现的 4 维流形的 2 维同调类的问题密切相关．每一个特殊的交错纽结（见**交错纽结和连接**（alternating knots and links））的低亏格等于它的亏格．并且与 Alexander 多项式（见 **Alexander 不变量**（Alexander invariants））的度数的一半相一致．一个片纽结（见**纽结的配边**（cobordism of knots））是低亏格零的纽结．一个纽结的符号差和 Minkowski 单位由它的配边类所决定．在 $\mathbf{Z}$ 中取值的 S^3 中的 1 维纽结的配边群上的一个函数，它将配边类映成描述纽结的符号差，是一个同态，它的象是偶数的子群．一个纽结所纽的次数不小于符号差的一半．

纽结和连接的二次型与球 D^4 的二层分歧覆叠 Σ^4 紧密相关，D^4 具有在带 $N\cap S^3=\partial N=l$ 的定向 2 维曲面 $N\subset D^4$ 上面的分歧．特别地，连接 $L=(S^3,l)$ 的符号差和 Minkowski 单位等于流形 Σ^4 的相应的符号差和 Minkowski 单位．边界 $\partial\Sigma^4=\Sigma^3$，分歧在 l 上的球面 S^3 的二层覆叠，是 L 的一个不变量．在纽结情形，$H_1(\Sigma^3;\mathbf{Z})$ 是有限群．这个群，与连接的系数的形式

$$\lambda: H_1(\Sigma^3;\mathbf{Z})\otimes H_1(\Sigma^3;\mathbf{Z})\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

一样，用下面的方法定义了纽结的二次型．具有偶对的群，或 V 群（V-group）是由有限 Abel 群 G 和非退化对称双线性形式 $\mu: G\otimes G\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 组成的偶对 (G,μ)．每一个对称的非退化整数 $n\times n$ 矩阵 A 决定了如下的一个 V 群 (G,μ)：群 G 由下面定义的关系式的元素 $g_1,\cdots,g_n$ 生成：$\sum_{j=1}^n a_{ij}g_j=0,\ i=1,\cdots,n$，其中 $A=\|a_{ij}\|$，而 $\mu(g_i,g_j)$ 是模 1 同余于 A^{-1} 的第 (i,j) 个数．结果是，通过纽结的二次型的矩阵 $M+M'$ 用这种方法定义的 V 群是同构于流形 Σ^3 的 V 群 $(H_1(\Sigma^3;\lambda))$（见 [4],[9]）．V 群的数值不变数用 Blanchfield-Fox 方法找到（[5]）．藉助于它们的帮助，在某些情况下，可以找到有同构群的不同的纽结．

在纽结上分歧的 S^3 的二层覆叠的连接的不变量可以从纽结的投影通过下面的构造立即得到，该不变量导致了纽结图的二次型（quadratic form of the diagram of knot）．一个纽结的正则投影分平面为区域，可以用唯一的方法，着上黑色和白色，使得无限区域 G_0 上黑色，且任何两个相邻的区域有不同的颜色．设 $G_0,\cdots,G_n$ 是所有黑色区域，纽结图的每一个二重点 x 用下面的方法对应于某个数 $\eta(x)\in\{-1,0,1\}$．设 x 是两个黑色区域 G_i 和 G_k 的公共边界上的一点．如果 $i=k$，则 $\eta(x)=0$．如果 $i\neq k$，则 $\eta(x)=1$ 当且仅当在黑色区域按顺时针方向从上过桥穿到下过桥；在相反情形，$\eta(x)=-1$．人们可构造下面的 $n\times n$ 矩阵 $A=\|a_{ij}\|$，其中 a_{ii} 是相应于处在区域 G_i 的边界上的二重点 x 的所有数 $\eta(x)$ 的和，而对 $i\neq k$，a_{ik} 通过取所有数 $\eta(x)$ 的和的相反符号得到，其中 x

取遍 G_i 和 G_k 的所有公共边界点．形式 $f=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_i x_j$ 称为纽结图的二次型．矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ 由纽结的类型决定，至多差一个以下的连通关系：所谓两个方阵是连通的（connected）是指可以由下列的有限次运算从一个得到另一个：$Q_1: A \to T'AT$，其中 T 是整数幺模矩阵，

$$Q_2: A \to \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}$$

和它们的逆，A 的行列式的模是纽结的一个不变量，称为纽结的行列式（determinant of the knot）．对每个纽结，它是奇数且等于 $|\Delta(-1)|$，其中 $\Delta(t)$ 是 Alexander 多项式（见 **Alexander 不变量**（Alexander invariants））．通过任何图的二次型的矩阵，用上述的方式定义的 V 群是纽结的一个不变量．更进一步，该 V 群同构于在连接 K 上分歧的球面 S^3 的 2 层覆叠的 V 群 $(H_1(\Sigma^3;\mathbf{Z}),\lambda)$．

参考文献

[1] Reidemeister, K., Knotentheorie, Chelsea, reprint, 1948.

[2] Goeritz, L., Knoten und quadratische Formen, *Math. Z.*, **36**(1933), 647－654.

[3] Seifert, H., Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**(1935), 84－101.

[4] Kneser, M. and Puppe, D., Quadratiche Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten, *Math. Z.*, **58** (1953), 376－384.

[5] Blanchfield, R. C. and Fox, R. H., Invariants of self-linking, *Ann. of Math.*, **53**(1951), 556－564.

[6] Trotter, H. F., Homology of group systems with applications to knot theory, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 464－468.

[7] Murasugi, K., On a certain numerical invariant of link types, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117**(1965), 387－422.

[8] Tristram, A., Some cobordism invariants for links, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **66**(1969), 251－264.

[9] Виро, О. Я., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **37** (1973), 1241－1258.

М. Ш. Фарбер 撰

【补注】V 上的二次型 q 的根基（radical of a quadratic form q）是所有 $a\in V$ 的空间，使得对所有 $b\in V$，$\varphi(a,b)=0$．这里 φ 是连结 q 的对称双线性形式．

二次型 q 的 Minkowski 单位（Minkowski unit of a quadratic form q）与 q 的 Hasse 不变量相同，也称为 Hasse-Minkowski 不变量，Hasse 符号和 Hasse-Minkowski 符号．对其定义，见 **Hasse 不变量**（Hasse invariant）．

参考文献

[A1] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976.

徐森林 译

纽结球面 [knotted sphere; заузленная сфера]

4 维 Euclid 空间 E^4 中的非平凡**二维纽结**（two-dimensional knot）；球面 S^2，它不能用位于半空间 E_+^3 中的纽结弧 k 绕以此半空间为界的平面在 E^4 中的旋转而得到．纽结球面的基本群 $\pi(E^4\setminus S^2)$ 不是纽结群（见**纽结群和连接群**（knot and link groups））．

参考文献

[1] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

М. И. Войцеховский 撰　徐森林 译

小平维数 [Kodaira dimension; Кодаиры размерность]

以小平邦彦命名的**代数簇**（algebraic variety）的一个数值不变量，他首先指出这个不变量在代数簇分类理论中的重要性．

设 V 是非异代数簇，$\Phi_m: V\to \mathbf{P}(n)$ 是由**线性系**（linear system）$|mK_V|$ 所定义的**有理映射**（rational mapping），其中 K_V 是 V 的**典范类**（canonical class）．V 的小平维数 $\kappa(V)$ 被定义为 $\max_{m>1}\{\dim \Phi_m(V)\}$．如果对所有的 $m\geq 1$，$|mK_V|=\emptyset$，则设 $\kappa(V)=-\infty$．小平维数是双有理不变量，也就是说，它与双有理等价类的代表元无关．

假设基域是复数域 $\mathbf{C}$．当 m 充分大时，有估计式

$$\alpha m^{\kappa(V)} \leqslant \dim |mK_V| \leqslant \beta m^{\kappa(V)}.$$

这里 α,β 是某个正数．如果 $\kappa(V)>0$，则存在代数簇的满态射 $f: V^* \to W$ 使得：a) V^* 双有理等价于 V；b) $\kappa(V)=\dim W$；c) 对某个稠密开集 $U\subset W$，所有的纤维 $f^{-1}(\omega),\omega\in U$，是抛物型簇（即小平维数为零）．

小平维数的概念已经被推广到把线性系 $|mK_V|$ 里的典范类 K_V 更换成任意**除子**（divisor）D 的情形（见[2]）．

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965.（Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75）.

[2] Ueno, K., Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Springer, 1975.

[3] Iitaka, S., On D-dimensions of algebraic varieties, *J. Math. Soc. Japan*, **23**(1971), 356－373.

И. В. Долгачев 撰

【补注】设 X 是紧连通**复流形**（complex manifold），$\mathscr{K}_X$ 是 X 上的典范丛．截面的典范配对

$$\Gamma(X,\mathscr{K}_X^{\otimes m})\otimes\Gamma(X,\mathscr{K}_X^{\otimes n})\to\Gamma(X,\mathscr{K}_X^{m+n})$$

使得 $\mathbf{C}\oplus\oplus_{m=1}^{\infty}\Gamma(X,\mathscr{K}_X^m)$ 成为一个交换环 $R(X)$，被称为 X 的典范环（canonical ring）．可以证明 $R(X)$ 有有限超越次数，$\operatorname{tr}\deg(R(X))<\infty$．$X$ 的小平维数现在可以描述为：

$$\kappa(X)=-\infty，若\ R(X)\cong\mathbf{C},$$

$$\kappa(X) = \mathrm{tr}\ \deg(R(X)) - 1,\ \text{否则}.$$

不等式 $\kappa(X) \leqslant a(X) \leqslant \dim(X)$ 总是成立的，这里 $a(X)$是 X 的代数维数（algebraic dimension），即 X上半纯函数域的超越次数．设 $P_m(X) = h^0(\mathscr{K}_X^{\otimes m}) = \dim H^0(\mathscr{K}_X^{\otimes m})$ 是 X的 m重亏格（m-th plurigenus），则有 i) $\kappa(X) = -\infty$，当且仅当 $P_m(X) = 0$ 对所有的 $m \geqslant 1$; ii) $\kappa(X) = 0$，当且仅当对 $m \geqslant 1$, $P_m(X) = 0$ 或 1，但不总是 0; iii) $\kappa(X) = k$, $1 \leqslant k \leqslant \dim(X)$，当且仅当 $P_m(X)$按 m^k 增长，即当且仅当存在整数 k 以及严格正的常数 a, b，使得 $am^k \leqslant P_m(X) \leqslant bm^k$ 对大的 m.

小平维数也称为典范维数（canonical dimension）．关于对数小平维数（logarithmic Kodaira dimension）的概念，参见[A2]，第 11 章．

参考文献

[A1] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

[A2] Iitaka, S., Algebraic geometry, Springer, 1982, Chapt. 10.

陈志杰 译

小平定理［**Kodaira theorem; Кодаиры теорема**］，小平消灭定理（Kodaira vanishing theorem）

关于上同调群 $H^i(X, \mathscr{O}(L))(i < \dim X)$ 消灭为零的定理，这里 $\mathscr{O}(L)$ 是紧**复流形**（complex manifold）X 上秩 1 的**负向量丛**（negative vector bundle）L 的全纯截面的层．小平的上同调消灭定理的等价叙述是:

$$H^i(X, \mathscr{O}(L \otimes K_X)) = 0, i > 0,$$

对于秩 1 的**正向量丛**（positive vector bundle）（这里 K_X 是 X上的典范线丛）．用**除子**（divisor）的语言，小平的上同调消灭定理可以表达为 $H^i(X, \mathscr{O}_X(-D)) = 0$ 对 $i < \dim X$ 以及任何满足以下条件的除子 D: 对某个 $n \geqslant 1$, nD 是 X 在某个射影嵌入里的超平面截口.

小平邦彦（[1]）（亦见[2]）用超越方法证明了这个定理，把它作为关于代数曲面上伴随系的正则性的经典定理向任意维数的推广．存在有正特征数的域上的正规代数曲面的例子，对于这个曲面，小平的上同调消灭定理不成立（[4]）.

对于任意秩的全纯向量丛，当它们在 J. Nakano（中野）的意义下为负时，小平定理仍成立．以下的结果也是小平定理的推广:

$$H^i(X, \Omega^p(L)) = 0 \text{ 对 } p + i \geqslant \dim X + r,$$

这里 L 是紧复流形 X 上的 r 秩弱正向量丛，$\Omega^p(L) = \Omega^p \otimes \mathscr{O}(L)$是取值在 L 里的 p 次**全纯形式**（holomorphic form）的层．对于弱负向量丛 L，当 $p + i \leqslant \dim X - r$ 时上同调消失．对于弱完全流形（weakly-complete manifolds）X，已经得到了类似小平定理的结果．弱完全流形是指允许有一个光滑**多重调和函数**（pluriharmonic function）ψ 的流形，使得对所有的 $c \in \mathbf{R}$ 以及对具有 $n = \dim X$ 个代数无关半纯函数的紧复空间 X，集合 $\{x \in X: \psi(x) < c\}$ 在 X 内相对紧（见[5]）.

参考文献

[1] Kodaira, K., On a differential geometric method in the theory of analytic stacks, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 1268–1273.

[2] Wells, R. O., Jr., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[3] Mumford, D., Pathologies Ⅲ, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 1, 94–104.

[4] Zariski, O., Algebraic surfaces, Springer, 1971.

[5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, **15** (1977), M., 93–171.

И.В. Долгачев 撰

【补注】对于正特征数的域上非异簇的小平定理的反例是 M. Raynaud（[A1]）给出的．E. Viehweg 和川又雄二郎给出了小平定理的更强的版本（[A2]）.

最近又得到了小平定理许多推广，参见[A3].

参考文献

[A1] Raynaud, M., Contre-example du "vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$, in C. P. Ramanujam. A tribute, Springer, 1978, 273–278.

[A2] Viehweg, E., Vanishing theorems and positivity in algebraic fibre spaces, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Berkeley, 1986, Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1987, 682–688.

[A3] Kollar, J., Vanishing theorems for cohomology groups, in S. J. Bloch (ed.): Algebraic Geometry Bowdoin, 1985, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987. 233–243.

陈志杰 译

Koebe 函数［**Koebe function; Кебе функция**］

函数

$$w = f(z) = f_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2} = $$
$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} n e^{i(n-1)\theta} z^n,$$

其中 $\theta \in [0, 2\pi)$．这一函数首先被 P. Koebe 所研究（[1]）．Koebe 函数把圆盘 $|z| < 1$ 映射成具有一条裂纹的 w 平面，裂纹是从点 $-e^{-i\theta}/4$ 出发的射线，它的延长线包含点 $w = 0$．Koebe 函数是单叶函数论中一系列问题的极值函数（见 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach conjecture）；**单叶函数**（univalent function））.

参考文献

[1] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischen Kurven, *Math. Ann.*, **69** (1910), 1 – 81.

[2] Hayman, W. K., Coefficient problems for univalent functions and related function classes, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 3, 385 – 406.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

杨维奇 译

Koebe 定理 [Koebe theorem; Кёбе теорема]

1) Koebe 覆盖定理 (Koebe covering theorem): 存在绝对常数 $K>0$ (Koebe 常数 (Koebe constant)), 使得若 $f\in S$ (其中 S 是 $|z|<1$ 内正则单叶函数 $f(z)=z+\cdots$ 组成的类), 则函数 $w=f(z)$ 关于 $|z|<1$ 的值集填满圆盘 $|w|<K$, 其中 K 是使此事实成立的最大数. L. Bieberbach (1916) 证明 $K=1/4$ 并且仅当

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}$$

时在圆周 $|w|=1/4$ 上存在不属于圆盘 $|z|<1$ 在 $w=f(z)$ 映射下的象的点, 其中 α 是实数. Koebe 覆盖定理有时被叙述成如下形式: 若函数 $w=f(z)$ 在 $|z|<1$ 内正则单叶, $f(0)=0$, 且把圆盘 $|z|<1$ 映射成不含点 c 的区域, 则 $|f'(0)|\leqslant 4c$.

2) Koebe 畸变定理 (Koebe distortion theorems). a) 存在仅依赖于 r 的正数 $m_1(r)$, $M_1(r)$, 使得对于任何 $f\in S$, $|z|=r$, 有

$$m_1(r)\leqslant|f(z)|\leqslant M_1(r).$$

b) 存在仅依赖于 r 的数 $M(r)$, 使对 $f\in S$, $|z_1|,|z_2|\leqslant r$ 有

$$\frac{1}{M(r)}\leqslant\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leqslant M(r).$$

此定理亦可叙述如下: 存在仅依赖于 r 的正数 $m_2(r)$, $M_2(r)$, 使对任何 $f\in S$, $|z|\leqslant r$, 有

$$m_2(r)\leqslant|f'(z)|\leqslant M_2(r).$$

Bieberbach 证明 Koebe 偏差定理中的最佳界限是

$$m_1(r)=\frac{r}{(1+r)^2},\quad M_1(r)=\frac{r}{(1-r)^2},$$

$$m_2(r)=\frac{1-r}{(1+r)^3},\quad M_2(r)=\frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

3) 关于映射有限连通区域为典型域的 Koebe 定理. a) z 平面上每个 n 连通区域 B 可以被单叶映射为 ζ 平面上的圆界区域 (即单叶映射为由有限个完全不相交的圆周围成的区域; 此处这些圆周的某一些可以退化为一个点). 在这类映射中恰好存在一个规范化映射把给定点 $z=a\in B$ 映为 $\zeta=\infty$ 并使该映射函数在 $z=a$ 邻域的展开式依照 a 是有穷值或非有穷值而具有形式

$$\frac{1}{z-a}+\alpha_1(z-a)+\cdots \text{ 或 } z+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots.$$

b) z 平面上每个具有边界连续统 $K_1,\cdots,K_n$ 的 n 连通区域 B 可以单叶映射成具有 n 条对数螺线弧裂纹的 ζ 平面, 这些螺线弧对径向的倾角分别为 $\theta_1,\cdots,\theta_n$, $0\leqslant\theta_\nu\leqslant\pi/2$, $\nu=1,\cdots,n$, 此外并使连续统 K_ν, $\nu=1,\cdots,n$, 映成倾角为 θ_ν 的弧, 给定的点 a, $b\in B$ 映为 0 和 ∞, 以及该映射函数在 $z=b$ 邻域的展开式依照 b 为有穷或无穷而具有形式

$$\frac{1}{z-b}+\alpha_0+\alpha_1(z-b)+\cdots \text{ 或 } z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots.$$

这种映射是唯一的.

定理 1) - 3) 是 P. Koebe 建立的 (见[1]-[4]).

参考文献

[1] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttingen Math. Phys. Kl.*, **2** (1907), 191-210.

[2] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginären Substitutionsgruppe, *Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttingen Math. Phys. Kl.*, **4** (1908), 68-76.

[3] Koebe, P., Abhandlung zur Theorie der konformen Abbildung IV, *Acta Math.*, **41** (1918), 305-344.

[4] Koebe, P., Abhandlung zur Theorie der konformen Abbildung V, *Math. Z.*, **2** (1918), 198-236.

[5] Голузин, Г. М., 《Успехи матем. наук》, 1939, в. 6, 26-89.

[6] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[7] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】 Koebe 覆盖定理联系着 Bloch 定理 (Bloch theorem): 存在绝对常数 B 使得若 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内是解析的, 则 $f(D)$ 包含一个半径为 B 的圆盘, 该圆盘是 D 的一个子区域的一一映象. B 的最佳值 (最大值) 称为 Bloch 常数 (Bloch constant). 已知

$$B\leqslant\frac{\Gamma(1/3)\,\Gamma(11/12)}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\;\Gamma(1/4)},$$

并猜测等号成立. 关于这方面的最近的讨论见 [A1].

亦见 Landau 定理.

参考文献

[A1] Minda, C. D., Bloch constants, *J. d'Analyse Math.*, **41** (1982), 54-84.

[A2] Conway, J. B., Functions of a complex variable, Springer, 1978.

杨维奇 译

Колмогоров 公理 [**Kolmogorov axiom**; **Колмогорова аксиома**], T_0 公理 (T_0-axiom).

一般拓扑学的所有**分离公理** (separation axiom) 中最弱的一个; 由 А. Н. Колмогоров 引入. 称一个拓扑空间满足此公理, 或称之为 T_0 空间 (T_0-space) 或 Колмогоров 空间 (Kolmogorov space), 如果对此空间的任意两个不同点, 存在包含其中一点而不含另一点的开集. 如果要求这(任给的)两点中每一点都含于不包含另一点的一个开集, 则得到下一个较强的分离公理, 称为 T_1 公理; 满足 T_1 公理的拓扑空间称为 T_1 空间. 是 T_0 空间但不是 T_1 空间的最简单的例子是连通的**二角形** (digon).

在 T_0 空间中, 单点集不必是闭集; T_1 空间可以定义为这样的 T_0 空间, 它的所有单点集都是闭的. 其任意多个开集之交集为开集的 T_0 空间称为离散空间 (discrete space) (广义地). 确切地说, 在这些空间中, 任意一族集合的并集的闭包等于这些集合的闭包的并集. 在任意离散空间中, 甚至在任意 Колмогоров 空间中, 可以定义它的点 x 和 y 之间的(偏)序: $x \leqslant y$, 如果 x 含于由点 y 构成的单点集的闭包. 反之, 如果在任一偏序集中把任意点 x 的闭包定义为所有点 $x^1 \leqslant x$ 的集合, 且把集合的闭包定义为它的所有点的闭包的并集, 则得一离散空间. 于是, 对离散空间的研究就等价于对偏序集的研究. 离散空间的重要例子是组合拓扑学中的单纯(及更一般的)复形: 对于两个单形 x, y, 序关系 $x \leqslant y$ 表示 x 是单形 y 的一个面(可能是非正常的).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. В. И. Зайцев 撰

【补注】 是 T_0 但不是 T_1 的"自然的"空间通常是仿射概形 Spec(A), A 是具有单位元的交换代数, 见**仿射概形** (affine scheme).

上面提到的"广义离散空间"通常称为 Александров 离散空间 (Aleksandrov-discrete spaces); 它们最早在[A1]中得到研究.

参考文献

[A1] Alexandrov, P. S., Diskrete Räume, *Mat. Sb.* (1), **43** (1937), 501 - 519. 白苏华、胡师度 译

Колмогоров-Chapman 方程 [**Kolmogorov-Chapman equation**; **Колмогорова-Чепмена уравнение**]

一个形如

$$P(s,x;u,\Gamma)=\int_E P(s,x;t,dy)P(t,y;u,\Gamma), s<t<u,$$

的方程. 它是加在**转移函数** (transition function) $P(s, x;t,\Gamma)(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty, x \in E, \Gamma \in \mathfrak{B}, (E,\mathfrak{B})$ 是一个可测空间)上的条件, 使得我们(在某些关于 $(E, \mathfrak{B})$ 的假定下)能构造一个 **Марков 过程** (Markov process), 它的条件概率 $\mathsf{P}_{s,x}(x_t \in \Gamma)$ 与 $P(s,x;t,\Gamma)$ 相同. 反之, 由条件概率的一般性质即得 Марков 过程的转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$ (根据定义等于 $\mathsf{P}_{s,x}(x_t \in \Gamma)$), 满足 Колмогоров-Chapman 方程. 这一事实由 Chapman 指出([1]), 且在 1931 年被 А. Н. Колмогоров 加以研究([2]).

参考文献

[1] Chapman, S., *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **119** (1928), 34-54.

[2] Kolmogoroff, A., Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.*, **104** (1931), 415 - 458.

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973 (中译本: И. И. 基赫曼等, 随机过程论, 科学出版社, 1986).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】 在西方文献中这一方程通常称为 Chapman-Колмогоров 方程 (Chapman-Kolmogorov equation).

参考文献

[A1] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.

[A2] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Springer, 1965, Sect. 5. 26).

[A3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1966, Chapt. XV, 13 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷上、下册, 科学出版社, 1964, 1979). 刘秀芳 译

Колмогоров 对偶性 [**Kolmogorov duality**, **Колмогорова двойственность**]

代数拓扑学 (algebraic topology) 中的一种**对偶性** (duality), 它可以指同构

$$H_r(A, G) \sim H_{r+1}(R \setminus A, G),$$

也可以指同构

$$H^r(A, G) \sim H^{r+1}(R \setminus A, G).$$

这里 R 是局部紧的 Hausdorff 空间, A 是其闭子集. 同调的情形(第一个同构), 在 R 的 r 维和 $(r+1)$ 维同调群为 0 时成立; 而上同调的情形(第二个同构), 在 $H^r(R, G)=0$ 和 $H^{r+1}(R, G)=0$ 时成立, 其中系数群 G 为可换群.

上面所提到的同调群和上同调群, 其定义如下: r 维链 (r-dimensional chain) 是空间 R 的 $(r+1)$ 个具有紧闭包的子集上的一个斜对称函数 $c_r(e_0, \cdots, e_r)$, 它对每个变元可加, 值取在可换群 G 中. 并且当交集 $\overline{e}_0 \cap \cdots \cap \overline{e}_r$ 为空集时, 它为 0. 边缘算子 (boundary operator) ∂ 由下式决定:

$$\partial c_r(e_0, \cdots, e_{r-1}) = c_r(U, e_0, \cdots, e_{r-1}),$$

这里 U 是 R 的任意一个包含有 $\bar{e}_0 \cup \cdots \cup \bar{e}_{r-1}$ 的具紧闭包的开集．闭链（cycles）是边缘为 $0(\partial c_r = 0)$ 的链．而闭链同调于 0 意指它为边缘（$c_r = \partial c_{r+1}$）．在通常的函数加法下，r 维闭链全体所成的群 $Z_r(R, G)$ 包含全体 r 维边缘所构成的群 $B_r(R, G)$ 作为其子群．商群 $Z_r(R, G)/B_r(R, G)$ 就是群 $H_r(R, G)$．А. Н. Колмогоров 总假定群 G 是紧的，而且还给同调群以紧化拓扑．然而，系数群的拓扑，并不影响同调群的结构，并且同调群的系数群可以取任意的可换群．

为了定义上链，考虑空间 R 的 $r+1$ 个点 $x_0, \cdots, x_r$ 上的、值取在 G 中的斜对称函数 $f^r(x_0, \cdots, x_r)$，这时对每个 f^r，存在 R 的具有紧闭包的两两不交子集的有限组 S_{f^r}，使 x_i 和 $\tilde{x}_i$（对每个 i）属于组 S_{f^r} 的同一个元素时，就有 $f^r(x_0, \cdots, x_r) = f^r(\tilde{x}_0, \cdots, \tilde{x}_r)$．此外如果有某个 x_i 不属于 S_{f^r} 的任一元素，则 $f^r(x_0, \cdots, x_r) = 0$．上边缘算子 δ 由下式决定：

$$\delta f^r(x_0, \cdots, x_{r+1}) = $$
$$= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i f^r(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{r+1}).$$

两个函数 f_1^r 和 f_2^r 视为等价，如果 R 的每个点均有一邻域 U，使得当所有的 x_i 都属于 U 时，就有 $f_1^r(x_0, \cdots, x_r) = f_2^r(x_0, \cdots, x_r)$．函数的等价类就是上链（cochain）．上链的边缘是其代表函数的上边缘的等价类．上闭链（cocycle）是上边缘为 0 的上链 c^r．又上闭链上同调于 0，如果它是一个上边缘：$c^r = \delta c^{r-1}$ 所有 r 维上边缘所构成的群 $B^r(R, G)$ 是所有上闭链所构成的群 $Z^r(R, G)$ 的子群．商群 $Z^r(R, G)/B^r(R, G)$ 就是群 $H^r(R, G)$．

这样定义的同调群和上同调群，通常称为函数方式（functional way）的定义，是由 Колмогоров 引进的（[1]）．他除了证明已经提到的对偶同构外，还证明了，在同调群 $H_r(R, G^*)$ 和上同调群 $H^r(R, G)$ 间，存在着 Понтрягин 特征论意义下的对偶性．这里，紧群 G^* 和群 G 对偶．又有 **Poincaré 对偶**（Poincaré duality）．

$$H_r(R, G^*) \sim \tilde{H}^{n-r}(R, G^*),$$
$$H^r(R, G) \sim \tilde{H}_{n-r}(R, G),$$

这里 R 是 n 维开流形，$H_r(R, G^*)$ 和 $H^r(R, G)$ 是紧（或离散）群 G^*（或 G）上的函数式（上）同调群．而 $\tilde{H}^{n-r}(R, G^*)$ 和 $\tilde{H}_{n-r}(R, G)$ 是 R 的任一胞腔分解的无穷上链（有限链）的上同调（同调）群．

在 R 是 n 维 Euclid 空间这种情形，由上述对偶性可以得到 Понтрягин 对偶性定理（见 **Alexander 对偶性**（Alexander duality））．由于 Колмогоров 对偶性对任意系数群的同调也成立（[2]），所以 Steenrod 对偶性定理是这些对偶性的一个特殊情形（见代数拓扑中的**对偶性**（duality））．

函数式同调群在紧尺度空间和紧系数群的情形与 Vietoris 群（见 **Vietoris 同调**（Vietoris homology））同构；在局部紧空间和紧系数群的情形，与相对于奇异子复形的 Александров 谱同调群（[3]）同构（[4]），因此也和局部紧空间的单点紧化的 Александров-Čech 同调群同构（[5]），也和紧尺度空间以及任意群的 Steenrod 同调（[8]）同构（[7]）．因此，Колмогоров 同调群比 Steenrod 同调群早四年出现，而适用的空间比后者更广．

函数式同调群和上同调群，在局部紧空间和逆紧映射（即每个紧集的原象为紧）的范畴内，满足全部 **Steenrod-Eilenberg 公理**（Steenrod-Eilenberg axioms）（[6]）．在紧尺度空间范畴内，还满足两条 Milnor 公理（[7]）．

参考文献

[1A] Kolmogorov, A. N., Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts, *C. R. Acad. Sci.*, **202** (1936), 1144 – 1147.

[1B] Kolmogorov, A. N., Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts, *C. R. Acad. Sci.*, **202** (1936), 1325 – 1327.

[1C] Kolmogorov, A. N., Les groupes de Betti des espaces métriques, *C. R. Acad. Sci.*, **202** (1936), 1558 – 1560.

[1D] Kolmogorov, A. N., Cycles rélatifs. Théorème de dualité de M. Alexander, *C. R. Acad. Sci.*, **202** (1936), 1641 – 1643.

[2] Мдзинаришвили, Л. Д.,《Докл. АН СССР》, **216** (1974), 3, 502 – 504.

[3] Александров, П. С.,《Уч. зап. МГУ》, **45** (1940), 1 – 60.

[4] Чогошвили, Г. С.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **15** (1951), 5, 421 – 438.

[5] Steenrod, N. E. and Eilenberg, S., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[6] Балавадзе, М. Б.,《Тр. Тбил. матем. ин-та》, **41** (1972), 5 – 40.

[7] Мдзинаришвили, Л. Д.,《Тр. Тбил. матем. ин-та》, **41** (1972), 143 – 163.

[8] Steenrod, N., Regular cycles of compact metric spaces, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 833 – 851.

Г. С. Чогошвили 撰

【补注】 上面定义的同调群与上同调群也分别称为 Колмогоров-Alexander 同调群（[1], [A1]）与 Кол-

могоров-Spanier 上同调群（[1], [A2]）.

参考文献

[A1] Alexander, J. W., On the chains of a complex and their duals, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **21** (1935), 509 – 512.

[A2] Spanier, E. H., Cohomology theory for general spaces, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 407 – 427.

[A3] Milnor, J. W., On axiomatic homology theory, Pacific J. Math., **12** (1962), 337 – 341.

沈信耀 译　余建明 校

Колмогоров 方程[**Kolmogorov equation**; **Колмогорова уравнение**]

一个关于**转移函数**（transition function）$f = P(s,x;t,\Gamma)$（$0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$（$(E,\mathfrak{B})$ 是可测空间））或其密度 $f = p(s,x;t,y)$（如果它存在）的形如

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A_s f \qquad (1)$$

（逆向方程，称为向后或第一方程，$s < t$）或形如

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_t^* f \qquad (2)$$

（正向方程，称为向前或第二方程，$t > s$）的方程. 对于转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$，伴随方程（1）有条件

$$\lim_{s \uparrow t} P(s,x;t,\Gamma) = I_\Gamma(x),$$

伴随方程（2）有条件

$$\lim_{t \downarrow s} P(s,x;t,\Gamma) = I_\Gamma(x),$$

其中 $I_\Gamma(x)$ 是集合 Γ 的指示函数；在这种情形下，A_s 是作用在函数空间上的一个算子，而 A_t^* 作用在广义测度空间上.

对具有可数状态集的 **Марков 过程**（Markov process），其转移函数完全由转移概率 $p_{ij}(s,t) = P(s,i;t,\{j\})$（从时刻 s 处于状态 i 到时刻 t 转到状态 j）决定，对这种情形，在某些进一步假定下，向后和向前 Колмогоров 方程有如下形式：

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = \sum_k \alpha_{ik}(s) p_{kj}(s,t), \quad s < t, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s,t) \alpha_{kj}(t), \quad t > s, \qquad (4)$$

其中

$$\alpha_{ij}(s) = \lim_{\substack{s_1 \uparrow s \\ s_2 \uparrow s}} \frac{p_{ij}(s_1,s_2) - \delta_{ij}}{s_2 - s_1}. \qquad (5)$$

在有限状态情形下，只要（5）中极限存在，方程（3）和（4）就成立.

另一类其方程（1）和（2）的有效性问题被仔细研究过的重要过程是扩散型过程，它们的定义是其转移函数 $P(s,x;t,\Gamma)$（$x \in \mathbf{R}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$）满足下述条件：

a）对每一 $x \in \mathbf{R}$ 和 $\varepsilon > 0$，

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} P(s,x;t,dy) = o(t-s),$$

关于 s, $s < t$ 一致成立；

b）存在函数 $a(s,x)$ 和 $b(s,x)$，使得对每一 x 和 $\varepsilon > 0$，

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (y-x) P(s,x;t,dy) = a(s,x)(t-s) + o(t-s),$$

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (y-x)^2 P(s,x;t,dy) = b(s,x)(t-s) + o(t-s),$$

关于 s, $s < t$ 一致成立. 如果密度 $p = p(s,x;t,y)$ 存在，则在某些假定下向前方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(ap) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(bp)$$

成立（对于 $t > s$ 和 $y \in \mathbf{R}$）（此方程亦称为 Fokker-Planck 方程），而向后方程（对 $s < t$ 和 $x \in \mathbf{R}$）有如下形式：

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

参考文献

[1] Kolmogorov, A. N., Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.*, **104** (1931), 415 – 458.

[2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973（中译本：И. И. 基赫曼等，随机过程论，科学出版社，1986）.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】除概率意义而外，Колмогоров 方程也出现在建立实际扩散模型的方程中，诸如通过多孔材料的一种物质的分子的扩散或者一种生物群体的某种性质的传播等（亦见 **Einstein-Смолучовский 方程**（Einstein-Smoluchowski equation）的[补注]）.

参考文献

[A1] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.

[A2] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963（英译本：Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Springer, 1965, Sect. 5. 26）.

[A3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1966, Chapt. XV, 13（中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964，1979）.

刘秀芳 译

Колмогоров 不等式[**Kolmogorov inequality**; **Колмогорова неравенство**]

1）逼近论中的 Колмогоров 不等式是实轴（或半实轴）上函数及其导数空间 $L_s(J)$ 中范数间的一种

乘性不等式:

$$\|x^{(k)}\|_{L_q} \leqslant C\|x\|_{L_r}^{\nu} \cdot \|x^{(n)}\|_{L_p}^{1-\nu} \quad ,$$

其中

$$0 \leqslant k < n \ , \ \nu = \frac{n-k-p^{-1}+q^{-1}}{n-p^{-1}+r^{-1}} \quad ,$$

且 C 不依赖于 x. G.H.Hardy (1912), J.E.Littlewood (1912), E.Landau (1913) 和 J.Hadamard (1914) 最早研究了此类不等式. A. H. Колмогоров ([1]) 就 $J=(-\infty,+\infty)$, $p=q=r=\infty$ 及任意的 k, n 这个最重要的情形获得了最小常数 C.

Колмогоров 不等式与最佳数值微分问题及 k 重微分 (无界) 算子 D^k 的稳定计算问题有关. 实际上, 函数类 $\{x \in L_r : \|x^{(n)}\|_{L_p} \leqslant 1\}$ 上算子 D^k 的连续模

$$\omega(\delta) = \sup\{\|x^{(k)}\|_{L_q} : \|x\|_{L_r} \leqslant \delta \ , \ \|x^{(n)}\|_{L_p} \leqslant 1\}$$

可由公式 $\omega(\delta)=\omega(1)\delta$ 表示, 亦即 Колмогоров 不等式对常数 $C=\omega(1)$ 成立 .

Колмогоров 不等式是可微函数类的嵌入性质所涉及的有关不等式的特例 (见**嵌入定理** (imbedding theorems)) .

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., 《Ученые зап. Моск. ун-та, математика》, 1939, В. 30, кн. 3, 3-16 .

[2] Стечкин, С. Б., 《Матем. заметки》, **1** (1967), 2, 137-148 .

[3] Тайков, Л. В., 《Матем. заметки》, **4** (1968), 2, 233-238 .

[4] Арестов, В. В., 《Acta Sci. Math.》, **33** (1972), 243-267 .

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】应当特别提到 Landau 的工作 ([A1]). 他在 1913 年提出了一种新的极值问题, 即找出导函数上确界范数之间的严格不等式. 就半实轴 $\mathbf{R}_+$ 而言, 与 Колмогоров 定理类似的结果已由 I. J. Schoenberg 和 A. Cavaretta 在 [A3] 中得到, 亦见 [A2] . 有关这些问题的极好的综述, 见 [A4]. 关于差分算子的范数不等式, 近来已有相当的研究; 例如, 见 [A5] .

参考文献

[A1] Landau, E., Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen, *Proc. London Math. Soc.*, **13** (1913), 43-49 .

[A2] Morsche, H. G. ter, Interpolation and extremal properties of $\mathscr{L}$-spline functions, Univ. Eindhoven, 1982. Thesis.

[A3] Schoenberg, I. J. and Cavaretta, A., Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline, in Proc. Internat. Conf. Constructive Function Theory, Bulgarian Acad. Sci., 1972, 297-308 .

[A4] Schoenberg, I. J., The elementary cases of Landau's problem of inequalities between derivatives, *Amer. Math. Monthly*, **80** (1973), 121-158 .

[A5] Kaper, H. G. and Spellman, B. E., Best constants in norm inequalities for the difference operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **299** (1987), 351-372 .

王仁宏、檀结庆 译

2) 概率论中的 Колмогоров 不等式是一个关于独立随机变量之和的最大值的不等式. 它是概率论中经典的 **Чебышев 不等式** (Chebyshev inequality) 的一个推广. 令 $X_1, \cdots, X_n$ 是一组具有有限数学期望 $a_n = \mathsf{E}X_n$ 和方差 $\sigma_n^2 = \mathsf{D}X_n$ 的独立随机变量. 此时, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-a_k)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$$

成立, 并且如果各变量有界 ($|X_i| \leqslant c$ 的概率为 1), 则有

$$1-\frac{(\varepsilon+2c)^2}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2} \leqslant \mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-\sigma_k)\right| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

这些不等式是由 A. H. Колмогоров 在 [1] 中建立的. Колмогоров 不等式的绝妙之处, 不仅在于它的证明 (采用概率论中全新的论证方法), 而且在于其结果本身 (对和式最大值的估计与 Чебышев 不等式最后一项和式的估计相同) .

在 Колмогоров 不等式的证明中, 实质上用到了 $X_1, \cdots, X_k$ 固定时, 和函数 S_{k+p} 条件数学期望的一些性质. 这些性质是由 X_k 的独立性所衍生的.

Колмогоров 不等式有多种推广, 兹列举其中几种如下:

1) 如果 X_n 是独立变量这一条件用 $\{X_n\}$ 是**绝对无偏序列** (absolutely-unbiased sequence) 取而代之的话, 亦即如果由和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 产生的序列形成一个**鞅** (martingale), 则 Колмогоров 不等式仍不失为真 .

2) 如果 $g(t) \geqslant 0$ 是一个凸单调函数且 $\mathsf{E}g(|S_n|) < \infty$, 则有

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \mathsf{E}g(|S_n|)\frac{1}{g(\varepsilon)} .$$

3) 如果 $X_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 关于原点对称, 则有

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n| \geqslant \varepsilon\},$$

见 **Lévy 不等式** (Lévy inequality) .

4) 对任意独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m| > \delta+\varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{1-p}\mathsf{P}\{|S_n| > \varepsilon\}$$

成立, 只要选取 $\delta > 0$ 和 $0 < p < 1$ 使其满足对所有

$m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 有 $\mathrm{P}\{|S_m| > \delta\} \leqslant p$.

在各种形式的 Колмогоров 不等式中，均可见到独立变量之和的下述性质：最大和的“振幅”与最后和式的“振幅”同阶.

正如 Чебышев 不等式用于推导**大数律**(law of large numbers)一样，Колмогоров 不等式可用来证明**强大数律**(strong law of large numbers)(几乎处处 $S_n/n \to 0$ 的 Колмогоров 收敛准则). 利用 Колмогоров 不等式，可以证明有关随机变量级数的收敛定理.

参考文献

[1A] Kolmogorov, A.N., Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Math. Ann.*, **99** (1928), 309–319.

[1B] Kolmogorov, A.N., Bemerkungen zur meiner Arbeit ‘Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen’, *Math. Ann.*, **102** (1929), 484–488.

[2] Колмогоров, А.Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

[3] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963.

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1966(中译本：W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，上册 1964，下册 1979).

王仁宏、檀结庆 译

Колмогоров 积分 [Kolmogorov integral; Колмогорова интеграл]

构造一种包括 **Lebesgue-Stieltjes 积分**(Lebesgue-Stieltjes integral)，**Burkill 积分**(Burkill integral)，**Hellinger 积分**(Hellinger integral)等在内的一般积分格式. 由 А. Н. Колмогоров 引进([1]). 考虑任意性质空间 E 的分划的一有向族. 集函数 Φ(一般是多值的)定义在分划的元素上. 此函数取遍分划的所有元素的值的和给出分划的多值函数. 特别地，这种和是 Riemann 和 $\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$ 的推广，这里多值性是点 ξ_i 在分划的元素上的选择的任意性的推论. 于是分划函数的有向极限定义了 Колмогоров 积分 $\int_E d\Phi$. Колмогоров 积分对有限与可数分划均可考虑，也可以对取值于可换拓扑群上的函数进行考虑.

参考文献

[1] Kolmogoroff, A. N., Untersuchungen über den Integralbegriff, *Math. Ann.*, **103** (1930), 654 – 696.

В. А. Скворцов 撰 郑维行 译 沈祖和 校

Колмогоров-Селиверстов 定理 [Kolmogorov-Seliverstov theorem; Колмогорова-Селиверстова теорема]

如果条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)W(n) < \infty$$

成立，其中的 $W(n)=\log n$，则 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

几乎处处收敛. 这是由 А. Н. Колмогоров 和 Г. А. Селиверстов 证明的(见[1]，[2]). 在[1]中实际上证明了 $W(n)$ 可以取成 $\log^{1+\delta}n$，$\delta>0$ 任意，而在[2]中这一结论得到了加强，当 $\delta=0$ 时也成立. 这一加强的结论也被 A. I. Plessner 得到([3]). 在 Колмогоров-Селиверстов 定理之前，已经有了 G. H. Hardy 的定理(1916)，其中的 $W(n)=\log^2 n$. 直到 1966 年 **Carleson 定理**(Carleson theorem)被证明之前，Колмогоров-Селиверстов 定理一直是这一方向上最强的结果，而根据 Carleson 定理，可以取 $W(n)\equiv 1$. S. Kaczmarz([4])将 Колмогоров-Селиверстов 定理从三角函数系转移到任意一个正交函数系，他证明：为了关于这种正交函数系的级数在某个集合上的几乎处处收敛性，可以取这个集合上的 **Lebesgue 函数**(Lebesgue function)的单调强函数作为 $W(n)$.

参考文献

[1] Kolmogorov, A. N. and Seliverstov, G. A., Sur la convergence des séries de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **178** (1924), 303 – 306.

[2] Kolmogorov, A. N. and Seliverstov, G. A., Sur la convergence des séries de Fourier, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **3** (1926), 307 – 310.

[3] Plessner, A. I., Ueber Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *J. Reine Angew. Math.*, **155** (1925), 15 – 25.

[4] Kaczmarz, S., Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87 – 121.

С. А. Теляковский 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

Колмогоров-Смирнов 检验 [Kolmogorov-Smirnov test; Колмогорова-Смирнова критерий]

一种**非参数检验**(non-parametric test)，用于检验假设 H_0：独立随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 同具有给定的连续型分布函数 $F(x)$，其单侧备选假设为 H_1^+：$\sup_{|x|<\infty}[\mathrm{E}F_n(x)-F(x)]>0$，其中 $\mathrm{E}F_n(x)$ 是经验分布函数 $F_n(x)$ 的数学期望. Колмогоров-Смирнов 检验基于统计量

$$D_n^+=\sup_{|x|<\infty}[F_n(x)-F(x)]=\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left[\frac{m}{n}-F(X_{(m)})\right],$$

其中由样本 $X_1,\cdots,X_n$ 得来的 $X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 是**顺序统计量序列**(variational series)或顺序统计量集. 这样，Колмогоров-Смирнов 检验是假设 H_0 对单侧备选假设 H_1^+

的 **Колмогоров 检验** (Kolmogorov test) 的一种变形. Н.В.Смирнов 研究了统计量 D_n^+，并在[1]中证明了

$$P\{D_n^+ \geq \lambda\} = = \sum_{k=0}^{[n(1-\lambda)]} \lambda \binom{n}{k} \left[\lambda + \frac{k}{n}\right]^{k-1} \left[1 - \lambda - \frac{k}{n}\right]^{n-k}. \quad (1)$$

其中 $0<\lambda<1$，而 $[a]$ 表示数 a 的整数部分. 除统计量 D_n^+ 的精确分布 (1) 外，Н.В.Смирнов 还得到它的极限分布：若 $n \to \infty$ 且 $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/6})$，则

$$P\{D_n^+ \geq \lambda\} = e^{-2\lambda^2}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

其中 λ_0 是任一正数. 利用渐近 Pearson 变换方法证明([2])：若 $n \to \infty$ 且 $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/3})$，则

$$P\left\{\frac{1}{18n}(6nD_n^+ + 1)^2 \geq \lambda\right\} = e^{-\lambda}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (2)$$

根据 Колмогоров-Смирнов 检验，在水平 α 下否定假设 H_0，如果

$$\exp\left\{\frac{-(6nD_n^+ + 1)^2}{18n}\right\} \leq \alpha,$$

其中由 (2) 知

$$P\left\{\exp\left[\frac{-(6nD_n^+ + 1)^2}{18n}\right] \leq \alpha\right\} = \alpha\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

可以同样进行假设 H_0 对备选假设 H_1^-: $\inf_{|x|<\infty} [EF_n(x) - F(x)] < 0$ 的检验. 在这种情形下，Колмогоров-Смирнов 检验的统计量是如下随机变量

$$D_n^- = -\inf_{|x|<\infty}\left[F_n(x) - F(x)\right] = \max_{1\leq m\leq n}\left[F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n}\right],$$

其分布在假设 H_0 成立的情形下与统计量 D_n^+ 的分布相同.

参考文献

[1] Смирнов, Н. В., 《Успехи матем. наук》, **10** (1944), 179 - 209.

[2] Большев, Л. Н., 《Теория вероятностей и её применения》, **8** (1963), 2, 129 - 155.

[3] Бальшев, Л.Н., Смирнов, Н.В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

[4] Waerden, B.L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

М.С.Никулин 撰

【补注】 还存在双样本 Колмогоров-Смирнов 检验，见 **Колмогоров 检验** (Kolmogorov test) 的补注，详见 [A1], [A2].

参考文献

[A1] Noether, G.E., A brief survey of nonparametric statistics, in R.V. Hogg (ed.), Studies in statistics, *Math. Assoc. Amer.*, 1978, 39 - 65.

[A2] Hollander, M. and Wolfe, D.A., Nonparametric statistical methods, Wiley, 1973.

周概容 译

Колмогоров 空间 [Kolmogorov space; Колмогорова пространство]

满足 **Колмогоров 公理** (Kolmogorov axiom) 的拓扑空间.

Колмогоров 检验 [Kolmogorov test; Колмогорова критерий]

一种**统计检验** (statistical test)，用于检验简单非参数假设 H_0：独立同分布随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 具有给定的连续型分布函数 $F(x)$，且备选假设 H_1 是双侧的：

$$|EF_n(x) - F(x)| > 0,$$

其中 $EF_n(x)$ 是经验分布函数 $F_n(x)$ 的**数学期望** (mathematical expectation). Колмогоров 检验的临界集决定于不等式

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x)| > \lambda_n,$$

并基于 А.Н.Колмогоров 在 1933 年证明的定理：当假设 H_0 成立时统计量 D_n 的分布不依赖于函数 $F(x)$，并且当 $n \to \infty$ 时，有

$$P\{\sqrt{n}D_n < \lambda\} \to K(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

其中

$$K(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-2m^2\lambda^2}.$$

Н.В.Смирнов ([4]) 在 1948 年编制了 Колмогоров 分布函数 (Kolmogorov distribution function) $K(\lambda)$ 表. 根据显著性水平为 α $(0<\alpha<0.5)$ 的 Колмогоров 检验，当 $D_n \geq \lambda_n(\alpha)$ 时否定假设 H_0，其中 $\lambda_n(\alpha)$ 是对应于给定显著性水平 α 的 Колмогоров 检验的临界值，并且是方程 $P\{D_n \geq \lambda\} = \alpha$ 的根.

为求 $\lambda_n(\alpha)$，可以用 Колмогоров 统计量 D_n 极限分布来逼近它的精确分布；见[3]，其中证明了当 $n \to \infty$ 且 $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/3})$ 时，有

$$P\left\{\frac{1}{18n}(6nD_n + 1)^2 \geq \lambda\right\} = \left[1 - K\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (*)$$

运用逼近 (*) 可以得到如下近似临界值

$$\lambda_n(\alpha) \approx \sqrt{\frac{z}{2n}} - \frac{1}{6n},$$

其中 z 是方程 $1-K(\sqrt{z/2}) = \alpha$ 的根.

实际中为计算统计量 D_n 的值，利用如下事实：

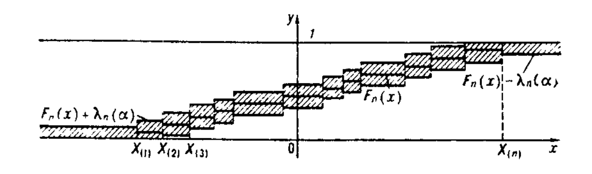
$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$

其中

$$D_n^+ = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left[\frac{m}{n} - F(X_{(m)}) \right],$$

$$D_n^- = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left[F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n} \right],$$

而 $X_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$ 是由样本 $X_1, \cdots, X_n$ 构造的**变量序列**(variational series)或顺序统计量．Колмогоров 检验有如下几何解释(见下图)．



将函数 $F_n(x)$，$F_n(x) \pm \lambda_n(\alpha)$ 的图形描绘在 $x0y$ 平面上．画有阴影的区域是分布函数 $F(x)$ 水平为 $1-\alpha$ 的置信带，因为当假设 H_0 成立时，根据Колмогоров 定理，有

$$\mathrm{P}\{F_n(x)-\lambda_n(\alpha)<F(x)<F_n(x)+\lambda_n(\alpha)\} \approx 1-\alpha .$$

如果函数 $F(x)$ 的图形不越出阴影区域，则根据显著性水平为 α 的 Колмогоров 检验应接受假设 H_0，若不然则否定假设 H_0．

Колмогоров 检验给数理统计的发展以强有力的推动，由此引出全新的统计分析方法，它成为非参数统计的基础．

参考文献

[1] Колмогоров, А.Н., 《Giorn. Instit. Ital. Attuari》, **4** (1933), 83 – 91.

[2] Смирнов, Н.В., 《Бюлл. МГУ》, секц **А**, **2**(1939), 2, 3 – 14.

[3] Большев, Л. Н., 《Теория вероятн. и её примен.》, **8**(1963), 129 – 155.

[4] Большев, Л.Н., Смирнов, Н.В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

М. С. Никулин 撰

【补注】 基于统计量 D_n 和 $\widetilde{D}_n = \sup_x [F_n(x) - F(x)]$ 的检验，以及基于统计量 $D_{m,n} = \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$ 和 $\widetilde{D}_{m,n} = \sup_x [F_m(x) - G_n(x)]$ 的双样本问题的检验，亦称为 **Колмогоров-Смирнов 检验**(Kolmogorov-Smirnov test)，其中 G_n 是基于来自分布函数为 G 的总体的，容量为 n 的样本的经验分布函数．

参考文献

[A1] Noether, G.E., A brief survey of non-parametric statistics, in R.V. Hogg(ed.), Studies in statistics, Math. Assoc. Amer., 1978, 3 – 65.

[A2] Hollander, M. and Wolfe, D.A., Non-parametric statistical methods, Wiley, 1973.

周概容 译

König 定理 [**König theorem**; **Кёнига теорема**]

如果一个长方矩阵的元素均为零与 1，则包含所有 1 的直线的最小数目等于那些 1 的最大数目，这些 1 可选择使得它们之间没有两个位于相同的直线上．(在这里，术语“直线”表示该矩阵的一行或一列．) 此定理由 D.König ([1]) 给出并证明．它是组合数学中基本定理之一，且是一个有限集的子集族的不同表示系统存在性的 Hall 准则的矩阵类似(见**选择定理**(selection theorem))．也存在 König 定理用图语言表达的广为流传的一个命题：在一个**二部图**(graph, bipartite)内，极大匹配中的边数等于最小顶点覆盖的元素个数．

König 定理常用于有关选择与极值问题的各种组合问题中．对无穷矩阵情况的推广也已知道([3])．

参考文献

[1] König, D., Graphs and matrices, *Mat. Lapok*, **38** (1931), 116 – 119.

[2] Harary, F., Graph theory, Addison - Wesley, 1969.

[3] Lewin, M., Essential coverings of a matrix, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **67** (1970), 263 – 267.

В. Е. Тараканов 撰

【补注】 图 G 的一个顶点覆盖(vertex covering)或不连通集(disconnecting set)是某些顶点的整体 C，使得 G 的每一边与 C 的某个顶点关联(就是说，与 C 的一个顶点关联的边覆盖 G)．一个最小顶点覆盖是一个割集(cut set)．

由 0 与 1 组成的矩阵的项秩(term rank) 被定义为这样的 1 的最大个数，这些 1 中没有两个位于同一行或同一列上．因此，König 定理 (也称为 König - Egerváry 定理 (König - Egerváry theorem)) 也可表达如下：一个 (0, 1) 矩阵 A 的项秩等于一起覆盖 A 的所有 1 的行与列的最小数目．

参考文献

[A1] Wilson, R. J., Introduction to graph theory, Longman, 1972, § 27.

[A2] Walther, H j., Ten applications of graph theory, Reidel, 1984, Sect. 6.1.

陈公宁 译

Конторович - Лебедев 变换 [**Kontorovich - Lebedev transform**; **Конторовича - Лебедева преобразование**]

积分变换

$$F(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) f(x) dx,$$

其中 K_ν 是 **Macdonald 函数** (Macdonald function)．

如果 f 在点 $x = x_0 > 0$ 的邻域内具有有界变差，并且

$$f(x)\ln x \in L\left[0, \frac{1}{2}\right], f(x)\sqrt{x} \in L\left[\frac{1}{2}, \infty\right],$$

则下列反演公式成立:

$$\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}=$$

$$=\frac{2}{\pi^2 x_0}\int_0^\infty K_{i\tau}(x_0)\tau\sinh\pi\tau F(\tau)d\tau.$$

设$f_i(i=1,2)$是实值函数，满足

$$f_i(x)x^{-3/4}\in L(0,\infty),\ f_i(x)\in L_2(0,\infty);$$

并且设

$$F_i(\tau)=\int_0^\infty\frac{\sqrt{2\tau\sinh\pi\tau}}{\pi}\frac{K_{i\tau}}{\sqrt{x}}f_i(x)dx.$$

这时有

$$\int_0^\infty F_1(\tau)F_2(\tau)d\tau=\int_0^\infty f_1(x)f_2(x)dx$$

(Parseval 恒等式(Parseval identity)).

有限的 Конторович-Лебедев 变换具有下列形式

$$F(\tau)=\frac{2\pi\sinh\pi\tau}{\pi^2|I_{i\alpha}(\alpha)|^2}\times$$

$$\times\int_0^\alpha[K_{i\tau}(\alpha)I_{i\tau}(x)-I_{i\tau}(\alpha)K_{i\tau}(x)]f(x)\frac{dx}{x},$$

$\tau>0$, 其中 I_ν 是变形 Bessel 函数(见[3]).

这种变换的研究开始于 М. И. Конторович 和 Н. Н. Лебедев(见[1], [2]).

参考文献

[1] Конторович, М. И., Лебедев, Н. Н., 《Ж. экспер. и теор. физ.》, **8**(1938), 10–11, 1192–1206.

[2] Лебедев, Н. Н., «Докл. АН СССР», **52** (1946), 5, 395–398.

[3] Уфлянд, Я. С., Юшкова, Е. А., 《Докл. АН СССР》, **164**(1965), 1, 70–72.

[4] Диткин, В. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974 (英译本: Ditkin, V. A. and Prudnikov, A. P., Integral transforms and operational calculus, Pergamon, 1965).

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 关于 Конторович-Лебедев 变换的变换表，见[A1]. 关于这种变换的较详细的研究，见[A2].

参考文献

[A1] Erdelyi, A., Magnus, W. and Oberhettinger, F., Tables of integral transforms, 1–2, McGraw-Hill, 1954.

[A2] Sneddon, I. N., The use of integral transforms, McGraw-Hill, 1972.

张鸿林 译

Korn 不等式[Korn inequality; Корна неравенство]

定义在 $\mathbf{R}^n$ 中某有界域 A 上的向量函数 $v_i(x^j)$ $(i,j=1,\cdots,n)$ 及其导数的一个不等式:

$$\int_A\left\{\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)^2+\sum_{k=1}^n v_k^2\right\}dx\geq c\|v\|_1^2, \tag{1}$$

其中

$$\|v\|_1=\int_A\left\{\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)^2+\sum_{k=1}^n v_k^2\right\}dx. \tag{2}$$

Korn 不等式对空间 $H_1(A)$ 中的向量函数也成立，这里 $H_1(A)$ 是空间 $C^1(A)$ 关于范(2)的完全化. 不等式(1)有时称为第二 Korn 不等式(second Korn inequality); 第一 Korn 不等式(first Korn inequality)指的是不含(1)中积分内第二项的不等式(1).

此不等式曾由 A. Korn (1908) 提出，目的在于获得弹性理论中非齐次方程的解的先验估计.

参考文献

[1] Fichera, G., Existence theorems in elasticity theory, in Handbuch der physik, Vol. VI a/2, Springer, 1972, 347–389.

М. И. Войцеховский 撰 郑维行 译 沈祖和 校

Korteweg-de Vries 方程[Korteweg-de Vries equation; Кортевега-де фриса уравнения], KdV 方程(KdV equation)

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0;$$

$$x,\ t\in\mathbf{R}^1,\ u(x,t)\in\mathbf{R}^1.$$

它是由 D. Korteweg 和 G. de Vries ([1]) 为描述在浅水的曲面上波的传播而提出的. 这能用反散射方法来解释，它是基于下面形式

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L,M]=LM-ML$$

的 KdV 方程，此处 $L=-\partial^2/\partial x^2+u(x,t)$ 是一维 Schrödinger 算子，且

$$M=4\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3\left[u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right].$$

KdV 方程带有初始条件 $u\in S(\mathbf{R}^1)$ (Schwartz 空间)的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)在急减函数类中是唯一可解的. 令

$$s=\{r(k)\in S(\mathbf{R}^1);\ \kappa_j,\ m_j>0,\ \kappa_{j_1}\neq\kappa_{j_2},$$

$$\text{若 } j_1\neq j_2,\ j=1,\cdots,n\}$$

是具位势 $u(x)$ 的 Schrödinger 算子的散射数据，$\{x_j\}$ 是离散谱，$\{k\}$ 是连续谱且 m_j 是本征函数的正规化系数. 于是

$$s(t)=\{r(k,t)=e^{8ik^3t}r(k),\ m_j(t)=e^{8\kappa_j^3t}m_j,$$

$\kappa_j(t)=\kappa_j\}$

是具位势 $u(x,t)$ 的 Schrödinger 方程的散射数据，且解 $u(x,t)$ 可用某一积分方程由散射数据 $s(t)$ 所确定．若 $r(k)=0$，则后面的方程能明显地解出；于是所得的位势是称为无反射的（reflection-free），且 KdV 方程的对应的解为已知的 n 孤立子（见**孤立子**（soliton））．

KdV 方程可以写成 Hamilton 形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u},$$

$$H(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^3+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2\right]dx;$$

此处相空间是 $S(\mathbf{R}^1)$ 且 Poisson 括号由算子 $\partial/\partial x$ 的双线性形式定义．映射 $u(x)\to s$ 是一个到角作用型变量的典型变换．利用这些新变量，此 Hamilton 方程可被明显地求积．KdV 方程具有无限多个运动的积分

$$I_n(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}P_{2n-1}\left[u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots,\frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2}}\right]dx;$$

$$P_1=u,\ P_n=-\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n-2}P_{n-1-j}P_j,\ n>1.$$

所有这些运动的积分均是**对合积分**（integrals in involution），且它们生成的 Hamilton 组（作为高级 Korteweg-de Vries 方程（higher Korteweg-de Vries equations））是完全可积的．

用反问题的积分方程，人们同样能找具阶梯型初始数据：

$$\lim_{x\to-\infty}u(x)=c<0,\quad \lim_{x\to+\infty}u(x)=0$$

的 Cauchy 问题的解．在前面的邻域内，当 $t\to+\infty$ 时，解 $u(x,t)$ 分解为若干个非干扰的孤立子——这是阶梯分解的过程．

在具周期初始数据 $u(x+T)=u(x)$ $(x\in\mathbf{R}^1)$ 的 Cauchy 问题中，无反射 δ 位势的类似物由这样一些位势提供，对于这些位势，Schrödinger 算子有无限多个禁戒地带——有限间隙位势（finite-gap potentials）．周期和殆周期的有限间隙位势是高级 KdV 方程的稳态解；后者构成完全可积的有限维 Hamilton 组．任意一个周期位势可用一个有限间隙位势去近似．令 $E_j\in\mathbf{R}^1$，$E_{j_1}\neq E_{j_2}$，若 $j_1\neq j_2$ $(j=1,\cdots,2g+1)$ 是带的棱边，且 Γ 是在域 $\mathbf{C}$ 内的超椭圆曲线

$$y^2=\prod_{j=1}^{2g+1}(x-E_j),$$

则具有上面带棱边的实值殆周期位势以及 Cauchy 问题的解可利用曲线 Γ 的 Jacobi 簇 $J(\Gamma)$ 上的 θ 函数来表示．对棱边作一些假定后，所得的解将是周期的．若人们放弃 $E_j\in\mathbf{R}^1$ 的条件，可以得到 KdV 方程的复值解（可能带有一些极点），它们同样也称为有限间隙位势．

参考文献

[1] Korteweg, D., Vries, G. de., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.*, **39** (1895), 422－443.

[2] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., Miura, R. M., Method for Solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Letters*, **19** (1967), 1095－1097.

[3] Захаров, В. Е., Фаддеев, Л. Д., 《Функциональный анализ и его приложения》, **5** (1971), 4, 18－27.

[4] Марченко, В. А., Спектральная теория операторов, Штурма-Лиувилля, К., 1972.

[5] Дубровин, Б. А., Матвеев, В. Б., Новиков, С. П., 《Успехи матем. наук》, **31** (1976), 1, 55－136.

[6] Кунин, И. А., Теория упругих сред с микроструктурой, М., 1975.

Л. А. Тахтаджян 撰

【补注】 Poisson 括号 $\{F,G\}$ 明显地表示为

$$\{F,G\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta F}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G}{\delta u}dx.$$

这是上面提及的"算子 $\partial/\partial x$ 的双线性形式"．

较详细地说，Schrödinger 算子（Schrödinger operator）$L_1=-d^2/dx^2+u(x,t)$ 的散射数据（scattering data）由如下组成：i）有限数个离散的本征值 $-\kappa_n^2(\kappa_n\in\mathbf{R})$；ii）由离散谱中每个 κ_n 所对应的本征函数 ψ_n 所定义的正规化系数 $m_n=c_n^2$，而此处对应于 $\kappa_n>0$ 的本征函数 ψ_n 要求当 $x\to\infty$ 时 $\psi_n\sim c_ne^{-\kappa_nx}$；iii）连续谱 $\{k=\lambda^2:\lambda\in\mathbf{R}\setminus0\}$ 中每一个的正规化系数，此系数由相应的本征函数 $\psi_k(x)$ 确定，此外 $\psi_k(x)$ 要求呈现如下性态：当 $x\to\infty$ 时 $\psi_k(x)\sim e^{-ikx}+r(k)e^{ikx}$，而当 $x\to-\infty$ 时 $\psi_k(x)\sim a(k)e^{-ikx}$．系数 $r(k)$ 称为反射系数（reflection coefficient），$a(k)$ 是对应的传输系数（transmission coefficient）．（这个术语以及短语"散射数据"来自于"物理图形"，在此图形中将来自 $+\infty$ 的平面波考虑为被位势 u 所散射；波的一部分是被反射了，部分被传输；且事实上 $|a|^2+|r|^2=1$）．

现在若 $u(x,t)$ 按照 KdV 方程发生演变，$L(t)=-d^2/dx^2+u(x,t)$ 的谱保持常数，即 KdV 方程是一个等谱方程（isospectral equation）且定义一个等谱流（isospectral flow）．这可以由 KdV 方程的 Lax 表示（Lax representation）$L_t=[L,M]$ 容易得到．

当 u 按 KdV 方程演变时，谱数据的其他部分如上指示的那样演变．将位势 u 赋予其谱数据的（非线性）映射称为谱变换（spectral transform）．借助于 Гельфанд-Левитан-Марчинк 方程（Gel'fand-Levitan-Marchenko equation）（或 Гельфанд-Левитан 方程（Gel'fand-Levitan equation））：

$$K(x,y,t)+M(x+y,t)+$$
$$+\int_x^{\infty}M(y+z,t)K(x,z,t)dz=0,$$

用逆谱变换（inverse spectral-transform）或逆散射变换（inverse scattering transform）可由散射数据恢复原位势．此处

$$M(\xi,t)=\sum_{i=1}^{N}m_n(t)e^{-\kappa_i\xi}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r(k,t)e^{ik\xi}dk.$$

于是 $u(x,t)$ 由 $u=-2(\partial/\partial x)K(x,x,t)$ 找到．我们知道这个解 KdV 方程的全过程称为逆谱变换法（inverse spectral-transform method 或 IST-method），逆散射法（inverse-scattering method）．并且可看到它是解常系数线性偏微分方程的 Fourier 变换法（Fourier-transform method）的一个非线性类似物．事实上，Fourier 变换能被视作为谱变换的一个极限．

修正的 Korteweg-de Vries 方程（modified Korteweg-de Vries equation 或 mKdV-equation）是

$$\frac{\partial v}{\partial t}-6v^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0.$$

它可借助于 IST 方法同样去求积．但此时要用一个二维的"L 算子"．这两个方程由 Miura 变换（Miura transformation）$u=v^2-v_x$ 连结．mKdV 方程同样是若干个分层的完全可积方程，且存在高级 mKdV 和高级 KdV 方程间的相应的 Miura 变换．

更一般地，存在连结每个 Kac-Moody Lie 代数（见 **Kac-Moody 代数**（Kac-Moody algebra））$\mathfrak{g}$ 的一族分层类 mKdV 方程，并且对 $\mathfrak{g}$ 的每一个单根，于是存在一族与对应的 Miura 变换一起的分层 KdV 方程（[A5]）．这些方程有时称为 Дринфельд-Соколов 方程（Drinfel'd-Sokolov equations）．通常的 mKdV 和 KdV 方程对应于 Kac-Moody Lie 代数 $s\hat{l}_2=A_1^{(1)}$．

人们同样可连结简单的 Lie 代数于另一族完全可积组：二维 Toda 格（two-dimensional Toda lattices），它有时称为 Лезнов-Савелиев 组（Leznov-Saveliev systems）．最简单（连结 sl_2）的是 **sine-Gordon 方程**（Sine-Gordon equation）：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi=\sin\varphi,$$

或 $(\partial^2/\partial x\partial t)u=\sin u$．

在类似 mKdV 方程和对应的 Toda 组之间存在如下的"对偶性"：若 $u(x,t,\tau)$ 作为 (x,τ) 的函数满足 $t=0$ 时的 Toda 格方程，且 $u(x,t,\tau)$ 作 (x,t) 的函数按对应的类似 mKdV 方程而演变，则 $u(x,t,\tau)$ 对所有 t 满足 Toda 格方程，并且反之亦然．

存在逆散射方法的一个量子类似物，它称为**量子逆散射**（quantum inverse scattering）（[A6]，[A7]）．（量子）**Yang-Baxter 方程**（Yang-Baxter equation）在此方法中起着重要的作用．

参考文献

[A1] Ablowitz, M. J., Segur, H., Solitons and the inverse scattering transform, SIAM, 1981.

[A2] Lamb, G. L., Elements of soliton theory, Wiley, 1980.

[A3] Newell, A. C., Solitons in mathematics and physics, SIAM, 1985.

[A4] Caligero, F., Degasperis, A., Spectral transform and solitons, 1, North-Holland, 1982.

[A5] Drinfel'd, V. G., Sokolov, V. V., Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, J. Soviet Math., **30** (1985), 1975-2005. (Itogi Nauk. i Tekhn. Sovrem. Probl. Mat., **24** (1984), 81-180).

[A6] Faddeev, L. D., Takhtajan, L. A., Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, 1987（译自俄文）.

[A7] Takhtajan, L. A., Integrable models in classical and quantum field theory, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Warszawa, 1983, PWN & North-Holland, 1984, 1331-1346.

[A8] Toda, M., Nonlinear waves and solitons, Kluwer, 1989.

[A9] Marchenko, V. A., Nonlinear equations and operator algebras, Reidel, 1988.

[A10] Novikov, S., Manakov, S. V., Pitaevskiǐ, L. P., Zakharov, V. E., Theory of solitons, Consultants Bureau, 1984（译自俄文）.

仇庆久 译

Koszul 复形 [Koszul complex; Козюля комплекс]

【补注】 设 R 是有幺元的**交换环**（commutative ring），$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_r)$ 是 R 的元素的一个序列．由这些资料所定义的 Koszul 复形由模 $K_p(\underline{x};R)=\Lambda^p(R^r)=\oplus_{i_1<\cdots<i_p}R(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})$ 和微分

$$d_p:K_p(\underline{x};R)\to K_{p-1}(\underline{x};R),$$
$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\mapsto\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}x_{i_j}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{e}_{i_j}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

组成，其中 $\{e_1,\cdots,e_r\}$ 是 R 模 R^r 的一组典范基．在一个符号上方的 ^ 像通常一样表示删除．更一般地，人们考虑链复形 $K_*(\underline{x};M)=K_p(\underline{x};R)\otimes_R M$ 和上链复形 $K^*(\underline{x};M)=\mathrm{Hom}_R(K_*(\underline{x};M);M)$．如果 $r=1$，

则 $K_*(x_1;R)$ 由只在 0 维和 1 维处的两个模非零 R 和 R 组成，并且非零微分只是在 $R\to R$ 中用 x_1 所作的乘法. 一般的 Koszul 复形可被视为由这种初等的成份组建起来的:

$$K_*(\underline{x};R)=K_*(x_1;R)\otimes_R\cdots\otimes_R K_*(x_r;R).$$

对于 $x_1\in R$, 定义链复形的态射 $h_{x_1}: K_*(x_1;R)\to K_*(x_1^2;R)$ 为在零维处乘以 x_1 以及在 1 维处的恒同映射. 取张量积以及迭代即定义出链复形的态射

$$h^t:K_*(\underline{x}^m;R)\to K_*(\underline{x}^{m+t};R),$$

其中 $\underline{x}^m=(x_1^m,\cdots,x_r^m)$. 以 $H^i(\underline{x};M)$ 表示上链复形 $K^*(\underline{x};M)$ 的第 i 个同调群. 对于 **Noether 环** (Noetherian ring) R, R 模 M 关于理想 $\mathfrak{a}$ 的局部上同调 (local cohomology) $H_A^i(M)$, $A=V(\mathfrak{a})=\{\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$ 是素理想且 $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{a}\}$, 可依下式计算:

$$H_A^i(M)=\varinjlim H^i(\underline{x}^t;M),$$

其中 $x_1,\cdots,x_r$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个生成元集.

一个元素 $x\in R$ 称为 M 正则元 (M-regular element) (其中 M 是一个 R 模), 如果 x 不是 M 上的零因子, 即如果 $M\xrightarrow{x}M$ 是单射. 元素的一个序列 $x_1,\cdots,x_r$ 称为元素的 M 正则序列 (M-regular sequence) 或 M 序列 (M-sequence), 如果 x_i 不是 $M/(x_1M+\cdots+x_{i-1}M)$ 上的零因子, 即如果 x_i 是 $M/(x_1M+\cdots+x_{i-1}M)$ 正则的. 设 l 是 R 的一个理想, 一个 M 正则序列 $x_1,\cdots,x_r$ 称作 l 中的 M 正则序列, 如果对于 $i=1,\cdots,r$, 都有 $x_i\in l$. l 中的极大 M 正则序列 (maximal M-regular sequence) 是指 l 中的一个 M 正则序列, 它满足: 不存在 $y\in l$, 使得 $x_1\cdots,x_r,y$ 是 M 正则序列.

设 A 是 Noether 环、M 是有限生成 A 模, l 是一个理想, 则下述诸条等价: i) 对于所有的 $i=0,\cdots,r$ 以及所有的支集在 l 中的有限生成 A 模 N (见**模的支集** (support of a module)), 都有 $\mathrm{Ext}_A^i(N,M)=0$; ii) 对于 $i=0,\cdots,r$, 有 $\mathrm{Ext}_A^i(A/l,M)=0$; iii) 在 l 中存在 M 正则序列.

模 M 的 l 深度 (l-depth) 是 l 中的最长的 M 正则序列的长度. 它也被称为理想 l 在 M 上的级 (grade). **模的深度** (depth of a module) 即是 A 深度.

与 M 正则序列相伴的 Koszul 复形 $K_*(\underline{x};M)$ 的同调满足: 当 $i>0$ 时, $H_i(K_*(\underline{x};M))=0$ 以及 $H_0(K_*(\underline{x};M))=M/\sum_{i=1}^r x_iM$. 这个事实 (连同上面的论述) 使得 Koszul 复形成为交换代数和同调代数中的重要工具, 例如, 在维数理论和重数理论 (以及**相交理论** (intersection theory)) 中, 参见 [A1], [A2], [A3], [A4]; 亦见**模的深度** (depth of a module) 和 **Cohen-Macaulay 环** (Cohen-Macaulay ring).

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Local cohomology, Lectures notes in math., 41, Springer, 1967.

[A2] Herzog, J. and Kunz, E. (eds.), Der kanonische modul eines Cohen-Macaulay-Rings, Lecture notes in math., 238, Springer, 1971.

[A3] Matsumura, H., Commutative algebra, Benjamin, 1970.

[A4] Northcott, D. G., Lessons on rings, modules and multiplicities, Cambridge Univ. Press, 1968.

赵春来 译

Котельников 解释 [Kotel'nikov intepretation; Котельникова интерпретация]

三维 **Лобачевский 空间** (Lobachevskii space) ${}^1S_3$ 中的直线流形在复平面 $S_2(i)$ (或 ${}^1S_2(i)$) 上的一个解释. 将 ${}^1S_3$ 每一条直线和它的 **Plücker 坐标** (Plücker coordinates) 相联系, 后者除一个符号外是完全确定的. 使用这些线坐标建立了直线与它在 ${}^1S_3$ 中的极的对应关系, 也定义了直线的向量和它们的极. 两条互极直线之中一条表示为一个单位长度的向量, 另一条表示为一个虚单位长度的向量. ${}^1S_3$ 中的互极直线对组成的流形表示为曲率半径为 1 或 i 的平面 $S_2(i)$, 而且此对应是连续的. ${}^1S_3$ 中的迷向直线表示为 $S_2(i)$ 中绝对形上的点. 空间 ${}^1S_3(i)$ 中运动的连通群同构于平面 $S_2(i)$ 的运动群.

Котельников 解释有时作广义理解, 即三维空间中的直线流形用复平面或者其他二维平面所作的解释 (见 **Fubini 模型** (Fubini model)).

Котельников 解释最先由 А. Р. Котельников 提出 (见 [1]), 而后又由 E. Study 独立提出 (见 [2]).

参考文献

[1] Котельников, А. П., Проективная теория векторов, Казань, 1899.

[2] Study, E., Geometrie der Dynamen, Teubner, 1903.

[3] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 Котельников 解释有时又称作 Котельников 模型 (Kotel'nikov model).

参考文献

[A1] Rozenfel'd, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

杨路、曾振柄 译

Krawtchouk 多项式 [Krawtchouk polynomials; Кравчука многочлены]

在由 $N+1$ 个整数点组成的有限点组上正交的多项式, 其分布函数 $\sigma(z)$ 是一个具有如下间断性的阶梯函数:

$$\sigma(x+)-\sigma(x-)=\binom{N}{x}p^xq^{N-x},\ x=0,\ \cdots,\ N,$$

其中 $\binom{N}{x}$ 是**二项式系数**(binomial coefficients), $p, q > 0$, $p+q=1$. Krawtchouk 多项式由公式

$$P_n(x) = \left(\binom{N}{x}\right)^{-1/2}(pq)^{-n/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{N-x}{n-k}\binom{x}{k}p^{n-k}q^k$$

给出. 这个概念属于 M. F. Krawtchouk ([1]).

参考文献

[1] Krawtchouk, M. F., Sur une généralisation des polynômes d'Hermite, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **189** (1929), 620 − 622.

[2] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

П. К. Суетин 撰

【补注】Krawtchouk 多项式可以写成型为 $_2F_1$ 的**超几何函数**(hypergeometric function). 群 SU(2)的不可约酉表示的矩阵元素的酉关系可以重新写成 Кравчук 多项式的正交关系, 见[A2], [A3]. 这些多项式也可解释成对称群的**圈积**(wreath product)上的球函数, 见[A4], 其中 q-Krawtchouk 多项式也得到讨论. 编码学家宁愿把它们和 Hamming 方案(等价地)联系起来, 这里 Krawtchouk 多项式被用来处理关于完全码的一些问题, 见[A1].

参考文献

[A1] Lint, J. H. van, Introduction to coding theory, Springer, 1982.

[A2] Koornwinder, T. H., Krawtchouk polynomials, a unification of two different group theoretic interpretations, *SIAM J. Math. Anal.*, **13**(1982), 1011 − 1023.

[A3] Nikiforov, A. F. and Uvarov, V. B., Special functions of mathematical physics, Birkhäuser, 1988 (译自俄文).

[A4] Stanton, D., Orthogonal polynomials and Chevalley groups, in R. A. Askey, T. H. Koornwinder and W. Schempp (eds.): Special functions: group theoretical aspects and applications, Reidel, 1984, 87 − 128.

陈怀惠 译

Крейн 空间 [Krein space; Крейново пространство]

【补注】 设 $\mathscr{X}$ 是复线性空间, 在其上定义了一个 Hermite 半双线性型 (Hermitian sesquilinear form) $[\cdot,\cdot]$ (即一个映射 $[\cdot,\cdot]: \mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathbf{C}$, 满足 $[a_1x_1+a_2x_2, y]=a_1[x_1,y]+a_2[x_2,y]$ 且 $[x,y]=\overline{[y,x]}$, 对所有的 $x_1, x_2, x, y\in\mathscr{X}$, $\alpha_1, \alpha_2\in\mathbf{C}$). 这时, $\mathscr{X}$ (或更确切地 $(\mathscr{X},[\cdot,\cdot])$), 称为 Крейн 空间, 如果在 $\mathscr{X}$ 中有两个线性流形 $\mathscr{X}_\pm$ 使得

$$\mathscr{X}=\mathscr{X}_+\dot{+}\mathscr{X}_-, \tag{A1}$$

$(\mathscr{X}_+,[\cdot,\cdot])$ 和 $(\mathscr{X}_-,[\cdot,\cdot])$ 是 **Hilbert 空间** (Hilbert space) 且 $[\mathscr{X}_+,\mathscr{X}_-]=\{0\}$. 总是假定 $\mathscr{X}_+, \mathscr{X}_-\neq\{0\}$ (否则 $(\mathscr{X},[\cdot,\cdot])$ 或 $(\mathscr{X},-[\cdot,\cdot])$ 是 Hilbert 空间); $[\cdot,\cdot]$ 称为 Крейн 空间 $\mathscr{X}$ 的不定内积 (indefinite inner product). 特别地, 如果, $\kappa=\min(\dim\mathscr{X}_+, \dim\mathscr{X}_-)<\infty$, 则 $\mathscr{X}_-$ 是 π_κ 空间或指数为 κ 的 **Понтрягин 空间** (Pontryagin space); 以后, 对一个 π_κ 空间, 总假定 $\kappa=\dim\mathscr{X}_+$.

用分解式(A1), 在 Крейн 空间 $(\mathscr{X},[\cdot,\cdot])$ 上能定义一个 Hilbert 内积 $(\cdot,\cdot)$ 如下:

$$(x,y)=[x_+,y_+]-[x_-,y_-], \tag{A2}$$

$$x=x_++x_-,\ y=y_++y_-,\ x_\pm,\ y_\pm\in\mathscr{X}_\pm.$$

虽然分解式(A1)不是唯一的, 分量 $\mathscr{X}_\pm$ 的分解是唯一决定的, 而由不同的分解式按照(A2)产生的 Hilbert 范数是等价的. Крейн 空间中所有拓扑概念, 如果不明显地另外说明, 都是指这种拓扑. 在 Hilbert 空间 $(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$ 中, 到 $\mathscr{X}_+$ 和 $\mathscr{X}_-$ 上的正交投影分别用 P_+ 和 P_- 表示. 这时, 对称为基本对称算子 (fundamental symmetry operator) 的 $J=P_+-P_-$, 有

$$[x,y]=(Jx,y),\ x,y\in\mathscr{X}, \tag{A3}$$

且 J 有性质: $J^2=I$, $J=J^*$. 反之, 给定一个 Hilbert 空间 $(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$ 和其中的一个有这些性质的算子 J (或更一般地, 一算子 G 有性质 $G=G^*$, $0\in\rho(G)$), 则在 $\mathscr{X}$ 上由(A3)定义一个不定内积 (或分别地, 由以下关系式定义:

$$[x,y]=(Gx,y),\ x,y\in\mathscr{X}), \tag{A4}$$

且 $(\mathscr{X},[\cdot,\cdot])$ 是 Крейн 空间. 由于这个构造, Крейн 空间有时称为 J 空间.

更一般地, 如果一个 Hilbert 空间 $(\mathscr{X},(\cdot,\cdot))$ 和 K 中一个自伴的非半定算子 G 已给定, 则关于 $x, y\in G$ 的关系式(A4)定义一个 $\mathscr{X}$ 上的半双线性型 $[\cdot,\cdot]$. 此型能按范数 $\||G|^{1/2}x\|$ $(x\in\mathscr{X})$ 连续地延拓到商空间 $\mathscr{X}/\ker G$ 的完全化上. 此完全化, 装备有 $[\cdot,\cdot]$ 是一个 Крейн 空间, 包含 $\mathscr{X}/\ker G$ 作为其稠密子集.

如果 r 是一个 $\mathbf{R}$ 上实的局部可和函数, 在 **Lebesque 测度** (Lebesque measure) 为正的集合上取正的和负的值, 则所有满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|f|^2|r|dx<\infty$ 的 $\mathbf{R}$ 上**可测函数** (measurable function) (类) f 的空间 $L_{2,r}$ 赋予不定内积 $[f,g]=\int_{-\infty}^{\infty}f\bar{g}r\,dx$ $(f, g\in L_{2,r})$, 就是一个 Крейн 空间. 更一般地, 如果 σ 是一个 R 上的实函数, 它是局部有界变差的且不保序的, 又 $|\sigma|$ 表示它的全变差, 则所有使得 $\int_{-\infty}^{\infty}|f|^2d|\sigma|<\infty$ 的可测函数 f 的空间 $L_2(\sigma)$, 赋予不定内积 $[f,g]=\int_{-\infty}^{\infty}f\bar{g}d_\sigma$ $(f, g\in L_2(\sigma))$, 就是一个 Крейн 空间.

此外，带有 Hermite 半双线性型 $[\cdot,\cdot]$ 的复线性空间，如有 κ 负平方（即每一线性流形 $\mathscr{L}\subset\mathscr{K}$，如对 $x\in\mathscr{L}$，$x\neq 0$，有 $[x,x]<0$，则其维数 $\leqslant\kappa$，且至少有一个这样的 κ 维流形），就能藉助于取一商空间并使它完全化，把它典范地嵌入到一个 π_κ 空间中（见[A4]，[A2]，[A9]，[A11]）.

Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 上的不定内积 $[\cdot,\cdot]$ 引出 $\mathscr{K}$ 中元素的一种分类：$x\in\mathscr{K}$ 称为正的（positive）、非负的（non-negative）、中性的（neutral）等等，如果 $[x,x]>0$，$[x,x]\geqslant 0$，$[x,x]=0$ 等等. $\mathscr{K}$ 中一个线性流形或子空间 $\mathscr{L}$ 称为正的（positive）、非负的（non-negative）、中性的（neutral）等等，如果它的所有非零元素是正的、非负的、中性的等等. 譬如说，所有非负元素的集合不是线性的，但它包含子空间，其中极大者称为极大非负子空间（maximal non-negative subspaces）. Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 的所有极大非负子空间有同样的维数（如同 $\mathscr{K}_+$）. $\mathscr{K}$（有分解式（A1））的子空间 $\mathscr{L}$ 是极大非负的，当且仅当它能写成 $\mathscr{L}=\{x_+ + K_{\mathscr{L}}x_+ : x_+\in\mathscr{K}_+\}$，这里 $K_{\mathscr{L}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的角算子（angular operator），是从 $(\mathscr{K}_+,[\cdot,\cdot])$ 到 $(\mathscr{K}_-,[\cdot,\cdot])$ 中的**压缩**（contraction）. $\mathscr{K}$ 的子空间的对偶对（dual pair）$(\mathscr{L}_+,\mathscr{L}_-)$ 定义如下：$\mathscr{L}_+$ 是非负子空间，$\mathscr{L}_-$ 是非正子空间且 $[\mathscr{L}_+,\mathscr{L}_-]=\{0\}$. 任一对偶对是包含在一极大对偶对（对偶对的极大性用包含关系按自然方式定义）中；在极大对偶对 $(\mathscr{L}_+,\mathscr{L}_-)$ 中子空间 $\mathscr{L}_+$（分别地，$\mathscr{L}_-$）是极大非负（分别地，非正）的（R. S. Phillips）.

利用不定内积，在 $\mathscr{K}$ 中能定义正交性：$x,y\in\mathscr{K}$ 称为正交的（orthogonal），如果 $[x,y]=0$；如果 $\mathscr{L}\subset\mathscr{K}$，则 $\mathscr{L}^{+}=\{x:[x,\mathscr{L}]=\{0\}\}$. Hilbert 空间中某些正交性质仍保持；然而也有本质的差别；例如，$\mathscr{L}\cap\mathscr{L}^{\perp}$ 能包含非零向量；如果 $\mathscr{L}$ 是中性的，则 $\mathscr{L}\cap\mathscr{L}^{\perp}$ 与 $\mathscr{L}$ 重合，且 $\mathscr{L}\cap\mathscr{L}^{\perp}=\{0\}$ 等价于 $\overline{\mathscr{L}+\mathscr{L}^{\perp}}=\mathscr{K}$.

对 Крейн 空间 $(\mathscr{K},[\cdot,\cdot])$ 中稠定**线性算子**（linear operator）T，伴随（adjoint）算子 T^+（有时称为 J 伴随的）用 $[Tx,y]=[x,T^+y]$ $(x\in\mathscr{D}(T),y\in\mathscr{D}(T^+))$ 定义. 如果 T^* 表示在 Hilbert 空间 $(\mathscr{K},(\cdot,\cdot))$（见（A2））中 T 的伴随，则显然 $T^+=JT^*J$. 现在 Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 中的算子类或多或少地类似于 Hilbert 空间情况来加以定义：T 是对称的（symmetric），如果 $T\subset T^+$、T 是自伴的（self-adjoint），如果 $T=T^+$，T 是耗散的（dissipative），如果 $\operatorname{Im}[Tx,x]\geqslant 0$ $(x\in\mathscr{D}(T))$，T 是压缩的（contractive），如果 $[Tx,Tx]\leqslant[x,x]$ $(x\in\mathscr{K})$，T 是酉的（unitary），如果 T 有界，$\mathscr{D}(T)=\mathscr{K}$，且 $T^+T=I=TT^+$，等等. 也有新的算子类出现：例如，T 是加算子（plus-operator）、如果 $[x,x]\geqslant 0$ 蕴涵 $[Tx,Tx]\geqslant 0$，T 是双加算子（doubly plus-operator），如果 T 和 T^+ 是加算子. Крейн 空间中稠定**等距算子**（isometric operator）T（即 $[Tx,Ty]=[x,y]$ 对所有的 $x,y\in\mathscr{D}(T)$）不必是连续的. 和 Hilbert 空间中一样，自伴和酉算子，对称和等距算子、耗散和压缩算子由 **Cayley 变换**（Cayley transform）联系在一起，例如，如 $A=A^+$，$z_0\neq\bar{z}_0$ 且 $z_0\in\rho(A)$，则 $U=(A-z_0)(A-z_0)^{-1}$ 是酉算子.

Крейн 空间中自伴算子的谱不必是实的（它甚至能覆盖全平面），但它关于实轴对称. 类似地，酉算子的谱关于单位圆对称.

不定内积有时给出算子谱的点的一种分类：一个本征值称为是正型（positive type）（负型（negative type）等等）的，如果相应的本征空间是正的（负的，等等）.

如果 λ，$\bar{\lambda}$ 是 Крейн 空间中自伴算子 A 的孤立本征值，则对相应的 Riesz 投影 E_λ，$E_{\bar\lambda}^{-}$ 有 $E_{\bar\lambda}^{-}=E_\lambda^{+}$，又如果 $\dim R(E_\lambda)<\infty$，则限制 $A|_{R(E_\lambda)}$ 和 $A|_{R(E_{\bar\lambda})}$ 有同样的 Jordan 结构. 如果在 π_κ 空间中对称算子 A 有实非半单本征值 λ，则相应的代数本征空间能分解成直接正交和：$\varepsilon_\lambda=\varepsilon_\lambda'+\varepsilon_\lambda''$，这里 ε_λ'' 是包含在 A 在 λ 的几何本征空间中的正子空间，而 $\varepsilon_\lambda'=\{0\}$ 是在 A 下不变的，带有 $\dim\varepsilon_\lambda'<\infty$；如果 $d_1,\cdots,d_r$ 是 $A|_{\varepsilon_\lambda'}$ 的 Jordan 链的长度，令 $\rho(\lambda)=\sum_{j=1}^{r}[d_j/2]$；如果 λ 是 A 的非实本征值，定义 $\rho(\lambda)$ 为相应代数本征空间的维数. 则 $\sum\rho(\lambda)\leqslant\kappa$，这里是对 A 在闭上半平面中所有的本征值 λ 求和. 特别地，A 的任一个 Jordan 链的长度 $\leqslant 2\kappa+1$，且 A 在开上半平面内的本征值个数和 A 的非半单本征值个数均不超过 κ.

对 Крейн 空间的特殊结果是关于极大非负（或极大非正）子空间存在性的命题，这些子空间在给定算子作用下是不变的. 这类型的第一个一般结果是由 Л. С. Понтрягин 于 1944 年证明的，阐明 π_κ 空间中自伴算子有一个 κ 维非正（即是极大非正）不变子空间. 随后，对 Крейн 空间中各类算子的类似结果也被证明. 例如，Крейн 空间中有界线性算子 T 有极大非负不变子空间，如果 P_+TP_- 是紧的再加上条件 T 是自伴的或耗散的或酉的或加算子，等等.（见[A2]，[A4]）. 证明这种结果的一种可能的方法、例如对酉算子 T，是确定分式线性变换

$$K\to(T_{21}+T_{22}K)(T_{11}+T_{12}K)^{-1}$$

存在不动点 K_0，这里 K 是从 $\mathscr{K}_+$ 到 $\mathscr{K}_-$ 中的压缩（一个角算子）且 $(T_{ij})_1^2$ 是 T 关于（A1）的矩阵表示. 用不同方法其他情形下极大非负不变子空间的存

在性也已得到证明，例如：1）T 是酉算子而 $\|T^n\|$ 对所有的 $n=0, 1, \cdots$，一致有界；2）对所有的 $x\in\mathscr{K}$ $x\neq 0$，$[Tx, Tx]>[x, x]$，且 $\sigma(T)\cap\{|\rho|=1\}=\emptyset$；和 3）$T$ 有界自伴，且存在多项式 P 使得 $[P(T)x, x]\geqslant 0(x\in\mathscr{K})$. 在很多情形下这些极大非正不变子空间 $\mathscr{L}$ 能用 $A|_{\mathscr{L}}$ 的谱的性质来刻画. 例如，如果 T 是有界自伴的而 P_+TP_- 是紧的，则能选取 $\mathscr{L}$ 使得 $\operatorname{Im}\sigma(A|_{\mathscr{L}})\geqslant 0$. 也有关于算子的交换族的公共不变极大非正子空间的存在性的结果，例如：π_κ 空间中有界自伴算子交换族有公共极大非负不变子空间（M. A. Наимарк；在 π_κ 空间中群表示论中的应用，见 [A19]）. Phillips 提出问题（[A16]）：如果 Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 中一个子空间对偶对在 $\mathscr{K}$ 中对有界自伴算子的一交换代数 A 是不变的，是否总能扩张成一极大对偶对而其子空间仍对 A 不变？（肯定的答案能推出 $\mathscr{K}$ 中任一有界自伴算子有极大非负不变子空间.）对这问题只有部分的解答已知（见 [A4], [A2], [A14]）.

Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 中一个自伴算子 A 称为可定化的（difinitizable）（[A4] 中可正化的（positizable））, 如果 $\rho(A)\neq\emptyset$ 且存在多项式 p 使得 $[p(A)x, x]\geqslant 0$ $(x\in\mathscr{D}(p(A))$. π_κ 空间中任一自伴算子有此性质（这里可选取 $q\bar{q}$ 作为 p，其中 q 是 $A|_{\mathscr{L}}$ 的最小多项式，$\mathscr{L}$ 是 A 的一个 κ 维非正不变子空间）；还有，Крейн 空间中任一自伴算子 A，如果 $\rho(A)\neq\emptyset$ 且 Hermite 半双线性型 $[Ax, y]$ $(x, y\in\mathscr{D}(A))$ 有有限个负平方，则是可定化的.

可定化算子 A 的非实谱 $\sigma_0(A)$ 由至多有限多个本征值组成，且 A 有一个**谱函数**（spectral function），带可能确定的临界点（[A13], [A2]）. 这就是说有一个（临界点的）有限集 $c(A)\subset\mathbf{R}\cup\{\infty\}$，使得由端点不在 $c(A)$ 的 $\mathbf{R}$ 中所有有界区间及其补集组成的半环 $\mathbf{R}_A$ 上，定义一个取值在 Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 中所有自伴投影的集合中的同态 E，对 $\Delta\in\mathbf{R}_A$ 满足：a) $E(\Delta)\mathscr{K}$ 是正（负）子空间，如果对 A 的某一定化多项式 p 在 $\bar{\Delta}\cap\sigma(A)$ 上 $p>0$（分别地，$p<0$)；b) $E(\Delta)$ 在 A 的**预解式**（resolvent）的二次交换子中；以及 c）如果 Δ 有界，则 $E(\Delta)\mathscr{K}\subset\mathscr{D}(A)$ 且 $\sigma(A|_{E(\Delta)\mathscr{K}})\subset\bar{\Delta}$, $\sigma(A|_{I-E(\Delta)\mathscr{K}})\subset\overline{(R\setminus\Delta)}\cup\sigma_0(A)$. 特别地，如果 A 有界且 $[Ax, x]\geqslant 0$ $(x\in\mathscr{K})$，则 $c(A)\subset\{0\}$，且对某一满足 $N=N^+, N^2=0, [Nx, x]\geqslant 0$ $(x\in\mathscr{K})$ 的有界算子 N，有

$$Ax=\int_{-\|A\|}^{\|A\|}\lambda E(d\lambda)x+Nx.$$

如果可定化算子 A 的谱是离散的，则它的代数本征空间的线性张（linear span）在 K 中是稠密的；如果 A 在一个 π_κ 空间 $\mathscr{K}$ 上是紧的和自伴的且 $0\in\sigma_p(A)$，则存在由 A 的本征向量和相伴向量组成的 $\mathscr{K}$ 的 **Riesz 基**（Riesz basis）（И. С. Лохвидов）.

在 π_κ 空间和 Крейн 空间中，有对称算子扩张成自伴算子的理论，也有广义预解式理论，这和 Hilbert 空间的情况是类似的. 对膨胀理论同样也对：Крейн 空间中任一有界线性算子 T 有一个在某 Крейн 空间 $\tilde{\mathscr{K}}\supset\mathscr{K}$ 中的酉膨胀 T([A2]). 在这方面有以下结果：设 $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ 是 Крейн 空间，$\mathscr{D}$ 是有光滑边界的单连通开区域，且 $0\in\mathscr{D}$, $\bar{\mathscr{D}}\subset\{z: |z|<1\}$，且设 Θ 是 $\mathscr{D}$ 内全纯函数，其值为从 $\mathscr{K}_1$ 到 $\mathscr{K}_2$ 的有界线性算子. 则存在一个 Крейн 空间 $\mathscr{K}$ 和一个酉算子

$$U=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}: \mathscr{K}\oplus\mathscr{K}_1\to\mathscr{K}\oplus\mathscr{K}_2,$$

使得

$$\Theta(z)=U_{22}+zU_{21}(I-zU_{11})^{-1}U_{12}\quad(z\in\mathscr{D})$$

（Т. Я. Азизов，见 [A2], [A6]；这里酉的是指 U 把 Крейн 空间 $\mathscr{K}\oplus\mathscr{K}_1$ 连续地映射到 Крейн 空间 $\mathscr{K}\oplus\mathscr{K}_2$ 上，且保持不定内积）.

关于 Крейн 空间，或更一般地关于不定内积空间的第一批文章中有些是由（量子）力学问题激发起来的（[A4], [A2]；亦见 [A18], [A17]）. Крейн 空间中的算子也由数学分析中的问题按自然的方式引起. 这些问题的例子有：1）考虑 $[0, \infty)$ 上的典范微分方程组 $J\dot{x}(t)=iH(t)x(t)$，这里 $H(t)$, J 是 $(n\times n)$ 矩阵，$H(t)\geqslant 0$, $J=J^*=J^{-1}$，且设 $U(t)$ 是相应的矩阵解（matrizant）（见 **Cauchy 算子**（Cauchy operator））：$J\dot{U}(t)=iH(t)U(t)$, $U(0)=I_n$. 则 $U(t)$ 是 J 酉的（即在 $\mathbf{C}^n$ 中关于由矩阵定义的内积是酉的，见（A3）），又例如周期方程 $(H(t)=H(T+t))$ 的稳定性理论中，$U(t)$ 的本征值分类成正或负型的起着本质的作用（[A5], [A8]）. 2）积分算子 $x(\cdot)\to\int_a^b K(\cdot, s)x(s)d\sigma(s)$，当 σ 是区域 $[a, b]$ 上实有界变差函数，$K(s, t)=\overline{K(t, s)}$ $(s, t\in[a, b])$ 时，是 Крейн 空间 $L_2(\sigma)$ 中自伴算子. 3）Крейн 空间的子空间的对偶对及它们扩张成极大对偶对的理论是与 Hilbert 空间中耗散算子扩张成极大耗散算子理论中某些问题相关的. Phillips 与耗散的双曲和抛物组的 Cauchy 问题相联系开展这些研究. 4）对首一算子多项式 $L(\lambda)=\lambda^nI+\lambda^{n-1}B_{n-1}+\cdots+\lambda B_1+B_0$, B_j 是某 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中有界自伴算子，能联系着一个所谓的友算子（companion operator）

$$A=\begin{bmatrix}-B_{n-1} & -B_{n-2} & \cdots & -B_1 & -B_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

在 Крейн 空间 $\mathscr{K}=\mathscr{H}^n$, $[x, y]=(Gx, y)$ $(x, y\in\mathscr{H}^n)$ 中，A 是自伴的，这里 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathscr{H}^n$ 中内积而

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & B_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & B_{n-1} & \cdots & B_1 \end{bmatrix}.$$

举例说，如果 $n=2$ 而 B_0 是紧的且 $\geqslant 0$，上面提到的关于极大非负不变子空间的存在性蕴涵存在 $\mathscr{H}$ 中有界线性算子 Z 满足 $Z^2+B_1Z+B_0=0$, $Z^*Z\leqslant B_0$ 且 $\operatorname{Im}\sigma(Z)\geqslant 0$([A12]). 按类似的方式，如果 $B\geqslant 0$, $C=C^*$ 且 A 是 $(n\times n)$ 矩阵，使得 $G=\begin{pmatrix} -C & A^* \\ A & B \end{pmatrix}$ 有 n 个正的和 n 个负的本征值，则带有条件 $(X^*-X)(A+BX)\geqslant 0$ 的矩阵 **Riccati 方程** (Riccati equation)

$$XBX+XA+A^*X-C=0$$

的诸解 X 是一一对应于 $2n$ 维 Крейн 空间 $\mathscr{K}=\mathbf{C}^{2n}$ 中自伴算子 $T=i\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$ 作用下不变的所有极大非负子空间，$\mathscr{K}$装备着不定内积 (A4) (见 [A8]). 5) 如果 L 是区间 $[a, b]$ 上形式对称正则常微分算子，带有在 a 和 b 点的对称边界条件，且 r 是 $[a, b]$ 上可和函数，且在 $[a, b]$ 上不取常符号 (a.e.)，则微分方程 $Ly-\lambda ry=rf$ 引出一个 Крейн 空间 $\mathscr{K}=L_{2,r}$ 中的自伴算子 A, $\mathscr{K}$ 带内积 $[f, g]=\int_a^b f\bar{g}r\,dx$. 如果 L 是下半有界，则算子 A 是可定化的. 6) Крейн 空间能与边界条件中包含本征值参数的微分算子的某些本征值问题相联系. 例如，考虑 $L_2=L_2[0, \infty)$ 中问题

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+qy-\lambda y=f,$$

又假定在 ∞ 有一极限点且在 $x=0$ 有边界条件 $\alpha(\lambda)y(0)+\beta(\lambda)y'(0)=0$ (α, β 是某个集合 $D_{\alpha\beta}\subset\mathbf{C}$ 上的全纯函数且满足对称条件). 这问题的解能表成 $y=P(A-\lambda I)^{-1}f$ $(f\in L_2)$, 这里，一般地，A 是某个 Крейн 空间 $\mathscr{K}=L_2\oplus\mathscr{K}_1$ 中自伴算子而 P 是从 $\mathscr{K}$ 到 L_2 上的正交投影 ([A17]). 7) 某些类解析函数是与 π_κ 空间中算子理论有关的. 例如，这涉及这样定义在上半平面 (或单位圆盘) 的亚纯函数 f, 其核

$$N_f(z, \rho)=\frac{f(z)-\overline{f(\rho)}}{z-\bar{\rho}}$$

(或

$$s_f(z, \rho)=\frac{1-f(z)\overline{f(\rho)}}{1-z\bar{\rho}}\ )$$

有 κ 负平方 (即对任意 n 和 $z_1, \cdots, z_n$, 矩阵 $(N_f(z_i, z_j))_1^n$ 有至多 κ 个负本征值，且至少对 n, $z_1, \cdots, z_n$ 的一种选取它有 κ 个负本征值). 相应的外推或矩问题，能用 π_κ 空间中对称或等距算子理论的结果来处理 (见 [A12], [A2]).

参考文献

[A1] Азизов, Т. Я., Иохвидов, И. С., Итоги наук и техники, Математический анализ, т. 17, М., 1979, 113 - 205.

[A2] Азизов, Т. Я., Иохвидов, И. С., Фундаменты теории линейных операторов в пространстве с неопределённым метрикой, М., 1986.

[A3] Ando, T., Linear operators in Kreǐn spaces, Hokkaido Univ., 1979.

[A4] Bognár, J., Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.

[A5] Daletskiǐ, Yu. L. and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974 (译自俄文).

[A6] Dijksma, A., Langer, H. and Snoo, H. S. V. de, Unitary colligations in Kreǐn spaces and their role in the extension theory of isometries and symmetric linear relations in Hilbert spaces, in S. Kurepa, et al. (ed.): Foundational analysis Ⅱ, Lecture notes in math. Vol. 1247, Springer, 1987, 1 - 42.

[A7] Dijksma, A., Langer, H. and Snoo, H. S. V. de, Symmetric Sturm-Liouville operators with eigenvalues depending boundary conditions, in Oscillation, Bifurcations and Chaos, CMS Conf. Proc., Vol. 8, Amer. Math. Soc., 1987, 87 - 116.

[A8] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., Matrices and indefinite scalar products, Birkhäuser, 1983.

[A9] Iohovidov, I. S. [I. S. Iokhvidov], Kreǐn, M. G. and Langer, H., Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric, Akad. Verlag, 1982.

[A10] Istratescu, V. I., Inner product spaces. Theory and applications, Reidel, 1987.

[A11] Kreǐn, M. G., Introduction to the geometry of indefinite J-spaces and the theory of operators in these spaces, in Second Math. Summer School, Vol. 1, Kiev, 1965, 15 - 92 (俄文).

[A12] Kreǐn, M. G. and Langer, H., Ueber einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume π_κ zusammenhängen, I: Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen, *Math. Nachr.*, 77 (1977), 187 - 236.

[A13] Langer, H., Spectral functions of definitizable operators in Kreǐn spaces, in D. Butković, et al. (ed.), Functional Analysis, Lecture notes in math., Vol. 948, Springer, 1982, 1 - 46.

[A14] Langer, H., Invariante Teilräume definisierbarer J-

selbstadjungierter Operatoren, *Ann. Acad. Sci. Fenn A*. 1, **475** (1971).

[A15] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

[A16] Phillips, R. S., The extensions of dual subspaces invariant under an algebra, in Proc. Internat. Symp. Linear Spaces Jerusalem, 1960, Pergamon, 1961, 366 - 398.

[A17] Bracci, L., Morchio, G. and Strocchi, F., Wigners theorem on symmetries in indefinite metric spaces, *Comm. Math. Phys.*, **41** (1975), 289 - 299.

[A18] Nagy, K. L., State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory, Noordhoff, 1966.

[A19] Наймарк, М. А., Исмагилов., Р. С., Итоги наук и техники. Математический анализ, 1969, 73 - 105.

[A20] Krein, M. G. and Langer, H., On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua, *Integral Equations, Operator Theory*, **1** (1978), 364 - 399, 539 - 566. (Proc. Internat. Smyp. Appl. Theory of Functions in Continum Mechanics, Tbilizi, **2** (1963), 283 - 322.

H. Langer 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

Kripke 模型 [Kripke models; Крипке модели]

由普通的古典逻辑的模型组成的一个集合；该集合被某一个关系定义了一个序．它的作用主要是为各种非经典逻辑（直觉主义逻辑，模态逻辑，等等）提供一个解释．准确地说：一个语言 L 的一个 Kripke 模型是一个结构

$$K=(S, R, D, W),$$

这里 S 是一个非空集合，其中的元素称为“世界”，“局势”；R 是 S 上的一个二元关系（例如，对**直觉主义逻辑**（intuitionistic logic）系统 J 而言，R 是一个偏序；对模态逻辑系统 $S4$（见**模态逻辑**（modal logic））而言，R 是一拟序，而对系统 $S5$，R 是一等价关系）；D 是一个映射，对任一 S 的元素 α，赋予一个域 D_α，使得若 $\alpha R\beta$，则 $D_\alpha \subseteq D_\beta$；$W$ 是一个赋值：对 L 的任一常项符号 a，赋予 $\bigcap_{\alpha\in S} D_\alpha$ 中的一个元素 $W(a)$；对 L 的每一个个体变元符号 x，赋予 $\bigcup_{\alpha\in S} D_\alpha$ 中的一个元素 $W(x)$；同时，对 S 中的每一个元素 α（被认为是“世界”，“局势”），W 对 L 的每一个命题变元符号 P，赋予一真假值 $W_\alpha(P)\in\{T, F\}$（对系统 J，还应要求：若 $\alpha R\beta$ 而且 $W_\alpha(P)=T$，则 $W_\beta(P)=T$）；对每一个 n 元谓词符号 P，赋予一个子集合 $W_\alpha(P)\subseteq(D_\alpha)^n$（对系统 J，若 $\alpha R\beta$、则 $W_\alpha P)\subseteq W_\beta(P)$）；对每一个 n 元函数符号 f，赋予一个由 $(D_\alpha)^n$ 到 D_α 的函数 $W_\alpha(f)$（对系统 J 而言，若 $\alpha R\beta$，则 $W_\alpha(f)$ 是 $W_\beta(f)$ 在 D_α 上的限制）．

对任一 $\alpha\in S$，任一 L 的公式 A，若 A 中的每一自由变元符号 x 都满足 $W(x)\in D_\alpha$ 的话，则 $W_\alpha(A)\in\{T, F\}$ 的真假值可归纳地定义出来．对系统 J 而言，$W_\alpha(A)$ 的定义如下：

a) 若 A 是一原子公式，$W_\alpha(A)$ 在该模型中早已定义；

b) $W_\alpha(B\& C)=T \rightleftharpoons (W_\alpha(B)=T$ 且 $W_\alpha(C)=T)$；

c) $W_\alpha(B\vee C)=T\rightleftharpoons(W_\alpha(B)=T$ 或 $W_\alpha(C)=T)$；

d) $W_\alpha(B\supset C)=T \rightleftharpoons$（对任一 $\beta\in S$，若 $\alpha R\beta$ 且 $W_\beta(B)=T$，则 $W_\beta(C)=T$）；

e) $W_\alpha(\neg B)=T \rightleftharpoons$（对任一 $\beta\in S$，若 $\alpha R\beta$，则 $W_\beta(B)=F$）；

f) $W_\alpha(\forall xB)=T \rightleftharpoons$（对任意 $W'={}_xW$ 且 $\beta\in S$，若 $\alpha R\beta$ 且 $W'(x)\in D_\beta$、则 $W'_\beta(B)=T$）；

g) $W_\alpha(\exists xB)=T \rightleftharpoons$（存在一个 $W'={}_xW$ 使 $W'(x)\in D_\alpha$ 且 $W'_\alpha(B)=T$）．

（这里 $W'={}_xW$ 是指除了变元符号 x 可能不一样以外，W' 与 W 的赋值处处相同）．$W_\alpha(A)=T$ 有时也可写作 $\alpha\vDash A$．

对于模态逻辑，$W_\alpha(A)$ 的定义仅在情形 d, e, g 有所不同：

d′) $W_\alpha(A)$ $(B\supset C)=T \rightleftharpoons (W_\alpha(B)=F$ 或 $W_\alpha(C)=T)$；

e′) $W_\alpha(\neg B)=T \rightleftharpoons (W_\alpha(B)=F)$；

g′) $W_\alpha(\forall xB)=T \rightleftharpoons$（对任一 $W'={}_xW$，若 $W'(x)\in D_\alpha$，则 $W'_\alpha(B)=T$）；

另外，再加上另一条归纳规则：

h) $W_\alpha(\Box B)=T \rightleftharpoons$（对任意 $\beta\in S$、或 $\alpha R\beta$，则 $W_\beta(B)=T$）．

一个公式 A 被认为在一个 Kripke 模型 $K=(S, R, D, W)$ 中为真（记为 $K\vDash A$，如果对所有的 $\alpha\in S$，$W_\alpha(A)=T$．对系统 J，$S4$，$S5$ 而言，完全性定理（completeness theorem）都成立：一个公式在该系统中是可导出的，当且仅当它在所有的相应的 Kripke 模型中都为真．如下事实十分重要：一般说来，域 D_α 是不同的，$\alpha\in S$．因为如下公式

$$\forall x(A\vee B(x))\supset A\vee\forall xB(x) \qquad (*)$$

（x 在 A 中不自由出现）不能由 J 推导出来，但它在所有的 D_α 是恒同的 Kripke 模型中为真．如果将 (*) 加到 J 中，得到的系统相对于带恒同的域 D_α 的 Kripke 模型而言是完全的（见 [3]）．系统 J、$S4$，$S5$ 中的命题演算部分都是有穷可估值的．即是说，任何无法从该系统推导出来的一个公式，一定在相应类中

某一个有穷 Kripke 模型中为假.

"Kripke 模型"的概念是由 S. A. Kripke 提出来的，它与力迫的概念有联系(见**力迫法**(forcing method)).

参考文献

[1A] Kripke, S. A., A completeness theorem in modal logic, *J. Symbolic Logic*, **24** (1959), 1 - 14.

[1B] Kripke, S. A., The undecidability of monadic modal quantification theory, *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, **8** (1962), 113 - 116.

[1C] Kripke, S. A., Semantical analysis of modal logic, Ⅰ, *Z. Math. Logik Grundl. Math.*, **9** (1963), 67 - 96.

[1D] Kripke, S. A., Semantical analysis of modal logic, Ⅱ, in J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski (eds): The theory of models, North-Holland, 1965, 206 - 220.

[2] Schütte, K., Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik, Springer, 1968.

[3] Görnemann, S., A logic stronger than intuitionism *J. Symbolic Logic*, **36** (1971), 249 - 261.

[4] Cohen, P. J., Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966.

С. К. Соболев 撰

【补注】 Kripke 模型是**拓扑斯**(topos)理论模型的一种特例. 具体地说，以上定义中的函数 D 可以被看作一个预层(pre-sheaf)(即是一个取集合为值的函子)，它的定义域是半序集 (S, R)；在 (S, R) 上的预层的拓扑斯的内部，函数 W 赋予此预层一个给定的语言 L 的结构，而上面给出的有效性的归纳定义，正是这个拓扑斯内部有效性的一个外部解释. 对于预层的拓扑斯里的模型来说——即是说，如果以一个任意的小范畴 $\mathscr{C}$ 来代替偏序 (S, R)——Kripke 语义仍是可靠的(亦见**可靠规则**(sound rule)). 要做到这点，只需在条款 d, e, f 中改变满足 $\alpha R \beta$ 的那些结点 β 上的量词域，将量词域改为定义在 $\mathscr{C}$ 上，域在 α 上的态射族. 然而，如果考虑鞘的拓扑斯中的模型(即，如果在范畴 $\mathscr{C}$ 上引入一个 Grothendieck 拓扑)，则条款 c) 及 g) 必须使用拓扑中的覆盖族，因而需作一定的修改. 例如，c) 将是:

c') $W_\alpha(B \vee C) \rightleftharpoons$ (存在一个域为 α 的态射组成的覆盖族，使每一族中的成员 f 都有 $W_{\mathrm{cod} f}(B) = \mathrm{T}$ 或者 $W_{\mathrm{cod} f}(C) = \mathrm{T}$.

这样产生的解释通常称为 Kripke-Joyal 语义(Kripke-Joyal semantics)(该概念由 A. Joyal 首先提出).

欲知更多的详细情况，参见[A1]或[A2].

参考文献

[A1] Goldblatt, R. I., Topoi: the categorical analysis of logic, North-Holland, 1979.

[A2] Bell, J. L., Toposes and local set theories, Oxford Univ. Press, 1988.

[A3] Dummett, M. A. E., Elements of intuitionism, Oxford Univ. Press, 1977.

[A4] Kripke, S., Semantical considerations on modal and intuitionistic logic, *Acta Philos. Fennica*, **16** (1963), 83 - 94.

[A5] Kripke, S. A., Semantical analysis of intuitionistic logic, Ⅰ, in J. N. Crossley and M. A. E. Dummett (eds): Formal systems and recursive functions, North-Holland, 1965, 92 - 130.

王 驹 译

Kronecker-Capelli 定理[Kronecker-Capelli theorem; Кронекера-Капелли теорема]，线性方程组相容性准则(compatibility criterion for a system of linear equations)

方程组

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s$$

是相容的，当且仅当其系数矩阵 $A = \| a_{ij} \|$ 的**秩**(rank)等于 A 添加自由项 b_i 的列后所得增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩.

Kronecker 关于这一定理的阐述出现于他 1883 - 1891 在柏林大学所授课程中(见[1]). 看来 A. Capelli 首次用"矩阵的秩"这一术语以条中所述形式陈述了本定理(见[2]).

参考文献

[1] Kronecker, L., Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Leipzig, 1903.

[2] Capelli, A., Sopra la compatibilitá o incompatibilitá di più equazioni di primo grado fra pici incognite, *Revista di Matematica*, **2** (1892), 54 - 58.

[3] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975(中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程. 人民教育出版社, 1962).

И. В. Проскуряков 撰 沈永欢 译

Kronecker 公式[Kronecker formula, Кронекера формула]

一函数在某方程组之根的集合上之值的代数和的公式；它是 L. Kronecker 建立的([1],[2]). 令 $F^t(x^1, \cdots, x^n)(t=0, \cdots, n)$，$f(x^1, \cdots, x^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值连续可微函数，而方程组

$$F^s(x^1, \cdots, x^n)=0, \quad s=1, \cdots, n, \tag{1}$$

有有限多个根. 设方程

$$F^0(x^1, \cdots, x^n)=0$$

定义一个不经过方程组(1)之根的闭曲面 P, 而在 P 所围的内域中 $F^0<0$. 若将函数 $F^s(s=1,\cdots,n)$ 看作 $\mathbf{R}^n$ 上的一个向量场的分量, 则其奇点(按定义)即方程组(1)的根. 令 x_α 为一根, 而 $\chi(x_\alpha)$ 是此**奇点的指标**(singular point, index of a). 于是有

$$\frac{1}{K^n}\sum_\alpha f(x_\alpha)\chi(x_\alpha)=\int\limits_{F^0<0}\frac{\Lambda}{R^n}dV-\int\limits_{F^0=0}\frac{fD}{QR^n}dS \quad (2)$$

(对所有的根求和), K^n 是单位球面 S^{n-1} 的面积,

$$R=\sqrt{\sum_{s=1}^n(F^s)^2}\ ,\quad Q=\sqrt{\sum_{i=1}^n(F_i^0)^2}\ ,$$

$$\Lambda=\begin{vmatrix}0 & f_1 & \cdots & f_n\\ F^1 & F_1^1 & \cdots & F_n^1\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ F^n & F_n^1 & \cdots & F_n^n\end{vmatrix},\qquad D=\begin{vmatrix}F^0 & F_1^0 & \cdots & F_n^0\\ F^1 & F_1^1 & \cdots & F_n^1\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ F^n & F_1^n & \cdots & F_n^n\end{vmatrix},$$

以上若 Φ 是任意函数, Φ_i 就表示偏导数 $\partial\Phi/\partial x^i$. 公式(2)就是 Kronecker 公式(Kronecker formula).

若 $f\equiv 1$, (2)中的空间积分消失, 即得到向量场 $\{F^s\}$ 在曲面 P 所围的内域中的奇点之指标 χ_F 之和的表达式, 即由曲面 P 到球面 S^{n-1} 内的一个映射之映射度的表达式, 此映射是将映射 $\widetilde{F}^s=F^s/R\,(s=1,\cdots,n)$ 限制到 P 上而得. 在某些附加的假设下, χ_F 等于函数组 $F^0,F^1,\cdots,F^n$ 的所谓 Kronecker 示性数(见[3]).

参考文献

[1A] Kronecker, L., Ueber Systeme von Funktionen mehrer Variablen. Erster Abhandlung, *Monatsberichte* (1869), 159 – 193.

[1B] Kronecker, L., Ueber Systeme von Funktionen mehrer Variablen. Zweite Abhandlung, *Monatsberichte* (1869), 688 – 698.

[2] Kronecker, L., Ueber Sturm'sche Funktionen, Monatsberichte (1878), 95 – 121.

[3] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962, 273 – 313.

[4A] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 7 (1881), 375–422.

[4B] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, **8** (1882), 251–296.

[4C] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, **1** (1885), 167–244.

[4D] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, **2** (1886), 151–217.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 函数组的 Kronecker 示性数(Kronecker characteristic of a system of functions)概念是**映射度**(degree of a mapping)概念的起源. 关于历史的说明, 见[A1].

参考文献

[A1] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976, Chapt. 5, Sect. 3.

齐民友 译

Kronecker 法[Kronecker method; Кронекера метод]

一种将有理系数多项式分解为有理数域中不可约因子的方法, 此法于1882年由 L. Kronecker 提出. 设 d 是多项式 $\varphi(x)$ 系数的一个公分母, 则 $f(x)=d\varphi(x)$ 是整系数多项式. 再则, 任一将 $\varphi(x)$ 分为有理系数的不可约因子的分解都引出将 $f(x)$ 分为整系数的不可约因子的分解, 这些因子与 $\varphi(x)$ 的相应因子只差一个常数因子. 反之亦是.

设 $f(x)$ 次数为 $n>0$, 又设 k 为 $\leqslant n/2$ 的最大自然数. 设 $f(x)=g(x)h(x)$ 为 $f(x)$ 的整系数因子分解, $g(x)$ 的次数小于等于 $h(x)$ 的次数, 于是 $g(x)$ 的次数至多为 k. 给 x 指定任意 $k+1$ 个不同的整数值 $x=c_i(i=1,\cdots,k+1)$, 我们得到等式:

$$f(c_i)=g(c_i)h(c_i),\ i=1,\ \cdots,\ k+1,$$

$g(c_i)$, $h(c_i)$ 皆为整数. $g(c_i)/f(c_i)$. 任选一个 $f(c_i)$ 的因子 d_i,

$$g(c_i)=d_i,\ i=1,\ \cdots,\ k+1.$$

多项式 $g(x)$ 可利用 **Lagrange 插值公式**(Lagrange interpolation formula)由这些等式得出. 或更简单, 由系数的方程得出. 然后检验如此得出的 $g(x)$ 是否除得尽 $f(x)$. 上述构造与检验须对所有可能选取的 $f(c_i)$ 的因子一一实施.

接下来同样的过程应用于 $g(x)$, $h(x)$, 如此等等, 直至得到不可约因子.

Kronecker 方法中有大量繁琐的演算. 我们可以通过去掉有理根、降低 $f(x)$ 的次数以简化计算(见[3]).

例. $f(x)=x^5-x^4-2x^3-8x^2+6x-1$, 这是一个整系数多项式, 没有有理根. 若 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $\deg g(x)=k\leqslant\deg h(x)$, 则 $2\leqslant k<5/2$, 即 $k=2$. 对于 $c_1=0$, $c_2=1$, $c_3=2$, 我们有 $f(0)=1$, $f(1)=-5$, $f(2)=-21$. 这些数的因子为 $d_1=\pm1$; $d_2=\pm1$, ±5; $d_3=\pm1,\pm3,\pm7,\pm21$. 一共有 $2\times4\times8=64$ 种组合. 由于两种组合 d_i 只差符号, 算出的多项式是 $\pm g(x)$, 故只须检验 $g(0)=+1$. 还有 32 种情形, 遍历所有这些情形, 发现仅有一个 2 次多项式整除 $f(x)$: $g(x)=x^2-3x+1$. 因此

$$f(x)=(x^2-3x+1)(x^3+2x^2+3x-1).$$

这两个因子都是不可约的(因为次数为 2 或 3, 又没有有理根).

参考文献

[1] Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraïschen Grossen, *J. Reine Angew. Math.*, **92** (1882), 1–122.

[2] Окунев, Л. Я., Высшая алгебра, М., 1937.

[3] Курош, А.Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (英译本: Kurosh, A. G., Higher algebra, Mir, 1972).
И. В. Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Waerden, B.L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (译自德文).
冯绪宁 译

Kronecker 积 [Kronecker product; Кронекерово произведение]，环、代数的

同**张量积** (tensor product).

Kronecker 符号 [Kronecker symbol; Кронекера символ]

由
$$\delta^i_j=\begin{cases}1,\ 如果\ i=j,\\0,\ 如果\ i\neq j,\end{cases}$$
$i,j=1,2,\cdots$ 定义的数 δ^i_j. 当 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 时，Kronecker 符号 δ^i_j 有 n^2 个分量，且矩阵 $\|\delta^i_j\|$ 恰为单位矩阵. Kronecker 符号首先由 L. Kronecker (1866) 采用.

可以推广 Kronecker 符号，代之考虑含有 $2p$ 个整数(上与下)指标的数量 $\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}$ 的集合，$i_\alpha, i_\beta=1,\cdots,n$，这些数量等于 $+1$ (或 -1)，如果序列 $(i_1,\cdots,i_p)$ 是不同指标列 $(j_1,\cdots,j_p)$ 的偶(奇)置换，否则等于零. 数量 $\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}$ (当 $p\geqslant 2$ 时，常记为 $\varepsilon^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}$)称为 Kronecker 符号的分量 (components of the Kronecker symbol). 关于某个基其分量等于 Kronecker 符号的分量的 (p,p) 型**仿射张量** (affine tensor) 关于任意另外的基有相同的分量.

在张量演算的各种问题里，应用 Kronecker 符号十分方便. 例如，行列式
$$\begin{vmatrix}a^1_1\cdots a^1_n\\a^2_1\cdots a^2_n\\ \\a^n_1\cdots a^n_n\end{vmatrix}$$
等于和
$$\sum_i\delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}a^1_{i_1}a^2_{i_2}\cdots a^n_{i_n},$$
其中，$\sum$ 对数列 $1,\cdots,n$ 的所有 $n!$ 置换求和. 张量 $\{a^{\alpha_1\cdots\alpha_p}:1\leqslant\alpha_j\leqslant n\}$ 的交错由下式给出:
$$a^{[\alpha_1\cdots\alpha_p]}=\frac{1}{p!}\sum_i\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{i_1\cdots i_p}a^{i_1\cdots i_p}.$$

参考文献

[1] Kronecker, L., Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Leipzig, 1903.
Л. П. Купцов 撰 陈公宁 译

Kronecker 定理 [Kronecker theorem; Кронекера теорема]

设给定 $a_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in\mathbf{R}^n(i=1,\cdots,m)$ 及 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$，则对任何 $\varepsilon>0$ 存在整数 $q_i(i=1,\cdots,m)$ 及 $p_j(j=1,\cdots,n)$，适合
$$\left|\sum_{i=1}^m q_ia_{ij}-p_j-b_j\right|<\varepsilon, 1\leqslant j\leqslant n,$$
当且仅当对任何适合
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}r_j\in\mathbf{Z}, i=1,\cdots,m$$
的数 $r_1,\cdots,r_n\in\mathbf{Z}$，数
$$\sum_{j=1}^n b_jr_j$$
也是整数. 这个定理是 L. Kronecker 在 1884 年首先证明的 (见 [1]).

Kronecker 定理是下列定理 ([2]) 的特殊情形，这个定理刻画了由元素 $a_i+\mathbf{Z}^n(i=1,\cdots,m)$ 生成的环面 $T^n=\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 的子群的闭包: 这个闭包正是所有这样的类 $b+\mathbf{Z}^n$ 的集合，即对于任何使
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}r_j\in\mathbf{Z}, i=1,\cdots,n$$
的数 $r_1,\cdots,r_n\in\mathbf{Z}$，我们也有
$$\sum_{j=1}^n b_jr_j\in\mathbf{Z}$$
(见 [2]). 在 Kronecker 定理的假设下，这个闭包就是 T^n. 这意味着所有形如
$$\sum_{i=1}^m q_i(a_i+\mathbf{Z})^n, 其中\ q_i\in\mathbf{Z}$$
的元素组成的子群在 T^n 中稠密，而矢量
$$\sum_{i=1}^m q_ia_i+p, 其中\ p\in\mathbf{Z}^n$$
组成的子群却在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密. Kronecker 定理可以从交换**拓扑群** (topological group) 的**对偶性** (duality) 理论推出来 (见 [3]).

在 $m=1$ 的情形下，Kronecker 定理成为下列命题: 若 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\mathbf{R}^n$，则当且仅当数 $1,\omega_1,\cdots,\omega_n$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上线性无关时，类 $\omega+\mathbf{Z}^n$ 生成 T^n (作为拓扑群). 特别地，环面 T^n 作为拓扑群是单一生成的 (monothetic)，亦即它由单个元素生成.

参考文献

[1] Kronecker, L., Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, in Werke, Vol. 3, Chelsea, reprint, 1968, 47-109.
[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).
[3] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 1957 (上册), 1958 (下册)).
А. Л. Онищик 撰

【补注】上文最后一段可以改述为: 若 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关，则集合 $B=\{(\{k\omega_1\},\cdots,\{k\omega_n\}):k\in\mathbf{Z}\}$ 在 $(0,1)$ 中稠密. 此处 $\{x\}=x-[x]$ 表示数 x 的

分数部分(fractional part of a number). 实际上，集合 B 甚至是**一致分布**(uniform distribution)的.

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxsford Univ. Press. 1979, Chapt. 23.

[A2] Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957.

朱尧辰 译

Krull-Remak-Schmidt 定理[Krull-Remak-Schmidt theorem; Крулля-Ремака-Шмидта теорема]

一系列关于群或环的直分解之间关系的命题. 该结果的格论叙述是熟知的 Oré定理(见**模格**(modular lattice)). 对于带有任一算子系统的群来说，有下述Schmidt定理(Schmidt theorem)(R.Remak 对有限群证明了此结果([2]). W.Krull 则对环证明了([1])): 若 G 容许一**主系列**(principal series), 则 G 表为不可分解因子的直接积的任意两个这种分解是中心同构的，即在这两种分解的因子中，存在着一一对应，且如 A 和 A' 是对应的因子，则存在着同构 $\varphi: A\to A'$, 使得对每一 $a\in A$, $a^{-1}\varphi(a)$ 在 G 的中心里([3]及[4]). Schmidt 定理是关于带算子的群的定理，特别地，它对环上的模也成立. 一模 M 不可分解，如果它的自同态环是**局部环**(local ring)且在某些限制下(例如，若 M 是有限长模)，其逆也是对的. 在这种联系下，关于模的 Krull-Remak-Schmidt 定理可叙述如下: 两个分解

$$M=\sum M_i=\sum M_j',$$

是同构的，其中模 M_i 和 M_j' 的自同态环是局部的. 更进一步，一个分解中的各项可用另一个分解的某一项来代替. 在某些情况下，对无限项集合也可以作这种代替. 为研究与 Krull-Remak-Schmidt 定理有关的问题，范畴论方法也有所发展. 在问题中使用模的直和的子模范畴.

参考文献

[1] Krull, W., Algebraische Theorie der Ringe II, *Math. Ann.*, **91**(1924), 1-46.

[2] Remak, R., Ueber die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, *J. Reine. Angew. Math.*, **139**(1911), 293-308.

[3] Schmidt, O. J., Ueber unendliche Gruppen mit endlicher kette, *Math. Z.*, **29**(1929), 34-41.

[4] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967(英译本: Kurosh, A. G., The theory of groups, 1-2, Chelsea, 1955-1956).

[5] Lambek, J., Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966.

[6] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1-2, Springer, 1973-1976.

[7] Итоги науки и техники, Алгебра, Топология, Геометрия, т. 14, М., 1976, 57-190.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 Krull-Remak-Schmidt 定理也称为 Krull-Schmidt 定理(Krull-Schmidt theorem).

可以说，Euclid 分解定理是讲每个自然数唯一分解为素数幂的乘积(除了因子排列次序外). 这与下面一个事实相符，亦即: 若 $\gcd(m,n)=1$, 则 $\mathbf{Z}/(mn)=\mathbf{Z}/(m)\oplus\mathbf{Z}/(n)$. Lasker-Noether 定理(Lasker-Noether theorem)将这推广为: 在有单位元的交换环中，每个理想都是有限个准素理想的无赘交(irredundant intersection of primary ideals). 这里准素理想之交 $\mathfrak{a}=\bigcap\mathfrak{a}_i$ 是无多余的，是指没有一个 $\mathfrak{a}_i$ 能包含其他理想之交且与每个 $\mathfrak{a}_i$ 相对应的素理想 $\mathfrak{p}_i$ 各不相同. $\mathfrak{p}_i$ 由 $\mathfrak{a}$ 唯一确定([A1])(亦见 **Lasker 环**(Lasker ring)).

关于分解理论(decomposition theories)的公理化叙述见[A2].

分解理论可以自然地放在 Abel范畴中考虑，即所谓局部余可约范畴(locally co-irreducible categories). 它与 Krull-Remak-Schmidt-Gabriel 分解及非交换 Noether 环的第三分解(tertiary decomposition)的关系的讨论见[A3].

参考文献

[A1] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, I, v. Nostrand, 1958. Chapt. Ⅳ, §4-5.

[A2] Riley, J. A., Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, 105, 1962, 177-201.

[A3] Popescu, N., Abelian catogories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973, Chapt. V.

冯绪宁 译

Krull环[Krull ring; Крулля кольцо]

一个交换**整环**(integral domain) A, 具有如下性质: 在 A 的分式域(见**分式环**(fractions, ring of)) K 中存在一族离散赋值 $(v_i)_{i\in I}$, 使得: a)对任意 $x\in K\setminus\{0\}$ 及一切 i, 除了有限个例外，都有 $v_i(x)=0$; b)对任意 $x\in K\setminus\{0\}(x\in A)$, 当且仅当对一切 $i\in I$, 有 $v_i(x)\geqslant 0$. 在这样条件下，v_i 称为本质赋值(essential valuation).

Krull 环首先是 W. Krull([1])研究的，他称之为有限离散主序环(rings of finite discrete principal order). 这是有除子理论的最自然的一类环(亦见**除子理想**(divisorial ideal); **除子类群**(divisor class group)). Krull 环除子的序群典范地同构于序群 $\mathbf{Z}^{(I)}$. Krull 环中基本赋值可等同于高度为 1 的素理想集合. Krull 环是完全整闭的. 任一整闭的 Noether 整环，特别地，**Dedekind 环**(Dedekind ring)是 Krull 环. 无限多个变元的多项式环 $k[X_1,\cdots,X_n,\cdots]$ 不是 Noether 环而是 Krull 环的一个例子. 一般地，任一**唯一分解环**(factorial ring)是 Krull 环，Krull 环是分解环，当且仅当每

个高度 1 的素理想是主理想.

Krull 环的局部化，其上的多项式环、形式幂级数环以及它在其商域 K 有限扩张中的整闭包都是 Krull 环.

参考文献

[1] Krull, W., Allgemeine Bewertungstheorie, *J. Reine Angew. Math.*, **167** (1931), 160-196.

[2] Zariski, O. and Samuel P., Commutative algebra, 2, Springer, 1975.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fossum, R., The divisor class group of a Krull domain, Springer, 1973.

冯绪宁 译

Крылов - Боголюбов 平均方法 [Krylov - Bogolyubov method of averaging; Крылова - Боголюбова метод усреднения]

非线性振动理论中研究振动过程的一种方法；它是基于一个平均原则，即运动的精确微分方程被平均方程所代替.

在 Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов 的工作以前很久，在天体力学中曾广泛应用各种平均格式 (Gauss, Fatou, Delone-Hill, 等等). 他们两个人发展了称为 Крылов-Боголюбов 平均方法的一般算法，并证明了平均方程组的解逼近准确方程组的解的定理(见[1],[2]). 方法的严格理论和对于一般平均原则的本质的详尽解释是由 Н. Н. Боголюбов 完成的 (见[3],[4])，他证明了平均方法是与一定的变量变换相关的，此变换使得我们可以将方程右端的时间 t 消去，准确到以小参数 ε 表达的给定精度；他还对方法的近似的渐近性质加以证明，并建立了无限时间区间中准确方程和平均方程解之间的关系. 这些结果后来为 Ю. А. Митропольский 及其他人进一步发展 (见[5]-[8])，并用于研究非线性振动.

Крылов-Боголюбов 平均方法被发展来研究的方程组有如下标准形式：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,x),\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

其中 t 为时间，而 ε 是正的小参数. 对于这一方程组所做的基本假设是，X 是 t, x 的一个光滑函数，而这一函数在某种意义上对 t 是"回归性的"，使得有平均值

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^t X(t,x)\,dt=X_0(x)$$

存在，即 X 对 t 为周期性的或几乎周期性的.

根据方法，方程组 (1) 的解的 m 级近似用下式决定：

$$x=\xi+\varepsilon F_1(t,\xi)+\cdots+\varepsilon^m F_m(t,\xi), \tag{2}$$

其中 $\xi=\xi(t)$ 是"平均"方程

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2 P_2(\xi)+\cdots+\varepsilon^m P_m(\xi)$$

的解. F_1, F_j, P_j $(j=2,\cdots,m)$ 是如此选定的函数，使得表达式 (2) 应满足方程 (1) 直至 ε^{m+1} 阶量，并且函数 F_j 应满足与方程 (1) 的右端项同样的回归性. F_j 函数的确定很简单；P_j 函数通过将 x 已为 (2) 所代替了的方程 (1) 的右端项求平均而得到. 特别地，如果 X 是 t 的周期函数，

$$X(t,x)=X(t+2\pi,x)=\sum_{-\infty<k<\infty}X_k(x)e^{ikt}, \tag{3}$$

函数 F_1 从 (3) 得到

$$F(t,\xi)=\sum_{k\neq0}\frac{X_k(\xi)}{ik}e^{ikt},$$

而函数 F_m, $P_m(m\geqslant2)$ 通过相似的关系式决定，利用

$$X(t,\xi+\varepsilon F_1(t,\xi)+\cdots+\varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t,\xi))=$$

$$=X(t,\xi)+\varepsilon\frac{\partial X(t,\xi)}{\partial x}F_1(t,\xi)+\cdots+$$

$$+\varepsilon^{m-1}\frac{\partial X(t,\xi)}{\partial x}F_{m-1}(t,\xi).$$

平均方法的正确性的证明归纳如下. 1) 建立估值

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant\eta(\varepsilon),\ t\in\left[0,\ \frac{L}{\varepsilon}\right],$$

其中当 $\varepsilon\to0$ 时 $\eta(\varepsilon)\to0$，L 是与 ε 无关的常数，$x(0)=\xi(0)$；2) 证明有方程组 (1) 的解 $x=x_0(t)$ 存在，此解位于平均方程组的平衡位置 $\xi=\xi_0$，$X_0(\xi_0)=0$ 的足够小的邻域内

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|x(t)-\xi_0\|\leqslant\eta(\varepsilon),$$

并证明此解的稳定性，周期性或几乎周期性；3) 证明在平均方程组的周期轨道 $\xi=\xi_0(\varphi)$，$\varphi=\varepsilon\nu$，$\nu=$ 常数附近，存在着方程组 (1) 的积分簇 τ：

$$x=f(t,\varphi,\varepsilon),\ f(t,\varphi+2\pi,\varepsilon)=f(t,\varphi,\varepsilon),$$

$$\sup_{t,\varphi\in(-\infty,\infty)}\|f(t,\varphi,\varepsilon)-\xi_0(\varphi)\|\leqslant\eta(\varepsilon).$$

并研究 (1) 的在簇 τ 附近的解的行为.

参考文献

[1] Крылов, Н. М., Боголюбов, Н. Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, К., 1934.

[2] Клылов, Н. М., Боголюбов, Н. Н., Введение в нелинейную механику, К., 1937.

[3] Боголюбов, Н. Н., О некоторых статических методах в математической физике, К., 1945.

[4] Боголюбов, Н. Н., «Сб. трудов Ин-та строительной механики АН УССР», 1950, No. 14, 9 – 34.
[5] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963 (英译本: Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skiĭ, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon & Breach, 1961).
[6] Митропольский, Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971.
[7] Митропольский, Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, К., 1955.
[8] Волосов, В. М., в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, 115 – 135.

А. М. Самойленко 撰

【补注】 对于如下形式的方程

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon X(x, t, \varepsilon) \qquad (A1)$$

(代替方程 (1)) 的 Крылов - Боголюбов 方法的推广, 可以参见[A1].

参考文献

[A1] Hale, J. K., Oscillations in nonlinear systems, McGraw-Hill, 1963.
[A2] Nayfeh, A., Perturbation methods, Wiley, 1973, Sect. 5.2, 5.4.
[A3] Volosov, V. M., Averaging in systems of ordinary differential equations, Russian Math. Surveys, 7 (1962), 1 – 26.
[A4] Mitropolsky, Yu. A., Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations, D. Davey, 1965 (译自俄文).

沈 青 译

Kummer 准则 [Kummer criterion; Куммера признак]

正项级数的一般收敛准则, 由 E. Kummer 提出. 给定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (*)$$

和任意正数序列 $c_1, \cdots, c_n, \cdots$, 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/c_n$ 是发散的. 如果存在 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$K_n \equiv c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta,$$

其中 δ 是一个正的常数, 则级数 (*) 是收敛的. 如果当 $n > N$ 时 $K_n \leqslant 0$, 则级数 (*) 是发散的.

通过极限, Kummer 准则可以叙述如下:

设

$$\lim_{n \to \infty} K_n = K;$$

则当 $K > 0$ 时级数 (*) 收敛, 当 $K < 0$ 时级数 (*) 发散.

参考文献

[1] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1970 (中译本: Г. М. 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程, 高等教育出版社, 1955).

Е. Г. Соболевская 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rainville, E. D., Infinite series, Macmillan, 1967.

张鸿林 译

Kummer 扩张 [Kummer extension; Куммерар асширение]

特征 $p \geqslant 0$ 的域 k 的扩张 (见**域的扩张** (extension of a field)) 形式如下:

$$K = k(\alpha_1^{1/n}, \cdots, \alpha_t^{1/n}), \qquad (1)$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in k$, n 是一个自然数, 并且假定 k 包含一个本原 n 次单位根 ζ_n (特别地, 如果 $p \neq 0$, 则 n 与 p 互素). Kummer 扩张是以 E. Kummer 命名的, 他第一个研究了形如 $\mathbf{Q}(\zeta_n \alpha^{1/n})$ 的扩张, 这里 $\mathbf{Q}$ 是有理数域, $\alpha \in \mathbf{Q}$.

Kummer 扩张理论的主要结果: 如果域 k 包含一个本原根 ζ_n, 那么一个有限扩张 K/k 是 Kummer 扩张 (对于给定的 n), 当且仅当 K/k 是一个正规 Abel 扩张, 且 Galois 群 $G(K/k)$ 被 n 零化. 一个域 k 的任一 Kummer 扩张被其 Kummer 群 (Kummer group) $A(K/k) = B/k^*$ 完全决定, 其中 k^* 是 k 的乘法群, 且

$$B = \{x \in K^*: x^n \in k^*\}.$$

存在一个非退化的 Kummer 配对 (Kummer pairing), 即一个映射

$$G(K/k) \times A(K/k) \to \mu(n),$$

其中 $\mu(n)$ 是 k^* 中由 ζ_n 生成的子群. 若 $\sigma \in G(K/k)$, $a \in A(K/k)$, Kummer 配对定义为 $(\sigma, a) = (\alpha^{1/n})^{\sigma-1} \in \mu(n)$, 其中 $\alpha \in k$, 且 $\alpha^{1/n} \in B$ 是元素 a 的某个代表元, Kummer 配对定义了一个典范同构:

$$G(K/k) \overset{\varphi}{\simeq} \mathrm{Hom}(A(K/k), \mu(n)). \qquad (2)$$

换言之, 任意自同构 $\sigma \in G(K/k)$ 被其在 (1) 中的根 $\alpha_i^{1/n}$ 上的作用决定, 并且只要这些根 $\alpha_i^{1/n}$ 是独立的, 这个作用可以是任意的. 特别地, 如果 $G(K/k)$ 是循环群, 则 $K = k(\alpha^{1/n})$, 其中 $\alpha \in k^*$.

设 k 是域 k_0 的一个**正规扩张** (normal extension), 且 $K \supset k$ 是一个 Kummer 扩张, 则当且仅当 $A(K/k)$ 被 $G(k/k_0)$ 映到自身时, K 在 k_0 上正规. 这时, 同构 (2) 是一个 $G(k/k_0)$ 同构, 亦即如果 $\tau \in G(k/k_0)$, $\sigma \in G(K/k)$, 且

$$\varphi(\sigma)=\chi: A(K/k) \to \mu(n),$$

则 $\varphi(\sigma^{\tau})=\tau\chi$，其中 $(\tau\chi)(a)=\tau(\chi(\tau^{-1}a))$.（群 $G(k/k_0)$ 以 $G(K/k_0)$ 中的共轭作用在 $G(K/k_0)$ 上.）利用上述结论，许多关于域 k 的指数为 n 的 Abel 扩张的问题都能归结于 Kummer 扩张理论，即使 $\zeta_n \notin k$. 确切地说，如果 K/k 是这样一个扩张，则 $K(\zeta_n)/k(\zeta_n)$ 是一个 Kummer 扩张，并且其 Kummer 群由下述条件刻画：若 $\tau \in G(k(\zeta_n)/k)$ 及 $a \in A(K(\zeta_n)/k(\zeta_n))$，则 $\tau(a)=a^i$，其中 i 是一个自然数，且 $i \bmod n$ 由条件 $\tau(\zeta_n)=\zeta_n^i$ 所决定.

Kummer 扩张的主要结果也可以看成循环扩张的 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem）的推论. 根据该定理，一维 **Galois 上同调**（Galois cohomology）群 $H^1(G(K/k), K^*)$ 是平凡的.

Kummer 扩张理论可推广到指数 n 的无限 Abel 扩张的情形. 这时，Kummer 偶对在投射有限群 $G(K/k)$（具有 Krull 拓扑）和离散群 $A(K/k)$ 之间建立了一个 **Понтрягин 对偶性**（Pontryagin duality）（见[1],[2]）.

扩张（1）在 $n=p$ 的情形下，Kummer 扩张理论即所谓 Kummer 理论（Kummer theory）有一个类似的理论（Artin-Schreier 理论（Artin-Schreier theory））. 这时，群 $\mu(n)$ 由 k 的素子域 F_p 的加法群代替. 这个理论的主要结果：一个域 k 的指数 p 的任意 Abel 扩张 K 都具有形式 $k(\beta_1, \cdots, \beta_t)$，其中 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是形如 $x^p - x = a$ 的方程的根（见[1]）. E. Witt 利用 **Witt 向量**（Witt vector）把这个理论推广到 $n=p^s$ $(s>1)$ 的情形.

最后，也有建立非 Abel"Kummer 理论"的尝试（[3]），这时域的乘法群由矩阵群 $GL(n,k)$ 代替.

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[2] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1968.

[3] Takahashi, S., Generation of Galois extensions by matrix roots, *J. Math. Soc. Japan*, **20** (1968), 1–2, 365–370.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 当然，Kummer 扩张理论适合**类域论**（class field theory）的一般框架.

参考文献

[A1] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986, Chapt. 4, §4.

裴定一 译 赵春来 校

Kummer 假设 [Kummer hypothesis; Куммера гипотеза]

一个与三次 **Gauss 和**（Gauss sum）

$$\tau(\chi)=\sum_{n=0}^{p-1}\chi(n,p)\, e^{\pi i n/p}$$

的性态有关的假设，此处 $\chi(n,p)=\exp(2\pi i \operatorname{ind} n/3)$ 是模 $p \equiv 1 \pmod 3$ 的三次特征标，而 p 是素数. 已知

$$\tau(\chi)=\sqrt{p}\ e^{i \arg\tau(\chi)},$$

因此 $\arg\tau(\chi)$ 处于六等分圆周所得到的第一，第三或者第五部分. 据此，E. Kummer 把全部素数 $p \equiv 1 \pmod 3$ 分成三类，P_1, P_3 和 P_5. Kummer 假设是 P_1, P_5 和 P_3 中的每一类含有无穷多个素数，而它们各自的渐近密度分别是 1/2, 1/3 和 1/6. 对于次数高于 3 的特征标有 Kummer 假设的各种推广. 假设的一种修改形式已经被证明（见[3]）.

参考文献

[1] Hasse, H., Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950.

[2] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

[3] Heath-Brown, D. R. and Patterson, S. I., The distribution of Kummer sums at prime arguments, *J. Reine Angew. Math.*, **310** (1979), 111 – 130.

Б. М. Бредихин 撰 戚鸣皋 译 朱尧辰 校

Kummer 曲面 [Kummer surface; Куммера поверхность]

次数和类数都等于 4 的自反的代数曲面，它有 16 个二重点，其中 16 个群（每个含 6 个点）位于曲面的一个二重切面上（即与曲面沿着一条圆锥截线相切的平面）. 定义这个二重元的 16 次方程可化为一个单独的 6 次方程以及 n 个二次方程. 为 E. Kummer (1864) 所发现. Kummer 曲面是一种特殊的 **$K3$ 曲面**（$K3$-surface）. 在 $K3$ 曲面的类中，它通过下述条件被确定：它含有 16 条不可约有理曲线.

参考文献

[1] Klein, F., Development of mathematics in the 19th century, Math. Sci. Press, 1979.

[2] Hudson, R. W. H. T., Kummer's quartic surface, Cambridge, 1905.

[3] Enriques, F., Le superficie algebraiche, Bologna, 1949.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 P^3 中 4 次曲面至多有 16 个二重点（正如 Kummer 曲面）.

从现代的观点看，Kummer 曲面可如下得到：取一个 2 环面 T, T 上取由 $\sigma(x)=-x$ 所定义的对合 σ，再取 T 关于这个对合的商，最后再解消所得曲面的 16 个二重点.

参考文献

[A1] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

陈志杰 译

Kummer 定理 [Kummer theorem; Куммера теорема]

设 k 为 **Dedekind 环**（Dedekind ring）A 的分式域，

K为 k 的 n 次扩张(见**域的扩张**(extension of a field)). B 为 A 在 K 中的整闭包, $\mathfrak{p}$ 为 A 的一个素理想; 设 $K=k[\theta]$, 其中 $\theta\in B$ 且 $1,\theta,\theta^2,\cdots,\theta^{n-1}$ 组成 A 模 B 的基; 最后, 设 $f(x)$ 为 θ 的不可约多项式, $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在环 $A/\mathfrak{p}[x]$ 中的象且 $f^*(x)=f_1^*(x)^{l_1}\cdots f_r^*(x)^{l_r}$是 $f^*(x)$ 在 $A/\mathfrak{p}[x]$ 中的不可约因子分解, 则理想 $\mathfrak{p}B$ 在 B 中的素理想因子分解为

$$\mathfrak{p}B=\mathfrak{p}_1^{l_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{l_r},$$

而且多项式 $f_i^*(x)$ 的次数等于剩余类域扩张的次数 $[B/\mathfrak{p}_i:A/\mathfrak{p}]$.

Kummer 定理使得有可能利用扩域中适当的本原元的不可约多项式在剩余类域中的因子分解, 来决定一个素理想在基域的扩域中的因子分解.

E.E.Kummer([1]) 首先在一些特殊情况下证明了本定理, 他利用它确定了分圆域及分圆域的某些循环扩张中的因子分解定律(见**分圆域**(cyclotomic field)).

参考文献

[1] Kummer, E.E., Zur Theorie der complexen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **35**(1847), 319 – 326.

[2] Cassels, J.W.S. and Fröhlich, A.(eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986. Л.В.Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963, Sects. 4 – 9. 裴定一 译 赵春来 校

Kummer 变换 [Kummer transformation; Куммера преобразование]

数项级数的一种变换, 可以改进其收敛性, 是E. Kummer 提出的. 设两个级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A,\ \text{而}\ \sum_{k=1}^{\infty}b_k=B$$

是收敛的, 并且设极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\gamma\neq 0$$

存在. 这时, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\gamma B+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\gamma\frac{b_k}{a_k}\right]a_k.$$

如果和 B 是已知的, 则 Kummer 变换在计算中可能是有用的, 因为右端的级数比左端的级数收敛得快.

参考文献

[1] Фихтенгольц, Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1970 (中译本: Г.М. 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程, 高等教育出版社, 1955). В.В.Сенатов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K., Infinite sequences and series, Dover, reprint, 1956. 张鸿林 译

Künneth 公式 [Künneth formula; Кюннета формула]

将复形的张量积, 或空间的直积的(上)同调用诸因子的(上)同调表示的一个公式.

设 Λ 是有单位的结合环(见**结合环与代数**(associative rings and algebras)), 又设 A 和 C 分别为右和左的 Λ 模. 设 $A\otimes C$ 是 A 和 C 在 Λ 上的**张量积**(tensor product). 如果

$$\mathrm{Tor}_1(B(A),B(C))=\mathrm{Tor}_1(H_\bullet(A),B(C))=$$
$$=\mathrm{Tor}_1(B(A),Z(C))=\mathrm{Tor}_1(H_\bullet(A),Z(C))=0,$$

那么有以下的分次模的正合列

$$0\to H_\bullet(A)\otimes H_\bullet(C)\xrightarrow{\alpha}H_\bullet(A\otimes C)\xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta}\mathrm{Tor}_1(H_\bullet(A),H_\bullet(C))\to 0,\qquad (1)$$

其中 α 和 β 分别为 0 次和 (-1) 次的同态(见[2]). 对于上链复形, 有一个同态 β 为 1 次的类似正合列. 如果 $H_\bullet(\mathrm{Tor}_1(A,C))=0$ (例如, A 或 C 为平坦 Λ 模), 又 Λ 为遗传的, 序列(1)存在且分裂([2],[3]), 于是

$$H_n(A\otimes C)=\sum_{p+q=n}H_p(A)\otimes H_q(C)+$$
$$+\sum_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1(H_p(A),H_q(C)).$$

这就是 Künneth 公式. 术语 Künneth 公式(或 Künneth 关系(Künneth relation))有时也用于指正合列(1). 序列(1)可推广, 这时代替张量积的是任意一个二元函子 $T(A,C)$, 它是 Λ 模范畴到自身的一个对 A 协变、对 C 反变的函子. 特别, 函子 $T(A,C)=\mathrm{Hom}(A,C)$ 导出一个公式, 这个公式将右链复形 A 和左链复形 C 所决定的上同调 $H^*(\mathrm{Hom}(A,C))$ 用 $H_\bullet(A)$ 和 $H^*(C)$ 表出. 其实, 若 Λ 为遗传的, 又 $H^*(\mathrm{Ext}^1(A,C))=0$(例如 A 自由), 那么有分裂的正合序列

$$0\to\mathrm{Ext}^1(H_\bullet(A),H^*(C))\xrightarrow{\beta'}H^*(\mathrm{Hom}(A,$$
$$C))\xrightarrow{\alpha'}\mathrm{Hom}(H_\bullet(A),H^*(C))\to 0,$$

这里 α' 和 β' 分别为次数 0 和 1 的同态(见[2],[3]).

设 X,Y 为拓扑空间, 又设 L,M 为主理想环 R 上的模, 使 $\mathrm{Tor}_1(L,M)=0$. 那么空间 $X,Y,X\times Y$ 的奇异同调间有以下的分裂正合序列存在:

$$0\to H_*(X,L)\otimes H_*(Y,M)\xrightarrow{\alpha}H_*(X\times Y,$$

$L\otimes M)\xrightarrow{\beta}\mathrm{Tor}_1(H_*(X,L),H_*(Y,M))\to 0,$

这里 α 和 β 分别为次数 0 和 (-1) 的同态．如果还假定 $H_k(X,R)$ 和 $H_k(Y,R)$ 全是有限生成的，或者 $H_k(Y,R)$ 全体和 M 是有限生成的，那么对于奇异上同调，类似的正合序列成立：

$$0\to H^*(X,L)\otimes H^*(Y,M)\xrightarrow{\alpha}H^*(X\times Y,$$
$$L\otimes M)\xrightarrow{\beta}\mathrm{Tor}_1(H^*(X,L),H^*(Y,M))\to 0,$$

这里 α 和 β 分别是次数 0 和 1 的同态．例如，若 R 是一个域，则

$$H_*(X\times Y,R)\cong H_*(X,R)\otimes H_*(Y,R),$$

且若所有的 $H_k(X,R)$，或所有的 $H_k(Y,R)$ 是有限维的也真，则

$$H^*(X\times Y,R)\cong H^*(X,R)\otimes H^*(Y,R).$$

对于相对同调和上同调，也有类似的公式成立（[3]，[4]）．

当 $L=M=R$ 时，模 $H^*(X,R)\otimes H^*(Y,R)$ 具有代数（这时 α 为代数的同态）的斜张量积结构（见**斜积**（skew product））．因此，如果 $\mathrm{Tor}_1(H^*(X,R),H^*(Y,R))=0$，又 $H_k(X,R)$ 全体，或 $H_k(Y,R)$ 全体是有限生成的，则有代数间的同构（[3]）

$$H^*(X\times Y,R)\cong H^*(X,R)\otimes H^*(Y,R).$$

如果 X 和 Y 均为有限多面体，那么 Künneth 公式提供了用 X 和 Y 的 Betti 数和挠系数来计算多面体 $X\times Y$ 的 Betti 数和挠系数的一个方法．实际上，Künneth 本人的最初结果就是这样说的（[1]）．特别，若 $b_k(X)$ 表示多面体 X 的第 k 个 Betti 数，而

$$p(X)=\sum_{k\geq 0}b_k(X)t^k$$

为它的 Poincaré 多项式（Poincaré polynomial），那么 $p(X\times Y)=p(X)p(Y)$．

对于系数取自层的上同调理论，也有 Künneth 公式的一种类似公式．设 X 和 Y 是有可数基的拓扑空间，又设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是 X 和 Y 上的 Fréchet 层（见**凝聚解析层**（coherent analytic sheaf））．设 $\mathscr{F}$（或 $\mathscr{G}$）为核层（nuclear sheaf）（即对所有的开集 $U\subset X$，$\mathscr{F}(U)$ 为核空间）．那么在 $X\times Y$ 上可定义 Fréchet 层 $\mathscr{F}\widetilde{\otimes}\mathscr{G}$ 使

$$(\mathscr{F}\widetilde{\otimes}\mathscr{G})\ (U\times V)=\mathscr{F}(U)\widetilde{\otimes}\mathscr{G}(V),$$

这里 $\widetilde{\otimes}$ 是完全张量积，而 $U\subset X$，$V\subset Y$ 均为开集．如果空间 $H^*(X,\mathscr{F})$ 和 $H^*(Y,\mathscr{G})$ 均为可分的，那么有 Künneth 公式

$$H^*(X\times Y,\mathscr{F}\widetilde{\otimes}\mathscr{G})\cong H^*(X,\mathscr{F})\widetilde{\otimes}H^*(Y,\mathscr{G}).$$

特别，具可数基的复解析空间 X，Y 上的凝聚解析层 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$ 是核层，并且

$$\mathscr{F}\widetilde{\otimes}\mathscr{G}\cong\mathscr{F}^*\underset{\mathscr{O}_{X\times Y}}{\otimes}\mathscr{G}^*,$$

这里 $\mathscr{F}^*$，$\mathscr{G}^*$ 是 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 在投射 $X\times Y\to X$ 和 $X\times Y\to Y$ 下的解析逆象．因此，若 $H^*(X,\mathscr{F})$ 和 $H^*(Y,\mathscr{G})$ 是可分的，那么

$$H^*[X\times Y,\mathscr{F}^*\underset{\mathscr{O}_{X\times Y}}{\otimes}\mathscr{G}^*]\cong H^*(X,\mathscr{F})\widetilde{\otimes}H^*(Y,\mathscr{G}).$$

在代数几何里面，通常有以下形式的 Künneth 公式．设 X 和 Y 是域 k 上的代数簇．又设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 分别是 X 和 Y 上的**凝聚代数层**（coherent algebraic sheaf），那么（[9]）

$$H^*[X\times Y,\mathscr{F}\underset{k}{\otimes}\mathscr{G}]\cong H^*(X,\mathscr{F})\underset{k}{\otimes}H^*(Y,\mathscr{G}).$$

这里 $\mathscr{F}\underset{k}{\otimes}\mathscr{G}$ 是 $X\times Y$ 上的层，它在 $U\times V$（U 为 X 的开仿射子集，V 为 Y 的开仿射子集）上的截面模为

$$\Gamma(U,\mathscr{F})\underset{k}{\otimes}\Gamma(V,\mathscr{G}).$$

更广些，设 $p:X\to S$ 和 $q:Y\to S$ 为概形范畴里的**态射**（morphism），而 $h:X\times_S Y\to S$ 为它们的纤维积，又设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是 X 和 Y 上的模的**拟凝聚层**（quasi-coherent sheaf）．将层 $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$ 的作法予以推广，可以引进 $X\times Y$ 上的模 $\mathrm{Tor}_m^S(\mathscr{F},\mathscr{G})$ 层，对于仿射的 S，X 和 Y，它的截面模与 $\mathrm{Tor}_m^A(\Gamma(X,\mathscr{F}),\Gamma(Y,\mathscr{G}))$ 同构，这里 $A=\Gamma(S,\mathscr{O}_S)$．于是（[7]）存在着两个谱序列 (E') 和 (E'')，它们的初始项为

$$E_{n,m}^2=R^{-n}h_*(\mathrm{Tor}_m^S(\mathscr{F},\mathscr{G}))$$

和

$$E_{n,m}'^2=\bigoplus_{m_1+m_2=m}\mathrm{Tor}_n^S(R^{-m_1}p_*\mathscr{F},R^{-m_2}q_*\mathscr{G}).$$

但极限一样．利用导出函子，这个不好用的 Künneth 公式具有更熟悉的形式（[11]）：

$$Rp_*(\mathscr{F})\overset{L}{\underset{\mathscr{O}_S}{\otimes}}Rq_*(\mathscr{G})=Rh_*[\mathscr{F}\overset{L}{\underset{\mathscr{O}_S}{\otimes}}\mathscr{G}].$$

如果在 S 上的层 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是平坦的，那么谱序列 (E') 是蜕化的．类似地，若在 S 上，所有的 $R^kp_*(\mathscr{F})$（或所有的 $R^kq_*(\mathscr{G})$）全为平坦的，则 (E'') 蜕化．如果两个谱序列 (E') 和 (E'') 都是蜕化的，Künneth 公式变成

$$R^*h_*[\mathscr{F}\underset{\mathscr{O}_S}{\otimes}\mathscr{G}]\cong R^*p_*(\mathscr{F})\underset{\mathscr{O}_S}{\otimes}R^*q_*(\mathscr{G}).$$

对于概形 X 和 Y 上的 A 模艾达尔层，也有一个 Künneth 公式，这里 A 为有限环．它可以写成

$$Rp_!(\mathscr{F})\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}Rq_!(\mathscr{G}) = Rh_![\mathscr{F}\overset{L}{\underset{A}{\otimes}}\mathscr{G}],$$

这里!表示取紧支上同调. 特别(见[8]), 若 X 和 Y 是完全的代数簇, 那么 l 进上同调的 Künneth 公式为

$$H^*(X\times Y, \mathbf{Q}_l) = H^*(X, \mathbf{Q}_l)\underset{\mathbf{Q}_l}{\otimes}H^*(X, \mathbf{Q}_l).$$

这个公式对任意簇均成立, 条件是奇点可消解, 例如, 特征 0 的域上的簇.

在 K **理论**(K-theory)中, 也成立一个 Künneth 公式. 设 X 是这样一个空间, 它使群 $K^*(X)$ 为有限生成的, 又设 Y 为胞腔式空间. 那么存在着一个 $\mathbf{Z}_2$ 分次模的正合列

$$0\to K^*(X)\otimes K^*(Y)\xrightarrow{\alpha}K^*(X\times Y)\xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta}\mathrm{Tor}_1(K^*(X), K^*(Y))\to 0,$$

这里 α 和 β 分别是次数为 0 和 1 的同态(见[5]). 这个结论的一个特殊情形是复向量丛的 **Bott 周期定理**(Bott periodicity theorem). 在配边理论中也有一个 Künneth 公式.

参考文献

[1A] Künneth, H., Ueber die Bettische Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit, *Math. Ann.*, **90** (1923), 65 – 85.

[1B] Künneth, H., Ueber die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeit, *Math. Ann.*, **91** (1924), 125 – 134.

[2] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

[4] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[5] Atiyah, M. F., *K*-theory: Lectures, Benjamin, 1967.

[6] Kaup, L., Eine Künnethformel für Fréchetgarben, *Math. Z.*, **97** (1967), 2, 158 – 168.

[7] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **17** (1963), Chapt. 3, Part 2.

[8] Artin, M., et al. (eds.), Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, 3, Springer, 1973.

[9] Sampson, J. and Washnitzer, G., A Künneth formula for coherent algebraic sheaves, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 3, 389 – 402.

[10] Conner, P. E. and Floyd, E. E., Differentiable periodic maps, Springer, 1964.

[11] Hartshorne, R., Residues and duality, Springer, 1966.

В. И. Данилов, А. Л. Онищик 撰

【补注】 更一般地, 当 X 和 Y 是正文中最后一节所提到的那种空间时, 广义上同调论中有一个 $h^*(X\times Y)$ 的谱序列形式的 Künneth 公式(例如, 等变 K 理论的情形见[A1]).

参考文献

[A1] Hodgkin, L., The equivariant Künneth theorem in *K*-theory, Lecture notes in math., 496, Springer, 1975.

沈信耀 译 黄华乐 校

Kuratowski 图[Kuratowski graph; Куратовского полиэдр]

三维空间中的一种一维图形. 第一型的 Kuratowski 图由四面体的边以及一连接其不相交两边的中点的线段组成. 第二型的 Kuratowski 图是一个由四面体的顶点和它的一个内点所生成的完全图. 一个图 G 是**可平面图**(graph, planar), 当且仅当它不包含第一型或第二型的 Kuratowski 图(Kuratowski-Понтрягин 定理(Kuratowski-Pontryagin theorem)).

参考文献

[1] Kuratowski, C., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15** (1930), 271 – 283.

[2] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 上述第一型的 Kuratowski 图是一个完全二分图 $K_{3,3}$, 第二型的是 5 个顶点的完全图 K_5.

Kuratowski-Понтрягин 定理又称为 Kuratowski 定理(Kuratowski theorem).

图在其他 Riemann 曲面, 特别是在射影平面或环面中可嵌入性结果, 见于文献[A1], [A2]. 图的嵌入定理(imbedding theorems)在集成电路设计中有重要作用, 见, 例如, [A3].

参考文献

[A1] Bodendieck, R. and Wagner, K., A characterization of the minimal basis of the torus, *Combinatorica*, **6** (1986), 245 – 260.

[A2] Boland, J. Ch., Embedding of graphs into orientable surfaces, *Indag. Math.*, **70** (1967), 33 – 44.

[A3] Houg, J., Mehlkorn, K. and Rosenberg, A. L., Cost trackoffs in graph embeddings, with applications, *J. Assoc. Comp. Machinery*, **30** (1983), 709 – 728.

杨路、曾振柄 译

Kuratowski-Knaster 扇形[Kuratowski-Knaster fan; Куратовского-Кнастера веер], Knaster-Kuratowski 扇形(Knaster-Kuratowski fan)

平面上一个全不连通集, 它只要添加一个点就能成为连通的. B. Knaster 和 C. Kuratowski([1])的构造法如下. 设 C 为完满 **Cantor 集**(Cantor set), P 为 C 的子集, 由点 $p=\sum_{n=1}^{\infty}a_n/3^n$ 组成, 这里从某个 n 起, 数 a_n 要么全为 0, 要么全为 2; 再设 Q 是所有其余点的集合. 现在设 a 为平面上坐标为(1/2, 1/2)的点, $L(c)$为连接 C 中变动点 c 与 a 的线段. 最后, 再设 $L^*(p)$ 为当 $p\in P$ 时 $L(p)$ 中所有有理点的集合, $L^*(q)$ 为 $q\in Q$ 时 $L(q)$ 中所有无理点的集合. 这时

$$X=\left[\bigcup_{p\in P}L^{*}(p)\right]\cup\left[\bigcup_{q\in Q}L^{*}(q)\right]$$

是连通的，而 $X\setminus a$ 是全不连通的，故 $X\setminus a$ 是 Knaster-Kuratowski 扇形.

参考文献

[1] Knaster, B. and Kuratowski, C., Sur les ensembles connexes, *Fund. Math.*, **2** (1921), 206 – 255.

Л. Г. Замбахидзе 撰 白苏华、胡师度 译

Kuratowski 多面体 [Kuratowski polyhedron; Куратовский полиэдр]

【补注】 **Kuratowski 图** (Kuratowski graph) 的一个不当的名称. "Kuratowski 图" 这个名称有时又不当地用于 **Kuratowski 集** (Kuratowski set). 白苏华、胡师度 译

Kuratowski 集 [Kuratowski set; Куратовского график]

平面上的一个一维集合，除开一个可数集外，它在其余所有点都是零维的. 此集合最早是由 C.Kuratowski ([1]) 构造的，用于给定 n 维空间 X 中满足

$$\operatorname{ind}_z X=\operatorname{ind} X=n$$

的所有点 $z\in X$ 构成的子集 $N(X)$ 的维数问题 ($N(X)$ 称为 X 的维数核 (dimensional kernel)). 对于具可数基的度量空间 X, 总有

$$\operatorname{ind} N(X)\geqslant \operatorname{ind} X-1.$$

Kuratowski 集表明此结果是最好的.

Kuratowski 集构造如下: 设 Π 是平面上 Descartes 坐标系中横轴上的闭区间 $[0, 1]$ 中的 **Cantor 集** (Cantor set). 对每个

$$x\in\Pi,\ x=\frac{2}{3^{k_1}}+\frac{2}{3^{k_2}}+\cdots,\ k_1<k_2<\cdots,$$

令

$$f(x)=\frac{(-1)^{k_1}}{2}+\frac{(-1)^{k_2}}{2^2}+\cdots,$$

且 $f(0)=0$. 此函数的图象，即平面上点 $(x, f(x))$ $(x\in\Pi)$ 的集合 K, 就是 Kuratowski 集. 如果 x 是邻接于 Π 的区间的右端点，记 $z=(x, f(x))$, 则 $\operatorname{ind}_z K=1$, 但在其余所有点 $\operatorname{ind}_z K=0$.

参考文献

[1] Kuratowski, C., Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers, *Mathematica*, **6** (1932), 120 – 123.

[2] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теория размерности ⋯, М., 1973.

А. А. Мальцев 撰

【补注】 Kuratowski 集不是**连续统** (continuum), 因为它既不是紧的 (对于紧度量空间，等式 $\operatorname{ind} N(x)=\operatorname{ind} X$ 成立), 也不是连通的 (甚至是全不连通的，因为它允许映到 Π 上的连续一一映射: $\langle x, f(x)\rangle\to x$).

但是，Kuratowski 集是完全可度量化的.

满足 $\operatorname{ind} X=n\geqslant 1$ 且 X 的维数核是 $n-1$ 维的可分度量空间 X 有时称为弱 n 维的 (weak n-dimensional).

Kuratowski 集是弱 1 维的.

W. Sierpiński [A2] 给出了这种空间的第一个实例. $n=2, 3, \cdots$ 时的弱 n 维空间见 [A3], [A4].

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978, p. 19; 50.

[A2] Sierpiński, W., Sur les ensembles connexes et nonconnexes, *Fund. Math.*, **2** (1921), 81 – 95.

[A3] Marzurkiewicz, S., Sur les ensembles de dimension faibles, *Fund. Math.*, **13** (1929), 210 – 217.

[A4] Tomaszewski, B., On weakly n-dimensional spaces, *Fund. Math.*, **103** (1979), 1–8.

白苏华、胡师度 译

Kutta-Merson 法 [Kutta-Merson method; Кутта-Мерсона метод]

一个四阶精度的五步 **Runge-Kutta 法** (Runge-Kutta method). 该方法应用于 Cauchy 问题

$$y'(x)=f(x,y(x)),\ x_0\leqslant x\leqslant X,\ y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

可描述如下:

$$k_1=hf(x_0,y_0),\ y_0=y(x_0), \tag{2}$$

$$k_2=hf[x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{3}k_1],$$

$$k_3=hf[x_0+\frac{1}{3}h,y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{6}k_2],$$

$$k_4=hf[x_0+\frac{1}{2}h,y_0+\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2],$$

$$k_5=hf[x_0+h,y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4],$$

$$y^1(x_0+h)=y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4,$$

$$y^2(x_0+h)=y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_4+\frac{1}{6}k_5\ .$$

数 $R=0.2|y^1-y^2|$ 可作为误差的一个估计并用于积分步长的自动选取. 若 ε 是指定的计算精度，则积分步长可选取如下. 首先选取某个初始步长并开始用 (2) 计算得出数 R. 若 $R>\varepsilon$, 则将积分步长除以 2; 若 $R\leqslant\varepsilon/64$, 则将它乘以 2. 若 $\varepsilon/64<R\leqslant\varepsilon$, 则所选的积分步长是合适的. 再用 x_0+h 代替初始点 x_0 并重复这个过程. 这就产生出近似解 y^2; 量 y^1 主要作辅助用.

因为

$$y^2(x_0+h)=y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_4+\frac{1}{6}hf(x_0+h,y^1(x_0+h)),$$

即对于 y^1 的公式是被"嵌套"在对于 y^2 的公式中，所以这里所述的误差估计和积分步长选取的方法称为嵌入 Runge-Kutta 法(imbedded Runge-Kutta method).

Kutta-Merson 法的标准程序可在 Algol 语言 [1]，[2] 中找到.

参考文献

[1] Christiansen, J., Numerical solution of ordinary simultaneous differential equations of the 1st order using a method for automatic step change, *Numer. Math.*, **14** (1970), 317－324.

[2] Lukehart, P.M., Algorithm 218. Kutta Merson, *Comm. Assoc. Comput. Mach.*, **6** (1963), 12, 737－738.

[3] Fox, L., Numerical solution of ordinary and partial differential equations, Pergamon, 1962.

[4] Lance, G.N., Numerical methods for high speed computers, Iliffe, 1960.

В.В.Поспелов 撰

【补注】 通常应加上 Runge 的名字：Runge-Kutta-Merson 法(Runge-Kutta-Merson method).

(Runge-) Kutta-Merson 法属于 R.H.Merson ([A6]). 由 y^2 定义的数值逼近的阶是四，而辅助(参考)解 y^1 的阶是三. 因此这两数值逼近的差一般说来仅有阶三，这样就得出了一个保守的误差估计(亦即，对于小的 h 它过度估计了局部误差 $y(x_0+h)-y^2$). 不过，对于线性常系数方程而言，当 $h\to 0$ 时，可得到一个局部误差的正确估计. 这可由考虑如下线性方程而得到证明：

$$y^1=\left[1+h\frac{d}{dx}+\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^2}{2}+\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^3}{6}+\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^4}{24}\right]y(x_0),$$

$$y^2=y^1+\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^5}{144}y(x_0),$$

$$y(x_0+h)=y^1+\left[\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^5}{120}+O(h^6)\right]y(x_0).$$

这样

$$R=0.2|y^1-y^2|=\left[\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^5}{720}\right]y(x_0)$$

及

$$y(x_0+h)-y^2=\left[\frac{\left[h\frac{d}{dx}\right]^5}{720}+O(h^6)\right]y(x_0),$$

所以 R 与局部误差 $y(x_0+h)-y^2$ 在误差阶 h^6 之内相等. 这个方法的进一步讨论可在 [A1] 和 [A5] 中找到. Kutta-Merson 法的 Fortran 程序由 NAG 程序库提供. Kutta-Merson 法是嵌入式方法中最早给出的. 对局部误差提供渐近精确逼近的一些较高阶嵌入公式已由 E.Fehlberg ([A3], [A4]) 得出；该公式还有另外的优点，即主式(最高阶的公式)的误差常数为最小. 但是，因为真实(整体)误差和局部误差间的关系一般是不知道的，所以是否应将最高阶的公式用作主式是有疑问的，而且现代的观点倾向于交换主式与参式的角色(见 [A5]). 由 J.R.Dormand 和 P.J.Prince ([A2]) 新近发展起来的嵌入方法，它结合了一个八阶公式与一个七阶参式，被认为是当今最有效的高精度方法之一 ([A5]).

参考文献

[A1] Butcher, J.C., The numerical analysis of ordinary differential equations, Runge-Kutta and general linear methods, Wiley, 1987.

[A2] Dormand, J.R. and Prince, P.J., A family of embedded Runge-Kutta formulae, *J. Comp. Appl. Math.*, **6** (1980), 19－26.

[A3] Fehlberg, E., Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control, *NASA Techn. Rep.* **287**, Abstract in: Computing **4**(1969), 93－106.

[A4] Fehlberg, E., Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems, *NASA Techn. Rep.*, **315**, Abstract in Computing, **6** (1969), 61－71.

[A5] Hairer, E., Nørsett, S.P. and Wanner, G., Solving ordinary differential problems, 1. Nonstiff problems, Springer, 1987.

[A6] Merson, R.H., An operational method for the study of integration processes, in Proc. Symp. Data Processing, Weapons Res. Establ. Salisbury, 1957, 110－125.

[A7] Fatunla, S.O., Numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations, Acad. Press, 1988.

史应光 译

L

λ 演算[λ-**calculus** 或 lambda calculus; λ-**исчисление**]

【补注】 **引言** λ 演算是于 1932 − 1933 年由 A. Church([A3])提出的，当时试图把它作为数学基础的理论部分之一．此理论部分包括两个内容：一是关于逻辑符号与规则，二是作用于这些符号上的算法．在 S. C. Kleene 和 J. B. Rosser ([A7]) 发现这一理论体系是不协调的之后，关于算法的这一部分从原先理论中分离出来称为(类型无关的)λ 演算．它被证明在反映**可计算函数**(computable function)的直观概念方面是相当成功的．Kleene([A6]) 证明**递归函数**(recursive function)恰好是 λ 可定义的(其意义见下文)．接着，A. M. Turing ([A10]) 引入了他自己定义的一种机器(见 **Turing 机**(Turing machine))，并证明了 Turing 可计算和 λ 可定义是等价的．这便是有关 Church-Turing 论题的讨论，即可计算的直觉概念被正确地形式化为 λ 可定义，Turing 可计算，或者递归(也见：**Church 论题**(Church thesis))．虽然许多程序设计语言是基于 Turing 的可计算模型(强制式程序设计)，但目前在函数式程序设计领域 Church 的模型受到很大关注．

λ 项 设 V 是变量的无限集．λ 项的集合(记为 Λ)是满足下列条件的最小集合：若 $x\in V$，则 $x\in\Lambda$；若 $M, N\in\Lambda$，则 $(MN)\in\Lambda$；若 $M\in\Lambda$ 且 $x\in\Lambda$，则 $(\lambda x M)\in\Lambda$．其中项 MN 的含义为：M 是作用于 N 的函数，N 是参数；λxM 表示把值 M(可能包含 x)指派给对 x 的直接作用．用 $\equiv$ 表示项之间的语法相等．这样，$\lambda xx \equiv \lambda xx \not\equiv \lambda xy$ 以及 $(\lambda xx)a \not\equiv a$．以下是 λ 项的几个例子：$I\equiv\lambda xx$ 为恒等函数；λxy 为具有常值 y 的函数；以及 λxI 为具有常值 I 的函数．自施用是允许的，如 $\lambda x(xx)$ 是合法的 λ 项．

在表达式 λxM 中，变量 x 的出现称为被 λ **约束的**(bound)．如果一个变量的出现不是约束的，那么称为在 M 中是自由的(free)．λ 项 M 称为闭的(closed)，如果 $FV(M)=\phi$．例如，在 $(\lambda xx)yx$ 中，变量 x 有自由出现也有约束出现，而变量 y 是自由出现；I 是一个闭项．仅仅约束变量名不同的项是相同的项，例如：$y(\lambda zz)\equiv y(\lambda xx)\not\equiv w(\lambda xx)$．

转换 根据 λ 表达式的含义，下面所谓的 β **规则**(β-rule)被设为公理：$(\lambda xM)x=M$，或更一般地，$(\lambda xM)N=M[x:=N]$，这里等式右边表示用 N 替换 M 中自由出现的 x 所得的结果．在作替换 $M[x:=N]$ 时，应特别小心 N 中的自由变量绝不能变为约束的．这一点可以通过对 M 中的所有约束变量实行换名来保证．例如，$(\lambda z(xz))[x:=zz]\equiv(\lambda z'.(xz'))[x:=zz]\equiv(\lambda z'((zz)z'))\not\equiv\lambda z((zz)z)$．如果等式 $M=N$ 仅使用 β 规则就可得证，那么就称 M 可**转换**为 N．

Curry 算子 虽然上面的抽象作用仅给出了一元函数，但多个元函数也可以通过重复作用的 λ 演算来表示．例如 $F\equiv(\lambda x(\lambda y(yx)))$ 是一个满足 $(FA)B=BA$ 的项(更方便的记号是用 $\lambda x_1\cdots x_n.M$ 表示 $(\lambda x_1(\lambda x_2\cdots(\lambda x_nM)\cdots))$，以及用 $FA_1\cdots A_n$ 表示 $(\cdots((FA_1)A_2)\cdots A_n)$；这样此式就可以写成 $(\lambda xy.yx)AB=BA$.) 此方法出自 M. Schönfinkel ([A9])，但在 H. B. Curry 使它流行起来后就被称为 Curry 算子(currying)．

计算的表达 由 β 规则可证明下列不动点定理：对所有 λ 项 F，存在 λ 项 X 使得 $FX=X$.(下面是一种证明：取 $W\equiv\lambda x.F(xx)$ 以及 $X\equiv WW$，那么 $X\equiv(\lambda x.F(xx))W=F(WW)\equiv FX$.) 此

结果被用来表示递归．令 $M^0N \equiv N$ 以及 $M^{k+1}N \equiv M(M^kN)$．对于 $k \in \mathbf{N}$（$\mathbf{N}$ 为自然数集合），定义 λ 项 $c_k \equiv \lambda fx.f^kx$．$c_k$ 称为 Church 示数（Church numerals）．函数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 称为 λ 可定义的（λ-definable），如果存在一个 λ 项 F 使得对所有 $k \in \mathbf{N}$ 都有：$Fc_k = c_{f(k)}$．此定义可根据需要扩展到多元函数的情形，如 $Fc_{k_1}c_{k_2} = c_{f(k_1, k_2)}$．整数加法是 λ 可定义的，可以用项 Plus $\equiv \lambda pqfx.pf(qfx)$ 来定义．前趋函数可用 $Q \equiv \lambda pfx.p(\lambda ab.b(af))(\lambda q.x)I$ 作为其 λ 定义．记 I 为 Qx．令 true $\equiv \lambda xy.x$ 和 false $\equiv \lambda xy.y$．那么"if B then X else Y"可表达为 BXY．令 zero? $\equiv \lambda p.p(\lambda x.\text{false})\text{true}$，则有 zero? c_0 = true 以及 zero? c_{k+1} = false．现假定 f 是递归定义的函数，例如：$f(0, x) = 0$, $f(k+1, x) = f(k, x) + x$．下面可以对 f 作出 λ 定义．欲找一个 F，使得 Fkx = if zero? k then c_0 else (Plus$(Fk^-x)x$)．这只要令 $F = \lambda kx$. if zero? k then c_0 else (Plus $(Fk^-x)x$) $= (\lambda fkx$. if zero? k then c_0 else (Plus$(fk^-x)x$))F 即可．现在 F 可使用不动点定理求得．用类似的方法，极小化运算（搜索）也可用 λ 项表达．

归约策略　如果 F 是函数 f 的 λ 定义，那么 $f(k)$ 可通过对 Fc_k 赋值来计算．此 λ 项的赋值可以采用不同的策略，这些策略对于将子表达式 $(\lambda x.M)N$ 替换为 $M[x := N]$（此替换称为归约（reduction））采用了不同的优先级．若最内的表达式优先计算，则称为 e 赋值（eager evaluation）；若是最外的表达式优先处理，则称为 l 赋值（lazy evaluation）．对各类归约策略，[A1] 第 13 章给出了它们的理论性质，[A4] 第 9 章中讨论了实现方面的问题．

类型　在用 λ 项表达算法时，类型可以为这些项规定一个次序（所起的作用类似于规定物体的大小）．设 V 是原子类型的符号集合（例如，V 可以包含 nat 和 bool）．类型形成满足下列条件的最小集合 T：$\alpha \in V$，则 $\alpha \in T$；若 $\sigma, \tau \in T$，则 $(\sigma \to \tau) \in T$．一条语句（statement）具有形式 $M: \sigma$，其中 $M \in \Lambda$ 及 $\sigma \in T$．在 $M: \sigma$ 中，项 M 称为主词（subject），σ 称为谓词（predicate）．基（basis）是仅由变量作为主词的语句的集合．如果 Γ 是一个基，那么 $\Gamma \vdash M: \sigma$（读作在 σ 中 M 是可以 Γ 推导的，或者在 σ 中 Γ 可推出 M）表示满足以下条件的最小关系：若 $(x: \sigma) \in \Gamma \vdash x:\sigma$，若 $\Gamma \vdash M: (\sigma \to \tau)$ 且 $\Gamma \vdash N: \sigma$，则 $\Gamma \vdash (MN): \tau$；若 $\Gamma \cup \{x: \sigma\} \vdash M: \tau$，则 $\Gamma \vdash (\lambda x.M): (\sigma \to \tau)$．以下是有效可推导语句的几个例子：$\{x: \sigma\} \vdash x: \sigma$，$\vdash (\lambda x.x): (\sigma \to \sigma)$，$\vdash (\lambda xy.x): (\sigma \to (\tau \to \sigma))$，以及 $\vdash (\lambda xy.y): (\sigma \to (\tau \to \tau))$．项 $\lambda x.xx$ 是不能被类型化的．

以下两条定理成立：1）如果 $\Gamma \vdash M: \sigma$，那么所有开始于 M 的归约是可终止的．2）对于给定的项 M，是否存在 Γ 和 σ 使得 $\Gamma \vdash M: \sigma$ 是可判定的；进一步，如果 Γ 和 σ 存在，它们是可以构造出来的．证明参见 [A5] 中的例子．

程序设计语言 ML（见 [A8]）是基于类型无关的 λ 演算，其中类型就像上面一样指派于某些项．上述第二条定理使得程序员不必去编写类型，因为编译器可以构造它们．

语义　由于 λ 项同时可作为函数又可作为变元，为了给出 λ 项的语义，人们自然会想到定义一个集合 D，使其函数空间 $D \to D$ 与 D 本身存在一一对应关系．但由于基数的原因，这是不可能做到的．D. S. Scott 为 λ 项构造的模型是把 $D \to D$ 限制到 D 到 D 的连续函数空间（对于一种适当的连续性概念），这类连续函数与 D 有相同基数．E. Engeler 构造了一个具有这种形式的简单模型．设 A 为非空集合，B 是满足下列条件的最小集合：B 包含 A；对 $b \in B$ 和有限的 $\beta \in B$，有 $(b, \beta) \in B$．取 D_A 为 B 的所有子集的集合．函数 $f: D_A \to D_A$ 称为连续的（continuous），如果 $f(d) = \bigcup\{f(\beta): \beta \subseteq d, \beta \text{有限}\}$；对于这样的 f，定义 $\lambda x.f(x) = \{(b, \beta): b \in f(\beta)\} \in D_A$．为重构 f，构造 $\lambda x.f(x)$，且对 $d, e \in D_A$ 定义施用 $d.e = \{b \in B: \exists \beta \subseteq e(b, \beta) \in d\}$．从而 $(\lambda x.f(x)).e = f(e)$．现在 λ 项就可在 D_A 中进行解释了．设给定映射 $\rho: V \to D_A$（称为环境（environment））；对于 $M \in \Lambda$，定义元素 $[[M]]_\rho = [[M]]_\rho [[N]]_\rho$，$[[\lambda x.M]]_\rho = \lambda d[[M]]_{\rho(x:=d)}$，这里 $\rho(x := d)$ 是满足 $\rho'(x) = d$ 及 $\rho'(y) = \rho(y)$（$y \not\equiv x$ 时）的环境 ρ'．为使该定义有意义，应当验证 $[[M]]_{\rho(x:=d)}$ 关于 d 是连续的．这是对的，因为施用函数对于其每一个变量都是连续的．由于对每一个 ρ，如果 $M = N$ 是可证的，那么就有 $[[M]]_\rho = [[N]]_\rho$，因此 D_A 是 λ 演算的一个模型．能够证明，对计算结果不产生实质影响的项如 $(\lambda x.xx)\cdot(\lambda x.xx)$ 在 D_A 中的象是空集．

参考文献

[A1] Barendregt, H. P., The lambda calculus, its syntax and semantics, North Holland, 1984.

[A2] Barendregt, H. P., Lambda calculi with types, in Handbook of Logic in Computer Science, Oxford Univ. Press, 1990.

[A3A] Church, A., A set of postulates for the foundation of logic, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 346 − 366.

[A3B] Church, A., A set of postulates for the foundation of logic, *Ann. of Math.* (2), **34** (1933), 839 − 864.

[A4] Field, A. J. and Harrison, P. G., Functional programming, Addison Wesley, 1988.

[A5] Hindley, J. P. and Seldin, J. P., Introduction to

combinators and lambda calculus. Cambridge Univ. Press, 1986.

[A6] Kleene, S. C., λ-defininability and recursiveness. *Duke Math. J.*, 2 (1936), 340 − 353.

[A7] Kleene, S. C. and Rosser, J. B., The inconsistency of certain formal logics, *Ann. of Math.* (2), **36** (1935), 630 − 636.

[A8] Milner, R., A proposal for standard *ML*, in Proc. ACM Symp. on LISP and Functional Programming (Austin), 1984, 184 − 197.

[A9] Schönfinkel, M., Ueber die Bausteine der mathematische Logik, *Math. Ann.*, **92** (1924), 305 − 316.

[A10] Turing, A., On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*, **42** (1936), 230 − 265.

[A11] Turing, A., Computability and λ-definability, *J. Symbolic Logic*, **2** (1937), 153 − 163.

H. P. Barendregt 撰 王生原 译 李 廉 校

λ 环 [λ-ring; λ-кольцо]

【补注】 预 λ 环 (pre-λ-ring) 是附有满足下述性质的一组映射 $\lambda^n: R \to R (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的有幺元的交换环 R:

i) $\lambda^0(x) = 1$, 对于所有的 $x \in R$;

ii) $\lambda^1(x) = x$, 对于所有的 $x \in R$;

iii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$.

这种环的例子有, 譬如说, 拓扑 K 群 $K(M)$ 和 $K_G(M)$, 其中 G 是紧 Lie 群(见 **K 理论**(K-theory)), 以及有限群 G 的复表示环 $R(G)$(见**紧群的表示**(representation of a compact group)). 在所有这些情形下, λ^n 都是由外幂诱导出来的. 比如, M = 点时, $K(M) = \mathbf{Z}$ 以及 $\lambda^n(m) = \binom{m}{n}$(二项式系数; 公式 $\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{i+j=n}\binom{m_1}{i}\binom{m_2}{j}$ 可由 $(X+Y)^{m_1+m_2} = (X+Y)^{m_1} \cdot (X+Y)^{m_2}$ 利用二项式展开定理得到).

设 R 是有单位元 1 的任一交换环. 考虑 R 上以 t 为变元的常数项为 1 的幂级数的集合 $\Lambda(R) = 1 + tR[[t]]$. 幂级数的乘法使得 $\Lambda(R)$ 成为一个 Abel 群. R 上的一个预 λ 环结构定义出 Abel 群的一个同态: $\lambda_t: R \to \Lambda(R)$, $\lambda_t(x) = 1 + \lambda^1(x)t + \lambda^2(x)t^2 + \cdots$, 反之亦然.

设 $\alpha(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, $\beta(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ 是 $\Lambda(R)$ 的两个元素. 形式地, 写成

$$\alpha(t) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \xi_i t),$$

$$\beta(t) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \eta_i t),$$

并且考虑表达式

$$\prod_{i,j=1}^{\infty}(1 - \xi_i \eta_j t) = 1 + P_1 t + P_2 t^2 + \cdots,$$

$$\prod_{i_1 < \cdots < i_n}(1 - \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} t) = 1 + L_{1,n} t + L_{2,n} t^2 + \cdots.$$

这些 P_i 和 $L_{i,r}$ 是 ξ 和 η 的对称多项式表达式, 所以可以写成那些 a 和 b 的泛多项式表达式. 现在定义 $\Lambda(R)$ 上的乘法为

$$\alpha(t) \star \beta(t) = 1 + P_1(a, b)t + P_2(a, b)t^2 + \cdots$$

$(a = (a_1, a_2, \cdots),\ b = (b_1, b_2, \cdots))$, 并且定义运算(映射) $\lambda^n: \Lambda(R) \to \Lambda(R)$ 为

$$\lambda^n \alpha(t) = 1 + L_{1,n}(a)t + L_{2,n}(a)t^2 + \cdots.$$

附有这些运算的环 $\Lambda(R)$ 构成一个预 λ 环. 给定两个预 λ 环 R_1, R_2, 一个预 λ 环同态 $\varphi: R_1 \to R_2$ 即是满足下述条件的环同态: 对所有的 $x \in R$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 都有 $\varphi(\lambda^n(x)) = \lambda^n(\varphi(x))$.

一个预 λ 环称为 λ 环(λ-ring), 如果 $\lambda_{-t}: R \to \Lambda(R)$, $\lambda_{-t}(x) = 1 - \lambda^1(x)t + \lambda^2(x)t^2 - \cdots$ 是预 λ 环同态. 环 $\Lambda(R)$ 总是 λ 环, 前面提到的预 λ 环的标准的例子 $K(M)$, $K_G(M)$, $R(G)$ 也都是 λ 环.

另一方面, 考虑一个有限群 G. 一有限 G 集(finite G-set) 是指在其上附有群 G 的作用的有限集. 应用无交并和 Descartes 积作为运算, 在此积上赋以对角线作用. 有限 G 集合的所有同构类构成一个**半环**(semi-ring) $A^+(G)$. 与之相伴的 Grothendieck 环 $A(G)$(见 **Grothendieck 群**(Grothendieck group)) 称作 Burnside 环 (Burnside ring). 在 $A^+(G)$ 上定义运算 $\lambda^n: A^+(G) \to A^+(G)$ 为 $\lambda^n(S) = (S$ 的 n 元子集的集合)(附以自然诱导的 G 作用). 这推广了 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ 上的 λ 运算 $\lambda^n: \lambda^n(m) = \binom{m}{n}$. 应用 iii), 将 λ^n 扩充到 $A(G)$ 上, 这使得 Burnside 环成为预 λ 环. 通常, 这种预 λ 环不是 λ 环 ([A9]).

人们在文献中会见到用短语 λ 环和特殊 λ 环 (special λ-ring) 分别代替预 λ 环和 λ 环.

设 R 是一个预 λ 环. 用下述公式定义新的运算 $\Psi^i: R \to R$:

$$-t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi^i(x) t^i.$$

这些运算称为预 λ 环上的 Adams 运算 (Adams operations), 它们是 J. F. Adams 在 $R = K(M)$ 的情形下引入的 ([A10]).

Adams 运算满足:

iv) $\Psi^1(x) = x$;

v) $\Psi^n(x+y) = \Psi^n(x) + \Psi^n(y)$.

设 R 是一个无扭的预 λ 环, 则 R 是 λ 环, 当且仅当 Adams 运算还满足

vi) $\Psi^i(1) = 1$;

vii) $\Psi^i(xy) = \Psi^i(x)\Psi^i(y)$;

viii) $\Psi^i(\Psi^j(x)) = \Psi^{ij}(x)$.

具有满足 iv)−viii) 的运算 Ψ^i 的环有时被称作 Ψ

环(Ψ-ring).

环 $\Lambda(R)$ 同构于(大)Witt 向量环 $W(R)$(见 **Witt 向量**(Witt vector)的补注):

$$\bar{E}: W(R) \to \Lambda(R)$$

$$(a_1, a_2, \cdots) \mapsto \prod_{i=1}^{\infty}(1 - a_i t^i).$$

在此同构下,$\Lambda(R)$上的 Adams 运算对应于 Frobenius 运算(Frobenius operations) $\mathbf{f}_n: W(R) \to W(R)$.

环$\Lambda(R)$上的 λ 结构定义了一个取值为环的函子上的函子态射 $\lambda_{-t}(-):\Lambda(-) \to \Lambda(\Lambda(-))$. 它连同 $\Lambda(R) \to R$, $1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \mapsto a_1$ 一起,定义了函子Λ 上的余三元组(co-triple)结构,而λ 环恰好是这个余三元组的余代数(co-algebras)(见**三元组**(triple)).

通过同构 $\bar{E}$ 可以得到"指数同态"

$$E: W(R) \to W(W(R)),$$
$$E': W(R) \to \Lambda(W(R)),$$

它们可被视为(广义的)所谓 Artin-Hasse 指数同态 Artin-Hasse exponential homomorphism)([A11],[A12]).

令 $w_n(R): W(R) \to R$ 是环同态

$$w_n(a_1, a_2, \cdots) = \sum_{d \mid n} d a_d^{n/d},$$

则 Artin-Hasse 指数 $E(R): W(W(R))$ 有下述的函子刻画:

$$w_n(W(R)) \circ E(R) = \mathbf{f}_n(R),$$

其中 $\mathbf{f}_n(R): W(R) \to W(R)$是 Frobenius 同态(Frobenius homomorphism).

令 $V: \lambda$-**Ring** → **Ring** **是遗忘函子,则函子** Λ: **Ring** → λ-**Ring** 是 V 的右伴随(见**伴随函子**(adjoint functor)):

$$\mathbf{Ring}(V(S), R) \simeq \lambda\text{-}\mathbf{Ring}(S, \Lambda(R))$$

(见[A5],p. 20).

Abel 群 $\Lambda(R) = 1 + tR[[t]]$(除恒同映射外)有三个自然的自同构,它们分别由替换 $t \mapsto -t$,"反演" $\alpha(t) \mapsto \alpha(t)^{-1}$ 以及这两上自同构的复合给出. 与此相应地在 $\Lambda(R)$上有四种自然的方法引入环结构,相应的幺元分别是 $1-t$, $1+t$, $(1-t)^{-1}$, $(1+t)^{-1}$.所有这四种情形都在文献中出现. 最常见的是以 $1-t$或 $1+t$作为幺元的情形——其中 $1-t$ 是上文中的幺元,而 $(1+t)^{-1}$ 似乎是最不常见的情形.

λ 环是 A. Grothendieck 在建立代数几何时引入的([A2]),并且首次被 M. F. Atiyah 和 D. O. Tall 应用于群表示论([A1]).

如果 $x \in R$是一维的,即对 $n \geq 2$, $\lambda^n(x) = 0$,下面的术语来源于 $R = K(M)$或 $R = R(G)$的情形;此时有 $\Psi^n(x) = x^n$,所以将 Ψ^n 命名为幂运算(power operations). 在 $\Lambda(R)$ 上 Ψ^n 直接定义为

$$\Psi^n\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1 - \xi_i t)\right] = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \xi_i^n t).$$

参考文献

[A1] Atiyah, M. F. and Tall, D. O., Group representations, λ-rings and the J-homomorphism, *Topology*, **8** (1969), 253 – 297.

[A2] Grothendieck, A., La théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 137 – 154.

[A3] Grothendieck, A., Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch, in *Sém. Géom Algébrique*, Vol. 6, Springer, 1972, 20 – 77.

[A4] Hazewinkel, M., Formal groups and applications, Acad. Press, 1978, p. 144 ff.

[A5] Knutson, D., λ-rings and the representation theory of the symmetric group, Springer, 1974.

[A6] Berthelot, P., Généralités sur les λ-anneaux, in *Sém. Géom. Algébrique*, Vol. 6, Springer, 1972, 297–365.

[A7] Fulton, W. and Lang, S., Riemann-Roch algebra, Springer, 1985.

[A8] Tom Dieck, T., Transformation groups and representation theory, Springer, 1979.

[A9] Siebeneicher, C., λ-Ringstrukturen auf dem Burnside ring der Permutationsdarstellungen einer endlichen Gruppe, *Math. Z.*, **146** (1976), 223 – 238.

[A10] Adams, J. F., Vectorfields on spheres, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 603 – 632.

[A11] Hazewinkel, M., Twisted Lubin-Tate formal group laws, ramified Witt vectors and (ramified) Artin-Hasse exponentials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **259** (1980), 47 – 63.

[A12] Artin, E. and Hasse, H., Die beide Ergänzungssätze zum Reciprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6** (1928), 146 – 162.

[A13] Whaples, G., Generalized local class field theory Ⅲ: Second form of the existence theorem, structure of analytic groups, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 575 – 581.

赵春来 译

l 进上同调 [**l-adic cohomology**; **l-адические когомологии**]

抽象代数簇和概形的一种上同调结构. 概形的**艾达尔上同调**(étale cohomology)是挠模. 系数取在特征数零的环里的上同调被用于各种目的,主要是 **Lefschetz 公式**(Lefschetz formula)的证明及其对 ζ 函数的应用. l 进上同调是对艾达尔上同调取射影极限而得到的.

设 l 是一个素数，概形 X上的 l进层（l-adic sheaf）是艾达尔 Abel 层 F_n 的一个射影系 $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$，使得对所有的 n，转移同态 $F_{n+1}\to F_n$ 等价于典范态射 $F_{n+1}\to F_{n+1}/l^nF_{n+1}$. 如果所有的层 F_n 都是可构造的（或局部常的）艾达尔层，就称 l 进层 F为可构造的（constructible）(相应地，局部常的（locally constant）). 连通概形 X 上的局部常可构造层的范畴自然等价于 l 进整数环 $\mathbf{Z}_l$ 上有限型模的范畴，这里概形 X 的基本群从左边连续地作用在这些模上．这就证明了局部常可构造层抽象相似于拓扑中的局部系数系统．可构造 l 进层的例子有：层 $\mathbf{Z}_{l,X}=((\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z})_X)_{n\in\mathbf{N}}$ 以及 Tate 层（Tate sheaf）$\mathbf{Z}_l(m)_X=(\mu_{l^n,X}^{\otimes m})_{n\in\mathbf{N}}$（这里的 $(\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z})_X$ 是 X上与群 $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$ 相联系的常层，$\mu_{l^n,X}$ 是 X 上 l^n次单位根的层）. 如果 A 是 X上的 **Abel 概形**（Abelian scheme），则 $T_l(A)=(A_{l^n})_{n\in\mathbf{N}}$（这里 A_{l^n}是 A 内用 l^n 相乘的核）成为 X 上局部常可构造 l 进层，称为 A 的 Tate 模（Tate module）.

设 X是域 k上的概形，$\bar{k}_s$是域 k 的可分闭包，记 $\bar{X}=X\otimes_k\bar{k}_s$ 为 X通过从 k 到 $\bar{k}_s$ 作基变换后所得到的概形，且设 $F=(F_n)$是 X上 l 进层，则艾达尔上同调 $H^i(\bar{X},\bar{F}_n)$定义了 $\mathrm{Gal}(\bar{k}_s/k)$模的射影系 $(H^i(\bar{X},\bar{F}_n))_{n\in\mathbf{N}}$. 射影极限 $H^i(\bar{X},F)=\lim_{\leftarrow n}H^i(\bar{X},\bar{F}_n)$ 自然地有一个 $\mathbf{Z}_l$ 模结构，$\mathrm{Gal}(\bar{k}_s/k)$ 连续地（相对于 l 进拓扑）作用其上．它被称为 X上层 F 的第 i 个 l 进上同调．当 $k=\bar{k}_s$时，通常记为 $H^i(\bar{X},F)=H^i(X,F)$. 艾达尔上同调的基本定理可应用于可构造 l 进层的 l 进上同调．如果 $\mathbf{Q}_l$是 l 进有理数域，则 $\mathbf{Q}_l$ 空间 $H_l^i(\bar{X})=H^i(\bar{X},\mathbf{Z}_l)\otimes\mathbf{Q}_l$ 被称为概形 X的有理 l 进上同调（rational l-adic cohomology）. 它们的维数 $b_i(X;l)$（如果有定义的话）称为 X 的第 i 个 Betti 数（ith Betti number）. 对于完全 k 概形，数 $b_i(X;l)$ 有定义而且与 l 无关（$l\neq\mathrm{char}k$）. 如果 k是特征数 p的代数闭域，$l\neq p$，则与光滑完全 k簇相关联的空间 $H_l^i(X)$定义了 **Weil上同调**（Weil cohomology）. 当 $k=\mathbf{C}$ 是复数域时，比较定理（comparison theorem）$H_l^i=H^i(X,\mathbf{Q})\otimes\mathbf{Q}_l$ 成立．

参考文献

[1] Grothendieck, A., Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, in Sem. Bourbuki, Vol. 17, 1964－1965.

И. В. Долгачев 撰

【补注】上面提到的对于完全 k 概形，Betti 数与 l 无关这一事实是来自 Deligne 对 Weil 猜测的证明（亦见 ζ **函数**（zeta-function））.

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Cohomologie l-adique et fonctions L, in SGA 5, Lecture notes in math., Vol. 589, Springer, 1977.

[A2] Milne, J. S., Etale cohomology, Princeton Univ. Press, 1980.

[A3] Freitag, E. and Kiehl, R., Etale cohomology and the Weil conjectures, Springer, 1988.

[A4] Deligne, P., La conjecture de Weil Ⅰ, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273－307.

[A5] Deligne, P., La conjecture de Weil Ⅱ, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137－252.

陈志杰 译

L 函数 [L-function; L-функция]

引入特征标后 ζ **函数**（zeta-function）的推广（见**群的特征标**（character of a group））. L 函数形成一类很复杂的特殊的单复变函数，它是应用特征由 **Dirichlet 级数**（Dirichlet series）或者 **Euler 积**（Euler product）所定义，是用分析方法研究相应数学对象的算术性质的基本工具，这些对象是：有理数域、代数域、有限域上的代数簇等等．L 函数的最简单的表示是 **Dirichlet L 函数**（Dirichlet L-function）. 其余的 L 函数或多或少是这些 L 函数的类似和推广．

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】现在 L 函数包含了与 **Galois 群**（Galois group）$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ 的表示有关的很大一类函数．例如，选取代数数域 K 上 Galois 群 G 的表示 $\rho:G\to\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$（见**群的表示**（representation of a group））. 对每个素数 p，设 F_p 是 G 中的 Frobenius 元素，则函数

$$L(p,s)=\prod_p\det(\mathrm{Id}-\rho(F_p)\cdot p^{-s})^{-1}$$

是对应于 ρ 的 Artin L 级数（Artin L-series）. 类似地，$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ 作用于定义在 $\mathbf{Q}$ 上的椭圆曲线 E 的 l^n 挠点就产生 E 的 Hasse-Weil L 函数（Hasse-Weil L-function）. 关于这些 L 函数有大量迷人的猜想，一方面它们显示了 L 函数与自守形式的关系（Langlands 猜想（Langlands conjectures）)，另一方面表明 L 函数在整点上的值与代数几何不变式有关（Beilinson 猜想（Beilinson conjectures））.

参考文献

[A1] Gelbart, S., An elementary introduction to the Langlands program, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **10** (1984), 177－220.

[A2] Rapoport, M., Schappacher, N. and Schneider, P. (eds.), Beilinson's conjectures on special values of L-functions, Acad. Press, 1988.

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

L 亏格 [L-genus; L-род]

相应于 Hirzebruch L 类（见 **Понтрягин 类**（Pontryagin class））的示性数．

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1966 (translated from the German).

徐森林 译

L 系统 [L-system; L-система]

【补注】 L系统的理论起源于 A. Lindenmayer 的工

作([A1]). 这个理论的最初目的是为简单丝状有机体的发育提供数学模型. 起先, L 系统被定义为有限自动机的线性队列, 但后来被重新表述为类似文法结构那样的更恰当的结构. 从此, L 系统的理论基本上作为形式语言的一个分支而发展(见**形式语言与自动机**(formal languages and automata)).

与文法相比较, L 系统的本质特点在于句子是以并行方式重写, 而文法中的句子却是以串行方式重写. 这就是说, 对于一个 L 系统的重写过程的一步, 每个字母必须被重写. 而对于文法的重写过程的一步, 仅仅改变被考虑的句子的某个部分.

看一个很简单的例子, 假定研究一个含有生成式 $S \to SS$ 的**上下文无关文法**(grammar, context-free), 因为在这个重写过程的每一步, 能用 SS 替换 S 而使其他部分保持不变, 所以从 S 开始, 可以得到任何形如 S^n 的句子, 这里 $n \geqslant 1$. 但是如果研究一个含有生成式 $S \to SS$ 的 L 系统, 那么从 S 开始, 由这个生成式只能得到形如 S^{2^n} 的句子, $n \geqslant 0$. 这是因为不能使已经出现的 S 不变. 这样, 如果重写句子 SS, 那么在这一步上得到的句子是 $SSSS = S^4$ 而不是 S^3. 当然, 如果这个 L 系统也含有生成式 $S \to S$ 的话, 可以导出任何形如 S^n 的句子, $n \geqslant 1$.

这种重写方式的并行化处理反映了 L 系统的提出来源于生物学的背景. 试图对一个有机体的发育建立模型, 发育是以一种并行方式, 在有机体的每一处同时进行的. 对于这类模型用串行重写方式是不合适的.

最简单的 L 系统假定一个细胞的发育不受其他细胞的影响. 这类 L 系统习惯上称为 OL 系统(OL-system)("O"表示细胞之间为 0 联系). 按照定义, OL 系统是一个三元组 $G = (\Sigma, P, \omega)$, 这里, Σ 是字母表, ω 是 Σ 上的字, 而 P 是形如

$$a \to x, a \in \Sigma, x \in \Sigma^*$$

的重写规则的有限集. (假定关于 Σ 中的每个字母, P 至少含有一个规则.) G 的语言由全体从 ω 使用 P 中规则通过并行方法导出的字组成.

作为一个例子, 考查 OL 系统

$$(\{a, b\}, a, \{a \to b, b \to ab\}).$$

由它生成的语言中开头的几个字是

$$a, b, ab, bab, abbab, bababbab,$$
$$abbabbababbab.$$

因为这个系统是确定的(关于每个字母只有一个生成式), 被它生成的语言可以用唯一的方法排成一个序列.(确定的系统用字母 D 表示.) 这个序列中的字的长度形成著名的 Fibonacci 数列.(见 **Fibonacci 数**(Fibonacci numbers)). 事实上, 与自动机和形式语言理论中的其他可能的装置相比较, 这个 OL 系统提供了生成 Fibanacci 数列的一个十分简单的方法. 这个系统也是增殖的(propagating)(简写为 P), 即其中没有把一个字母变成空字 λ 的抹除生成式.

在带有相互作用的 L 系统(L-system with interactions)(简写为 IL 系统(IL-system))中, 生成式具有 $(y, a, z) \to x$ 的形式. 这样的一个生成式用于将上下文为 yaz 中的 a 重写为 x. 如果在所有的生成式中, y(相应地, z)的长度等于 k(相应地, l), 则称系统带有 $\langle k, l \rangle$ 交互作用.(从生物学的观点看, 这意味着一个单独的细胞可以与其左边 k 个和右边 l 个相邻细胞相联系.) 在句子的两端附近, 亏缺的相邻字母用一个特殊的字母 g 来提供. 例如, 句子 aaa 可以用 $(1, 1)$ 生成式 $(g, a, a) \to bb$, $(a, a, a) \to ab$, $(a, a, g) \to a$ 重写为 $bbaba$.

带有表格的 L 系统(L-system with tables)(简写为 T 系统)有几个而不是只有一个重写规则集合, 在重写过程的一步, 必须使用同一个集合中的规则. 对于任何一种类型的 L 系统, 都可以考虑这种类型的带有表格的 L 系统. 从生物学的角度看, 引进表格可以利用不同的规则来兼顾不同的环境条件(热度, 光照等)或不同的发育阶段.

在定义被 L 系统生成的语言时, 目前采用的只是穷举方法(exhaustive approach), 即所有根据规则用并行方法从初始字导出的字都属于这个语言. 用这种方式得到的语言的族(例如 OL 语言族, 或简写为 OL)只有很弱的封闭性质. 除了穷举方法之外, 还可以选择多种不同的方法来定义生成的语言.

终端字母表起了一种过滤的作用, 由系统生成的字必须通过这个过滤器才能含在语言中. 在下一个定义里, 继续使用 L 系统理论中常用的缩写: 字母 E 表示扩展.

一个 EOL 系统(EOL-system)是一个有序对 $G_1 = (G, \Sigma_T)$, 这里 $G = (\Sigma, P, w)$ 是一个 OL 系统, Σ_T 是 Σ 的子集, 它作为终端字母表(terminal alphabet). G_1 生成的语言定义为

$$L(G_1) = L(G) \cap \Sigma_T^*.$$

这种形式的语言称为 EOL 语言(EOL-languages).

给定一个上下文无关文法 G, 对每个字母 α(终端字母或非终端字母)附加一个生成式 $\alpha \to \alpha$, 把这样构作的 G_1 看作一个 EOL 系统. 显然, $L(G) = L(G_1)$. 这说明每个上下文无关语言也是一个 EOL 语言. 下面的例子则表明了如何用 EOL 系统生成一个非上下文无关语言.

考虑具有公理 S 以及生成式 $S \to ABC$, A

$\to A\bar{A}$, $B \to B\bar{B}$, $C \to C\bar{C}$, $\bar{A} \to \bar{A}$, $\bar{B} \to \bar{B}$, $\bar{C} \to \bar{C}$, $\bar{A} \to a$, $\bar{B} \to b$, $\bar{C} \to c$, $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$, $a \to N$, $b \to N$, $c \to N$, $N \to N$ 的 *EOL* 系统 G，这里$\{a, b, c\}$是终端字母表．容易验证

$$L(G) = \{a^n b^n c^n : n \geqslant 1\}.$$

系统 G 是以终端同步化(synchronization of terminals)为基础的，即终端字母在整个字中必须同时被引入．如果终端字母只是在字的某些部分被引入，那么派生就不能继续产生终端字母表上的字．这是因为终端字母只能导出“垃圾”字母 N，而这个字母一旦引入就不会被删除．

可以同样地解释 *EIL* 系统(*EIL*-system)和 *EIL* 语言(*EIL*-languages)．一个语言是递归可枚举的，当且仅当它是一个 *EIL* 语言．

L 系统的一个相当基本的研究领域是生长函数理论．从生物学的观点，生长函数度量了被模拟的有机体的大小．从理论上看，生长函数理论反映了 L 系统的一个基本的方面，以字的序列的形式产生语言．

对一个 *DOL* 系统，连同考虑函数 f_G，f_G 按下列方式把非负整数集映射到其自身，关于 $i \geqslant 0$，函数值 $f_G(i)$ 被定义为 G 的序列中第 i 个字的长度．函数 f_G 称为 G 的增长函数(growth function)．

例如，对具有初始字 a 和只有一个生成式 $a \to aa$ 的 *DOL* 系统 G，关于所有的 $i \geqslant 0$，有 $f_G(i) = 2^i$．

对具有初始字 a 和生成式 $a \to ab$ 与 $b \to b$ 的 *DOL* 系统 G，关于所有的 $i \geqslant 0$，有 $f_G(i) = i + 1$．

对具有初始字 a 和生成式 $a \to abc^2$ 与 $b \to bc^2$ 与 $c \to c$(分别地，$a \to abd^6$ 与 $b \to bcd^{11}$，$c \to cd^6$ 与 $d \to d$)的 *DOL* 系统 G，关于所有的 $i \geqslant 0$，有 $f_G(i) = (i+1)^2$(分别地，$f_G(i) = (i+1)^3$)．

增长函数的分析问题(analysis problem)是指确定给出的 *DOL* 系统的增长函数，而综合问题(synthesis problem)则是用 *DOL* 增长函数——如果可能的话——来表现给定的函数．

对于给定的以$\{a_1, \cdots, a_n\}$为字母表的 *DOL* 系统 G，相伴一个初始向量 $\pi_G = (v_1, \cdots, v_n)$，这里，$v_i$ 等于 G 的初始字中字母 a_i 出现的次数，$i = 1, \cdots, n$．再附加一个$(n \times n)$增长矩阵(growth matrix)M_G，关于所有的 i 与 j，M_G 中的第(i, j)项值等于 a_j 在关于 a_i 的生成式中出现的次数．最后，η 是全由 1 构成的 n 维列向量．

与一个 *DOL* 系统 G 相关联的增长函数 f_G 对所有的 $i \geqslant 0$，满足

$$f_G(i) = \pi_G M_G^i \eta.$$

可以推出，一个 *DOL* 系统的增长函数不能比指数函数增长得更快，同时，如果其增长函数是毕竟增长的，则不能比线性函数增长得更慢．类似方法定义的 *IL* 系统的增长函数，却不一定满足这些条件．

最近，关于 L 系统的一个图论的框架被用来对一维的细胞发育提供一种更为统一的处理方法，这一方法也适用于二维和三维的细胞发育．这种图论的解释也是拓扑的，即它的核心是细胞之间的邻接关系．对于这些系统，解析的和图几何的说明可以附加长度，角度，颜色以及细胞或细胞壁与边的其他性质．这些图论构造中最有用的是这样一种图，它们的边用主要控制元素加标．在应用这些构造的过程中，可以使用由形式语言理论方式得到的许多结果．

参考文献

[A1] Lindenmayer, A., Mathematical models for cellular interaction in development Ⅰ－Ⅱ, *J. Theoret. Biology*, **18** (1968), 280－315.

[A2] Rozenberg, G. and Salomaa, A., The mathematical theory of L-systems, Acad. Press, 1980.

[A3] Lindenmayer, A., Models for multicellular development: characterization, inference and complexity of L-system, in A. Kelemenovà and J. Kelemen (eds.): Trends, Techniques and Problems in Theoretical Computer Science: 4th internat meeting young computer scientists, Smolenice, Oct. 1986, Lecture notes computer science, Vol. 281, Springer, 1987, 138－168.

G. Rozenberg, A. Salomaa 撰　王水汀 译　李　廉 校

空隙[lacuna; лакуна]

1) 关于函数论中的空隙，例如可见关于间隙的 **Hadamard 定理**(Hadamard theorem)；关于间隙的 **Fabry 定理**(Fabry theorem)；**缺项幂级数**(lacunary power series)．

2) 关于几何中的空隙，见**运动群**(group of motions)；**空隙空间**(lacunary space)．

3) 偏微分方程理论中的空隙是由一线性双曲型方程组

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{k} L_{ij} u_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \qquad (1)$$

的以点(x_0, t_0)为顶点的特征锥内部和平面 $t = t_1$ 相交而得的一个子区域 D．此子区域由下述性质所确定：在 D 内部，原始数据的微小且充分光滑的变化不影响解 u 在(x_0, t_0)点的值．在(1)中设 L_{ij} 是一个 n_j 阶的线性微分算子，且其中关于 t 的微分阶数不超过 $n_j - 1$．所谓“内部变化”是指在某区域内的变化，而此区域连同其边界必须均在 D 内．

对**波动方程**(wave equation)

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \qquad (2)$$

它的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1 \qquad (3)$$

的解 u 在 (x_0, t_0) 点 $(t_0 > 0)$ 的值，当 n 是大于 1 的奇数时，完全由函数 φ_0 和 φ_1 在球面 $|y - x_0| = t_0$ 上的值确定，而当 $n = 1$ 及 n 为偶数时由 φ_0, φ_1 在球 $|y - x_0| \leqslant t_0$ 上的值确定. 所以，当 $n > 1$ 奇数时，在平面 $t = 0$ 内的区域 $|y - x| < t_0$ 是方程 (2) 的一个空隙，而当 n 是偶数及 $n = 1$ 时，方程 (2) 没有空隙. 这样就和波动方程解的 **Huygens 原理** (Huygens principle) 相符合了.

在点 x_0 的小球邻域内，原始数据 (3) 的扰动可导出以此点为心的一个球面波，且对奇数 $n > 1$ 它有外向及内向的波前. 对 n 的其他的值，这个波的内向波前被 "扩散了"; 这种现象称为波的扩散 (diffusion of waves). 波的扩散是所有线性二阶双曲型方程在空间变量个数 n 是偶数时的一个特性 (见 [1]). 当 $n = 3$ 时，类似的问题在 [2] 中研究了，在该文中阐述了这样一类二阶双曲型方程，对它们来说波的扩散现象并不存在. 这类方程紧密地联系着波动方程. 对一般的双曲型组 (1)，在组 (1) 的空隙存在性和相应的具常系数组的类似问题之间，有一个关系 "局部" 地被发现了 (见 [3]). 对于上述的后面的方程组，得到了具代数特性的必要充分条件以确保空隙的存在.

参考文献

[1] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952.

[2] Mathisson, M., Le problème de M. Hadamard rélatif à la diffusion des ondes, *Acta Math.*, **71** (1939), 3 – 4, 249 – 282.

[3] Петровский, И. Г., 《Матем. сб.》, **17** (1945), 289 – 370.

[4] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations 2, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, **2**, 科学出版社, 1977).

А. П. Солдатов 撰

【补注】 对二阶方程的空隙的进一步研究由 K. L. Stellmacher ([A1]), R. G. Mclenaghan ([A2]) 及 B. Ørsted ([A3]) 等人作出. 继 И. Г. Петровский 的工作 [3] 之后，M. F. Atiyah, R. Bott 和 L. Gårding 深入讨论了高阶的情形 ([A4]); 而对变系数情形由 [A5] 中研究了.

参考文献

[A1] Stellmacher, K. L., Ein Beispiel einer Huyghensschen Differentialgleichung, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-phys.* KL., **10** (1953), 133 – 138.

[A2] Mclenaghan, R. G., An explicit determination of the empty space-times on which the wave equation Satisfies Huygens' principle, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **65** (1969), 139 – 155.

[A3] Ørsted, B., The conformal invariance of Huygens' principle, *J. Diff. Geom.*, **16** (1981), 1 – 9.

[A4A] Atiyah, M. F., Bott, R., Gårding, L., Lacunas for hyperbolic differential operations with constant coefficients I, *Acta Math.*, **124** (1970), 109 – 189.

[A4B] Atiyah, M. F., Bot, R., Gårding, L., Lacunas for hyperbolic differential operations with constant coefficients II, *Acta Math.*, **131** (1973), 145 – 206.

[A5] Gårding, L., Sharp fronts of paired oscillatory integrals, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, **12**, suppl. (1977), 53 – 68.

仇庆久 译

缺项幂级数 [lacunary power series; лакунарный степенной ряд]

具有空档 (缺项) 的级数

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}, \qquad (*)$$

因而指数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 并不取遍所有自然数. 基于序列 $\{\lambda_k\}$ 的性态，可以得到级数 (*) 的许多性质. 例如，如果

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > \theta\lambda_k, \ k = 0, 1, \cdots, \theta > 0,$$

且级数 (*) 的收敛半径为 $R (0 < R < \infty)$，则圆周 $|z| = R$ 上所有点都是 $f(z)$ 的奇点 (Hadamard 缺项定理 (Hadamard gap theorem)). 加强这一定理的是 Fabry 缺项定理 (见 **Fabry 定理** (Fabry theorem)). 如果下密度

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{k}{\lambda_k} = 0,$$

则 $f(z)$ 是具有单连通存在域的单值解析函数 (Pólya 定理 (Pólya theorem)). 亦见**过度收敛** (overconvergence).

参考文献

[1] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

А. Ф. Леонтьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979 (中译本: E. C. 梯其玛希, 函数论, 科学出版社, 1962).

[A2] Dienes, P., The Taylor series, Oxford Univ. Press & Dover, 1957.

沈永欢 译

缺项序列 [lacunary sequence; лакунарная последовательность]

数列$\{n_k\}$，其项满足$n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$；这种序列的类记作$\Lambda$，特别应用于**缺项级数**（lacunary series）和**缺项三角级数**（lacunary trigonometric series）理论中．类Λ有各种推广．例如类B_2：$\{n_k\} \in B_2$，如果存在A，使对任何整数m，方程$[n_{k_1} \pm n_{k_2}] = m$（$n_{k_1} > n_{k_2}$，$[a]$是数$a$的整数部分）解的个数不超过$A$；类$R$：$\{n_k\} \in R$，如果存在$A$，使对任何$p = 2, 3, \cdots$和任何整数$m$，方程$[n_{k_1} \pm \cdots \pm n_{k_p}] = m$（$n_{k_1} > \cdots > n_{k_p}$）解的个数不超过$A^p$；还有类$\Lambda_\sigma$，$B_{2\sigma}$，$R_\sigma$，分别由可划分为类$\Lambda$，$B_2$，$R$中有限多个序列的序列所组成．

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961（英译本：Bary (Bari), N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）.

В. Ф. Емельянов 撰　沈永欢 译

缺项级数［lacunary series；лакунарный ряд］

关于**缺项函数系**（lacunary system）的级数．例如，**缺项三角级数**（lacunary trigonometric series）；**缺项幂级数**（lacunary power series）；Rademacher 级数（见 **Rademacher 函数系**（Rademacher system））；具有数学期望零的独立函数的级数；具有在有理数域上独立的指数的 **Dirichlet 级数**（Dirichlet series）；等等．

В. Ф. Емельянов 撰　张鸿林 译

空隙空间［lacunary space；лакунарное пространство］

某种确定的“可动性程度”的具有**仿射联络**（affine connection）的空间或 **Riemann 空间**（Riemannian space）．空隙空间由完全的**运动群**（group of motions）的阶数定义，即由给定空间的运动群的参数的最大个数定义．因此，通常的n维仿射空间容有最大阶数n^2+n的运动群．

具有仿射联络的其他空间的完全的运动群的阶数属于自然数区间$[1, n^2+n]$，但这区间中的每个数并非都可能是一个完全的运动群的阶数．不是完全的运动群阶数的数所组成的最大长度区间称为空隙（lacunae），而空隙关于已知区间的补集称为稠密区间（intervals of condensation）．一个空间称为第k空隙空间（space of k-th lacunarity），若它的完全的运动群阶数属于第k个稠密区间．以包含最大阶数的稠密区间进行计算．仿射联络空间中熟知的“刚”体运动的参数分布见表1．它涉及完全的运动群的阶数——刚体的可动性程度或自由度的同义词．在 Riemann 空间中决定刚体和类似物体的可动性的可能程度的问题对于具有固定符号之度量的空间只有部分地解答．一般情况下已经知道的可动性程度和实现它们的 Riemann 空间如表2所示．

A_2	A_3	A_n	空间和空隙的类型
6	12	n^2+n	第一空隙空间
			第一空隙
4	9	n^2	第二空隙空间
•	•		
•	•		
1	1	n^2-1	
			第二空隙
		n^2-n+1	第三空隙空间
		•	
		n^2-n-2	
			第三空隙
		n^2-2n+5	第四空隙空间
		•	
		•	•
		3	•
		2	•
		1	•

表1．具有仿射联络的n维空间A_n中完全的自同构群的阶数．

V_2	V_3	V_4	V_5	V_n	空间和空隙的类型
3	6	10	15	$\frac{n(n+1)}{2}$	第一空隙空间（常曲率空间）
					第一空隙
	4	8	11	$\frac{n(n-1)}{2}+1$	第二空隙空间
	•	•	•		
1	•	•	•		
	•	•	•		
	1	1	1	$\frac{n(n-1)}{2}$	
					第二空隙
				$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+5$	
				•	第三空隙空间
				•	•
				3	•
				2	•
				1	•

表2．n维 Riemann 空间V_n的完全的自同构群的阶数．

参考文献

[1] Егоров, И. П., в сб.: Итоги науки. алгебра. Топология. Геометрия., 1965, М., 1967, 375 - 428.
[2] Егоров, И. П., в сб.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, **10** (1978), М., 147 - 191.
[3] Егоров, И. П., Геометрия, М., 1979.

И. П. Егоров 撰

【补注】 具有（最大）维数$n(n+1)/2$的等距群的n

维 Riemann 流形是 n 维 Euclid 空间、n 维球面 S^n、n 维实射影空间 $P_n(R)$ 和 n 维单连通双曲空间．

对于维数 $n>4$ 的具有"可动性程度"至少为 $1+n(n-1)/2$ 的 Riemann 流形及对应的等距群，可见[A1]，54页上的表．

在其他内容方面，例如有下述 Bochner 定理([A4])：若 M 是具负 Ricci 曲率的紧 Riemann 流形，则 M 的等距群是有限的．

设 M 是 n 维流形．对每个 Riemann 度量 ds^2，令 $G(M, ds^2)$ 是 (M, ds^2) 的等距群．M 的**对称度**(degree of symmetry)就是 $\dim(G(M, ds^2))$ 的最大值．

关于维数 $\geqslant 2+(n-1)(n-2)/2$ 的等距群的可能情况，见[A2]，[A3]．

参考文献

[A1] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[A2] Kobayashi, S. and Nagano, T., Riemannian manifolds with abundant symmetrics, in Differential geometry (in honor of K. Yano), Kinokyniya, 1972, 195 – 220.

[A3] Wakakuwa, H., On n-dimensional Riemannian spaces admitting some groups of motions of order less than $n(n-1)/2$, *Tôhoku Math. J.*, **6** (1954), 121 – 134.

[A4] Bochner, S., Vector fields and Ricci curvature, *Bull. AMS.*, **52** (1946), 776 – 797.

【译注】 关于容许多少参数的等距群及其实现它们的 Riemann 空间问题．我国学者也有不少研究([B1])．1964年胡和生给出了确定空隙的一般方法，并完全给出了前八个空隙和对应 Riemann 空间的局部线素形式，见[B2]．

参考文献

[B1] 苏步青，现代微分几何学概论，上海科学技术出版社，1961.

[B2] 谷超豪，齐性空间微分几何学，上海科学技术出版社，1965.

沈一兵 译

缺项函数系 [**lacunary system** 或 lacunary system of functions; **лакунарная система**]，S_p **函数系**(S_p-system of functions)，阶 $p>2$ 的

空间 L_p 中满足下述条件的标准正交函数系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$：如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \qquad (*)$$

在 L_2 中收敛，则其和属于 L_p．如果对任何 $p>2$ 函数系 $\{\varphi_n\}$ 是 S_p 函数系，则它称为一个 S_∞ **函数系**(S_∞-system of functions)．S. Banach 证明(见[2])，从在 L_p 中有界、在 L_2 中标准正交的任何函数序列中，必可选出一个 S_p 函数系．为使标准正交函数系 $\{\varphi_n\}$ 是 S_p 函数系，其必要充分条件为：存在只依赖于 p 的常数 μ_p，使对所有 N 和 $\{a_n\}$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right\|_{L_p} \leqslant \mu_p \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right\|_{L_2}.$$

如果 $\{\varphi_n\}$ 是关于某个 $p>2$ 的 S_p 函数系，则存在常数 m，使对所有 N 和 $\{a_n\}$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right\|_{L_2} \leqslant m \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n\right\|_{L_p}.$$

具有这一性质的函数系称为 Banach **函数系**(Banach system of functions)．这些定义均可推广到非正交函数系(例如见[3])．有时缺项函数系理解为其级数具有**缺项三角级数**(lacunary trigonometric series)的一个或几个性质的函数系；它们依这些性质而取不同的名称．例如，与缺项三角级数的唯一性理论相联系的有 ε 唯一性缺项系概念．函数系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 ε 唯一性系，如果存在数 $\varepsilon>0$，使得级数(*)可能除去一个测度小于 ε 的集合外，处处收敛于零蕴涵其所有系数均等于零．

参考文献

[1] Kaczmarz, S., Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Alexits, G., Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1960.

[3] Гапошкин, В. Ф., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 6, 3 – 82 (英译本: Gaposhkin, V. F., Lacunary series and independent functions, *Russian Math. Surveys*, **21** (1966), 6, 1 – 82).

В. Ф. Емельянов 撰 沈永欢 译

缺项三角级数 [**lacunary trigonometric series**; **лакунарный тригонометрический ряд**]

形式为

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \qquad (1)$$

的级数，其中

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \lambda > 1.$$

1872年，K. Weierstrass 利用型(1)的级数给出了一个处处连续处处不可微的函数．1892 年，J. Hadamard 应用级数(1)(并称之为缺项级数)于函数的**解析延拓**(analytic continuation)的研究．缺项三角级数的系统研究始于 P. Fatou 的论文(1906)，在文中他证明了，由对 $\lambda>3$ 的缺项三角级数的处处收敛性可推得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty. \qquad (2)$$

缺项三角级数具有本质上不同于一般**三角级数**(trigonometric series)所具有的那些性质. 例如,构造出 Fourier 级数几乎处处发散的可和函数的第一个例子(1923)的 A. H. Колмогоров, 在 1924 年证明了缺项 Fourier 级数几乎处处收敛; A. Zygmund 于 1948 年证明了, 如果两个缺项三角级数的和在一个正测度集合上相同, 则这两个级数是恒等的. 对于缺项三角级数的许多应用来说, 20 世纪 30 年代由 Zygmund 所发现的级数(1)的性质对于它的系数的依赖性是十分重要的. 于是, 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < +\infty, \tag{3}$$

则级数(1)是一个属于所有空间 $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ 的函数 f 的 Fourier 级数, 因此它几乎处处收敛. 存在仅依赖于 p 和 λ 的常数 $A_p, B_p > 0$ 使得

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant B_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2}.$$

如果条件(3)不满足, 则级数(1)几乎处处发散, 而且还几乎处处不能用任意 Toeplitz 方法求和(见 **Toeplitz 矩阵**(Toeplitz matrix))(因而它不是 **Fourier 级数**(Fourier series)). 如果级数(1)在某个区间的每一点上都收敛, 则(2)成立. 如果级数(1)的系数是 $o(1/n_k)$, 则它的和是一个连续的光滑函数, 恰在使级数(1)形式上逐项微分所得级数收敛的那些点上可微.

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] Ульянов, П. Л., 《Успехи матем. наук》, **19** (1964), 3 - 69.

[4] Гапошкин, В. Ф., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 3 - 83.

[5] Kahane, J. P., Some random series of functions, Cambridge Univ. Press, 1985.

[6] Kahane, J. P., Séries de Fourier absolument convergentes, Springer, 1970.

[7] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

В. Ф. Емельянов 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

Lagrange 括号 [Lagrange bracket; Лагранжа скобки], 关于变量 u 和 v 的

形如

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right) \equiv [u, v]_{p,q} \tag{*}$$

的和, 其中 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ 和 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 是 u 和 v 的某些函数.

如果 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ 和 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 是正则变量, 而 $Q=Q(q, p)$, $P=P(q, p)$ 是正则变换, 则 Lagrange 括号是这一变换的不变量

$$[u, v]_{q,p} = [u, v]_{Q,P}.$$

为此原因, (*)式的右端的下标 q, p 常常略而不记. 当变量 u 和 v 与 $2n$ 个变量 q, p 中的某一对相符合时, 称这样的 Lagrange 括号为基本的. 从这样的 Lagrange 括号可以形成三个矩阵:

$$[p, p] = \{[p_i, p_j]\}_{i,j=1}^{n}, \ [q, q], [q, p],$$

前两者是零矩阵, 最后一个是单位矩阵. 在 Lagrange 括号和 **Poisson 括号**(Poisson brackets)之间存在着一定的联系. 亦即如果函数 $u_i = u_i(q, p)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 实现异形化 $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, 则从元素 $[u_i, u_j]$ 和 (u_j, u_i) 形成的矩阵互为反矩阵.

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Oeuvres, 6, Gauthier-Villars, 1873.

[2] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

[3] Лурье, А. И., Аналитическая механика, М. 1961.

[4] Goldstein, H., Classical Mechanics, Addison-Wesley, 1957.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 如果 ψ 表示映射: $(u, v) \mapsto (q(u,v), p(u,v))$, 则 Lagrange 括号等于向量 $\partial\psi/\partial u$ 及 $\partial\psi/\partial v$ 相对于相空间中正则辛型(见**辛流形**(symplectic manifold))的积. 更一般地, 如 ω 是光滑簇 M 上的一个辛型, 而 ψ 是从表面 S 向 M 的光滑映射, 则 $\psi^*\omega$ 是 S 上的面积形. 如果 ds 是 S 上的标准面积形, 则 S 上的 $\psi^*\omega/ds$ 可以称为 ψ 的 Lagrange 括号. 见[A1]第3章.

参考文献

[A1] Abraham, R., Marsden, J. E., Foundations of mechanics, Benjamin/Cummings, 1978.

[A2] Gantmacher, F. R., Luctures in analytical mechanics, Mir, 1975 (译自俄文).

沈 青 译

Lagrange 方程 [Lagrange equation; Лагранжа уравнение]

一种一阶常微分方程, 它关于其中的导数不能解出, 但关于自变量和未知函数却是线性的:

$$F(y')x + G(y')y = H(y'). \tag{1}$$

此方程因 J. L. Lagrange 而得名(1759, 见[1]);

它也为 J. d'Alembert 所研究，因而有时称为 d'Alembert 方程（d'Alembert equation）. Lagrange 方程的一种特殊情形是 **Clairaut 方程**（Clairaut equation）.

通过引进参数法（method of parameter introduction）（微分方法（method of differentiation）），Lagrange 方程总可由求积来解出. 例如，假定（1）可化为如下形式:

$$y=f(y')x+g(y'),\ f(y')\neq y'. \tag{2}$$

引进参数 $p=y'$ 后，对（2）的两边取全微分（见**全导数**（total derivative）），考虑到关系 $dy=pdx$，就得到一阶线性微分方程

$$[p-f(p)]\frac{dx}{dp}-f'(p)x=g'(p).$$

如果 $x=\Phi(p,C)$ 是此方程的解（其中 C 是任意常数），则（2）的解可写为参数形式:

$$x=\Phi(p,C),\ y=f(p)\Phi(p,C)+g(p).$$

如果 p_0 是方程 $p=f(p)$ 的一个孤立根，则 $y=f(p_0)x+g(p_0)$ 也是（2）的解；它可能是**奇解**（singular solution）.

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Sur l'intégration d'une équation différentielle, 载于 J. A. Serret 编辑的 Oeuvres, Vol. 1, G. Olms, reprint, 1973, pp. 21 – 36.

[2] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959（中译本: В. В. 史捷班诺夫，微分方程教程，高等教育出版社，1955）.

Н. Х. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

沈永欢 译

Lagrange 方程（力学中的）[Lagrange equations (in mechanics); Лагранжа уравнения механики]

描述力学系统在施加于它们的力的作用下的运动的二阶常微分方程. 方程由 J. L. Lagrange（[1]）建立，有两种形式：第一类 Lagrange 方程，或 Descartes 坐标系中有未定 Lagrange 因子的方程；以及第二类方程，或广义 Lagrange 坐标中的方程.

第一类 Lagrange 方程（Lagrange equations of the first kind）描述的既有仅为几何关系式

$$f_s(x_1,\cdots,x_{3N},t)=0,\ s=1,\cdots,k,\ f_s(x,t)\in C^2 \tag{1}$$

所限制的完整系统的运动，又有除了(1)外还受到运动学关系式

$$\varphi_r(x_1,\cdots,x_{3N},\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_{3N},t)=0, \tag{2}$$

$$r=1,\cdots,m,\ \varphi_r(x,\dot{x},t)\in C^1,$$

所限制的非完整系统的运动，其中 x_ν 与 $\dot{x}_\nu=dx_\nu/dt$ 为各点的 Descartes 坐标和速度，N 是系统的点的数目，t 是时间，$m_{3p-2}=m_{3p-1}=m_{3p}$ 是坐标为 x_{3p-2}，x_{3p-1}，x_{3p} 的第 p 个点的质量.

假设关系式(1)和(2)是独立的，即矩阵 $\|\partial f_s/\partial x_\nu\|$ 和 $\|\partial\varphi_r/\partial\dot{x}_\nu\|$ 的秩分别等于 k 和 m. 第一类 Lagrange 方程有如下形式：

$$m_\nu\ddot{x}_\nu=X_\nu+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_\nu}+\sum_{r=1}^{m}\mu_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial\dot{x}_\nu}, \tag{3}$$

$$\nu=1,\cdots,3N$$

其中 λ_s 和 μ_r 为未定 Lagrange 因子，正比于约束的反作用力，X_ν 是给定主动力在坐标轴上的投影，而作用在第 p 个点上的力 F_p 的投影为 X_{3p-2}，X_{3p-1}，X_{3p}；$\ddot{x}_\nu=d\dot{x}_\nu/dt$.

微分方程(3)还应附加上 $k+m$ 个方程(1)与(2)，结果就得到 $3N+k+m$ 个变量 x_ν，λ_s，μ_r 的 $3N+k+m$ 个方程的方程组. 实践中，第一类 Lagrange 方程通常应用于未知数不多的方程组.

第二类 Lagrange 方程（Lagrange equations of the second kind）只描述为约束（1）所限制的完整系统的运动. 通过引入 $n=3N-k$ 个独立的广义 Lagrange 坐标 q_i，借助它们系统的所有可能的位置可以对于 q_i 的给定值由如下等式（它们使方程（1）变为恒等式）

$$x_\nu=x_\nu(q_1,\cdots,q_n,t),\ x_\nu(q_i,t)\in C^2 \tag{4}$$

得到，可以对于每个时刻 t 建立起系统的可能位置与 n 维位形空间（q_1，$\cdots$，q_n）的每一区域的点之间的一一对应关系. 在定常限制（1）的情况下，总可以如此选择变量 q_i，使得时间 t 不在(4)中出现. 而且，借助(4)可以写出相应于系统的所有可能位移的所有主动力 F_p 的基本功之和的表达式:

$$\sum_{p=1}^{N}F_p\delta r_p=\sum_{\nu=1}^{3N}X_\nu\delta x_\nu=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i,$$

以及系统的动能:

$$T(q_i,\dot{q}_i,t)=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\dot{x}_\nu^2=T_2+T_1+T_0.$$

这里

$$Q_i=\sum_{\nu=1}^{3N}X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}$$

是相应于坐标 q_i 的广义力，$T_s(q_i,\dot{q}_i,t)$ 为广义速度 $\dot{q}_i$ 的 s 次齐式，且

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\ T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\dot{q}_i,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu\left[\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right]^2,$$

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j},$$

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

在定常约束情况下，$T = T_2$.

第二类 Lagrange 方程有如下形式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ i = 1, \cdots, n. \tag{5}$$

方程(5)形成未知函数 q_i 的 n 个二阶常微分方程的方程组．它们的形式不因 Lagrange 坐标的选择而变．这一运动方程组有最小的阶数 $2n$．在这方面，以及由于在(5)中没有约束的反作用出现，方程(5)与第一类 Lagrange 方程(3)比较有很大的优越性．在积分(5)以后，可从表达系统的各点的 Newton 第二定律的方程决定约束的反作用(亦见 **Newton 力学定律**(Newton laws of mechanics)).

在位势广义力的情况下，当有力函数 $U(q_1, \cdots, q_n, t)$ 存在，从而 $Q_i = \partial U/\partial q_i (i = 1, \cdots, n)$ 时，方程(5)的形式为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,\ i = 1, \cdots, n, \tag{6}$$

其中 $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + U$ 称为 Lagrange 函数，或称动理学位势．

如果 $\partial L/\partial t \equiv 0$，或 $\partial L/\partial q_\alpha \equiv 0$，则方程(6)有一个广义能量积分

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = T_2 - T_0 - U = \text{常数},$$

或者一个相应于循环坐标 q_α 的循环积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \beta_\alpha = \text{常数}.$$

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Méchanique analytique, 1－2, A. Blanchard, reprint, 1965.

В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

[A2] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978(译自俄文).

[A3] Gantmacher, F., Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975(译自俄文).

沈 青 译

Lagrange 函数 [**Lagrange function**; **Лагранжа функция**]

一种在求解多变量函数和泛函的条件极值问题时所利用的函数．通过 Lagrange 函数，可以写出条件极值问题的最优性必要条件．这时不需要用一些变量来表示另一些变量或者考虑并非所有变量都是独立的这一事实．通过 Lagrange 函数所得到的必要条件形成一个封闭的关系式组，所要求的条件极值问题的最优解就包含在它的解中．Lagrange 函数既用于线性和非线性规划的理论问题中，也用于某些计算方法的构造中．

例如，假设有下列多变量函数的条件极值问题：求函数

$$f(x_1, \cdots, x_n) \tag{1}$$

的最大值或最小值，条件为

$$g_i(x_1, \cdots, x_n) = b_i,\ i = 1, \cdots. \tag{2}$$

$$m;\ m < n.$$

由表达式

$$F(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1[b_1 - g_1(x)] + \cdots + \lambda_m[b_m - g_m(x)] \tag{3}$$

定义的函数 $F(x, \lambda)$ 称为 Lagrange 函数(Lagrange function)，数 λ_i 称为 **Lagrange 乘子**(Lagrange multipliers)．下列称为乘子法则(multiplier rule)的结论成立：如果 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ 是条件极值问题(1)，(2)的解，那么至少存在一个非零 Lagrange 乘子组 $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1, \cdots, \lambda_m^*)$，使得点 (x^*, λ^*) 是 Lagrange 函数关于变量 x_j 和 $\lambda_i (i \neq 0)$ 的驻点，后者在这里被看作独立变量．

对于 Lagrange 函数的驻点的必要条件导致 $m + n$ 个方程的组:

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \lambda_0^*\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \tag{4}$$

$$j = 1, \cdots, n,$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x^*) = 0,\ i = 1, \cdots, m. \tag{5}$$

所合成的方程组的关系式(5)就是条件(2)．点 x^* 给出 Lagrange 函数 $F(x, \lambda^*)$ 关于 x 的通常的(无条件)极值．

对于大多数实际问题来说，(3)和(4)中的 λ_0^* 的值可取为一．然而，存在这样的例子(见[1]或[4])，其中乘子法则对于 $\lambda_0^* = 1$ 不满足，而对于 $\lambda_0^* = 0$ 满足．为确定有可能区分情形 $\lambda_0^* = 1$ 和 $\lambda_0^* = 0$ 的条件，考虑(见[2])矩阵 G 和 G_f:

$$G=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}\end{matrix}\right\|,\quad G_f=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}\\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{matrix}\right\|$$

设 $r(G)$ 是 G 在最优点 x^* 上考虑时的秩. 如果 $r(G_f)=r(G)$, 那么 $\lambda_0^*=1$; 如果 $r(G_f)>r(G)$, 那么为了满足乘子法则, 必须设 $\lambda_0^*=0$. 尤其是, 如果 $r(G_f)=r(G)=m$(在实际问题中最经常发生的情形), 那么 λ_i^* 可唯一确定, 但是如果 $r(G_f)>r(G)$ 或 $r(G_f)=r(G)<m$, 那么 λ_i^* 不能唯一确定. 根据所考虑的情形, 可置 λ_0^* 等于 0 或 1. 这时, (4), (5) 变为有 $m+n$ 个未知量 $x_1^*, \cdots, x_n^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*$ 的 $m+n$ 个方程的组. 对于 Lagrange 乘子 λ_i^*, 有可能给出它们的有明确物理意义的解释 (见 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers)).

在被最优化的函数 $f(x)$ 是二次函数以及条件 (2) 是线性的情况下, 必要条件组 (4), (5) 变为线性方程组, 它的求解不会带来困难. 在一般情况下, 用 Lagrange 函数得到的条件极值问题的必要条件组 (4), (5) 是非线性的, 对它只能用诸如 **Newton 法** (Newton method) 之类的迭代法来求解. 除了解非线性方程组的计算困难之外, 主要困难是如何得到满足必要条件的所有解的问题. 没有一种计算过程能保证得到组 (4), (5) 的所有解, 这就成为应用 Lagrange 乘子法的限制之一.

Lagrange 函数也可在非线性规划问题中运用, 后者不同于经典的条件极值问题之处在于它既有不等式类型约束, 也有等式类型约束: 求函数

$$f(x) \tag{6}$$

的最小值或最大值, 条件是

$$\left.\begin{aligned} g_i(x)\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,m_1,\\ g_i(x)\geqslant b_i,\ i=m_1+1,\cdots,m_2,\ m_1\leqslant m_2,\\ g_i(x)=b_i,\ i=m_2+1,\cdots,m,\ m_2\leqslant m,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$x\geqslant 0. \tag{8}$$

为导出问题 (6) - (8) 的最优性必要条件, 引入 Lagrange 函数

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-g_i(x)]. \tag{9}$$

为明确起见, 考虑求 $f(x)$ 的最大值情形. 假设 $x^*=(x_1^*, \cdots, x_n^*)\geqslant 0$ 给出 $f(x)$ 在限制 (7), (8) 下的最大值, 且限制在 x^* 上满足正则要求 (见 [2]); 令 J 是 $j=1, \cdots, n$ 中满足 $x_i^*>0$ 的指标 j 的集合, J_0 是满足 $x_j^*=0$ 的指标 j 的集合, 以及 I 是 $i=1, \cdots, m_2$ 中使得限制 (7) 在 x^* 上作为严格不等式来满足的指标集合. 那么存在这样的向量 $\lambda^*=(\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{对于 } i=1,\cdots,m_1,\ \lambda_i^*\geqslant 0,\\ &\text{对于 } i=m_1+1,\cdots,m_2,\ \lambda_i^*\leqslant 0,\\ &\text{对于 } i=m_2+1,\cdots,m,\ \lambda_i^* \text{ 的符号不定},\\ &\text{对于 } i\in I,\ \lambda_i^*=0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

使得

$$\frac{\partial F(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\begin{cases}=0, & \text{对于 } j\in J,\\ \leqslant 0, & \text{对于 } j\in J_0,\end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\partial F(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i}=$$

$$=b_i-g_i(x^*)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{对于 } i=1,\cdots,m_1,\\ \leqslant 0, & \text{对于 } i=m_1+1,\cdots,m_2,\\ =0, & \text{对于 } i=m_2+1,\cdots,m.\end{cases} \tag{12}$$

所提出的必要条件推广了条件 (4), (5). 利用函数 $F(x, \lambda)$ 的**鞍点** (saddle point) 的概念可以解释这些条件. 在鞍点 (x^*, λ^*) 上, 函数 $F(x, \lambda)$ 满足不等式

$$F(x,\lambda^*)\leqslant F(x^*,\lambda^*)\leqslant F(x^*,\lambda).$$

使条件 (10) - (12) 成立的点 (x^*, λ^*) 满足对于 Lagrange 函数 $F(x, \lambda)$ 在 $x\geqslant 0$ 和使 (10) 成立的 λ 的集合上的鞍点的必要条件. 在 $f(x)$ 对于 $x\geqslant 0$ 为凹函数以及 $g_i(x)$ 对于 $\lambda_i^*>0$ 为凸, 而对于 $\lambda^*<0$ 为凹 ($i=1, \cdots, m$) 的情况下, 必要条件也变为充分条件, 即由必要条件所求得的点 (x^*, λ^*) 是 Lagrange 函数 $F(x, \lambda)$ 对于 $x\geqslant 0$ 和满足 (10) 的 λ 的鞍点, 并且 $f(x^*)$ 是 $f(x)$ 在限制 (7), (8) 下的绝对最大值.

除了以形式 (9) 来表达的 Lagrange 函数以外, 还有以其他形式来表达的 Lagrange 函数, 它与前者的不同之处在于 Lagrange 乘子的符号. 必要条件的表达形式也有所改变. 假设给定下列非线性规划问题: 求

$$f(x) \tag{13}$$

的最大值，条件为

$$g_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, m, \qquad (14)$$

$$x \geqslant 0. \qquad (15)$$

对于 $i = 1, \cdots, m_2$ 的限制（7）可通过简单的变换而归结为（14）. 等式型条件 $g_i(x) = b_i\ (i > m_2)$ 可代替为不等式 $g_i(x) - b_i \geqslant 0$ 和 $b_i - g_i(x) \geqslant 0$，从而也可以归结为形式（14）.

假设 Lagrange 函数记为形式

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \qquad (16)$$

I 为 $i = 1, \cdots, m$ 中使限制（14）作为严格不等式来满足的指标 i 的集合. 如果 $x^* \geqslant 0$ 是问题（13）－（15）的最优解，那么当限制满足正则要求时，存在向量 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*)$，

$$\lambda_i^* \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, m;\ \lambda_i^* = 0,\ i \in I, \qquad (17)$$

使得

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \begin{cases} = 0, & \text{对于 } j \in J, \\ \leqslant 0, & \text{对于 } j \in J_0, \end{cases} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^*) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, m \qquad (19)$$

（见[2]，[3]）. 考虑到 x_j^* 和 λ_i^* 取非负值，有时记（17）－（19）为下列形式:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0.$$

如果限制（7）或（14）是线性的，那么上面提到的限制正则条件总满足. 因此，在线性限制情况下，为导出必要条件仅需假定 $f(x)$ 是可微的.

如果在问题（13）－（15）中，函数 $f(x)$ 和 $g_i(x)$（$i = 1, \cdots, m$）是凹的，那么满足必要条件（17）－（19）的点 (x^*, λ^*) 是 Lagrange 函数（16）的鞍点，且 x^* 给出一个绝对最大值点. 在这种情况下，Lagrange 函数有鞍点这一事实可以在 $f(x)$ 和 $g_i(x)$ 上不加任何可微性假定而得到证明.

Lagrange 函数的类似也在变分学中当考虑泛函的条件极值问题时被运用. 在这里，把条件极值问题的最优性必要条件记成对于某个用 Lagrange 乘子构造的合成泛函（Lagrange 函数的类似）的必要条件是很方便的. 例如，假设给定 **Bolza 问题**（Bolza problem）：求泛函

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

$$f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ g\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

的最小值，其中出现等式型微分约束：

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0,\ \varphi\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,$$

$$m < n,$$

和边界条件：

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0,$$

$$\psi\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p,$$

$$p \leqslant 2n + 2.$$

在这个条件极值问题中，必要条件是作为泛函（见[4]）

$$I(x, \lambda, e) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \varphi_i(t, x, \dot{x}) \right) dt + \lambda_0 g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) + \sum_{\mu=1}^{p} e_\mu \psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2))$$

的无条件极值问题的必要条件来得到的，这一泛函则通过 Lagrange 乘子

$$\lambda_0,\ \lambda_i(t),\ i = 1, \cdots, m;\ e_\mu,\ \mu = 1, \cdots, p$$

来形成. 这些必要条件形成确定最优解 $x^*(t)$ 和相应的 Lagrange 乘子 $\lambda_i^*(t)$ 和 e_μ^* 的封闭关系式组，并以具体的表达形式记为 **Euler 方程**（Euler equation），**（对于变分极值问题的）Weierstrass 条件**（Weierstrass condition（for a variational extremum））和**横截条件**（transversality condition）.

参考文献

[1] Смирнов, В. И., Курс бысшей математики, 23 изд., 1, М., 1974（中译本: 斯米尔诺夫, В. И., 高等数学教程, 第一卷, 高等教育出版社, 1952）.

[2] Hadley, G. F., Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964.

[3] Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., Nonlinear programming, in Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Univ. Calif. Press, 1951, 481－492.

[4] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 早在 60 年代以来，人们就对于实向量空间上的广义实值函数发展某种推广的微分法作了许多努力；这种工作在分析最优化问题时很有用．在这类问题中，其范围涉及从经济学和运筹学中的模型直到对应偏微分方程的变分原理，经常必须处理在任何传统的双边意义下都不可微、并且甚至在某些点上可能取无限值的函数．见[A2]．

参考文献

[A1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[A2] Rockafellar, R. T., The theory of subgradients and its applications to problems of optimization. Convex and nonconvex functions, Meldermann, 1981.

[A3] Avriel, M., Nonlinear programming: analysis and methods, Prentice-Hall, 1976（中译本：M．阿弗里尔，非线性规划——分析与方法，上海科学技术出版社，1979，1980）.

[A4] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A5] Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962（译自俄文）.

【译注】 Lagrange 函数的概念实际上可以对任何条件极值问题来提出．其典型讨论如下：给定在任意集合 X 上取广义实值的函数 $f, g_i, h_j: X\to \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$，$i=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,q$．考虑下列条件极值问题：

$$\begin{cases}\min f(x),\\ g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,p;\\ h_j(x)=0,\ j=1,\cdots,q.\end{cases}\tag{1}$$

定义该问题的 Lagrange 函数如下：

$$L: X\times \mathbf{R}_+^p\times\mathbf{R}^q\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\},$$

$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)+\sum_{i=1}^p\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^q\mu_j h_j(x).\tag{2}$$

那么不难验证，条件极值问题（1）等价于下列"无条件极值问题"：

$$\begin{cases}\min\sup_{\lambda\in\mathbf{R}_+^p,\ \mu\in\mathbf{R}^q}L(x,\lambda,\mu),\\ x\in X.\end{cases}\tag{3}$$

但是这样的转化只是形式上的．为得出真正的无条件极值问题，引入问题（3）的对偶问题：

$$\begin{cases}\max\inf_{x\in X}L(x,\lambda,\mu),\\ \lambda\in\mathbf{R}_+^p,\ \mu\in\mathbf{R}^q.\end{cases}\tag{4}$$

由于总有

$$L(x,\lambda,\mu)\geqslant\inf_x L(x,\lambda,\mu),$$

从而

$$\inf_x\sup_{\lambda,\mu}L(x,\lambda,\mu)\geqslant\sup_{\lambda,\mu}\inf_x L(x,\lambda,\mu).\tag{5}$$

所谓问题（1）的 **Lagrange 乘子**（Lagrange multiplier）$(\lambda^*,\mu^*)\in\mathbf{R}_+^p\times\mathbf{R}^q$ 是指：i）$(\lambda^*,\mu^*)\in\mathbf{R}_+^p\times\mathbf{R}^q$ 是对偶问题（4）的解；ii）（5）中的等号成立．在这种情况下，显然有

$$\inf_x\sup_{\lambda,\mu}L(x,\lambda,\mu)=\inf_x L(x,\lambda^*,\mu^*),$$

并由此可得，如果 x^* 是问题（1）或（3）的解，那么它也一定是下列问题的解：

$$\begin{cases}\min L(x,\lambda^*,\mu^*),\\ x\in X.\end{cases}\tag{6}$$

这是个真正的无条件极值问题．上述讨论说明，对于问题（6）的解的必要条件也一定是对于问题（1）的解的必要条件．但反之一般不成立，除非已知两个问题都只有唯一解．

此外，还有下列**鞍点**（saddle point）定理成立：$x^*\in X$ 和 $(\lambda^*,\mu^*)\in\mathbf{R}_+^p\times\mathbf{R}^q$ 是问题（1）的解和 Lagrange 乘子的充要条件为 (x^*,λ^*,μ^*) 是 Lagrange 函数的鞍点，即对于任何 $x\in X$，$\lambda\in\mathbf{R}_+^p$，$\mu\in\mathbf{R}^q$，有

$$L(x^*,\lambda,\mu)\leqslant L(x^*,\lambda^*,\mu^*)\leqslant L(x,\lambda^*,\mu^*).$$

在这里，对集合 X 和函数 f, g_i, h_j 未作任何假定．当 X 为有限维空间时，由此就可导出对数学规划的有关结论；当 X 为无限维空间，特别是函数空间时，由此就可导出对变分学和最优控制的有关结论；当 X 为离散集时，由此也能得到对离散规划或组合最优化的有关结论，但对此尚未得到充分注意．如果所涉及的函数都有可微性，由通常的无条件极值问题的可微性必要条件就可由此导出条件极值问题的可微性条件．

问题（1）中的不等式约束和等式约束条件也可以有"无限多个"，即它们都可以用无限维空间上的算子形式给出（对不等式约束自然需要算子的象空间上有序关系）．这时对应的 Lagrange 乘子将是对应的象空间上的线性泛函．本文中涉及变分学的后半部分就有这样的例子．最优控制的 **Pontryagin 最大值原理**（Pontryagin maximum principle）中的 Lagrange 乘子（协状态、横截条件）则是更著名的例子．不过在那里是用 Lagrange 函数（泛函）的转换形式——Hamilton 函数（泛函）来导出的．

问题（1）的 Lagrange 乘子不一定存在．通常需对目标函数和约束条件作例如凸性之类的假设才能保

证 Lagrange 乘子的存在. 这方面最著名的定理是数学规划中的 **Kuhn-Tucker 定理** (Kuhn-Tucker theorem).

参考文献

[B1] 史树中, 凸分析, 上海科学技术出版社, 1990.

史树中 译

Lagrange 插值公式 [**Lagrange interpolation formula**; **Лагранжа интерполяционная формула**]

给出函数 $f(x)$ 在结点 $x_0, \cdots, x_n$ 上的 n 次插值多项式 (Lagrange 插值多项式 (Lagrange interpolation polynomial)) 的公式:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\ . \tag{1}$$

当诸 x_i 为等距时, 即 $x_1-x_0=\cdots=x_n-x_{n-1}=h$, 利用记号 $(x-x_0)/h=t$ 就可将 (1) 化成形式

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=$$

$$=(-1)^n\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{f(x_i)}{t-i}\ . \tag{2}$$

表达式 (2) 称为 Lagrange 等距结点 (equidistant nodes) 插值公式, 其中 $f(x_i)$ 的系数

$$(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(t-i)n!}$$

称为 Lagrange 系数 (Lagrange coefficients).

如果 f 在区间 $[a,b]$ 上具有 $n+1$ 阶导数, 又如果所有的插值结点都在此区间上且对任一点 $x\in[a,b]$ 记

$$\alpha_x=\min\{x_0,\cdots,x_n,x\},\ \beta_x=\max\{x_0,\cdots,x_n,x\},$$

那么必存在一点 $\xi\in[\alpha_x,\beta_x]$ 使

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)\omega_n(x)}{(n+1)!},$$

其中

$$\omega_n(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\ .$$

如果导数 $f^{(n+1)}$ 的绝对值在 $[a,b]$ 上不超过常数 M, 又如果诸插值结点取成 $n+1$ 次 Чебышев 多项式的诸根在从 $[-1,1]$ 到 $[a,b]$ 的线性映射下的映象, 那么对于任何 $x\in[a,b]$ 都有

$$|f(x)-L_n(x)|\leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{2n+1}}\ .$$

如果诸插值结点是复数 $z_0,\cdots,z_n$ 且位于某个以逐段光滑围道 γ 为边界的区域 G 内, 又如果 f 是 G 的闭包上的单值解析函数, 那么其 Lagrange 插值公式具有形式

$$L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\omega(\zeta)(\zeta-z)}f(\zeta)d\zeta,$$

其中

$$f(z)-L_n(z)=\frac{\omega(z)}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(z-\zeta)}d\zeta\ .$$

三角多项式插值的 Lagrange 插值公式为:

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\prod_{j\neq k}\frac{\sin(x-x_j)/2}{\sin(x_k-x_j)/2}\ ,$$

它是在给定结点 $x_0,\cdots,x_n$ 上取指定值 $y_0,\cdots,y_n$ 的 n 阶三角多项式.

公式是由 J.L. Lagrange 于 1795 年提出的.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т.1, М., 1966(英译本: Berezin, I.S. and Zhidkov, N.P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N.S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

Л. Д. Кудрявцев, М. К. Самарин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, P.J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A2] Johnson, L.W. and Riess, R. D., Numerical analysis, Addison-Wesley, 1977.

[A3] Phillips, G.M. and Taylor, P.J., Theory and applications of numerical analysis, Acad. Press, 1973.

史应光 译

Lagrange 法 [**Lagrange method**; **Лагранжа метод**]

由 J. L. Lagrange 于 1759 年给出的把二次型化简为平方和 (见**二次型的简化** (quadratic forms, reduction of)) 的一种方法. 假设给定 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的系数取自特征 $\neq 2$ 的域 k 的二次型

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji}, \tag{1}$$

要通过变量的非退化线性变换把它化简为标准型

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r}b_iy_i^2,\ b_i\in k,\ b_i\neq 0,\ i=1,\cdots,r. \tag{2}$$

Lagrange 的方法如下所述. 可以假定 (1) 中系数不全为零. 这时可能有两种情形.

1) 对某个 g $(1\leqslant g\leqslant n)$, 对角系数 $a_{gg}\neq 0$, 于是

$$f(x)=\frac{1}{a_{gg}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{gk}x_k\right)^2+f_1(x), \tag{3}$$

其中型 $f_1(x)$ 不含变量 x_g.

2) 所有 $a_{gg}=a_{hh}=0$, 但 $a_{gh}\neq 0$, 于是

$$f(x)=\frac{1}{2a_{gh}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}+a_{hk})x_k\right]^2+$$

$$-\frac{1}{2a_{gh}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}-a_{hk})x_k\right]^2+f_2(x),\quad(4)$$

其中型 $f_2(x)$ 不含两个变量 x_g 和 x_k. (4) 的方括号中的两个型是线性无关的. 有限次使用形如 (3) 和 (4) 的变换后, 就能把型 (1) 化为线性无关线性型的平方和. 公式 (3) 和 (4) 可通过偏导数写为

$$f(x)=\frac{1}{4a_{gg}}\left[\frac{\partial f}{\partial x_g}\right]^2+f_1(x),$$

$$f(x)=\frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}+\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2+\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}-\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2\right]+f_2(x).$$

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 上、下, 高等教育出版社, 1955).

[2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程, 人民教育出版社, 1962).

[3] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии …, М., 1968.

И. В. Проскуряков 撰

【补注】 亦见**惯性律** (law of inertia) 条. 沈永欢 译

Lagrange 乘子 [Lagrange multipliers; Лагранжа множители]

为研究条件极值问题而引入的变量, 借助于它们可构造 **Lagrange 函数** (Lagrange function). 利用 Lagrange 乘子和 Lagrange 函数使得有可能用统一的方法得到条件极值问题的必要的最优性条件. 在确定函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)\qquad(1)$$

在约束

$$g_i(x_1,\cdots,x_n)=b_i,\ i=1,\cdots,m,\ m<n\quad(2)$$

下的极值的问题中, 由以下步骤组成的得到必要条件的方法称为 Lagrange 法 (Lagrange method): 利用 Lagrange 乘子 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 构造 Lagrange 函数

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-g_i(x)],$$

且使它关于 x_j 和 λ_i 的偏导数等于 0. 在这方法中, 最优解 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 和对应于它的 Lagrange 乘子向量 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*)$ 一起由解 $m+n$ 个方程的方程组找到. Lagrange 乘子 $\lambda_i^*(i=1,\cdots,m)$ 有下面的解释 ([1]). 设 x^* 提供了函数 (1) 在约束 (2) 下的一个相对极值: $z^*=f(x^*)$. x^*, λ^* 和 z^* 的值依赖于约束 (2) 的右边的值 b_i. 已经阐明了很一般的假设, 在这些假设下, 在 (2) 中指定的向量 $b=(b_1,\cdots,b_m)$ 的值的某 ε 邻域内, 所有的 x_j^* 和 λ_i^* 是向量 b 的连续可微函数. 在这些假设下, 函数 z^* 关于 b_i 也是连续可微的. z^* 关于 b_i 的偏导数等于对给定的 $b=(b_1,\cdots,b_m)$ 计算出的相应的 Lagrange 乘子 λ_i^*:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i}=\lambda_i^*,\ i=1,2,\cdots,m.\qquad(3)$$

在应用问题中, z 常常解释为利润或费用, 而右边 b_i 解释为一定的资源的消耗, 则 λ_i^* 的绝对值是单位费用与第 i 种资源单位消耗之比. 数 λ_i^* 表明, 如果第 i 种资源的数量增加 1, 最大利润 (或最大费用) 将如何变化. Lagrange 乘子的这种解释能推广到约束为不等式形式的情况和变量 x_j 受非负要求制约的情况.

在变分学中, 用 Lagrange 乘子法可方便地把条件极值问题中最优性的必要条件作为某复合泛函的无条件极值的必要条件得到. Lagrange 乘子在变分学中不是常数, 而是某些函数在最优控制理论和在 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum priciple) 中, Lagrange 乘子已被称为*共轭变量* (conjugate variables).

参考文献

[1] Hadley, G. F., Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964.

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 和上面用的同样的讨论导致把 Lagrange 乘子值 λ_i^* 解释为 (关于 b_i 中的变化的) *敏感系数* (sensitivity coefficients).

参考文献

[A1] Bryson, A. E. and Ho Y.-C., Applied optimal control, Blaisdell, 1969.

[A2] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

葛显良 译 鲁世杰 校

Lagrange 原理 [Lagrange principle; Лагранжа принцип], *稳定作用原理* (principle of stationary action)

受理想稳定约束限制和在不明显地依赖于时间的位势力作用下存在的完整系统的动力学中的一个变分积分原理.

按照 Lagrange 原理, 在完整系统的一个实在运动中, 如果在某一初始位置 A_0 和最后位置 A_1 之间的能量积分 $T+V=h$ 存在, 则 Lagrange 作用量

$$\int_{t_0}^{t}2T\,dt=\int_{A_0}^{A_1}\sum_{v}m_v v_v\cdot dr_v$$

与实在运动中带有同样能量 h 的这些位置间的运动学上可能的运动相比较，有一个稳定值．这里 T 和 V 是该系统的动能和势能，$m_v v_v$ 是系统的第 v 个点的运动量（动量），而 t_0 和 t 是当系统通过位置 A_0 和 A_1 时的时刻．

如果该系统的初始和最后位置彼此充分接近，则 Lagrange 作用量对一个实在运动有一极小值；由于这个关系，Lagrange 原理也称为 Lagrange 形式的最小作用原理（principle of least action）．

Lagrange 原理把决定一个系统的实在运动的问题化成变分的 **Lagrange 问题**（Lagrange problem）；它表示了对一个实在运动的必要充分条件（[4]）．

隐式的 Lagrange 原理首先由 P．L．M．Maupertuis（[1]）表述；L．Euler（[2]）对有心场中一个质点的运动情况给出它的一个证明．J．L．Lagrange（[3]）把这个原理推广到更一般的问题．

参考文献

[1] Maupertuis, P. L. M., Histoire l'Acad. Royale Sci. Paris, 1744 (1748), 417.

[2] Euler, L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausanne-Geneva, 1744.

[3] Lagrange, J. L., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, in J. A. Serret (ed.): Oeuvres, Vol. 1, G. Olms, reprint, 1973, 333 – 362.

[4] Суслов, Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.-Л., 1946.

В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文).

[A2] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

[A3] Gantmacher, F. [F. R. Gantmakher], Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975 (译自俄文).

[A4] Lagrange, J. L., Mécanique analytique I – II, A. Blanchard, reprint, 1965.

葛显良 译　鲁世杰 校

Lagrange 问题 [Lagrange problem; Лагранжа задача]

经典变分学中的基本问题之一．它是对泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx,\ f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

在等式型微分约束：

$$\varphi(x,y,y')=0,\ \varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m,\ m<n,\tag{1}$$

和边界条件

$$\psi(x_1,y(x_1),x_2,y(x_2))=0,$$

$$\psi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p,\ p\leqslant 2n+2$$

下求极小值．Lagrange 问题通常在组（1）是正则的条件下考虑，即矩阵 $\|\partial\varphi/\partial y'\|$ 有最大的秩

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right\|=m.$$

在这条件下，组（1）对部分变量可解，并且用不同的记号（t，x 取代 x，y），Lagrange 问题可以化成形式

$$\left.\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,u)dt,\ F:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R},\\&\dot{x}=\Phi(t,x,u),\ \Phi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^r\to R^n.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

函数 F 和映射 Φ 通常假设是连续可微的．最优控制问题常常用形式（2）给定（Понтрягин 形式（Pontryagin form））．此外，限制是加在控制 $u\in U$ 上的．问题（2）（为简单起见，带有固定的左端点 x_0 和自由的右端点 x_1）有强极值的必要条件，有以下形式．设

$$L(t,x,\dot{x},u,p(t))=$$
$$=(p(t)|-\dot{x}+\Phi(t,x,u))-F(t,x,u)$$

是 **Lagrange 函数**（Lagrange function）．为了向量函数 $(x^*(t),u^*(t))$ 是 Lagrange 问题（2）的一个强极小值，对 $\dot{x}$ 和 u 的所有可能的容许值，以下的关系式必须成立：

$$\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right|_{(x^*,u^*)}+\int_{t_0}^{t_1}\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x^*,u^*)}dt=0,\tag{3}$$

$$p(t_1)=0,\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\equiv\ &L(t,x^*(t),\dot{x},u,p(t))+\\&-L(t,x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p(t))+\\&-((\dot{x}-\dot{x}^*(t))|L_{\dot{x}}(t,x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p(t)))=\\&=(p(t)|\Phi(t,x^*(t),u)-F(t,x^*(t),u))+\\&-(p(t)|\Phi(t,x^*(t),u^*(t))+\\&+F(t,x^*(t),u^*(t)))\leqslant 0.\end{aligned}\tag{5}$$

如果在（3）中对 t 进行微分并用记号

$$\mathscr{H}(t,x,u,p)=(p|\Phi)-F,$$

则对强极小值的一个必要条件能用最大值原理的形式来表述，其中 Euler 方程（Euler equation）（3），横截条件（transversality condition）（4）和 Weierstrass 条件（Weierstrass condition）（5）联合在一起，为了一个向量函数 (x^*,u^*) 是带固定左端点和自由右端点的问题（2）的一个强极值，必须存在方程组

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}(t, x^*, u^*, p)}{\partial x}, \quad p(t_1) = 0$$

的一个解，使得

$$\mathscr{H}(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$$
$$= \max_{u \in U} \mathscr{H}(t, x^*(t), u, p(t)).$$

J. L. Lagrange 联系力学中的研究考虑了类似的问题（在 18 世纪下半叶）.

参考文献见**变分学**（variational calculus）.

И. Б. Вапнярский, В. М. Тихомиров 撰

【补注】 符号 $(a|b)$ 表示向量 a 和 b 的内积.

葛显良 译 鲁世杰 校

Lagrange 级数 [Lagrange series; Лагранжа ряд]

给出单复变量全纯函数的局部反函数问题的解的幂级数. J. L. Lagrange 于 1770 年给出的这个反演问题的最早的解，随后为 H. Bürmann 于 1779 年所改进. 见 **Bürmann-Lagrange 级数**（Bürmann-Lagrange series）. Е. Д. Соломенцев 撰 沈永欢 译

Lagrange 谱 [Lagrange spectrum; Лагранжа спектр]

实数的有理逼近问题中的 Lagrange 常数集合. Lagrange 谱包含于 Марков 谱之中（见 **Марков 譜问题**（Markov spectrum problem））. 张鸿林 译

Lagrange 稳定性 [Lagrange stability; устойчивость по Лагранжу]

在度量空间 S 上给定的**动力系统**（dynamical system）f^t（或 $f(t, \cdot)$，见 [2]）的一点 x（轨道 $f^t x$）的性质，它要求轨道 $f^t x$ 的一切点都包含在一个准紧集中（见**准紧空间**（precompact space））.

如果 $S = \mathbf{R}^n$，则 Lagrange 稳定性与轨道的有界性相同. 如果对所有 $t \in \mathbf{R}^+$（相应地，对所有 $t \in \mathbf{R}^-$），点 $f^t x$ 包含在一个准紧集中，则轨道 $f^t x$（点 x）称为正（相应地，负）Lagrange 稳定的（positively (negatively) Lagrange stable）. Lagrange 稳定性概念是由 H. Poincaré 在涉及分析 J. L. Lagrange 关于行星轨道稳定性的结果时引进的.

Birkhoff 定理（Birkhoff theorem）：如果 S 是完全的，则正或负的 Lagrange 稳定轨道的闭包至少包含一个紧**极小集**（minimal set）. 紧极小集的每个点都是**回复点**（recurrent point）.

参考文献

[1] Poincaré, H., Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, 3, Blanchard, reprint, 1987, Chapt. 26.

[2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949（中译本：B. B. 涅梅茨基，B. B. 斯捷巴诺夫，微分方程定性理论，科学出版社，上册 1956，下册 1959）.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 在 [1] 中 Poincaré 明确地引进 "Poisson 稳定性" 这一术语，但在提到由 Lagrange 证明的行星轨道的有界性时只是含蓄地建议 "Lagrange 稳定性" 的概念.

上述定义可对任何动力系统给出，不必限于度量空间上. 特别是，对于上述 Birkhoff 定理的前半部分，不必要求 S 是可度量的，更不必说是完全的了. 可度量性和完全性在证明极小集的每个点都是**回复点**（recurrent point）时是需要的. 在一般情形，紧极小集的每一点都是殆周期点. 唐 云 译

Lagrange 定理 [Lagrange theorem; Лагранжа теорема]

1) 微积分中的 Lagrange 定理见**有限增量公式**（finite-increments formula）.

2) 群论中的 Lagrange 定理：任一有限群（finite group）G 的阶 $|G|$ 可被其任一子群 H 的阶 $|H|$ 整除. 这个定理实际上是 Lagrange 1771 年在进行与代数方程的根式可解性相联系的置换性质的研究中证明的.

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977（英译本：Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979）.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hall, M., The theory of groups, MacMillan, 1959（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1982）.

[A2] Waerden, B. L. van der, Algebra, 2, Springer, 1967（中译本：B. L. 范·德·瓦尔登，代数学，Ⅰ，Ⅱ，科学出版社，1963，1976）.

3) 关于同余式的 Lagrange 定理：模一个素数 p 的**同余式**（congruence）

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod p,$$
$$a_0 \not\equiv 0 \pmod p,$$

其解的个数不超过其次数 n. 这是由 J. L. Lagrange 证明的（见 [1]）. 它可以推广到系数在任一整环上的多项式.

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entièrs, in J. A. Serret (ed.), Oeuvres, Vol. 2, G. Olms, reprint, 1973, 653–726.

[2] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972（英译本：Vinogradov, I. M., Elements of number theory, Dover, 1954）. С. А. Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 2, Springer, 1967 (中译本: B. L. 范·德·瓦尔登, 代数学, Ⅰ, Ⅱ, 科学出版社, 1963, 1976).

4) 关于四平方数之和的 Lagrange 定理: 任一自然数必能表示成四个整数的平方之和. 这是 J. L. Lagrange 在[1]中建立的. 关于 Lagrange 定理的推广见 **Waring 问题** (Waring problem).

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Démonstration d'un théorème d'arithmétique, in J. A. Serret (ed.): Oeuvres, Vol. 3, G. Olms, reprint, 1973, 187 − 201.

[2] Serre, J.-P., A course in arithmetic, Springer, 1973 (译自法文).

C. M. Воронин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

5) 关于连分数的 Lagrange 定理: 表示**二次无理数** (quadratic irrationality) 的**连分数** (continued fraction) 是循环的. 这是 J. L. Lagrange 在 [1] 中建立的.

参考文献

[1] Lagrange, J. L., Sur la solution des problèms indéterminés du second degré, in J. A. Serret (ed.): Oeuvres, Vol. 2, G. Olms, reprint, 1973, 376−535.

[2] Хинчин, А. Я., Цепные дроби, 3 изд., М., 1961, 62 (英译本: Khinchin, A. Ya., Continued fractions, Univ. Chicago Press, 1964, Chapt, Ⅱ, §10).

C. M. Воронин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

王 杰 译 石生明 校

Lagrange 函数 [**Lagrangian** 或 Lagrange function; **Лагранжиан** 或 функция Лагранжа], Lagrange 被积函数 (Lagrange integrand)

求泛函

$$J(q)=\int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt \qquad (*)$$

的极值问题中的被积函数 $L(q,\dot{q},t)$; 此极值问题的求解要在附加的约束条件与边值条件下进行; 这里 $q=(q_1,\cdots,q_n)$, $\dot{q}=dq/dt$, L 是任意的可微映射 $L:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

Lagrange 函数一词来自经典力学, 在最简单的情况下, 即一力学系统动能与位能之差, 系统的运动即相应积分泛函的极值曲线(平稳作用原理). 在经典力学的一般情况下, Lagrange 函数是任一可微映射 $L:TM\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, TM 是**微分流形** (differentiable manifold) M 的**切丛** (tangent bundle) (M 即此力学系统的构形流形).

泛函(*)在无约束时的弱极值之必要条件是 **Euler-Lagrange 方程** (Euler-Lagrange equation)

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0.$$

等式型约束条件的出现可以考虑用 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers)来处理. 在控制理论中出现不等式型的"非经典约束"时, 泛函(*)之强极值的必要条件由 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle)给出.

应用 Lagrange 函数时, 考虑系统的种种对称性会带来方便, 因为对于构形流形上任一个保持 Lagrange 函数不变的单参数微分同胚群都相应有运动方程的一个首次积分 (Noether 定理 (Noether theorem)).

在许多问题中, 把 Euler-Lagrange 方程改写为 **Hamilton 方程** (Hamilton equations) 形式很有用处. 特别是这使得可以应用典则变换方法和 **Hamilton-Jacobi 理论** (Hamilton-Jacobi theory). 若要把一个经典力学系统量子化, 转到 Hamilton 形式也很有用. 若 Lagrange 函数非退化, 用 **Legendre 变换** (Legendre transform) 即可转到 Hamilton 描述; 在退化时则要用到一个较复杂的约化程序(见[1],[6]).

在连续介质力学和**量子场论** (quantum field theory) 中, 场可以看作是具有无限个自由度的力学系统, 这时考虑以下形式的泛函的极值问题:

$$J(q)=\int_{t_0}^{t_1} L(t)dt,$$

$$L(t)=\int_G \mathscr{L}(q,\dot{q},q',t,x)dx.$$

$$x=(x_1,\cdots,x_k), G\subset\mathbf{R}^k, q=q(t,x)=(q_1,\cdots,q_n),$$

$$\dot{q}=\left[\frac{\partial q_1}{\partial t},\cdots,\frac{\partial q_n}{\partial t}\right],\quad q'=\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right).$$

这时称泛函为 Lagrange 函数 (Lagrangian), 函数 $\mathscr{L}(q,\dot{q},q',t,x)$ 则称为 Lagrange 函数的密度 (density of Lagrangian). 对于这类系统, 许多基本概念 (如 Hamilton 量等) 都可以按经典力学的类比来引入.

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974 (中译本: 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1993).

[2] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976 (中译本: Н. Н. 波戈留波夫等, 量子场论导引, 科学出版社, 1966).

[3] Иоффе, А. Д., Тихомиров, В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974 (英译本: Ioffe, A. D. and Tikhomirov, V. M., Theory of extremal problems, North-

Holland, 1979).
[4] Понтрягин, Л. С., [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (中译本: 庞特列雅金, 最佳过程的数学原理, 上海科学技术出版社, 1965).
[5] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.
[6] Фаддеев, Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1 (1969), 1, 1–18. И. В. Волович 撰

【补注】

参考文献

[A1] Гантмахер, Ф., Лекции о аналитической механике, М., 1960 (英译本: Gantmacher, F. [F. Gantmakher]. Lectures in analytical mechnics, Reidel, 1987, Chapt. 2, Sects, 10 – 13.
[A2] Liebermann, P. and Marle, C.-M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987, Chapt. 2, Sects, 10 – 13. 齐民友 译

Lagrange 流形 [Lagrangian manifold; Лагранжево многообразие]

$2n$ 维辛流形 (symplectic manifold) M^{2n} 的 n 维可微分子流形 L^n, 使得在 M^{2n} 上给出辛结构的外形式 ω 在 L^n 上恒为零 (即对于任一点 $x \in L^n$ 和在该点与 L^n 相切的任何向量 X 与 Y, 恒有 $\omega(X,Y)=0$). 最重要的情况是 $M^{2n}=\mathbf{R}^{2n}$, 它具有坐标 $(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)$ 和 $\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, 这时由参数方程

$$p_i = p_i(u_1,\cdots,u_n),\quad q_i = q_i(u_1,\cdots,u_n)$$

给出的子流形 L^n 是 Lagrange 的条件, 有如下形状:

$$[u_i,u_j]=0,\quad i,\ j=1,\cdots,n,$$

其中 $[u_i,u_j]$ 是 **Lagrange 括号** (Lagrangian bracket).

参考文献

[1] Маслов, В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.
[2] Маслов, В. П., Метод ВКБ в многомерном случае, в кн.: Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965.
[3] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974 (英译本: Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978).
[4] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976 (英译本: Maslov, V. P. and Fedoryuk, M. V., Semi-Classical approximation in quantum mechanics, Reidel, 1981).
[5] Мищенко, А. С., Стернин, Б. Ю., Шаталов, В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978.
[6] Arnol'd, V. J. and Giventhal, A. B., Symplectic geometry, IV, Springer, 1988 (译自俄文).

Д. В. Аносов 撰

【补注】 通常也称为 Lagrange 子流形 (Lagrangian submanifold).

参考文献

[A1] Libermann, P. and Marle, C.-M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987 (译自法文).
[A2] Vaismann, I., Symplectic geometry and secondary characteristic classes, Birkhäuser, 1987. 沈一兵 译

Laguerre 方程 [Laguerre equation; Лагерра уравнение]

见 **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials).

Laguerre 公式 [Laguerre formula; Лагерра формула]

1) 计算 Euclid 和伪 Euclid 空间中直线之间角度的公式. 设 X 和 Y 是两直线 a 和 b 上的无穷远点, G 和 K 是这些直线与空间的绝对形的交点. 那么, 这些直线之间的角 φ 可用交比 (cross ratio) $W(G,K,X,Y)$ 来表示:

$$\varphi = \left| \frac{i}{2} \ln W(G,K,X,Y) \right|.$$

对于二维伪 Euclid 空间, G 和 K 就是过直线 a 和 b 之交点的迷向直线的方向矢.

上述公式由 E. Laguerre ([1]) 导出.

2) 下述公式对于一给定曲面上在某点相交的所有曲线来说, (在该点处) 下列量是不变的:

$$\left[3\frac{d\theta}{ds} + 2k_2 \right] \sin\theta k_1 - \left[\frac{d}{ds} k_1 \right] \cos\theta,$$

其中 k_1 和 k_2 是曲线的曲率和挠率, θ 是曲线的主法向量与曲面法向量之间的角, s 是曲线的自然参数. 这个公式由 E. Laguerre (1870 年, 见 [2]) 得到.

参考文献

[1] Laguerre, E., Sur la théorie des foyers, *Nouv. Ann. Math.*, 12 (1853), 57–66.
[2] Laguerre, E., Oeuvres, 2, Chelsea, reprint, 1972.
[3] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1 – 2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 科学出版社, 1, 1987, 2, 1989). 沈一兵 译

Laguerre 函数 [Laguerre functions; Лагерра функции]

作为下列方程之解的一些函数:

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0, \qquad (*)$$

其中 α 和 n 是任意参数. Laguerre 函数可以通过**退化超**

几何函数 (degenerate hypergeometric function) 或 **Whittaker 函数** (Whittaker functions) 来表示. 对于 $n=0, 1, \cdots$, 方程 (*) 的解称为 **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials). 函数

$$e_n^{(\alpha)}(x)=x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n^\alpha(x)$$

有时也称为 Laguerre 函数, 其中 $L_n^\alpha(x)$ 是 Laguerre 多项式.

参考文献

[1] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

А. Б. Иванов 撰　张鸿林 译

Laguerre 多项式 [Laguerre polynomials; Лагерра многочлены], Чебышев-Laguerre 多项式 (Chebyshev-Laguerre polynomials)

区间 $(0, \infty)$ 上的正交多项式, 具有权函数 $\varphi(x)=x^\alpha e^{-x}$, 其中 $\alpha>-1$. 标准化 Laguerre 多项式由下式定义:

$$L_n^\alpha(x)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}),\ n=0,1,\cdots.$$

它们通过 Γ **函数** (gamma-function) 可以表示为

$$L_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

在应用中最重要的一些公式是

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)=(\alpha+2n+1-x)L_n^\alpha(x)-$$
$$-(\alpha+n)L_{n-1}^\alpha(x),$$
$$xL_{n-1}^{\alpha+1}(x)=(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)-nL_n^\alpha(x),$$
$$(L_n^\alpha(x))'=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

多项式 $L_n^\alpha(x)$ 满足微分方程 (Laguerre 方程 (Laguerre equation))

$$xy''+(\alpha-x+1)y'+ny=0,\ n=1,2,\cdots.$$

Laguerre 多项式的生成函数具有下列形式:

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^\alpha(x)t^n.$$

正交 Laguerre 多项式能够通过标准化多项式表示如下:

$$\hat{L}_n^\alpha(x)=(-1)^nL_n^\alpha(x)\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}}.$$

所有 Laguerre 多项式的集合在区间 $(0, \infty)$ 上的以权 $\varphi(x)$ 平方可积的函数空间中是稠密的.

最常应用的是满足条件 $\alpha=0$ 的 Laguerre 多项式; E. Laguerre ([1]) 研究过这种多项式, 这时用 $L_n(x)$ 来表示 (反之, $L_n^\alpha(x)$ 有时称为广义 Laguerre 多项式 (generalized Laguerre polynomials). 前几个 Laguerre 多项式 $L_n(x)$ 具有下列形式:

$$L_0(x)=1,\ L_1(x)=1-x,$$
$$L_2(x)=1-2x+\frac{x^2}{2},$$
$$L_3(x)=1-3x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{6},$$
$$L_4(x)=1-4x+3x^2-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{24}.$$

Laguerre 多项式 $L_n^\alpha(x)$ 有时用 $L_n(x;\alpha)$ 来表示.

参考文献

[1] Laguerre, E., Sur le transformations des functions elliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, **6** (1878), 72 – 78.
[2] Стеклов, В. А., 《Изв. Имп. АН》, **10** (1916), 633 – 642.
[3] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.
[4] Суетин, П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979.

П. К. Суетин 撰

【补注】 Laguerre 多项式能够写成**汇合型超几何函数** (confluent hypergeometric function), 属于**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials). 它们与 **Heisenberg 群** (Heisenberg group) 有着密切的联系: 作为不可约表示的矩阵元素和与 Heisenberg 群相伴的某些 Гельфанд 对 (见 **Гельфанд 表示** (Gel'fand representation)) 上的球函数. 见 [A1] 中给出的参考文献 (第一章, §9).

参考文献

[A1] Folland, G. B., Harmonic analysis in phase space, Princeton Univ. Press, 1989.

张鸿林 译

Laguerre 变换 [Laguerre transform; Лагерра преобразование]

积分变换

$$f(n)=T\{F(x)\}=\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)F(x)dx,$$
$$n=0,1,\cdots,$$

其中 $L_n(x)$ 是 n 次 **Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials). 反演公式是

$$T^{-1}\{f(n)\}=F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)L_n(x),\ 0<x<\infty,$$

如果级数收敛. 如果 F 在 $[0, \infty)$ 上是连续的, F' 是分段连续的, 而 $F(x)=O(e^{ax})$, $x\to\infty$, $a<1$, 则

$$T\left\{\frac{dF(x)}{dx}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)-F(0),\ n=0,1,\cdots,$$

$$T\left\{x\frac{dF(x)}{dx}\right\}=-(n+1)f(n+1)+nf(n),$$

$$n=0,1,\cdots,$$

如果 F 和 F' 在 $[0,\infty)$ 上是连续的，$\mathbf{F}''$ 是分段连续的，而 $|F(x)|+|F'(x)|=O(e^{ax})$, $x\to\infty$, $a<1$, 则

$$T\left\{e^x\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dF(x)}{dx}\right]\right\}=-nf(n),\ n=0,1,\cdots.$$

如果 F 在 $[0,\infty)$ 上是分段连续的，而 $F(x)=O(e^{ax})$, $x\to\infty$, $a<1$, 则对于

$$G(x)=\int_0^x F(t)dt,$$

有

$$g(n)=T\left\{\int_0^x F(t)dt\right\}=f(n)-f(n-1),\ n=1,2,\cdots,$$

而当 $n=0$ 时，有

$$g(0)=f(0).$$

假设 F 和 G 在 $[0,\infty)$ 上是分段连续的，并且

$$|F(x)|+|G(x)|=O(e^{ax}),\ x\to\infty,\ a<\frac{1}{2},$$

$$T\{F\}=f(n),\ T\{G\}=g(n),$$

则有

$$T^{-1}\{f(n)g(n)\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}F(t)\int_0^\pi e^{\sqrt{xt}\cos\theta}\cos(\sqrt{xt}\sin\theta)\times$$

$$\times G(x+t-2\sqrt{xt}\cos\theta)d\theta dt.$$

广义 Laguerre 变换 (generalized Laguerre transform) 是

$$f_\alpha(n)=T_\alpha\{F(x)\}=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)F(x)dx,\ n=0,1,\cdots,$$

其中 $L_n^\alpha(x)$ 是广义 Laguerre 多项式 (见 [4]).

参考文献

[1] Zemanian, A. G., Generalized integral transformations, Interscience, 1968.

[2] McCully, J., The Laguerre transform, SIAM Rev., **2** (1960), 3, 185 – 191.

[3] Debnath, L., On Laguerre transform, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **52** (1960), 2, 69 – 77.

[4] Итоги науки. Математический анализ, 1966, М., 1967, 7 – 82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰 张鸿林 译

Lambert 四角形 [Lambert quadrangle; Ламберта четырехугольник]

一个含有 3 个直角的四角形. 它是被 J. H. Lambert (1766) 在试图证明 Euclid 的平行公设 (见**第五公设** (fifth postulate)) 时所考虑的. 关于第四角的大小, 即它是一个直角、一个钝角或一个锐角的三种可能的假定中, 第一种假定等价于 Euclid 的公设而第二种假定导致同 Euclid 其他公理和公设的矛盾. 至于第三种假定, Lambert 猜想它在一个虚球面上是成立的.

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.-Л., 1949.

[2] Погорелов, А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968 (英译本: Pogorelov, A. V., Lectures on the foundations of geometry, Noordhoff, 1966).

А. В. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Busemann, H. and Kelly, P., Projective geometry and projective metrics, Acad. Press, 1953.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974.

[A4] Efimow, N. W. [N. V. Efimov], Höhere Geometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1960 (译自俄文).

[A5] Norden, A. P., Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1958 (译自俄文).

[A6] Bonola, R., Non-Euclidean geometry, Dover, reprint, 1955.

杨路、曾振柄 译

Lambert 级数 [Lambert series; Ламберта ряд]

函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^n}{1-x^n}. \tag{1}$$

J. H. Lambert (见 [1]) 与**幂级数** (power series) 收敛性问题相联系考虑了这个级数. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛, 则 Lambert 级数对除 $x=\pm1$ 外的所有 x 值收敛; 此外, 它对使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

收敛的 x 值收敛. Lambert 级数应用于数论的某些问题中. 事实上, 对 $|x|<1$, 级数 (1) 的和 $\varphi(x)$ 可表示为幂级数:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nx^n, \tag{2}$$

其中

$$\alpha_n=\sum_{k|n}a_k,$$

求和取遍 n 的除数 k. 特别是，如果 $a_n=1$，则 $\alpha_n=\tau(n)$，即 n 的除数的个数；如果 $a_n=n$，则 $\alpha_n=\sigma(n)$，即 n 的除数之和. $\varphi(x)$（适当选取 a_n）当 $x\uparrow 1$ 时的性态可用于，例如（见[3]），关于获得一个自然数"无限制分拆"个数的渐近公式的 Hardy 和 Ramanujan 问题中.

参考文献

[1] Lambert, J. H., Opera Mathematica, 1－2, Füssli, 1946－1948.

[2] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 2, М., 1959（中译本：Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第二卷第二分册，高等教育出版社，1954）.

[3] Постников, А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 Lambert 级数也出现于 Eisenstein 级数的展开即一种特殊的**模形式**（modular form）中，见[A1].

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Modular forms and Dirichlet series in analysis, Springer, 1976.

[A2] Rademacher, H., Topics in analytic number theory, Springer, 1973.

[A3] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964.

沈永欢 译

Lambert 求和法[Lambert summation method; Ламберта метод суммирования]

数项级数的一种求和法. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

按 Lambert 求和法是可和的，其和为数 S，如果

$$\lim_{y\downarrow 0} F(y)=S,$$

其中

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}}, \text{ 对于 } y>0,$$

并且右端的级数收敛. 这种方法是 J. H. Lambert（[1]）提出的. 由一个级数按 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）(C,k)（对某个 $k>-1$）是可和的，其和为 S，可以推出它按 Lambert 求和法是可和的，其和亦为 S，并且如果这个级数按 Lambert 求和法是可和的，其和为 S，则它按 **Abel 求和法**（Abel summation method）是可和的，其和亦为 S. Lambert 求和法是正则的（见**正则求和法**（regular summation methods））.

参考文献

[1] Lambert, J. H., Anlage zur Architektonik, 2, Riga, 1771.

[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

И. И. Волков 撰 张鸿林 译

Lambert 变换[Lambert transform; Ламберта преобразование]

积分变换

$$F(x)=\int_0^{\infty}\frac{ta(t)}{e^{xt}-1}\,dt.$$

Lambert 变换是 **Lambert 级数**（Lambert series）的连续类比（在对应 $ta(t)\longleftrightarrow a_n$, $e^x\longleftrightarrow 1/x$ 下）. 下述反演公式成立：假设

$$a(t)\in L(0,\infty)$$

且

$$\lim_{t\to+0} a(t)t^{1-\delta}=0,\ \delta>0;$$

此外，如果 $\tau>0$，且函数 $a(t)$ 在 $t=\tau$ 处是连续的，则有

$$\tau a(\tau)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{k}{\tau}\right]^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^kF^{(k)}\left[\frac{nk}{\tau}\right],$$

其中 $\mu(n)$ 是 **Möbius 函数**（Möbius function）.

参考文献

[1] Widder, D. V., An inversion of the Lambert transform, *Math. Mag.*, **23** (1950), 171－182.

[2] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, 7－82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰 张鸿林 译

Lamé 系数[Lamé coefficients; Ламе коэффициенты]，空间中正交曲线坐标系 u, v, w 的量

$$L_u=\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial u}\right]^2},$$

$$L_v=\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial v}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2},$$

$$L_w=\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial w}\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial w}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]^2}.$$

可以类似地定义平面上的 Lamé 系数. 通过坐标 u, v, w 的 Lamé 系数，可以表示弧长元素：

$$dl=\sqrt{L_u^2du^2+L_v^2dv^2+L_w^2dw^2};$$

曲面面积元素：

$$d\sigma=$$
$$=\sqrt{(L_uL_vdudv)^2+(L_uL_wdudw)^2+(L_vL_wdvdw)^2};$$

体积元素:

$$dV = L_u L_v L_w du dv dw.$$

Lamé 系数出现在坐标 u, v, w 中的向量分析运算的表示式中:

$$\text{grad}_u \psi = \frac{1}{L_u} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \ \text{grad}_v \psi = \frac{1}{L_v} \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\text{grad}_w \psi = \frac{1}{L_w} \frac{\partial \psi}{\partial w};$$

$$\text{div}\, a = \frac{1}{L_u L_v L_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (a_u L_v L_w) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} (a_v L_u L_w) + \frac{\partial}{\partial w} (a_w L_u L_v) \right];$$

$$\text{rot}_u \mathbf{a} = \frac{1}{L_v L_w} \left[\frac{\partial}{\partial v} (a_w L_w) - \frac{\partial}{\partial w} (a_v L_v) \right],$$

$$\text{rot}_v \mathbf{a} = \frac{1}{L_u L_w} \left[\frac{\partial}{\partial w} (a_u L_u) - \frac{\partial}{\partial u} (a_w L_w) \right],$$

$$\text{rot}_w \mathbf{a} = \frac{1}{L_u L_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} (a_v L_v) - \frac{\partial}{\partial v} (a_u L_u) \right];$$

$$\Delta \psi = \text{div}(\text{grad}\, \psi) = \frac{1}{L_u L_v L_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L_v L_w}{L_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{L_u L_w}{L_v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{L_u L_v}{L_w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) \right].$$

各种正交曲线坐标的 Lamé 系数, 见关于这些坐标的相应条目.

Lamé 系数是 G. Lamé([1]) 引进的.

参考文献

[1] Lamé, G., Leçons sur les coordonnées curvilinear et leurs diverses applications, Paris, 1859.

[2] Лаптев, Г. Ф., Элементы векторного исчисления, М., 1975.

[3] Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 1, McGraw-Hill, 1953.

В. И. Битюцков 撰

【补注】 在西方的文献中通常不把量 L_u, L_v, L_w 称为"Lamé 系数", 而称为"标量因子"(scale factors)([3]) 或"度量系数"(metric coefficients)([A1]). 当然, 后一术语是由于下述事实: 原 Riemann 度量 ds^2 关于新的正交曲线坐标系 u, v, w, 取如下形式:

$$ds^2 = L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2.$$

因此, L_u^2, L_v^2, L_w^2 是用 u, v, w 表示的 $\mathbf{R}^3$ 上的标准度量张量的对角线分量. 其他分量为零, 因为 u, v, w 是正交曲线坐标系.

参考文献

[A1] Sokolnikoff, I. S. and Redheffer, R. M., Mathematics of physics and engineering, McGraw-Hill, 1958.

[A2] Davis, H. F. and Snider, A. D., Introduction to vector analysis, Allyn & Bacon, 1979.

张鸿林 译

Lamé 常数 [Lamé constants; Ламе постоянные]

联系弹性体某点处的弹性应力分量与该点形变分量之间关系的一个量, 而该弹性体为线弹性的(或是固态可变形的)各向同性体:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \ \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy},$$

其中 σ 和 τ 为法向和切向应力组分, ε 为形变组分, 而系数 λ 和 μ 称为 Lamé 常数. Lamé 常数取决于材料及其温度. 将 Lamé 常数与弹性模量 E 和 Poisson 比 v 之间存在下列关系:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+v)}, \ \lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)};$$

E 也称为 Young 弹性模量, 而 G 为剪切弹性模量.

Lamé 常数是以 G. Lamé 的名字命名的.

БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Theory of elasticity, Pergaman, 1959(译自俄文).

[A2] Sokolnikoff, I. S., Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, 1956 (译自俄文).

[A3] Hunter, S. C., Mechanics of continuous media, Wiley, 1976.

张志民 译

Lamé 曲线 [Lamé curve; Ламе кривая]

一类平面代数曲线, 在 Descartes 直角坐标系中它的方程具有下列形式:

$$\left[\frac{x}{a}\right]^m + \left[\frac{y}{b}\right]^m = 1,$$

其中 $m = p/q$, p 和 q 是两个互素数, $a > 0$, $b > 0$. 如果 $m > 0$, 则 Lamé 曲线的次数是 pq, 如果 $m < 0$, 则是 $2pq$. 如果 $m = 1$, 则 Lamé 曲线是一条直线, 如果 $m = 2$, 则是椭圆, 如果 $m = 2/3$, 而 $a = b$, 则是**星形线**(astroid). Lamé 曲线因 G. Lamé 而得名, 他于 1818 年研究过这种曲线.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.

张鸿林 译

Lamé 方程 [Lamé equation; Ламе уравнение]

复域中的二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2} = [A + B\wp(z)]w, \qquad (1)$$

其中 $\wp(z)$ 是 **Weierstrass $\wp$ 函数** (Weierstrass $\wp$-function), A 和 B 是常数. 此方程由 G. Lamé 首次研究 ([1]); 它出现于按椭圆坐标写出的 Laplace 方程的变量分离中. 方程 (1) 也称为 Lamé 方程的 Weierstrass 形式. 替换 (1) 中的自变量可得到 Lamé 方程的 Jacobi 形式:

$$\frac{d^2w}{du^2} = [C + D\,sn^2u]w.$$

通过对 (1) 中自变量的各种变换, 还可转化为 Lamé 方程的多种代数形式, 例如

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right]\frac{dw}{d\xi} = \frac{A + B\xi}{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}w. \qquad (2)$$

Jacobi 形式对实际应用最为合适.

特别重要的情形是 (1) (或 (2)) 中的 $B = n(n+1)$、其中 n 是自然数. 此时 (1) 的解在整个平面内是亚纯的, 且其性质得到了透彻研究. 在 $B = n(n+1)$ 时方程 (2) 的解中, Lamé 函数最为重要 (见 **Lamé 函数** (Lamé function)).

参考文献

[1] Lamé, G., Sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de température, *J. Math. Pures Appl.*, **2** (1837), 147 – 188.

[2] Strutt, M. J. O., Lamésche, Mathieusche und Verwandte Funktionen in Physik und Technik, *Ergebn. Math.*, **1** (1932), 3.

[3] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[4] Bateman, H., Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Automorphic functions, 3, McGraw-Hill, 1955 (中译本: A. 爱尔台里主编, 高级超越函数, 科学出版社, 1957).

[5] Hobson, E. W., The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge Univ. Press, 1931.

Н. Х. Розов 撰 沈永欢 译

Lamé 函数 [Lamé function; Ламе функция], 椭球调和函数 (ellipsoidal harmonic function)

满足 **Lamé 方程** (Lamé equation) 的一种特殊形式的函数. 如果以代数形式给出的 Lamé 方程

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right]\frac{dw}{d\xi} = \frac{A + n(n+1)\xi}{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}w \qquad (*)$$

(其中 n 是自然数, e_1, e_2, e_3 以及 A 是常数) 具有形式为

$$P(\xi),$$
$$\sqrt{\xi - e_i}\,P(\xi),\ i = 1, 2, 3,$$
$$\sqrt{\xi - e_i}\sqrt{\xi - e_j}\,P(\xi),\ i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j,$$
$$\sqrt{\xi - e_1}\sqrt{\xi - e_2}\sqrt{\xi - e_3}\,P(\xi)$$

的解之一, 其中 $P(\xi)$ 是首项系数为 1 的多项式, 则该解分别称为一型、二型、三型、四型第一类 n 次 Lamé 函数.

对于固定的偶数 n, 总存在 A 的值 (本征值), 使得存在分别具有 $n/2$ 次和 $(n-2)/2$ 次多项式 $P(\xi)$ 的 $(n+2)/2$ 个一型 Lamé 函数和 $3n/2$ 个三型 Lamé 函数. 对于固定的奇数 n, 总存在 A 的值, 使得存在分别具有 $(n-1)/2$ 次和 $(n-3)/2$ 次多项式 $P(\xi)$ 的 $3(n+1)/2$ 个二型和 $(n-1)/2$ 个四型 Lamé 函数. 对于给定的自然数 n, 共有 $2n+1$ 个线性无关的 Lamé 函数.

方程 (*) 的与第一类 Lamé 函数线性无关且通过 **Liouville - Остроградский 公式** (Liouville-Ostrogradski formula) 得到的解, 称为第二类 Lamé 函数.

关于参考文献, 见 **Lamé 方程** (Lamé equation).

Н. Х. Розов 撰 沈永欢 译

Ландау 动理学方程 [Landau kinetic equation; Ландау кинетическое уравнение]

弱相互作用气体的动理学方程, 特别是等离子体中考虑到 Coulomb 碰撞下的带电粒子的输运方程. 它是由 Л. Д. Ландау 获得的 (见 [1], [2]). 对于带 Coulomb 相互作用的系统, 在 Ландау 动理学方程的推导中, 方程的系数包含一个发散积分 ("Coulomb 对数": $\ln\Lambda_{ab}$, 两个带电粒子 a 和 b 的碰撞中, 最大和最小碰撞参量之比的对数). 为了获得一个近似的不发散的结果, 人们 "截止" 积分: 对积分上限取 Debye 静电屏蔽长度, 而对积分下限取近邻相互作用距离 (或量子力学波长). 积分的特定 "截止", 并不是从 Ландау 动理学方程本身的推导得出的, 对于 Coulomb 相互作用系统的适当的动理学方程的构造, 仍是一个未解决的问题. 曾经提出过这类方程的不同形式 (例如, 见 [3]) (它们也都不是没有发散的). 在这些方程中, 人们考虑到动态屏蔽, 它依赖于粒子的速度.

对于与平衡背景相互作用的试探粒子的稀薄气体, Ландау 动理学方程变成线性 **Fokker - Planck 方程** (Fokker-Planck equation). 对于不均匀等离子体, 必须把 Ландау 碰撞积分加到 **Власов 动理学方程** (Vlasov kinetic equation) 右边. 结果得到的方程称为 Власов-Ландау 方程 (Vlasov-Landau equation) (见

[3]).

对于几种类型粒子的混合物，Ландау 动理学方程组可写成形式：

$$\frac{df_a}{dt} = I_a + S_a, \quad (1)$$

其中 $f_a \equiv f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 是类型 a 粒子在坐标 $\mathbf{r}$ 和速度 $\mathbf{v}$ 的 6 维相空间（t 是时间）中的分布函数．函数 $S_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv S_a$ 描述粒子的源，I_a 是碰撞积分，它可化为下列形式

$$I_a = \Gamma_a\left[-\frac{\partial}{\partial v_i}\left[f_a \frac{\partial h_a}{\partial v_i}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}\left[f_a \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_i \partial v_j}\right]\right], \quad (2)$$

其中假定对全同指标 i, j 从 1 至 3 求和，$\Gamma_a = 4\pi Z_a^4 e^4/m_a^2$; m_a 和 $Z_a e$ 分别是类型 a 粒子的质量和电荷，e 是电子电荷的绝对值，而

$$g_a = \sum_b \left[\frac{Z_a}{Z_b}\right]^2 \ln \Lambda_{ab} \int f_b(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)\,|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\,d\mathbf{v}', \quad (3a)$$

$$h_a = \sum_b \left[\frac{m_a + m_b}{m_b}\right]\left[\frac{Z_b}{Z_a}\right]^2 \ln \Lambda_{ab} \times$$

$$\times \int f_b(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)\,|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^{-1}\,d\mathbf{v}' \quad (3b)$$

是[2]中所引进的位势，而 $\ln \Lambda_{ab}$ 是 Coulomb 对数，它们依赖于粒子的平均能量．碰撞积分（2）包含一个相对于速度的椭圆型微分算子，其系数通过 $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 的势类型的积分算子表达．对于不均匀等离子体，

$$\frac{df_a}{dt} \equiv \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{Z_a e}{m_a}\mathbf{F}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}},$$

其中 $Z_a e\mathbf{F}$ 是作用于类型 a 粒子上的力．

Ландау 动理学方程使获得质量、动量和内能密度的流体动力学守恒方程，以及 **Boltzmann *H* 定理**（Boltzmann *H*-theorem）成为可能．

曾经局域地证明了 Ландау 动理学方程一般解的存在性（见[4]）．

曾经在计算机上实现过 Ландау 动理学方程的数值求解，用来计算开式磁阱的粒子漏失（见[5]），用来确定环形热核反应堆中能量倍增系数（见[6]），以及用来评估托卡马克中加热等离子体的另外的方法．在磁阱中等离子体的良好约束条件下，必须应用全守恒差分格式（见[7]）．在求解 Ландау 动理学方程时，这些格式能使粒子总数及其总能量严格守恒．

参考文献

[1A] Landau, L. D., Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung, *Phys. Z. Sowjetunion*, **10** (1936), 2, 154－164.

[1B] Ландау, Л. Д.,《Ж. эксперимент. и теоретич. физики》, 7 (1937), 2, 203－209 (译自德文).

[2] Трубников, Б. А., в кн.: Вопросы теории плазмы, в. 1, М., 1963, с. 98－182 (英译本: Trubnikov, B. A., Problems of plasma theory, in M. A. Leontovich (ed.): Reviews in plasma physics, New York, 1965, 105－204.

[3] Balescu, R., Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics, 1－2, Wiley, 1975.

[4] Арсеньев, А. А., Песков, Н. В.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, 17 (1977), 4, 1063－1068.

[5] Killeen, J. and Marx, K. D., Methods in computational physics, 9, Acad. Press, 1970.

[6] Killeen, J., Mirin, A. A. and Rensink, M. E., Methods in computational physics, 16, Acad. Press, 1976.

[7] Самарский, А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

В. А. Чуянов 撰　徐锡申 译

Landau 定理 [Landau theorems; Ландау теоремы]

关于圆盘内正则函数的定理，它们建立起由这些函数引起的共形映射的几何性质同表示这些函数的幂级数的开头几项系数之间的若干联系．

1904 年 E. Landau 证明（[1]）：若函数 $f(z)$ 在圆盘 $|z| < R$ 内正则且不取值 0 和 1，则 R 以一个仅依赖于 $a_0 = f(0)$ 与 $a_1 = f'(0)$ 的正常数为界．1905 年 C. Carathéodory 证明该定理中的极值函数是**模函数**（modular function）．Landau 与 Carathéodory 的这些结果以下述定理的形式而著称．

Landau-Carathéodory 定理（Landau-Carathéodory theorem）．若函数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots,\ a_1 \neq 0,$$

在圆盘 $|z| < R$ 内正则且不取值 0 和 1，则

$$R \leqslant R(a_0, a_1) = \frac{2\operatorname{Im}\tau(a_0)}{|a_1|\,|\tau'(a_0)|};$$

此处 $\tau = \tau(\lambda)$ 是分式线性变换

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d},\ ad - bc = 1,$$

组成的群 M_2 的经典模函数 $k^2(\tau) = \lambda(\tau)$ 的反函数的一个分支，其中 a 与 d 是奇数，b 与 c 是偶数．函数 $\lambda(\tau)$ 把 M_2 的**基本域**（fundamental domain）T_2：

$$\operatorname{Int} T_2 = \{\tau : |\tau \pm \frac{1}{2}| > \frac{1}{2},\ |\operatorname{Re}\tau| < 1,\ \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

（T_2 是通过给 $\operatorname{Int} T_2$ 添加边界上 $\operatorname{Re}\tau \geqslant 0$ 的那一部分而得到的）映射成整个扩充 λ 平面使得 $\lambda(\infty) = 0$，$\lambda(0) = 1$，$\lambda(1) = \infty$．对于 λ 的每个值，方程 $k^2(\tau) = \lambda$ 有且仅有一个解 τ 属于 T_2．Landau-Carathéodory

定理中的函数 $\tau(\lambda)$ 可以理解为该反函数中将扩充 λ 平面映射成 T_2 的那个分支.

在圆盘 $|z|<1$ 内正则且不等于 0 和 1 的函数的例子 $f(z)=\lambda[i(1+z)/(1-z)]$ 表明, Landau - Carathéodory 定理不可能再改善. Landau - Carathéodory 定理蕴涵关于整函数不取的值的 **Picard 定理** (Picard theorem).

Landau 找到了下面所陈述的关于反函数的 Cauchy 定理中常数 $\Omega(M)$ 的精确值. 假设函数 $w=f(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内正则, $f(0)=0, f'(0)=1$ 且在该圆盘内 $|f(z)|<M$, $M\geqslant 1$; 则存在常数 $\Omega(M)$, 使得在 $w=0$ 处为零的反函数 $z=\varphi(w)$ 在圆盘 $|w|<\Omega(M)$ 内正则且在该圆盘内 $|\varphi(w)|<1$. Landau 证明:

$$\Omega(M)=M(M-\sqrt{M^2-1})^2.$$

达到这一界限的极值函数是

$$f_M(z)=Mz\frac{1-Mz}{M-z}.$$

此函数 $f_M(z)$ 也是 Landau 的下述定理中的极值函数. 若函数 $f(z)$ 满足上面提到的条件, 则 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<\rho(M)$ 内单值, 其中 $\rho(M)=M-\sqrt{M^2-1}$.

Landau 还证明了共形映射理论中的一系列**覆盖定理** (covering theorems), 证明了相应的常数的存在性和界限. 下面给出其中的一个定理. 设 H 是 $|z|<1$ 内由条件 $f(0)=0, f'(0)=1$ 所规范化的正则函数 $f(z)$ 组成的类. Bloch 定理 (见 **Bloch 常数** (Bloch constant)) 蕴涵如下的 Landau 的定理: 存在绝对常数

$$\inf\{L_f: f\in H\}=L\geqslant B,$$

其中 L_f 是圆盘 $|z|<1$ 在映射 $w=f(z)$ 下的象所完全覆盖的 w 平面中最大圆盘的半径, B 是 Bloch 常数. 常数 L 称为 Landau 常数 (Landau constant). 已知 L 有如下界限 (见 [5], [8]): $1/2\leqslant L\leqslant 0.55\cdots$. 从这一定理再次推出 Picard 定理.

参考文献

[1] Landau, E., Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **38** (1904), 1118 - 1133.
[2] Landau, E. and Gaier, D., Darstellung and Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Springer, reprint, 1986.
[3] Landau, E., Zum Koebeschen Verzerungssatz, *Rend. Circ. Mat. Polermo*, **46** (1922), 347 - 348.
[4] Landau, E., Der Picard - Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, **32** (1926), 467 - 474.
[5] Landau, E., Ueber die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten, *Math. Z.*, **30** (1929), 608 - 634.
[6] Landau, E., Ansgewählte Kapitel der Funktionentheorie, *Trudy Tbilis. Mat. Inst. Akad. Nauk. SSSR.*, **8** (1940), 23 - 68.
[7] Стоилов, С. М., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962.
[8] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).
[9] Валирон, Ж., Аналитические функции, пер. с франц., М., 1957.
[10] Бермант, А., 《Матем. сб.》, **15** (1944), 2, 285 - 318.
Г. В. Кузьмина 撰

【补注】 目前 (1989) 已知 Landau 常数 L 满足

$$\frac{1}{2}<L\leqslant\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)}=0.5432588\cdots.$$

上界是半个世纪前由 R. Robinson 得到的, H. Rademacher ([A1]) 又独立得到此结果. 关于这些结果及其有关问题的更详细的信息见 [A2].

参考文献

[A1] Rademacher, H., On the Bloch - Landau constant, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 387 - 390.
[A2] Minda, C. D., Bloch constants, *J. d'Anal. Math.*, **41** (1982), 54 - 84.
杨维奇 译

Langevin 方程 [Langevin equation; Ланжевина уравнение]

【补注】 1908 年 P. Langevin ([A1]) 提出下面的方程用以描述 Brown 运动 (悬浮在液体中的小粉尘粒子的不规则振动) 的自然现象:

$$\frac{dv(t)}{dt}=-\gamma v(t)+L(t). \quad (A1)$$

此处 $v(t)$ 表示在时刻 t Brown 粒子沿一个坐标轴的速度, $\gamma>0$ 是由液体的粘滞性引起的磨擦系数, 而 $L(t)$ 是假定的 "Langevin 力" (Langevin force), 代表因组成液体的分子的热运动而产生的压力起伏. 假定 Langevin 力具有性质:

$$\mathrm{E}(L(t))=0 \quad 及 \quad \mathrm{E}(L(t)L(s))=\mathrm{D}\cdot\delta(t-s).$$

Langevin 方程 (A1) 导出下述关于在速度轴上概率密度的扩散方程 (或 "Fokker - Planck" 方程) (见**扩散方程** (diffusion eguation)):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(v)=\gamma\frac{\partial}{\partial v}(v\rho_t(v))+\frac{1}{2}D^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}\rho_t(v). \quad (A2)$$

方程 (A1) 和 (A2) 对 1905 年由 A. Einstein 给出的 Brown 运动现象描述提供了概念上和定量上的改进. 对 Brown 运动的定量认识在分子理论为学术界接受这

件事上起着很大作用. 两个观测常数 γ 和 D 之间的数量关系，即 $D=2\gamma kT/M$（其中 T 是温度，M 是粒子的质量），给出了 Boltzmann 常数 k 并从而给出 Avogadro 数的第一个估计.

Langevin 方程可以看作第一个**随机微分方程**（stochastic differential equation）. 现今它可以写成

$$dv(t) = -\gamma v(t)dt + Ddw(t),$$

其中 $w(t)$ 是 **Wiener 过程**（Wiener process），也可以含糊地称为“Brown运动”. Langevin方程的解是一个 **Марков 过程**（Markov process），首先由 G.E.Uhlenbeck 和 L.S.Ornstein 在 1930 年（[A2]）予以描述（亦见 **Ornstein-Uhlenbeck 过程**（Ornstein-Uhlenbeck process））.

Langevin 方程是一个直观性方程. 用 Hamilton 机制为它建立一个牢固基础的任务尚未彻底完成. G.W. Forol, M.Kac 和 P.Mazur（[A3]）在这方面取得了重要的进展. 他们指出，Uhlenbeck 和 Ornstein 的过程可以通过把 Brown 粒子同无穷个处于热平衡状态下的谐振子以某种特殊方式耦合来实现.

最近一些年，出现了 Langevin 方程的量子力学变形. 它们可分为两类：一类产生 Марков 过程；一类满足热平衡条件. 前者是著名的“量子随机微分方程”（[A4]），后者称为“量子 Langevin 方程”（[A5]）.

参考文献

[A1] Langevin, P., Sur la théorie de mouvement Brownien, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **146** (1908), 530 - 533.

[A2] Uhlenbeck, G. E. and Ornstein, L. S., On the theory of Brownian motion, *Phys. Rev.*, **36** (1930), 823 - 841.

[A3] Ford, G. W.. Kac, M. and Mazur, P., Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 504 - 515.

[A4] Barnett, C., Streater, R. F. and Wilde, I. F., Quasi-free quantum stochastic integrals for the CAR and CCR, *J. Funct. Anal.*, **52** (1983), 19 - 47.

[A5] Hudson, R. L. and Parthasarathy, K. R., Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 301 - 323.

H. Maassen 撰 刘秀芳 译

Laplace-Beltrami 方程 [**Laplace-Beltrami equation; Лапласа-Бельтрами уравнение**], Beltrami 方程 (Beltrami equation)

平面上函数 u 的 Laplace 方程在任意二维 C^2 Riemann 流形 R 上的推广. 当曲面 R 有局部坐标 ξ, η 及**第一基本形式** (first fundamental form)

$$ds^2=Ed\xi^2+2Fd\xi d\eta+Gd\eta^2$$

时，Laplace-Beltrami 方程形如

$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{F\frac{\partial u}{\partial \eta}-G\frac{\partial u}{\partial \xi}}{\sqrt{EG-F^2}}\right]+ \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{F\frac{\partial u}{\partial \xi}-E\frac{\partial u}{\partial \eta}}{\sqrt{EG-F^2}}\right]=0. \quad (*)$$

当 $E=G$，$F=0$ 时，即 (ξ,η) 为 R 上之**等温坐标** (isothermal coordinates) 时，方程 (*) 就变成了 Laplace 方程. Laplace-Beltrami 方程是 E. Beltrami 在 1864－1865 引入的（见 [1]）.

(*) 式左方再除以 $\sqrt{EG-F^2}$ 则称为第二 Beltrami 微分参数 (second Beltrami differential parameter).

Laplace-Beltrami 方程的正则解 u 是调和函数的推广，常称为曲面 R 上的**调和函数** (harmonic function). 这些解和通常的调和函数一样的物理解释，例如作为曲面 R 上的不可压缩流体流的速度势，或作为 R 上的静电场的势等等. 曲面上的调和函数保留了通常调和函数的许多性质. **Dirichlet 原理** (Dirichlet principle) 的推广对它们也适用：在区域 $G\subset R$ 上的 $C^2(G)\cap C(\overline{G})$ 类函数且在边界 ∂G 上与调和函数 $v\in C(\overline{G})$ 之值相同的函数中，v 使以下的 Dirichlet 积分 (Dirichlet integral)

$$D(v)=\iint_G \nabla v \cdot \sqrt{EG-F^2}\, d\xi d\eta$$

达到最小值，这里

$$\nabla v=\frac{E\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2-2F\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}+G\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2}{EG-F^2}$$

是第一 Beltrami 微分参数 (first Beltrami differential parameter)，它是梯度平方 $\mathrm{grad}^2 u$ 对曲面上的函数的推广.

关于 Laplace-Beltrami 方程对高维 Riemann 流形的推广，见 **Laplace 算子** (Laplace operator).

参考文献

[1] Beltrami, E., Richerche di analisi applicata alla geometria, in Opere Matematiche, Vol.1, Milano, 1902, 107－198.

[2] Schiffer, M. and Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

Е.Д.Соломенцев, Е.В.Шикин 撰 齐民友 译

Laplace 分布 [**Laplace distribution; Лапласа распределение**]

一种连续概率分布，其密度为

$$p(x)=\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|x-\beta|},\ -\infty<x<\infty,$$

其中 β $(-\infty<\beta<\infty)$ 为移位参数，而 $\alpha>0$ 为

尺度参数. Laplace 分布的密度关于点 $x=\beta$ 为对称，且此密度的导数在 $x=\beta$ 处有一不连续点. 有参数 α 与 β 的 Laplace 分布的特征函数是

$$e^{it\beta}\frac{1}{1+t^2/\alpha^2}\ .$$

Laplace 分布有有穷的任意阶矩. 特别地，它的**数学期望**(mathematical expectation)为 β，方差(见**方差**(dispersion))为 $2/\alpha^2$.

Laplace 分布首先由 P. Laplace([1])引进，且常称之为"第一 Laplace 律(first Laplace law)"，相对于"第二 Laplace 律(second Laplace law)"，则有时用来称呼**正态分布**(normal distribution). Laplace 分布又称为双边指数分布(two-sided exponential distribution)，那是由于如果 X_1 与 X_2 是有密度为 $\alpha e^{-\alpha x}$ $(x>0)$ 的相同**指数分布**(exponential distribution)的独立随机变量，则随机变量

$$\beta+X_1-X_2$$

的分布重合于 Laplace 分布. 密度为 $e^{-|x|}/2$ 的 Laplace 分布与密度为 $1/(\pi(1+x^2))$ 的 **Cauchy 分布**(Cauchy distribution)以下述方式相互联系：

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-|x|}dx=\frac{1}{1+t^2}$$

且

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt=e^{-|x|}.$$

参考文献

[1] Laplace, P. S., Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812.
[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971.

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970.

潘一民 译

Laplace 方程 [Laplace equation; Лапласа уравнение]

如下形式的齐次偏微分方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2}=0, \tag{1}$$

其中 $u=u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 个实变元的函数. Laplace 方程的左边称为作用于 u 的 **Laplace 算子**(Laplace operator). 在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的某个区域 D 里，Laplace 方程的 C^2 类正则解，即在 D 里有直到二阶的连续偏导数的解，称为 D 里的**调和函数**(harmonic function). Laplace 方程是二阶椭圆型偏微分方程的主要代表，对解椭圆方程的边值问题，其基本方法已经和仍在发展(见**椭圆方程边值问题**(boundary value problem, elliptic equations)).

令 $\mathbf{v}$ 是 D 里一个位势向量场(potential vector field)，即 $\mathbf{v}=-\operatorname{grad}u$，其中 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是位势. 因为

$$\Delta u=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=-\operatorname{div}\mathbf{v},$$

Laplace 方程的物理意义是，任意这种场的位势在没有源泉的区域 D 里满足 Laplace 方程，例如，万有引力场的引力位势在没有吸引质量的区域里，静电场的位势在没有电荷的区域里，等等，都满足 Laplace 方程. 这样，Laplace 方程表示位势场的守恒定律. 从这个观点看，Laplace 方程的形式(1)是选取 Descartes 直角坐标系得到的；在其他坐标系，Laplace 算子和 Laplace 方程取不同形式. 在这个场存在源泉的地方，(1)的右边是一个同源泉的密度成比例的函数，而 Laplace 方程变成 **Poisson 方程**(Poisson equation). Laplace 方程也出现在许多其他的，研究稳定场的数学物理问题中，例如稳定温度分布的研究，静弹性理论的问题，等等.

对 Laplace 方程，下述位势论的边值问题是主要的：1)**Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)，或者第一边值问题(first boundary value problem)，即寻求一个调和函数，使得它取给定在区域的边界 ∂D 上的连续值；2)**Neumann 问题**(Neumann problem)，或者第二边值问题(second boundary value problem)，寻求一个调和函数 u，使得它的法向导数 $\partial u/\partial n$ 取给定在 ∂D 上的连续值；3)**混合问题**(mixed problem)，寻求一个调和函数 u 使得在边界上满足线性关系

$$\alpha(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n}+\beta(y)u(y)=g(y),$$

$$y\in\partial D,\ \alpha(y)\neq 0.$$

在 $n=2$ 的情况下，Laplace 方程与单个复变元 $z=x_1+ix_2$ 的解析函数论有紧密联系，事实上，解析函数的实部与虚部是**共轭调和函数**(conjugate harmonic functions).

Laplace 方程最早出现在 L. Euler 和 J. d'Alembert(见[1]，[2])的涉及流体力学问题及初次研究单复变函数的论文中. 但它普遍为人所知，是在 P. S. Laplace 的关于引力位势和天体力学理论的论文发表之后(见[3]，[4]).

方程(1)有时称为标量 Laplace 方程(scalar Laplace equation)，以区别于向量 Laplace 方程(vector Laplace equation)

$$\Delta\mathbf{v}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}=0. \tag{2}$$

例如，在 $\mathbf{R}^3$ 按 Descartes 直角坐标系定义一个向量场 $\sum_{i=1}^{3} v_i \mathbf{e}_i$，这时向量 Laplace 方程（2）等价于三个标量 Laplace 方程 $\Delta v_i = 0$，$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3)$，$i = 1, 2, 3$. 在其他坐标系中，向量 Laplace 方程等价于向量场 $\mathbf{v}$ 的分量的三个二阶偏微分方程的方程组，这些方程通过对相应坐标的分量分析运算之后，从（2）得到（见[7]）.

参考文献

[1] Euler, L., Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae, **6** (1761).

[2] D'Alembert, J., Opuscules mathématiques, 1, Paris, 1761.

[3] Laplace, P.S., Hist. Acad. Sci. Paris (1782) (1785).

[4] Laplace, P.S., Celestial mechanics, 2, Chelsea, reprint, 1966（译自法文）.

[5] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971（英译本：Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984）.

[6] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968（中译本：马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社）.

[7] Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 2, McGraw-Hill, 1953.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 区域 D 里 Laplace 方程的解有值得注意的性质. 例如，它们在 D 里解析，其各阶导数可以用与 D 的边界的距离估计；它们满足平均值定理，弱和强**最大值原理**（maximum principle），关于在绝对极端边界点附近行为的 Hopf 引理，**Harnack 不等式**（Harnack inequality），**Harnack 定理**（Harnack theorem），Dirichlet 变分原理（见 **Dirichlet 变分问题**（Dirichlet variational problem）），等等.

[A2]引进一个保守场表示成一个函数的**梯度**（gradient）. [3]给出极坐标的 Laplace 方程. [A3]引入直角坐标的 Laplace 方程. [A1]包含曲线坐标的 Laplace 方程的系统论述.

参考文献

[A1] Bocher, M., Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Teubner, 1894.

[A2] Lagrange, J. L., Sur l'équation séculaire de la lune, *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* (1773).

[A3] Laplace, P. S., Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, *Hist. Acad. Sci: Paris* (1787).

[A4] Lang, S., Complex analysis, Springer, 1985.

[A5] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983.

[A6] Petrovskiĭ, I. G., Partial differential equations, Saunders, 1967（译自俄文）.

[A7] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（译自德文）.

[A8] Tichonoff, A. N. [A.N. Tikhonov] and Samarskiĭ, A. A., Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1959（译自俄文）.

高琪仁、吴炯圻 译

Laplace 方程，数值方法[**Laplace equation, numerical methods**; **Лапласа уравнение, численные методы решения**]

用一个含有有限数目 N 的未知量的离散问题去替代原来的边值问题的方法，使得若人们在适当精度下找到此离散问题的解，则人们就能在给定的精度 ε 下确定原来问题的解；此处 N 依赖于 ε，且当 $\varepsilon \to 0$ 时它趋于无穷.

对 d 个空间变量 $x \equiv (x_1, \cdots, x_d)$，**Laplace 方程**（Laplace equation）有形式

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r^2} = 0,$$

它是齐次的 **Poisson 方程**（Poisson equation）. Laplace 方程的边值问题是 Poisson 方程及更一般椭圆型方程的边值问题（见[1]）的特殊情形，并且解椭圆型方程边值问题的数值方法（见[1]，[2]）包含了许多对 Laplace 方程的数值方法. Laplace 方程的特别的特性使有可能构造及使用那样一些方法，使得那些方法在本质上比关于较一般方程的方法有较好的特性，虽然在实践中人们宁愿简化在计算机上所用的一般方法，而不考虑上述的可能性.

椭圆型方程的主要的数值方法是：投影网格法（有限元方法）和差分方法. 这两类方法均与下面事实相联系，用含有 N 个网格结点的网格区域 Ω_N 去近似原来的区域 Ω，且构造一个关于这些结点上函数值的代数方程组

$$L_N u_N = f_N. \qquad (*)$$

投影网格法是变分和投影方法的特殊情形. 在此方法中，人们用对所考虑的函数空间进行逼近的思想，这个空间应包含原问题的解，而这里的逼近是用带有给定的基函数的某些特定的有限维子空间来实现的. 还有，在此方法中，组（$*$）的向量 u_N 由所要求的解关于所取的基作近似后的展开式中的系数组成. 假定在平面的有界区域 Ω 内原问题的解有形式

$$u(x) = \sum_{r=1}^{k} c_r \chi_r(x) + u_0(x).$$

此中 $u_0(x) \in W_2^{1+m}(\Omega)$ $(m > 0)$，$W_2^{1+m}(\Omega)$ 是 Соболев 空间，函数 $\chi_k(x) \in W_2^1(\Omega)$ 是被规定了的，且反映了紧靠奇点的 $u(x)$ 的渐近性态（这些奇点如像边界的角点以及边界条件类型发生变化处的点），对一些类型的区域 Ω 和混合边值问题，这些方法就有可

能．例如，在 $W_2^1(\Omega)$ 中于 ε 精度内去找解 $u(x)$ 且使得算术运算在 $O(\varepsilon^{-2/m}\ln^2\varepsilon)$ 精度内，而且在大量较特殊情况下使其计算工作的估计低于 $O(\varepsilon^{-2/m}|\ln\varepsilon|)$ 和 $O(\varepsilon^{-2/m})$.

在差分方法中人们通常以一个或另一个方式用差分去近似导数，且组（*）中向量由这样一些分量组成，这些分量近似该解在网格 Ω_N 的结点处的值．上述方法的特性已广泛地用于研究平面上有界区域 Ω 内的边值问题．例如，对 Dirichlet 条件 $U|_\Gamma=\varphi(s)$，此处 Γ 是 Ω 的边界且 $\varphi(s)$ 充分光滑．考虑到当离开 Γ 时 Laplace 方程解的可微性质将发生改进，在此基础上，人们能用一种方法构造组（*），使得数目 N 与数 N_Γ 有同样的阶数，此处 N_Γ 是 Γ 上在精度为 ε 内规定 $\varphi(s)$ 的点的个数，且在此同样精确度 ε 内可找到 u_N 使之算术运算的精度在 $O(N_\Gamma\ln^2 N_\Gamma)$ 内．这样就有可能用有限次运算在严格的内部子区域内任一固定点处，在精度 ε 内得到原问题的解（[4]）．这种类型的方法是渐近地最佳的；例如，在此情形中，当人们使用一个较简单的方法，即用一个直角网格使得该网格有精度 $O(N^{-1})$，则为了找精度在 ε 内的 u_N，其所要求的运算次数是 $O(N|\ln N\varepsilon|)$ $(N\approx N_\Gamma^2$（见[4]））．关于 Laplace 方程，网格方法中误差估计已较详细地研究了（见[4]，[5]）；若在 Γ 上有奇点，则在紧靠这些点的网格建议用一个特别的结构（见[5]）．人们经常用那样一种差分方法，这种方法基于对 Laplace 方程的某些积分特性的近似（[6]）．

相当偶然地，人们可使用配置法．在此方法中，组（*）作为在网格的结点处被满足的原始方程的结果而得到，并假定了原问题解的近似是在某有限维子空间内．解 Laplace 方程边值问题的另一类特殊的数值方法是基于将这些问题化为奇异积分方程以及基于用数值方法解积分方程后成的解（[7]，[8]）．

参考文献

[1] Aubin, J. P., Approximation of elliptic boundary-value problems, Wiley, 1972.

[2] Ciarlet, P. G., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978.

[3] Дьяконов, Е. Г., в сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, 149 – 164.

[4] Bakhvalov, N. S., About optimization of numerical methods, in Proc. Internat. Congress of Mathematicians Nice, 1970, Vol. 3, Gauthier-Villars, 1971, 289 – 295.

[5] Волков, Е. А., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физики》, **9** (1969), 3, 573 – 584.

[6] Волков, Е. А., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **150** (1979), 67 – 98.

[7] Banerjee, P. K. and Butterfield, R., Boundary element methods in engineering science, McGraw-Hill, 1981.

[8] Grouch, S. L. and Starfield, A. M., Boundary element methods in solid mechanics, Allen & Unwin, 1983.

Е. Г. Дьяконов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rices, J. R., Boisvert, R. F., Solving elliptic problems using ELLPACK, Springer, 1984.

[A2] Birkhoff, G., Lynch, R. E., Numerical solution of elliptic problems, SIAM, 1984.

[A3] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962.

[A4] Wachspress, E. L., Iterative solutions of elliptic systems, Prentice-Hall, 1966.

[A5] Young, D. M., Iterative solutions of large linear system, Acad. Press, 1971.

[A6] Strang, G., Fix, G. J., An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973.

[A7] Mitchell, A. R., Griffits, A. F., The finite difference methods in partial differential equations, Wiley, 1980.

[A8] Johnson, C., Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method, Cambridge Univ. Press, 1987.

仇庆久 译

Laplace 积分 [Laplace integral; Лапласа интеграл]

1) 如下形式的积分：

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\equiv F(p),$$

它定义了实变量 $t(0<t<\infty)$ 的函数 $f(t)$ 的积分 **Laplace 变换**（Laplace transform），给出了一个复变量 p 的函数 $F(p)$．P. Laplace 在 18 世纪末和 19 世纪初考虑了这个积分；L. Euler 在 1737 年曾应用过．

2) 依赖于参数 $\alpha,\beta>0$ 的两个特殊的定积分：

$$\int_0^\infty\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\alpha}\,e^{-\alpha\beta},$$

$$\int_0^\infty\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-\alpha\beta}.$$

В. И. Битюцков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Oberhettinger, F. and Badii, L., Tables of Laplace transforms, Springer, 1973.

[A2] Sneddon, I. N., The use of integral transforms, McGraw-Hill, 1972.

[A3] Ditkin, V. A. and Prudnikov, A. P., Integral transforms, Plenum, 1969(译自俄文).

[A4] Doetsch, G., Handbuch der Laplace-Transformation, 1–3, Birkhäuser, 1950 – 1956.

张鸿林 译

Laplace 法 [Laplace method; Лапласа метод], 渐近估计的

确定 Laplace 积分

$$F(\lambda)=\int_{\Omega} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \qquad (1)$$

当 $0<\lambda\to+\infty$ 时渐近性态的方法，其中 $\Omega=[a,b]$ 是一有限区间，S 为实值函数，f 为复值函数，S 和 f 对 $x\in\Omega$ 均充分光滑．$F(\lambda)$ 的渐近性态指的是来自最大值 $\max_{x\in\Omega}S(x)$ 所达到的那些点的贡献之和，如果假定这些点的数目是有限的话．

1) 如果最大值在 $x=a$ 处达到且 $S'(a)\neq 0$，则积分 (1) 的渐近性态中来自点 a 的贡献 $V_a(\lambda)$ 为

$$V_a(\lambda)=-\frac{f(a)+O(\lambda^{-1})}{\lambda S'(a)}\,e^{\lambda S(a)}$$

2) 如果最大值在区间 Ω 的某个内点 x^0 处达到，且 $S''(x^0)\neq 0$，则其贡献为

$$V_{x^0}(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x^0)}}\,[f(x^0)+O(\lambda^{-1})]e^{\lambda S(x^0)}.$$

该公式是 P.S.Laplace 在 [1] 中得到的．$f(x)$ 和 $S'(x)$ 在 S 的最大值点处具有有限重数的零点的情形已有全面的研究，相应的渐近展式也已得到 (见 [2]–[8])．Laplace 方法还可以推广到复平面中 Ω 为复围线的情形 (见**鞍点法** (saddle point method))．

令 Ω 为 $\mathbf{R}^n_x$ 中的有界区域并假设 $S(x)$ 在 Ω 的闭包中的最大值仅在内点 x^0 处达到，这里 x^0 是 S 的一个非退化驻点．则

$$F(\lambda)=\left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]^{n/2}|\det S''_{xx}(x^0)|^{-1/2}[f(x^0)+$$
$$+O(\lambda^{-1})]e^{\lambda S(x^0)}.$$

在这种情形下，$F(\lambda)$ 的渐近展开也已被得到．以上给出的所有公式对 $|\lambda|\to\infty, |\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ 的复 λ 也成立．当 $F(\lambda)$ 对参数 λ 的依赖关系

$$F(\lambda)=\int_{\Omega(\lambda)} f(x,\lambda)e^{S(x,\lambda)}dx$$

变得较为复杂时，还有一些修正的 Laplace 方法 (见 [4], [8])．

参考文献

[1] Laplace, P.S., Essai philosophique sur les probabilités, in Oeuvres Complètes, Vol.7, Gauthier-Villars, 1886.
[2] Erdélyi, A., Asymptotic expansions, Dover, reprint, 1956.
[3] Bruijn, N.G.de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.
[4] Евграфов, М.А., Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд., М., 1962.
[5] Copson, E.T., Asymptotic expansions, Cambridge Univ. Press, 1965.
[6] Olver, F.W.J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974.
[7] Риекстыньш, Э.Я., Асимптотические разложения интегралов, т.1, Рига, 1974.
[8] Федорюк, М.В., Метод перевала, М., 1977.

М.В.Федорюк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bleistein, N. and Handelsman, R.A., Asymptotic expansions of integrals, Holt, Rinehart & Winston, 1975, Chapt.5.

王仁宏、檀结庆 译

Laplace 算子 [Laplace operator 或 Laplacian; Лапласа оператор]

由公式

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad (1)$$

所定义的 $\mathbf{R}^n$ 内的微分算子以及它的某些推广 (此处 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标)．Laplace 算子 (1) 是最简单的二阶椭圆型微分算子．Laplace 算子在数学分析、数学物理以及几何学中起着重要作用；例如，见 **Laplace 方程** (Laplace equation)；**Laplace-Beltrami 方程** (Laplace-Beltrami equation)；**调和函数** (harmonic function)；**调和形式** (harmonic form)．令 M 是一个 n 维具度量

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j,\ g_{ij}=g_{ji} \qquad (2)$$

的 **Riemann 流形** (Riemannian manifold)，$\|g^{ij}\|$ 是矩阵 $\|g_{ij}\|$ 的逆矩阵，$g=\det\|g_{ij}\|$，则在带有 Riemann 度量 (2) 的 M 上的 Laplace 算子 (或 Laplace-Beltrami 算子) 有形式

$$\Delta u=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right], \qquad (3)$$

此中 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 M 上的局部坐标．(算子 (1) 与具标准 Euclid 度量 $ds^2=(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$ 的 $\mathbf{R}^n$ 上的 Laplace 算子相差一个符号)．

算子 (3) 的一个推广是在**微分形式** (differential form) 上的 Laplace 算子，即在 M 上外微分形式空间内，Laplace 算子有形式

$$\Delta=(d+d^*)^2=dd^*+d^*d, \qquad (4)$$

此中 d 是一形式的外微分的算子，且 d^* 是形式地伴随于 d 的算子，它借助于在紧支集的光滑形式上取下述内积而定义:

$$(\alpha,\beta)=\int\alpha\wedge\star\beta, \qquad (5)$$

此处 $\star$ 是由度量 (2) 诱导的 Hodge 星号算子，它将一个 p 形式变成一个 $(n-p)$ 形式．在 (5) 中形

式 α 和 β 假定是实的；关于复形式，人们必须用内积 (5) 的 Hermite 推广. 算子 (4) 在 0 形式（即函数）上的限制规定为 (3). 关于 p 形式（$p \geqslant 0$ 任意整数）的情形，在局部坐标下 Laplace 算子能写成如下形式：

$$\Delta(a_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) =$$

$$= \left\{ -\nabla^i \nabla_i a_{i_1 \cdots i_p} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu R^n_{i_\nu} a_{n i_1 \cdots \hat{i}_\nu \cdots i_p} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{\mu<\nu} (-1)^{\mu+\nu} R^{n \cdot k \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot i_\mu} a_{k n i_1 \cdots \hat{i}_\mu \cdots \hat{i}_\nu \cdots i_p} \right\} \times$$

$$\times dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

此中 ∇^i 和 ∇_i 是关于 x^i 的**共变导数** (covariant derivative)，$R^{i \cdot k \cdot}_{\cdot j \cdot l}$ 是**曲率张量** (curvature tensor)，且 $R^n_k = R^{n \cdot i \cdot}_{\cdot i \cdot k}$ 是 **Ricci 张量** (Ricci tensor).

假定给定任一椭圆复形

$$\cdots \to \Gamma(E_{p-1}) \xrightarrow{d} \Gamma(E_p) \xrightarrow{d} \Gamma(E_{p+1}) \to \cdots, \tag{6}$$

此处 E_p 是 M 上的实或复向量丛，$\Gamma(E_p)$ 是它们的光滑截口所成的空间. 在每一向量丛 E_p 上引入一个 Hermite 度量，且用任意方法规定 M 上的体积元素，人们能在 E_p 的具有紧支集的光滑截口空间内定义一个 Hermite 内积. 于是形式地伴随于算子 d 的算子 d^* 可定义了. 这样，按公式 (3) 就在每个空间 $\Gamma(E_p)$ 上构造 Laplace 算子 (4). 若对复形 (6) 取 de Rham 复形，则用一种自然的选取方法选取 p 形式上的度量及体积元素，它们由度量 (2) 诱导而来，于是 de Rham 复形的 Laplace 算子就可得到如上描述的在形式上的 Laplace 算子.

在一复流形 M 上，连同 de Rham 复形一起，同样存在椭圆复形

$$\cdots \to \Lambda^{p-1,q} \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p,q} \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p+1,q} \to \cdots, \tag{7}$$

$$\cdots \to \Lambda^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,q+1} \to \cdots, \tag{8}$$

此中 $\Lambda^{p,q}$ 是 M 上 (p, q) 型光滑形式所成的空间. 在 M 上切丛内引入 Hermite 结构，人们能构造 de Rham 复形的 Laplace 算子 (4) 以及复形 (7) 和 (8) 的 Laplace 算子：

$$\Box = \partial\partial^* + \partial^*\partial,$$

$$\bar{\Box} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

此处每一个算子将空间 $\Lambda^{p,q}$ 变到它本身中. 若 M 是一个 **Kähler 流形** (Kähler manifold)，且在 M 上的 Hermite 结构由 **Kähler 度量** (Kähler metric) 诱导而得，则

$$\Delta = 2\Box = 2\bar{\Box}.$$

确立椭圆复形的 Laplace 算子的作用的一个重要事实是在一紧流形 M 情形下正交 Weyl 分解 (orthogonal Weyl decomposition)

$$\Gamma(E_p) = d(\Gamma(E_{p-1})) \oplus \mathscr{H}^p(E) \oplus d^*(E_{p+1}) \tag{9}$$

的存在性. 在此分解中 $\mathscr{H}^p(E) = \operatorname{Ker} \Delta|_{\Gamma(E_p)}$，此处 Δ 是复形 (6) 的 Laplace 算子，所以 $\mathscr{H}^p(E)$ 是 E_p 的“调和”截口所成的空间（在 de Rham 复形情形，它是所有 p 次调和形式的空间）. (9) 式右端最前面两项的直和等于 $\operatorname{Ker} d|_{\Gamma(E_p)}$，而最后两项的直和重合于 $\operatorname{Ker} d^*|_{\Gamma(E_p)}$. 特别地，分解式 (9) 给出了在项 $\Gamma(E_p)$ 中复形 (6) 的上同调空间和调和截口空间 $\mathscr{H}^p(E)$ 之间的同构.

参考文献

[1] Rham, G. de., Differentiable manifolds, Springer, 1984 (译自法文).

[2] Chern, S. S., Complex manifolds, Univ. Recife, 1959.

[3] Wells, jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

М. А. Шубин 撰

【补注】 令 V 是一个具内积 $\langle , \rangle$ 的有限维向量空间，且设在 V 上给定了**定向** (orientation). 在给定的定向类中选取 V 的一个规范正交基 $(e_1, \cdots, e_n)$，则由

$$\star(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \pm e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}}$$

定义了 Hodge ⋆ 算子 (Hodge ⋆ operator) (Hodge 星号算子 (Hodge star operator)，星号算子 (star operator))

$$\star: \wedge^p V \to \wedge^{n-p} V,$$

此中 $\{i_1, \cdots, i_p; j_1, \cdots, j_{n-p}\} = \{1, \cdots, n\}$，正负号之选取依赖于 $\{1, \cdots, n\}$ 的置换 $\{i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_{n-p}\}$ 是偶还是奇的.

$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} (i_1 < \cdots < i_p \leqslant n)$ 构成了 $\wedge^p V$ 的规范正交基，由它定义 $\wedge^p V$ 上的一个内积，称此内积是由 V 的内积诱导而得. 令 vol 是由所选取的定向所确定的体积形式 (volume form)，则（用线性性质推广 ⋆ 到 $\wedge^p V$ 中所有元素上）对所有 $\alpha, \beta \in \wedge^p V$，有

$$\alpha \wedge \star \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \mathrm{vol}.$$

在一定向的 Riemann 流形 M 上的 Hodge ⋆ 算子可对 M 上 p 形式 φ 逐点定义为

$$(\star\varphi)(x) = \star(\varphi(x)).$$

令 E 是(复)维数为 n 的复向量空间,E' 是其上的 $2n$ 维实向量空间.令 h 是 E 上的 Hermite 内积,则连结 h 的基本 2 形式(fundamental 2-form) $\Omega=-(\mathrm{Im}h)/2$ 提供了 E' 上一个内积,且 Ω^n 给出了一个定向.在此情形下,Hodge $\star$ 算子可相对于此内积及此定向而定义.它就再一次被逐点推广到具 Hermite 度量的复流形上的形式.

Riemann 度量 g 的 Laplace 算子同样可定义为下述的实对称二阶线性偏微分算子,此算子零化常数函数,且其主象征(见**算子的象征**(symbol of an operator))等于一个对偶于 g 的余切丛上的二次型.

参考文献

[A1] Hodge, W. V. D., The theory and application of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 1952.

仇庆久 译

Laplace 序列[Laplace sequence; Лапласа последовательность]

三维射影(仿射、Euclid)空间中的一种线汇序列,其内每两个相邻的线汇由一曲面(线汇的焦曲面)上**共轭网**(conjugate net)的两族曲线的切线所组成.Laplace 序列的两个相邻线汇中的每一个称为另一个的 Laplace 变换(Laplace transform)(见 **Laplace 变换(几何学中的)**(Laplace transformation (in geometry))).Laplace 方程的解析变换与从一线汇的一个焦曲面到另一个焦曲面的几何变换相联系(见[1]).对于每个线汇 Laplace 序列都有伴随的焦曲面 Laplace 序列(见[2]).n 维射影空间 P_n 中奇异射影型的 p 维 Cartan 流形的 Laplace 序列(见[3])已被推广到 P_n 中任何 p 共轭系的情况(见[4]).

参考文献

[1] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2, Chelsea, reprint, 1972.
[2] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М.-Л., 1950.
[3] Chern, S. S., Laplace transforms of a class of higher-dimensional varieties in a projective space of n dimensions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **30** (1944), 95–97.
[4] Смирнов, Р. В., 《Докл. АН СССР》, **71** (1950), 3, 437–439.

В. Т. Базылев 撰 沈一兵 译

Laplace 定理[Laplace theorem; Лапласа теорема]

1) 关于行列式的 Laplace 定理——见**余因子**(cofactor).

2) 关于用正态分布逼近二项分布的 Laplace 定理是概率论的**中心极限定理**(central limit theorem)的最初形式:如果 S_n 是 n 次 **Bernoulli 试验**(Bernoulli trials)中"成功"的次数,且成功的概率为 $p(0<p<1)$,那么当 $n\to\infty$ 时,对任意实数 x_1 与 $x_2(x_1<x_2)$,

$$\mathrm{P}\left\{x_1<\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x_2\right\}\to\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\qquad(*)$$

成立,其中

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy$$

是标准正态律的分布函数.

局部 Laplace 定理(local Laplace theorem)有其独立的意义:对于概率

$$\mathrm{P}\{S_n=m\}=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},\ 0\leqslant m\leqslant n,$$

m 为整数,

$$\mathrm{P}\{S_n=m\}=\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(x)(1+\varepsilon_n)$$

成立,其中

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

是标准正态分布的密度,且当 $n\to\infty$ 时,对于所有使 $x=(m-np)/\sqrt{np(1-p)}$ 属于某个有穷区间的 m,一致地有 $\varepsilon_n\to0$.

此定理的一般形式是由 P. S. Laplace([1])证明的.Laplace 定理的 $p=1/2$ 的特殊情形,则是由 A. de Moivre([2])加以研究的.所以 Laplace 定理有时又称为 de Moivre-Laplace 定理(de Moivre-Laplace theorem).

对于 Laplace 定理的实际应用,获得一个在使用近似公式时所产生误差的估算是重要的.一个(与[1]比较而言)较精确的渐近公式是

$$\mathrm{P}\{S_n<y\}=\Phi\left[\frac{y-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right]+R_n(y),$$

其中的余项 $R_n(y)$,对所有实数 y 一致地有阶 $O(1/\sqrt{n})$.对于用**正态分布**(normal distribution)一致逼近**二项分布**(binomial distribution),更有用的是 Я. Успенский(1937)的公式:若 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$,则对任意 y_1 和 y_2,

$$\mathrm{P}\{y_1<S_n<y_2\}=\Phi\left[\frac{y_2-np+0.5}{\sigma}\right]+$$
$$-\Phi\left[\frac{y_1-np+0.5}{\sigma}\right]+\psi\left[\frac{y_2-np+0.5}{\sigma}\right]+$$
$$-\psi\left[\frac{y_1-np+0.5}{\sigma}\right]+\Delta,$$

其中

$$\psi(y)=\frac{1-2p}{6\sigma}(1-y^2)\varphi(y),$$

且对 $\sigma\geqslant5$,

$$|\Delta| < (0.13 + 0.18|1-2p|)\sigma^{-2} + e^{-3\sigma/2}.$$

为了改进这一逼近的相对精度，С. Н. Бернштейн (1943) 与 W. Feller (1945) 还提出了其他公式．

参考文献

[1] Laplace, P. S., Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812.

[2] Moivre, A. de, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, London, 1730.

[3] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本：Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[4] Feller, W., On the normal approximation to the binomial distribution, *Ann. Math. Statist.*, **16** (1945), 319 – 329.

[5] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1968 (中译本：W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，1979).

A. B. Прохоров 撰

【补注】 关于用正态分布逼近的更详尽及更一般的讨论，见 [A1].

参考文献

[A1] Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975 (译自俄文).

潘一民 译

Laplace 变换 [Laplace transform; Лапласа преобразование]

广义地它是形如

$$F(p) = \int_L f(z)e^{-pz}dz \qquad (1)$$

的 Laplace 积分 (Laplace integral)，这里积分是在复 z 平面的某一围道 L 上进行的，它在定义在 L 上的函数 $f(z)$ 和复变数 $p=\sigma+i\tau$ 的解析函数 $F(p)$ 之间建立了一个对应关系．很多形如 (1) 式的积分由 P. Laplace 作了考察 (见 [1])．

狭义地，Laplace 变换理解为单侧 Laplace 变换 (one-sided Laplace transform)

$$F(p) = L[f](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \qquad (2)$$

这样称呼是为了区别于双侧 Laplace 变换 (two-sided Laplace transform)

$$F(p) = L[f](p) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (3)$$

Laplace 变换是一类特殊的**积分变换** (integral transform)；(2) 式或 (3) 式的变换与 **Fourier 变换** (Fourier transform) 有紧密联系．双侧 Laplace 变换 (3) 可以看成函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的 Fourier 变换，而单侧 Laplace 变换 (2) 可以看成当 $0<t<\infty$ 等于 $f(t)e^{-\sigma t}$ 而当 $-\infty<t<0$ 等于零的函数 $\varphi(t)$ 的 Fourier 变换．

复局部可和的被积函数 $f(t)$ 称为象原函数 (original function)，或简称象原 (original)；在应用上把变元 t 看成时间常常是方便的．函数 $F(p)=L[f](p)$ 称为象原 $f(t)$ 的 Laplace 变换 (Laplace transform)．一般而言，积分 (2) 理解为在无穷是条件收敛的．先验地，有三种可能的情形：1) 存在实数 σ_c，使得积分 (2) 当 $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_c$ 时收敛而当 $\operatorname{Re}p=\sigma<\sigma_c$ 时发散；这数 σ_c 称为 (条件) 收敛横坐标 (abscissa of (conditional) convergence)；2) 积分 (2) 对所有的 p 都收敛，在这种情形下，令 $\sigma_c=-\infty$；3) 积分 (2) 对所有的 p 发散，在这种情形下，令 $\sigma_c=+\infty$．如果 $\sigma_c<+\infty$，则积分 (2) 表示一个在收敛半平面 (half-plane of convergence) $\operatorname{Re}p>\sigma_c$ 内的单值解析函数 $F(p)$．通常限于考虑绝对收敛的积分 (2)．使得积分

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t}dt$$

存在的那些 σ 的最大下界称为绝对收敛横坐标 (abscissa of absolute convergence) σ_a，$\sigma_c\leqslant\sigma_a$．如果 a 是使得 $|f(t)|=O(e^{\sigma t})$ $(t\to\infty)$ 的那些 σ 的下确界，则 $\sigma_a=a$；数 a 有时称为 $f(t)$ 的增长指数 (index of growth)．

在一定的附加条件下，$f(t)$ 能由它的 Laplace 变换 $F(p)$ 唯一地重新得到．例如，如果 $f(t)$ 在 t_0 的某邻域中有界变差或如果 $f(t)$ 分段光滑，则 Laplace 变换的反演公式 (inversion formula for the Laplace transform)

$$\mathring{f}(t_0) = \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2} = \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(p)e^{pt_0}dp,\ \sigma>\sigma_a$$

成立．

公式 (2) 和 (4) 使得有可能得到施加在象原和变换上的运算之间的很多关系式，也能得到经常遇到的象原的变换表．所有这些组成了**算子演算** (operational calculus) 的初等部分．

在数学物理中，多维 Laplace 变换

$$F(p) = \int_{C_+} f(t)e^{-(p,t)}dt \qquad (5)$$

有重要应用，这里 $t=(t_1,\cdots,t_n)$ 是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的点，$p=(p_1,\cdots,p_n)=\sigma+i\tau=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)+i(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 是复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant1)$ 的点，

$$(p,t)=(\sigma,t)+i(\tau,t)=p_1t_1+\cdots+p_nt_n$$

是标量积而 $dt=dt_1\cdots dt_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中体积元素．

(5) 中的复函数是在积分区域 $C_+ = \{t \in \mathbf{R}^n: t_j > 0, j = 1, \cdots, n\}$, $\mathbf{R}^n$ 的正卦限上定义且局部可和的. 如果 $f(t)$ 在 C_+ 中有界, 则对满足条件 $\mathrm{Re}(p, t) > 0$, $t \in C_+$ 的所有点 $p \in \mathbf{C}^n$, 积分 (5) 存在, 以上条件又确定了正卦限 $S = \{\sigma \in \mathbf{R}^n: \sigma_j > 0, j = 1, \cdots, n\}$. 积分 (5) 在 $\mathbf{C}^n$ 中以 S 为底的管状域 $T^S = S + i\mathbf{R}^n = \{p = \sigma + i\tau \in \mathbf{C}^n: \sigma \in S, \tau \in \mathbf{R}^n\}$ 内定义了一个复变元 $p = (p_1, \cdots, p_n)$ 的全纯函数. 在更一般的情形下, 对 (5) 中的积分域 C_+ 和管状域的底 S, 可以取 $\mathbf{R}^n$ 中任何一对顶点在原点的共轭的闭凸锐角锥. 对 $n = 1$, 公式 (5) 变成 (2), $C_+ = \{t \in \mathbf{R}: t > 0\}$ 成为正半轴, 而 $T^S = \{p = \sigma + i\tau \in \mathbf{C}: \sigma > 0\}$ 成为右半平面. Laplace 变换 (5) 对极广泛的函数类中的函数 $f(t)$ 有定义且全纯, 例如, 对组成类 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的所有急减函数, 即在 $\mathbf{R}^n$ 中无穷次可微且当 $|t| \to \infty$ 时连同其所有导数减小快于 $|t|^{-1}$ 的任何幂的函数 $f(t)$. Laplace 变换的初等性质, 作了相应的改变后, 对多维情况仍然正确.

Laplace 变换的一个推广是测度的 Laplace 变换, 和一般地, 广义函数的 Laplace 变换. 广义函数的 Laplace 变换理论对数学物理中重要的缓增广义函数类 $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 已经最完全地得到发展, 缓增广义函数定义为急减检验函数空间 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的连续线性泛函. 缓增广义函数 $g \in \mathscr{S}'$ 的 Laplace 变换 $L[g]$ 仍是缓增广义函数, 即 $L[g] \in \mathscr{S}'$.

数值 Laplace 变换 (numerical Laplace transformation). 这是变换 (2) 的数值实现, 它把象原 $f(t)(0 < t < \infty)$ 转换成变换 $F(p)$, $p = \sigma + i\tau$, 以及 Laplace 变换的数值反演, 即 $f(t)$ 由积分方程 (2) 或由反演公式 (4) 的数值确定.

应用数值 Laplace 变换的需要是作为以下事实的结果而产生的: 象原和变换的表并没有囊括所有在实用上发生的情形, 另一个事实是象原或变换经常用一些太复杂且不便应用的公式来表示.

在 p 为实值的情形, 公式 (2) 能在一定的附加条件下化成带 Laguerre 权的积分:

$$F(p) = \frac{1}{p}\int_0^\infty x^s e^{-x}\varphi(x)dx, \qquad (6)$$

对某个 $s \geqslant 0$. 在一定条件下, Laplace 变换化成对复值 p 的积分 (6) (见[9]).

为了计算 (6) 中的积分, 可以用求积公式

$$\int_0^\infty x^s e^{-x}\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(s)}\varphi(x_k^{(s)}), \qquad (7)$$

这里系数 $A_k^{(s)}$ 和点 $x_k^{(s)}$ 是按这样的方式选取的, 使等式 (7) 对固定的 n 对次数 $\leqslant 2n-1$ 的所有多项式是精确的, 或者对某个依赖于 $\varphi(x)$ 性质的有理函数系是精确的. 对这样的求积公式系数 $A_k^{(s)}$ 和点 $x_k^{(s)}$ 对很多 s 的值已经算出 (见[9]-[11]).

Laplace 变换的求逆问题, 作为第一类积分方程 (2) 求解 $f(x)$ 的问题, 涉及一类**不适定问题** (ill-posed problems), 而且特别地能用正则化算法来解.

Laplace 变换的数值反演问题也能用基于把象原函数展开成函数级数的方法来解决. 这里, 首先能展开成幂级数, 广义幂级数, 指数函数级数, 也能展开成正交函数级数, 特别是展成 Чебышев, Legendre, Jacobi, 或 Laguerre 多项式. 展开象原函数成 Чебышев, Legendre 或 Jacobi 多项式的问题按其最终形式化成有限区间上的矩量问题. 假设已知函数 $\beta(t)f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\beta(t)f(t)dt,$$

这里 $f(t)$ 是未知函数而 $\beta(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上非负可积函数. 假设 $f(t)$ 在任何有限区间 $[0, T]$ 上可积且属于类 $L_2(\beta(t), [0, \infty))$. 由 $\beta(t)f(t)$ 的变换 $F(p)$, 函数 $f(t)$ 能够作为移位的 Jacobi 多项式, 特别是移位的 Legendre 多项式和第一类与第二类 Чебышев 多项式的级数构造出来, 其中的系数 a_k 由公式

$$a_k = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} F(i)$$

计算, 这里 $\alpha_i^{(k)}$ 分别是写成 $\sum_{i=1}^k \alpha_i^{(k)} x^i$ 形式的移位的 Legendre 多项式或第一类和第二类 Чебышев 多项式的系数 (见[4]).

设给定函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(p)$ 且 $f(t)$ 满足条件

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\lambda|f(t)|^2 dt < \infty, \ \lambda > -1,$$

那么 $f(t)$ 能展成广义 Laguerre 多项式的级数,

$$f(t) = t^\lambda \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)} L_k^{(\lambda)}(t),$$

它平均收敛于 $f(t)$. 此级数的系数 a_k 能由以下公式计算

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left\{\frac{1}{z^{\lambda+1}}F\left[\frac{1}{z}\right]\right\}\Bigg|_{z=1}.$$

Laplace 变换求逆的另一方法是对反演积分 (4) 构造求积公式.

如果点 p 按 $\mathrm{Re}\,p$ 趋于无穷的方式趋于无穷, 则变换 $F(p)$ 趋于零. 假设 $F(p)$ 按多项式减小, 即 $F(p)$ 能表成形式

$$F(p) = \frac{1}{p^s}\varphi(p), \ s > 0,$$

其中 $\varphi(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,p > \sigma_a$ 正则且对 $\mathrm{Re}\,p \geqslant \sigma_a$ 连续. 积分 (4) 有形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}p^{-s}\varphi(p)dp. \qquad (8)$$

对积分 (8) 一个插值求积公式已构造出来，基于 $\varphi(p)$ 用 $1/p$ 的多项式插值：

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} A_k^{(s)}(t)\varphi(p_k)+R_n, \qquad (9)$$

这里 p_k 是插值点，它是任意的且位于直线 $\operatorname{Re} p=\sigma_a$ 的右边，R_n 是这公式的余项，且

$$A_k^{(s)}(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_{kj}t^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}.$$

系数 a_{kj} 只依赖于所选取的点 p_k，而且对选取它们的某些方法（特别地、对等距点），a_{kj} 已经计算出来（见[12]）. 研究插值求积公式收敛性的问题在于寻求 $\varphi(p)$ 的性质和点 p_k 之间的关系，使得能检验(9)中余项 R_n 趋于零. 这问题对某些具体的点 p_k 和对某些特殊的函数 $\varphi(p)$ 的类已经解决（见[13]）.

对积分 (4)，在特殊形式的有理函数类中能够构造最高精度的求积公式. 为了公式的参数不依赖于 σ_a 和 t，作变量替换 $p=\sigma_a+z/t$. 然后积分 (4) 有形式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{z}F^*(z)dz=\frac{e^{\sigma_a t}}{t}J(s),$$

$$\varepsilon>0,\ F^*(z)=F\left(\frac{z}{t}+\sigma_a\right)=F(p).$$

与前面一样，假设 $F^*(z)=z^{-s}\varphi(z)$. 为了计算积分 $J(s)$，构造求积公式

$$J(s)\approx\sum_{k=1}^{n}A_k^{(s)}\varphi(z_k^{(s)}), \qquad (10)$$

它对任何次数 $\leqslant 2n-1$ 的 $1/z$ 的多项式必须是精确的. 为此必要充分条件是，(10) 是一个插值公式且点 $z_k^{(s)}$ 是某一正交多项式系 $\omega_n^{(s)}(1/z)$ 的根. 最后，这个条件引出公式

$$f(t)\approx\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\sum_{k=1}^{n}A_k^{(s)}(z_k^{(s)})^s F\left[\frac{z_k^{(s)}}{t}+\sigma_a\right], \qquad (11)$$

这里 $z_k^{(s)}$ 是正交多项式 $\omega_n^{(s)}(1/z)$ 的根. 对多项式 $\omega_n^{(s)}(1/z)$ 已知一种显式表示，一个递推关系，一个以它们为解的微分方程，以及一个生成函数. 对 s 的某些特殊值，已证明多项式 $\omega_n(1/z)$ 的根在右半平面内（见[13]）. (11) 中点和系数 $A_k^{(s)}$ 的值已在[12] 中给出，其中对 $s=1, 2, 3, 4, 5$; $n=1(1)15$ 带 20 个正确的十进小数位，对 $s=0.01(0.01)3$; $n=1(1)10$ 带 7－8 个正确的十进小数位.

参考文献

[1] Laplace, P. S., Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812.

[2] Pol, B. van der and Bremmer, H., Operational calculus based on the two-sided Laplace integral, Cambridge Univ. Press, 1955.

[3] Bochner, S., Lectures on Fourier integrals, Princeton Univ. Press, 1959 (译自德文).

[4] Диткин, В. А., Прудников, А. П., Операционное исчисление, М., 1966.

[5] Диткин, В. А., Прудников, А. П., Интегральные преобазования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974.

[6] Doetsch, G., Handbuch der Laplace-Transformation, 1－3, Birkhaüser, 1950－1956.

[7] Владимиров, В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

[8] Zemanian, A. H., Generalized integral transformations, Wiley, 1968.

[9] Айзенштат, В. С., Крылов, В. И., Метельский, А. С., Таблицы для численного преобразования Лапласа и вычисления интегралов вида $\int_0^\infty x^s e^{-x}f(x)dx$, Минск, 1962.

[10] Salzer, H. E. and Zucker, R., Tables of zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 1004－1012.

[11] Пальцев, А. А., Скобля, Н. С., 《Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук》, 1965, 3, 15－23.

[12] Крылов, В. И., Скобля, Н. С., Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа, Минск, 1968.

[13] Крылов, В. И., Скобля, Н. С., Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа, М., 1974.

Н. С. Жаврид 撰

【补注】

参考文献

[A1] Oberhettinger, F. and Badii, L., Tables of Laplace transforms, Springer, 1973.

[A2] Sneddon, I. N., The use of integral transforms, McGraw-Hill, 1972.

[A3] Widder, D. V., The Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1972.

[A4] Doetsch, G., Introduction to the theory and application of the Laplace transformation, Springer, 1974 (译自德文).

[A5] Wolff, K. B., Integral transforms in science and engineering, Plenum, 1979.

葛显良 译　鲁世杰 校

Laplace 变换（几何学中的）[Laplace transformation (in geometry); Лапласа преобразование (в геометрии)]

从一线汇的焦网 (focal net of a congruence) 到同一线汇的另一焦网的变换. 网的 Laplace 变换的概念由 G.Darboux (1988) 引入，他发现 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} + c\theta$$

(其中 a,b,c 是变量 u,v 的已知函数) 的解的一个解析变换可以在几何上解释为从一线汇的一个焦网到另一焦网的变换. 网的 Laplace 变换建立了共轭网理论 (见**共轭网** (conjugate net)) 与线性几何之间的一种对应. 网的 Laplace 变换有着各种推广.

参考文献

[1] Tzitzeica, G., Géométrie différentielle projective des réseaux, Gauthier-Villars & Acad. Roumaine, 1924.

[2] Базылев, В. Т., Итоги науки. геометрия, 1963, М., 1965.

В. Т. Базылев 撰

【补注】 参阅 **Laplace 序列** (Laplace sequence).

参考文献

[A1] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М.-Л., 1950.

沈一兵 译

Laplace 向量 [Laplace vector; Лапласа вектор]

Newton-Coulomb 势场 $V(r) = \kappa/r$ 中的常值质量 m 的点的一个运动积分:

$$\Lambda_1 = (x_1\dot{x}_4 - x_4\dot{x}_1) = \frac{1}{m}(\dot{x}_2 L_3 - \dot{x}_3 L_2) + \kappa\frac{x_1}{r},$$

$$\Lambda_2 = (x_2\dot{x}_4 - x_4\dot{x}_2) = \frac{1}{m}(\dot{x}_3 L_1 - \dot{x}_1 L_3) + \kappa\frac{x_2}{r},$$

$$\Lambda_3 = (x_3\dot{x}_4 - x_4\dot{x}_3) = \frac{1}{m}(\dot{x}_1 L_2 - \dot{x}_2 L_1) + \kappa\frac{x_3}{r},$$

其中

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\ ;\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2;\ m\ddot{x}_4 = \kappa\frac{x_4}{r};$$

$L = (L_1, L_2, L_3)$ 为角动量, 决定轨道平面 (当 $L \neq 0$ 时), 且与能量积分

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{\kappa}{r}$$

一起决定其位形. Laplace 向量决定 Kepler 轨道的方位, 并与其第二焦点的位置向量成正比.

对于各向同性谐振子的势有 Laplace 向量的一个类比, 此势与 Newton 势一起在中心力场的各种势中占据特殊的位置.

在中心扰动 Newton 场中 Laplace 向量不是一个积分, 而作旋进运动, 譬如, 在相对论 4 动量 Kepler 问题中, Laplace 向量在周期 r 中的旋转角为

$$|\Delta\varphi| = 2\pi\left[\left[1 - \frac{\kappa^2}{c^2L^2}\right]^{-\frac{1}{2}} - 1\right] \approx \frac{\pi\kappa^2}{L^2c^2}.$$

在量子理论中, Laplace 向量的存在解释了类氢原子的能级对于角量子数 l 的"随机简并", 这是对于任意中心势 $V(r)$ 必然存在的对于磁量子数 m 的简并的补充. Coulomb 振子的 **Schrödinger 方程** (Schrödinger equation) 相应于两个全同的粒子, 其中之一在以 Kepler 椭圆的第一焦点为 Coulomb 中心的场中运动, 而另一个在第二焦点的场中运动. 每一个粒子的 **Hamilton 算子** (Hamiltonian) 相对于其坐标的正交变换群 $O(3)$ 不变, 而整个系统相对于 4 维 Euclid 空间的正交变换群 $O(3) \times O(3) = O(4)$ 不变.

Laplace 向量是由 J. Hermann (见 [1]) 和 P. Laplace (见 [2]) 引进的, 看来是相互独立地引进的. 有时将 Laplace 向量称为 Runge-Lenz 向量.

参考文献

[1] Hermann, J., Giornale de Letterati d'Italia, Venice, **2** (1710), 447 – 467.

[2] Laplace, P., Celestial mechanics, 1, Chelsea, reprint, 1966 (译自法文).

[3] Volk, O., Miscellanea from the history of celestial mechanics II, Celestial Mech., **14** (1976), 365 – 382.

[4] Дубошин, Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, М. 1975.

[5] Попов, В. С., Физика высоких энергий и теории элементарных частиц, К., 1967, 702 – 727.

В. В. Охрименко 撰 沈 青 译

大粒子方法 [large-particle method; крупных частиц метод]

计算连续介质可压缩流动的一种方法 ([1]). 方法基于将原始的微分方程根据其所代表的物理过程加以分裂 ([3]). 它可应用于求解进化方程组. 可以通过定常化过程得到定常解. 大粒子方法是 Harlow 的"网格中的粒子法"的发展.

方法广泛应用于研究空气动力学流动, 衍射问题, 跨声速流动, 辐射与物质的相互作用现象等等.

方法的差分格式可以通过考察理想可压缩气体的运动 (连续方程, 动量方程和能量方程) 来说明:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \\ &\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}u_i) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial\rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E\mathbf{v}) + \operatorname{div}(P\mathbf{v}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

这里 $x_i = \{x, y, z\}$, t 为时间, ρ 为密度, $\mathbf{v} = \{u_i\} = \{u, v, w\}$ 为速度, E 为总比能量, P 为压力. 为使方程组 (1) 封闭, 利用状态方程

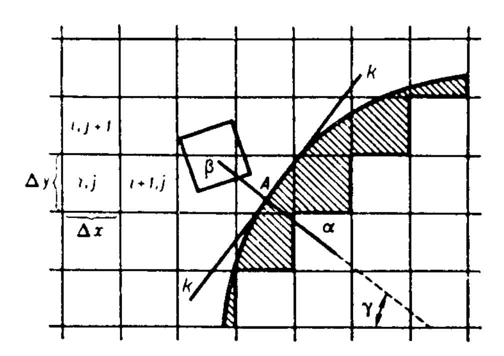
$$P = P(\rho, J),$$

其中

$$J = E - \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$$

为比内能.

进化方程组(1)的求解过程划分为三个时间步，其中每一步由三个阶段构成：Euler 阶段，Lagrange 阶段和终了阶段．开始考察子系统——“大粒子”的内态的变化(Euler 阶段)，然后考察这一子系统的无内态变化的位移(Lagrange 和终了阶段)．



Euler 阶段．积分区域用静止的(Euler 的)差分网格所覆盖，网格的形状是任意的(为了叙述的简化起见，考察二维(平面)区域中的直角网格，见图)．在计算的这一步，只是与网格整体相关的量在改变，而流体假设瞬间被冻结．因此，形如 $\operatorname{div}(\psi\rho\mathbf{v})$ ($\psi=(1, u, v, E)$)，相应于位移效应的对流项从方程组(1)中去掉．在(1)中的剩下的方程中，ρ 从微分符号中提出，而方程(1)相对于 u, v, E 的时间导数解出：

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0,\ \rho\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}=0,\\ &\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}(P\mathbf{v})=0.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

最简单的有限差分近似(中心差分)给出如下的表达式：

$$\widetilde{u}^n_{i,j}=u^n_{i,j}-\frac{P^n_{i+1/2,j}-P^n_{i-1/2,j}}{\Delta x}\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,j}},$$

$$\widetilde{v}^n_{i,j}=v^n_{i,j}-\frac{P^n_{i,j+1/2}-P^n_{i,j-1/2}}{\Delta y}\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,j}},$$

$$\widetilde{E}^n_{i,j}=E^n_{i,j}-$$

$$-\left[\frac{P^n_{i+1/2,j}\widetilde{u}^n_{i+1/2,j}-P^n_{i-1/2,j}\widetilde{u}^n_{i-1/2,j}}{\Delta x}+\right.$$

$$\left.+\frac{P^n_{i,j+1/2}\widetilde{v}^n_{i,j+1/2}-P^n_{i,j+1/2}\widetilde{v}^n_{i,j-1/2}}{\Delta y}\right]\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,j}}.$$

这里分数下标诸量与网格边界相关，例如：

$$u^n_{i+1/2,j}=\frac{u^n_{i,j}+u^n_{i+1,j}}{2},$$

$$P^n_{i-1/2,j}=\frac{P^n_{i-1,j}+P^n_{i,j}}{2},\ \cdots,$$

$\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{E}$ 为场 ρ 在 $t^n+\Delta t$ 这一层“冻结”的假设下得到的流动参数的中间值．虽然这种形式的 Euler 阶段的格式是不稳定的，但如果以后的阶段按一定形式写出，整个格式从整体上讲是稳定的．Euler 阶段，譬如说，可以通过引进**积分关系法**(integral-relation method)的基本要素达到稳定性．这时积分函数的近似是沿平行物体轴方向进行的(见图)，即如积分关系式方法的格式 1：将原始方程组取为积分形式，对如下积分进行近似：

$$f=\int_V\rho u\,d\tau,\quad \theta=\int_V\rho v\,d\tau,\ \psi=\int_V\rho E\,d\tau.$$

Lagrange 阶段．在此阶段计算 $t^n+\Delta t$ 时刻经网格边界的质量通量．这时假设大粒子的质量只由于与边界垂直的速度分量而输运．因而有

$$\Delta M^n_{i+1/2,j}=\langle\rho^n_{i+1/2,j}\rangle\langle u^n_{i+1/2,j}\rangle\Delta y\Delta t,$$

等等．符号 $\langle\ \ \rangle$ 决定参数 ρ 与 u 在网格边界上的值．这些量的选择有重要意义，因为对计算的稳定性和精度影响很大．ΔM^n 的各种差分表达式是可能的：不同级的精度，考虑及不考虑流动方向，中心差分，ZIP 近似等等．动量(能量)通量等于 ΔM^n 与速度(总比能)的相应值的乘积．不仅对质量流，也对动量与能量流进行了近似．

终了阶段．在这一阶段寻找流动在时刻 $t^{n+1}=t^n+\Delta t$ 的 Euler 参数的最终场．这一阶段的方程是质量 M，动量 $\mathbf{p}$ 和总能量 E 的守恒定律，对于该网格(大粒子)写为差分格式 $M^{n+1}=M^n+\sum\Delta M^n$, $\mathbf{p}^{n+1}=\mathbf{p}^n+\sum\Delta\mathbf{p}^n$, $E^{n+1}=E^n+\sum\Delta E^n$．流动参数的终了值 ρ, $X=\{u, v, E\}$ 在下一时间层按以下公式计算(流动由左向右及由下向上流动)：

$$\rho^{n+1}_{i,j}=\rho^n_{i,j}+$$

$$+\frac{\Delta M^n_{i-1/2,j}+\Delta M^n_{i,j-1/2}-\Delta M^n_{i,j+1/2}-\Delta M^n_{i+1/2,j}}{\Delta x\Delta y},$$

$$X^{n+1}_{i,j}=\frac{\rho^n_{i,j}}{\rho^{n+1}_{i,j}}\widetilde{X}^n_{i,j}+$$

$$+\frac{\widetilde{X}^n_{i-1,j}\Delta M^n_{i-1/2,j}+\widetilde{X}^n_{i,j-1}\Delta M^n_{i,j-1/2}}{\rho^{n+1}_{i,j}\Delta x\Delta y}+$$

$$+\frac{-\widetilde{X}^n_{i,j}\Delta M^n_{i+1/2,j}-\widetilde{X}^n_{i,j}\Delta M^n_{i,j+1/2}}{\rho^{n+1}_{i,j}\Delta x\Delta y}.$$

差分格式(散度守恒格式)的守恒性和完全散度性由总能 E 方程保证．在终了阶段(在利用介质的间断模型的情况下)最好进行密度的附加重新计算，这将使起伏光滑并提高精确度．将各个阶段的不同表达式组合

起来，就得到大粒子方法的一系列差分格式，并使得可以实现广泛类型的数值实验．

大粒子方法可以从不同观点加以解释：分裂方法，混合 Euler-Lagrange 方法，在局部 Lagrange 坐标中的计算（Euler 阶段）并换算到原来的网格（Lagrange 及终了阶段），对于液体元素（大粒子）的守恒定律的差分写法，Euler 差分格式．

边界条件通过引入一系列虚拟点提出（使得每个计算点变为内点，而对于所有网格保持相同的算法）．对于一阶近似格式一层就足够了，对于二阶两层就足够了，如此等等．譬如，考察计算任意外形的轴对称体和平面体的绕流问题（见图）．以上的差分公式对于各方向上均为流体包围的内网格是成立的，对于与固体交界的网格也是成立的，固体的轮廓与网格边界重合．

利用差分方法计算物体绕流有两种可能的方法：在坐标 s, n 中计算；或者引入分数网格（见 [2]）．在第一种情况下要碰到处理带有缺陷和凹形物体的困难．第二种方法没有这些缺点．

在分数网格的情况下，物体上的边界条件与整网格情况下一样提出，用引入虚拟网格的方法．在物体内部有一层与分数网格为界的虚拟网格．为了决定这些虚拟网格中气体的参数，从每一个虚拟网格 α 的中心建立向物体轮廓线的法线；如果 A 是法线与外轮廓线的交点，令 k 为 A 点的切线（见图）．令 β 为流场中对于 k 与 α 对称的网格．β 中的气动力学参数 g 通过"加权称重"决定，$g_\beta=\sum_i S_{\beta_i g_i}(\sum_i S_{\beta_i}=1)$，其中求和是对于这些网格 i 进行的，它们一部分（面积为 S_{β_i}）位于 β 网格内．为了提出物体不可穿透的条件，还要对每一个虚拟网格定义一个参数 γ，即在 A 点指向物体轮廓的矢径的倾角．如果用的是附着条件（两个速度分量经物体表面均改变符号），这一附加 γ 的决定就不必要．这时虚拟网格 α 中气体参数为

$$\begin{Bmatrix}\rho\\E\end{Bmatrix}_\alpha=\sum S_{\beta_i}\begin{Bmatrix}\rho\\E\end{Bmatrix}_i,\quad \begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}_\alpha=-\sum S_{\beta_i}\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}_i.$$

轮廓与网格边界重合的物体的边界条件是这里给出的边界条件的一个特殊情况．

对于每一个分数网格（见图）需要知道五个几何特性：$A_{i-1/2,j}$，$A_{i,j-1/2}$，$A_{i+1/2,j}$，$A_{i,j+1/2}$ 及 $f_{i,j}$，其中 $f_{i,j}$ 是分数网格的体积与整个网格体积 $\Delta x\Delta y$ 之比，$A_{i-1/2,j}$ 是面向流动的那一边 $(i-1/2,\ j)$ 面积的分数，等等．

在一个网格里有一个固体边界的存在意味着两种特性：它把质心从网格的几何中心移至靠近边界；它减小了网格的实际大小．对于不管是整个网格还是分数网格，所有的流动参数都是对于质心而言的．正是在质心之间进行气体动力学函数的插值．在整个网格中，质心或者与网格的几何中心全同（平面 Descartes 坐标系），或者与其相近（柱坐标系）．在实际计算中，甚至对于沿轴线的这一列网格，差别最多是 $0.2\,\Delta r$．这对于计算结果不会有显著的畸变．如果分数网格以一种适当的方式引入，质心相对于几何中心的位移不使这一误差增加．网格的实效大小的降低是一个更严重的问题．为了避免稳定性条件 $c(\Delta t/\Delta\lambda)<1$ 的被破坏，其中 λ 是 x 或是 y，$f<f_{\min,\text{稳定}}$ 的那些网格应与流动中相邻的整个网格组合在一起，所得到的组合网格应利用分数网格的公式进行计算．在这种情况下，放大了的网格的几何尺寸将不比整个网格的小：$A_{i-1/2,j}\geqslant 1$，$A_{i,j-1/2}\geqslant 1$，…，$f_{i,j}>1$，所以分数网格的稳定性的问题不复存在．

在平面情况下，分数网格的几何特性可以通过直接测量而决定．在轴对称的情况下需要附加计算，其中考虑每一分数网格与对称轴线的距离．分数网格的差分公式通过将整个网格的差分公式做小的改变而得到．

大粒子方法的差分格式借助微分近似进行了研究（近似，粘性效应，稳定性）（见 [4]）．此方法还推广到空间（三维）情况．

参考文献

[1] Белоцерковский, О. М., Давыдов, Ю. М.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **11** (1971), 1, 182 – 207.

[2] Давыдов, Ю. М.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **11** (1971), 4, 1056 – 1063.

[3] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, Новосиб., 1973 (英译本: Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1975).

[4] Белоцерковский, О. М., Давыдов, Ю. М., Исследование схем метода《крупных частиц》с помощью дифференциальных приближений, в кн.: Проблемы прикладной математики и механики, М., 1971, 145 – 155.

Ю. М. Давыдов 撰　沈　青 译

大筛法 [**large sieve**; **большое решето**]

Ю. В. Линник 于 1941 年提出的一个方法，用以从递增整数列筛去指定的某些剩余类．考虑一个不大于 N 的正整数列 $n_1,\cdots,n_Z$，素数 $p\leqslant\sqrt{N}$ 及一个余数 l，$0\leqslant l\leqslant p-1$．设

$$Q(p,l)=\sum_{\substack{n_i\equiv l(\operatorname{mod}p)\\ n_i\leqslant N}}1.$$

从统计考虑可以推出：对几乎所有的 p，因而也对几乎所有的 l，有 $Q(p,l)>0$．这可以借助于**圆法**（circle method）的基本思想给以严格的证明．设 A

是这样的 p 的个数，及 $B=B(p)$ 是相应的这样的 l 的个数．Линник 证明了

$$A \geqslant \pi(\sqrt{N}\ ) - \frac{CN}{\tau^2 Z}$$

及

$$B(p) \geqslant (1-\tau)p,$$

其中 $C>0$ 是一个常数及 $\tau\in(0,1)$，进而推出了定理：在区间 $[N^{\varepsilon}, N]$ 上使得 И.М.Виноградов 关于最小平方非剩余的假设（见 **Виноградов 假设**（Vinogradov hypotheses））不成立的素数个数仅可能有有限个（依赖于 ε）．

大筛法被不断改进，得到了 $Q(p,l)$ 的均值估计，最好的结果属于 E.Bombieri(1965)：

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{N}} p\sum_{l=1}^{p-1}\left[Q(p,l)-\frac{Z}{p}\right]^2 \leqslant CNZ.$$

大筛法对近代解析数论最重要的贡献是在于**密度方法**（density method），这导致证明了 Виноградов-Bombieri 定理（1965）——算术数列中素数分布的平均渐近定律．这和其他关于这种均值的类似的定理在解决一些熟知的数论问题中得到了广泛的应用，在许多情形中可以代替**广义 Riemann 假设**（Riemann hypothesis, generalized）．

参考文献

[1] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[2] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1980.

[3] Halberstam, H., Richert, H.-E., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bombieri, E., Le grand crible dans la théorie analytique des nombres, Astérisque, 18(1974).

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞、潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1991.

潘承彪 译 戚鸣皋 校

Larmor 半径 [Larmor radius; Ларморовский радиус]

在垂直于磁场 **B** 的平面中，带电粒子沿之运动的圆周的半径．电荷 e 在均匀磁场中的运动，在 Lorentz 力的作用下进行，它由方程（采用国际单位制）

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] \tag{1}$$

描述，其中 **p** 和 **v** 分别是实验室坐标系中带电粒子的动量和速度．在 z 轴沿磁场 **B** 方向的 Descartes 坐标系中，(1) 的解具有形式

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0t}\cos(\omega_L t+\alpha),\\ v_y &= -v_{0t}\sin(\omega_L t+\alpha),\\ v_z &= v_{0z},\\ x &= x_0 + r_L\sin(\omega_L t+\alpha),\\ y &= y_0 + r_L\cos(\omega_L t+\alpha),\\ z &= z_0 + v_{0z}t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $\omega_L = ec^2|\mathbf{B}|/\varepsilon$ 是所谓 Larmor 频率（Larmor frequency），ε 是带电粒子的能量，它在均匀磁场中运动时并不改变，v_{0t}，v_{0z}，α，x_0，y_0，z_0 是由初值条件确定的常数，c 是真空中光速，而

$$r_L = \frac{v_{0t}}{\omega_L} = \frac{v_{0t}\varepsilon}{ec^2|\mathbf{B}|}$$

是 Larmor 半径．在均匀磁场中，电荷沿螺旋线运动，螺旋轴沿磁场方向，半径为 Larmor 半径 r_L．粒子的切向速度 v_{0t} 和轴向速度 v_{0z} 是常数．

如果粒子的速度远小于光速 c，可以近似地令 $\varepsilon = mc^2$，而 Larmor 半径的表达式取下列形式：

$$r_L = \frac{v_{0t}}{\omega_L} = \frac{v_{0t}m}{e|\mathbf{B}|}.$$

系统的磁矩显现为带电粒子在磁场中回旋的结果．

参考文献

[1] Тамм, И. Е., Основы теории электричества, 7 изд., М., 1957（中译本：И. Е. 塔姆，电学原理，人民教育出版社，1963）.

[2] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М 栗弗席茨，场论，人民教育出版社，1959）.

В. В. Параил 撰

【补注】

参考文献

[A1] Clemmow, P. C. and Dougherty, J. P., Electrodynamics of particles and plasmas, Addison-Wesley, 1969.

徐锡申 译

Lasker 环 [Lasker ring; Ласкера кольцо]

一个**交换环**（commutative ring），其中任一理想（ideal）都有**准素分解**（primary decomposition），即可表示为有限多个准素理想之交．类似地，A 模称为 Lasker 模（Lasker module），如果任一子模有准素分解．在 Lasker 环上的任一有限型的模是 Lasker 模．E.Lasker 证明了在多项式环中有准素分解（[1]）．E. Noether 证明任一 **Noether 环**（Noetherian ring）是 Lasker 环（[2]）．

参考文献

[1] Lasker, E., Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, **60**(1905), 19–116.

[2] Noether, E., Idealtheorie in Ringbereiche, *Math. Ann.*,

83 (1921), 24-66.
[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

В. И. Данилов 撰 冯绪宁 译

拉丁长方 [**Latin rectangle**; **Латинский прямоугольник**]

一个 $m \times n(m \leqslant n)$ 的长方形矩阵，它的每一行都是同一个 n 元集合 S 中的元素的一个（无重复的）排列，而在它的每一列中，每个元素至多出现一次．在 $m=n$ 时，拉丁长方就是 n 阶的**拉丁方**（Latin square）．通常取 $S=\{1, \cdots, n\}$，这时称这个拉丁长方是在集合 S 上构作的．

对于任意的自然数 m 与 n, $m \leqslant n$，总存在拉丁长方．拉丁长方的一个例子是一个这样的矩阵，它的第一行是 $(1, \cdots, n)$ 且每一行可由它的前一行通过循环移位一位得到．一个 $m \times n(m<n)$ 的拉丁长方总可以补成一个 n 阶拉丁方，并使后者的前 m 行同该拉丁长方的相同．

对于 $m \times n$ 拉丁长方的个数 $L(m, n)$ 有下面的下界：

$$L(m, n) \geqslant n!(n-1)!\cdots(n-m+1)!.$$

一个拉丁长方称为正规化的（normalized），如果它的第一行是 $(1, \cdots, n)$．正规化拉丁长方的数目 $K(m, n)$ 与 $L(m, n)$ 有关系

$$L(m, n)=n!K(m, n).$$

对于 $m=2$ 和 3, $L(m, n)$ 的计算是同下列两个**经典组合问题**（classical combinatorial problems）联系着的：更列数（见**反演（组合学中的）**（inversion in combinatorics））问题及夫妻围桌入座问题．比如，更列数 D_n 等于 $K(2, n)$ 而夫妻围桌入座问题中的排列数 U_n 正是当头两行是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

时的 $3 \times n$ 拉丁长方的数目．

对于 U_n 已知有公式

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2k}{2k-1}\left[\frac{2k-1}{k}\right](n-k)!,$$

$$U_n \sim n!e^{-2}\left[1-\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!(n-1)_k}+\cdots\right],$$

其中

$$(m)_k=m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

数 $K(3, n)$ 可用 D_k 及 U_l 表为：

$$K(3, n)=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k} D_{n-k} D_k U_{n-2k},$$

其中 $m=[n/2]$, $U_0=1$．还有下列渐近展开式：

$$K(3, n) \sim (n!)^2 e^{-3}\left[1-\frac{1}{n}+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2!(n)_2}+\cdots+\frac{b_s}{s!(n)_s}+\cdots\right],$$

其中 $b_s=H_s(-1/2)$, $H_s(t)$ 是 **Hermite 多项式**（Hermite polynomials）．还知道有

$$K(3, r+s) \equiv 2^r K(3, s)\ (\bmod r).$$

点算具有三行以上的拉丁长方的数目的问题还没有解决（1982）．对于 $m<n^{(1/3)-\delta}$，其中 $\delta=\delta(n) \to 0$ 并能使 $n^{-\delta(n)} \to 0$，成立下列渐近式：

$$L(m, n) \sim (n!)^m \exp\left\{-\frac{m(m-1)}{2}\right\}.$$

与拉丁方有关的某些概念与定理，可以被推广到拉丁长方．比如，两个 $m \times n$ 拉丁长方 $\|a_{ij}\|$ 与 $\|b_{ij}\|$ 称为正交的（orthogonal），即一切形如 (a_{ij}, b_{ij}) 的数偶都不相同．由拉丁长方组成的集合中，若任何两个成员都正交，则这个集合中至多有 $m-1$ 个拉丁长方．

术语"拉丁长方"通常在一个更广的意义下被使用：一个在 n 元集合 S 上构作的 $r \times s$ 的广义拉丁长方（generalized Latin rectangle），是元素取自 S 的一个 $r \times s$ 矩阵，这些元素在矩阵的每一行及每一列中至多出现一次．在 n 个符号上构作的 $r \times s$（广义）拉丁长方能被扩充为一个 n 阶拉丁方的必要与充分条件是，在这个拉丁长方中每个符号至少出现 $r+s-n$ 次．

亦见**拉丁方**（Latin square）条的参考文献．

参考文献

[1] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1967.

В. М. Михеев 撰

【补注】 夫妻围桌入座问题（married-couples problem 或 problème des ménages）要求算出 n 对夫妻围着一张圆桌入座的坐法数，这种坐法要求男女相间，但每位妻子不得与她的丈夫邻座．合乎要求的坐法的数字是 $M_n=2n!U_n$，这里 U_n 称为第 n 个家政数（ménage number）．数 U_n 等于 $\{1, \cdots, n\}$ 的这种置换 σ 的数目，它使得 $\sigma(i) \neq i, i+1$（对于一切 $i=1, \cdots, n-1$）及 $\sigma(n) \neq 1, n$.

陶懋颀 译

拉丁方 [**Latin square**; **Латинский квадрат**]

一个 n 阶方阵，它的每一行及每一列都是 n 元有限集 S 的元素的一个排列．这个拉丁方称为在集合

S 上构作的；通常取 $S=\{1,\cdots,n\}$. 对于任何 n，拉丁方总是存在的；例如，$A=\|a_{ij}\|$，其中

$$a_{ij}\equiv i+j-1\ (\mathrm{mod}\,n),\ i,j=1,\cdots,n,$$

便是一个拉丁方.

每个拉丁方都可以认为是一个**拟群**（quasi-group）的乘法表；反过来也是对的：一个有限拟群的乘法表是一个拉丁方．一个拉丁方 $A=\|a_{ij}\|$ 是一个群的 **Cayley 表**（Cayley table）的必要与充分条件是满足下列条件（正方形准则（square criterion））：若 $a_{ik}=a_{i_1k_1}$，$a_{il}=a_{i_1l_1}$，$a_{jk}=a_{j_1k_1}$，则 $a_{jl}=a_{j_1l_1}$.

从两个拉丁方，n 阶的 $A=\|a_{kl}\|$ 及 m 阶的 $B=\|b_{rs}\|$，总能构作一个 mn 阶的拉丁方 $C=\|c_{ij}\|$，例如可以这样构作：

$$c_{ij}=b_{rs}+(a_{kl}-1)m,\ i=r+m(k-1),$$
$$j=s+m(l-1).$$

对于 n 阶拉丁方的数目 L_n，有下列下界：

$$L_n\geqslant n!(n-1)!\cdots 1!.$$

一个拉丁方称为约化的（reduced）（或称为标准形式的拉丁方（Latin square of standard form）），如果它的第一行及第一列的元素都是按自然顺序排列的．对于 n 阶被约化的拉丁方的数目 l_n，有

$$L_n=n!(n-1)!l_n,$$
$$l_n\geqslant m_n=(n-2)!(n-3)!\cdots 1!.$$

在同一集合 S 上构作的两个拉丁方称为等价的（equivalent）或合痕的（isotopic），如果其中之一可由另一个经过行与列的置换并重新命名元素而得到．以 k_n 表示 n 阶拉丁方的等价类的数目．下列少数前几个 l_n 及 k_n 的值是已知的：

n	3	4	5	6	7	8
k_n	1	2	2	22	563	1 676 257
l_n	1	4	56	9408	16 942 080	535 281 401 856
m_n	1	2	12	288	34 560	24 883 200

还知道，$l_9=377\,597\,570\,964\,258\,816$．求得 l_n 的界的问题仍未解决（1982）.

在实验设计理论中，要求构作对于其中元素的位置加有各种限制的拉丁方．一个在 $\{1,\cdots,n\}$ 上的拉丁方称为完全的（complete），如果对于任何自然数 α,β，$\alpha\neq\beta$，$1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n$，存在数 i,j,k,l 能使

$$(a_{ij},a_{i,j+1})=(\alpha,\beta)\ 及\ (a_{kl},a_{k+1,l})=(\alpha,\beta).$$

只对于 n 是偶数的情形知道构作完全拉丁方的算法；有某些 n 为奇数时的完全拉丁方的例子.

一个给定的 n 阶拉丁方的拉丁子方（Latin subsquare）是它的一个子矩阵，这个子矩阵本身是一个 k 阶的拉丁方，$k<n$．任何一个 k 阶拉丁方都可以是一个 n 阶拉丁方的拉丁子方，条件是 $n\geqslant 2k$.

在**正交拉丁方**（orthogonal Latin squares）的构作中，拉丁方的横截的概念起着重要作用．拉丁方 $A=\|a_{ij}\|$ 的长为 t 的部分横截（partial transversal）是由这个拉丁方的 t 的位置元（cell）所组成的集合 T，

$$T=\{(i_1,j_1),\cdots,(i_t,j_t)\},$$

它满足当 $k\neq l$，$1\leqslant k,l\leqslant t$ 时，$i_k\neq i_l$，$j_k\neq j_l$，$a_{i_kj_k}\neq a_{i_lj_l}$．总是有 $t\leqslant n$；当 $t=n$ 时，部分横截称为横截（transversal）．在一个 n 阶拉丁方中存在 n 个互不相交的横截的集合，是这个拉丁方有正交伴侣的必要与充分条件．所谓一个拉丁方的正交伴侣，即是在同一个集合上构作的与给定的拉丁方正交的一个拉丁方．6 阶拉丁方

$$\begin{matrix}0&1&2&3&4&5\\1&2&0&4&5&3\\2&0&1&5&3&4\\3&4&5&0&1&2\\4&5&1&3&2&0\\5&3&4&2&0&1\end{matrix}$$

没有横截.

在任何一个阶 $n\geqslant 7$ 的拉丁方中，至少有一个长为 $t\geqslant(2n+1)/3$ 的部分横截．对于 $n\geqslant 4$，总能构作一个拉丁方，使它的两个主对角线都是横截.

拉丁方的一些推广．一个部分的（partial）或不完全的（incomplete）n 阶拉丁方，是一个 n 阶矩阵，它的一部分位置元处已填上一个 n 元集 S 的元素，且 S 的元素在每行和每列中都至多出现一次．存在着不能补充成一个拉丁方的部分拉丁方，例如，

$$\begin{matrix}1&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&2&3&4\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{matrix}$$

恰好填有 $n-1$ 个元素的不完全拉丁方能够补充成一个拉丁方．已知当 $n>4$ 时两个不同的 n 阶群的 Cayley 表之间至少有 $2n$ 处不相同.

一个无穷拉丁方（infinite Latin square）是一个其元素为自然数的无穷矩阵，在其每行及每列中，这些自然数都恰只出现一次.

拉丁方的概念对于多维情形有少量的推广．比如，n 阶的 m 维置换立方体（permutation cube）是一个 n 阶的 m 维矩阵

$$A=\|a_{i_1\cdots i_m}\|,$$

它的元素取自前 n 个自然数，并且对于任何一个 k，集合

$$a_{i_1\cdots i_{k-1}1i_{k+1}\cdots i_m},\ a_{i_1\cdots i_{k-1}2i_{k+1}\cdots i_m},$$

$$\cdots,\ a_{i_1\cdots i_{k-1}ni_{k+1}\cdots i_m}$$

都是前 n 个自然数的一个排列．一个 n 阶 r 类的 m 维超立方体（hypercube）是一个 n 阶的 m 维矩阵，它的元素取自一个 n^r 元集合，其中每个元素在矩阵中出现 n^{m-r} 次，并且在矩阵的每一个 $(n-1)$ 维截面内（这就是说，在元素

$$a_{i_1\cdots i_{k-1}i_k^0 i_{k+1}\cdots i_m}$$

当中，这里 $i_k^0=$ 常数而其余的指标取遍全部 n 个值），它出现 n^{m-r-1} 次．

参考文献

[1] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

[2] Dénes, J. and Keedwell, A. D., Latin squares and their applications, Acad. Press, 1974.

[3] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.

[4] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Carus Math. Monogr., 14, Math. Assoc. Amer., 1963 (中译本: H. J. 赖瑟，组合数学，科学出版社，1983).

B. M. Михеев 撰

【补注】 van der Waerden **积和式**（permanent）猜想的成立可推出

$$L_n \geqslant \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}},$$

参见[A1].

P. W. Shor（参见[A2]）得到（阶数 $n>7$ 的）拉丁方内的部分横截的长度 t 的一个下界 $t \geqslant n-c(\log n)^2$.

恰好填有 $n-1$ 个元素的不完全拉丁方可能被补充成为一个拉丁方的断言，称为 Evans 猜想（Evans conjecture）．它是被 B. Smetaniuk 证明的（[A3]）．

关于拉丁方的近期综述，可见[A4].

关于拉丁方及互相正交的拉丁方在实验设计中的作用的讨论，可参看[A5].

参考文献

[A1] Wilson, R. M., Nonisomorphic Steiner triple systems, *Math. Z.*, **135** (1974), 303 – 313.

[A2] Shor, P. W., A lower bound for the length of a partial transversal in a Latin square, *J. Comb. Theory* (*A*), **33** (1982), 1 – 8.

[A3] Smetaniuk, B., A new construction of Latin squares 1: A proof of the Evans conjecture, *Ars. Comb.*, **11** (1981), 155 – 172.

[A4] Jungnickel, D., Lateinishe Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, **86** (1984), 69 – 108.

[A5] Penfold Street, A. and Street, D. J., Combinatorics of experimental design, Clarendon Press, 1987.

陶懋颀 译

格［**lattice**; **решетка**］，结构（structure）

一个**偏序集**（partially ordered set），其中每个二元子集同时有最小上界和最大下界．这蕴涵对每个非空有限子集这两种界的存在性．

例 1）全序集（或链）M，当 $a,b\in M$ 时，如果 $a\leqslant b$，则

$$\sup\{a,b\}=b,\inf\{a,b\}=a.$$

2）以包含关系为序的向量空间的子空间，这里有

$$\sup\{A,B\}=\{x:x=a+b,a\in A,b\in B\},$$

$$\inf\{A,B\}=A\cap B.$$

3）以包含关系为序的一个给定集合的子集，这里

$$\sup\{A,B\}=A\cup B,$$

$$\inf\{A,B\}=A\cap B.$$

4）以整除性为序的非负整数：$a\leqslant b$ 当 $b=ac$ 对某一个 c 成立；这里 $\sup\{a,b\}$ 是 a 和 b 的最小公倍数，而 $\inf\{a,b\}$ 是 a 和 b 的最大公因数．

5）定义在区间 $[0,1]$ 上的实值函数且按以下条件为序：$f\leqslant g$ 如果 $f(t)\leqslant g(t)$ 对所有的 $t\in[0,1]$ 成立，这里

$$\sup\{f,g\}=u,$$

其中

$$u(t)=\max\{f(t),g(t)\},$$

且

$$\inf\{f,g\}=v,$$

其中

$$v(t)=\min\{f(t),g(t)\}.$$

设 M 是一个格．如果定义

$$a+b=\sup\{a,b\},$$

$$a\cdot b=\inf\{a,b\}$$

（常用符号 $\cup$ 和 $\cap$ 或 $\vee$ 和 $\wedge$ 代替 $+$ 和 $\cdot$ ），则 M 成为具有两个二元运算的**泛代数**（universal algebra）．这个泛代数满足以下的恒等式：

(1) $a+a=a$;　　(1′) $a\cdot a=a$;

(2) $a+b=b+a$;　　(2′) $a\cdot b=b\cdot a$;

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$;　　(3′) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

(4) $a(a+b)=a$;　　(4′) $a+a\cdot b=a$.

反之，如果 M 是具有满足上述性质 (1) – (4), (1′) – (4′) 的两个二元运算的集合，则当 $a+b=b$ 时规定 $a\leqslant b$，就能在 M 上赋予一个序 $\leqslant$（在这种情况下可

证明 $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \cdot b = a$). 所得到的偏序集是一个格，且其中

$$\sup\{a,b\} = a + b \text{ 及 } \inf\{a,b\} = a \cdot b.$$

按这方式一个格能被定义为满足恒等式 (1) − (4), (1′) − (4′) 的一个泛代数，即格构成了一个**泛代数簇** (variety of universal algebra).

如果一个偏序集看成一个**小范畴** (small category), 则它是一个格，当且仅当有对象对的积和余积.

设 P 和 P' 是格且 $f: P \to P'$ 是偏序集的一个同构，则 f 也是相应的泛代数的同构，即对任何 $x, y \in P$, 有

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ 和 } f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

然而 P 到 P' 中的一个任意的**保序映射** (isotone mapping) 不必是这些格看成泛代数的一个同态. 例如，对任何 $a \in P$, 映射 $f(x) = x + a$ 和映射 $g(x) = x \cdot a$ 都是格到自身中的保序映射，但是它们是同态当且仅当 P 是**分配格** (distributive lattice). 然而，这些映射中的第一个是带有运算 + 的半格 P 的一个同态，而第二个是带有运算 · 的**半格** (semi-lattice) P 的一个同态. 所有格的类构成一个范畴，如果同态取作为态射.

一个格 P 到一个格 P' 的反同态 (anti-homomorphism) 是一个映射 $f: P \to P'$, 使得

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), f(x \cdot y) = f(x) + f(y),$$

对任何 $x, y \in P$ 成立. 两个反同态的复合是一个同态. 反同构于一个格的偏序集是一个格.

格的坐标化 (coordinatization of a lattice) 是指寻找一个**代数系统** (algebraic system) (最通常为一个泛代数), 使得给定的格同构于子系统的格，同余的格，或同构于与这代数系统或泛代数相联系的某一另外的格. 任一带有 0 和 1 的格用它到自身中的**剩余映射** (residual mapping) 的偏序半群来坐标化，且证明是同构于这个半群的右零化子的格. 该半群本身是一个 Baer 半群 (Baer semi-group), 即它的每个元素的右和左零化子是由幂等元生成的.

最重要的结果是对受到某种附加限制的那些格得到的 (见**代数格** (algebraic lattice); **原子格** (atomic lattice); **Brouwer 格** (Brouwer lattice); **向量格** (vector lattice); **模格** (modular lattice); **分配格** (distributive lattice); **乘格** (multiplicative lattice); **正交模格** (orthomodular lattice); **完全格** (complete lattice); **连续格** (continuous lattice); **自由格** (free lattice); **有补格** (lattice with complements); **Boole 代数** (Boolean algebra)). 关于格论中的特殊问题见**理想** (ideal); **滤子** (filter); **MacNeille 完全化** (completion, MacNeille). 同时是格的代数系统起着特殊的作用 (见**格序群** (lattice-ordered group)). 格论的主要应用是与 Boole 代数相联系的. 其他一些格的类已经用于量子力学和物理学.

格的概念最初出现于 19 世纪末，而且与以下这一事实相联系：即关于环的理想的集合和群的正规子群的集合的很多结果看起来类似而且能在模格的框架下加以证明. 作为代数的一个独立分支，格论在 20 世纪 30 年代形成.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Grätzer, G., General lattice theory, Birkhäuser, 1978.

[3] Салий, В. Н., Лекции по теории решеток, Саратов, 1970.

[4] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961 (英译本: Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Oliver & Boyd, 1964).

[5] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982 (英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A. Hilger, 1977).

[6] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, 237−274.

[7] Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия, 1968, М., 1970, 101−154.

[8] Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975.

[9] Blyth, T. and Janowitz, M., Residuation theory, Pergamon, 1972.

[10] Упорядоченные множества и решетки, Bratislava, 1985, Bratislava, 1989.

[11] Салий, В. Н., Решетки с единственным дополнением, М., 1984.

[12] Beran, L., Orthomodular lattices, Reidel, 1985.

[13] Gierz, G., Hofman, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. and Scott, D., A compendium of continuous lattices, Springer, 1980.

[14] Kalmbach, G., Orthomodular lattices, Acad. Press, 1983.

[15] Kalmbach, G., Measures and Hilbert lattices, World Scientific, 1986.

[16] McKenzie, R. M., McNulty, G. and Taylor, R., Algebras, lattices, variaties, 1, Wadsworth, 1987.

[17] Schmidt, E. T., A survey on congruence lattice representations, Teubner, 1982.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】自然地，格论中大多数定理要求关于格的某种假设. 值得注意的例外是船山－中山定理 (Funayama-Nakayama theorem): 任何格上的同余关系格是分配的 (例如见 [1] 或 [2]). 关于任意的有限格也有一个主要的未解决 (到 1989 年) 问题. 每一个有限格是完全的和代数的，因而可表示为某**泛代数** (universal algebra) A 上的同余关系的格. 能否把 A 取为有限的? P. P. Pálfy

和 P.P.Pudlák 证明([A4])这是与有限群论中一个问题密切相关的，他们对可解群已解决了这问题．W. Feit([A1])开始在单群中研究这问题．

在拓扑学中，Krull 维数(在结合环的**维数**(dimension)中称为 adim)的不便性已经证明仅存在于这个定义的刚性．取而代之，如同 Kdim，定义一个分配格 L 的维数 $\dim L$ 为 L 中素理想的链的极大长度．定义一个拓扑空间 X 的维数 $\text{gdim}\, X$ 为构成 X 的基的开集的格 L 上的 $\dim L$ 的极小值，则对 Noether 空间 gdim = adim，而对这种空间 adim 是真正有用的；对可分度量空间，gdim = dim([A2])；对一般度量空间 X，$\text{ind}\, X \leqslant \text{gdim}\, X \leqslant \dim X$([A3])．

在格上第一个有意义的工作是由 E. Schröder([A5])和 R. Dedekind([A6])作出的．这一主题的发展在 20 世纪 30 年代主要是 G. Birkhoff 的工作([A7])和 O. Ore 的工作([A8])；后者用了"结构"这术语以取代"格"，但是这很快就废弃不用了，除了在俄国一直保存到 20 世纪 60 年代．

参考文献

[A1] Feit, W., An interval in the subgroup lattice of a finite group which is isomorphic to M_7, *Alg. Univ.*, **17** (1983), 220–221.

[A2] Galián, R., Theoriá de la dimensión, Madrid, 1979.

[A3] Isbell, J., Graduation and dimension in locales, in I. H. James and E. H. Kronheimer (eds.), Aspects of topology: in memory of Hugh Dowker, Lecture notes London Math. Soc., Vol. 93, Cambridge Univ. Press, 1985, 195–210.

[A4] Pálfy, P. P. and Pudlák, P., Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups, *Alg. Univ.*, **11** (1980), 22–27.

[A5] Schröder, E., Vorlesungen über die Algebra der Logik, Teubner, 1890.

[A6] Dedekind, R., Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Ann.*, **53** (1900), 371–403.

[A7] Birkhoff, G., On the combination of subalgebras, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **29** (1933), 441–464.

[A8A] Ore, O., On the foundation of abstract algebra, I, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 406–437.

[A8B] Ore, O., On the foundation of abstract algebra, II, *Ann. of Math.*, **37** (1937), 265–292.

葛显良 译 李慧陵 校

格点分布 [lattice distribution; решетчатое распределение]

集中于形如 $a+nh$ 的点集上的离散概率分布，其中 $h>0$，a 为一实数，而 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$．数 h 称为格点分布的步长(step)，并且如果没有 a_1 与 $h_1>h$ 使分布集中于形如 a_1+nh_1 ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$)的集上，则 h 称为最大步长(maximal step)．**算术分布**(arithmetic distribution)是格点分布的特殊情形($a=0$)．

对于特征函数为 $f(t)$ 的一个概率分布，它成为格点分布的必要充分条件是，存在一实数 $t_0 \neq 0$ 使 $|f(t_0)|=1$；此时 h 为最大步长，当且仅当对 $0<t<2\pi/h$ 有 $|f(t)|<1$ 而 $|f(2\pi/h)|=1$．格点分布的特征函数是周期函数．

格点分布的反演公式形如

$$p_n = \frac{h}{2\pi}\int_{|t|<\pi/h} e^{-it(a+nh)} f(t)\,dt,$$

其中 p_n 是格点分布配给点 $a+nh$ 的概率，$f(t)$ 是相应的特征函数．还成立下面的等式：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^2 = \frac{h}{2\pi}\int_{|t|<\pi/h} |f(t)|^2\,dt.$$

步长为 h_1 与 h_2 的两个格点分布的卷积仍为格点分布，当且仅当 h_1/h_2 为一有理数．

在独立随机变量之和的极限性态的研究中，关于格点分布的局部定理显著地补充了向正态分布收敛的**中心极限定理**(central limit theorem)这一基本结果．格点分布局部定理的一个最简单例子是 **Laplace 定理**(Laplace theorem)，它可以作如下推广：设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立同分布的随机变量，$\mathsf{E}X_1=m$，$\mathsf{D}X_1=\sigma^2$，令 $S_k=X_1+\cdots+X_k$，而 X_1 取形如 $a+nh$ ($h>0$)的值．记

$$P_k(n)=\mathsf{P}\{S_k=ka+nh\};$$

那么，为使渐近关系式

$$\left|\frac{\sigma\sqrt{k}}{h}P_k(n)+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{ka+nh-km}{\sigma\sqrt{h}}\right]^2\right\}\right| \to 0$$

当 $k\to\infty$ 时对 n 一致成立，其必要充分条件是 h 为最大步长．

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969(中译本：Б. В. 格涅坚科，概率论教程，人民教育出版社，1955).

[2] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972(英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

[3] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973(英译本：Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

Н. Г. Ушаков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1957－1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 科学出版社, 1979).

[A2] Lukacs, E. Characteristic functions, Griffin, 1970.

[A3] Johnson, N. L., Kotz, S., Distributions in statistics: discrete distributions, Mifflin, 1969.

潘一民 译

Lie 群中的格 [**lattice in a Lie group**; **решетка в группе Ли**]

Lie 群 (Lie group) G 的一个**离散子群** (discrete subgroup) Γ 使得 G/Γ 关于 (诱导的) G 不变测度有一个有限体积.

R 或 **C** 上向量空间 V 内 n 维 (或秩) 格 (lattice of dimension n) 是 V 内由 n 个在 **R** 上线性无关的向量所生成的自由 Abel 群. **R** 上有限维向量空间 V 的加法群的一个子群是离散的必要且只要它是一个格 ([1]).

参考文献

[1] Morris, S., Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups, Cambridge Univ. Press, 1977.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 亦见**离散的变换群** (discrete group of transformations).

郝钢新 译

点格 [**lattice of points** 或 point lattice; **точечная решётка**], $\mathbf{R}^n$ 中以 $[\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n]$ 为基的

点 $\mathbf{a} = g_1\mathbf{e}_1 + \cdots + g_n\mathbf{e}_n$ ($g_1, \cdots, g_n$ 取整数) 的集合 $\Lambda = \mathbf{Z}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{Z}\mathbf{e}_n$.

点格 Λ 可以看成有 n 个生成元的自由 **Abel 群** (Abelian group). 点格 Λ 有无穷多组基, 它们的一般形式是 $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)U$, 其中 U 遍取所有行列式为 ± 1 的整数矩阵. 数

$$d(\Lambda) = |\det(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)| > 0$$

是矢量 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 形成的超平行体的体积. 它与基的选取无关, 称为点格 Λ 的行列式 (determinant of the lattice).

把点格分解为 **Вороной 格型** (Voronoï lattice types) 在二次型的几何中起着重要作用, 见**二次型** (quadratic form).

А. В. Малышев 撰

【补注】格及格点的思想将几何与算术 (整数) 联结起来. 因而它在**数的几何** (geometry of numbers)、**整数规划** (integer programming) (格点定理)、**Diophantine 逼近** (Diophantine approximations)、约化理论、**解析数论** (analytic number theory)、数值分析、晶体学 (见**数学晶体学** (crystallography, mathematical)、**编码与译码** (coding and decoding)、**组合学** (combinatorics)、几何算法以及其他领域中起着中心作用.

参考文献

[A1] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1972.

[A2] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.

[A3] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A4] Gruber, P. M. and Wills, J. M. (eds.), Handbook of convex geometry, Vol. A&B, North-Holland, 1993.

[A5] Kannan, R. and Lovasz, L., Covering minima and lattice-point-free convex bodies, *Ann. of Math.*, **128** (1988), 577－602.

朱尧辰 译

格序群 [**lattice-ordered group**; **структурно упорядоченная группа**], l 群 (l-group)

定义了偏序关系 $\leqslant$ 的元素集合上的一个**群** (group) G, 且有以下性质: 1) G 是关于 $\leqslant$ 的一个**格** (lattice), 即对任何 $x, y \in G$ 存在元素 $x \wedge y, x \vee y$, 使得 $x \wedge y \leqslant x, y$, 且 $x \vee y \geqslant x, y$; 对任何 $z \in G$, $z \leqslant x, y$ 蕴涵 $z \leqslant x \wedge y$, 且对任何 $t \in G$ 和 $x, y \leqslant t$, 有 $x \vee y \leqslant t$; 以及 2) 对任何 $a, b, x, y \in G$, 不等式 $a \leqslant b$ 蕴涵 $xay \leqslant xby$. 等价地, 一个格序群能定义成表征 $\langle \cdot, ^{-1}, e, \wedge, \vee \rangle$ 的一个**代数系统** (algebraic system), 满足公理: 3) $\langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ 是一个群; 4) $\langle G, \vee, \wedge \rangle$ 是一个格; 以及 5) 对任何 $x, y, z, t \in G$, $x(y \vee z)t = xyt \vee xzt$ 和 $x(y \wedge z)t = xyt \wedge xzt$.

一个格序群的元素的格是分配的 (见**分配格** (distributive lattice)). 元素 x 的绝对值 (absolute value of an element) (相应地, 正部 (positive part) 和负部 (negative part)) 是元素 $|x| = x \vee x^{-1}$ (相应地, $x^+ = x \vee e, x^- = x \wedge e$). 格序群中, 以下关系式成立:

$$x = x^+x^-, \quad |x|^{-1} \leqslant x \leqslant |x|,$$

$$|x| = x^+(x^-)^{-1}, x^+ \wedge (x^-)^{-1} = e,$$

$$(x \vee y)^{-1} = x^{-1} \wedge y^{-1}, (x \wedge y)^{-1} = x^{-1} \vee y^{-1}.$$

两个元素 x 和 y 称为正交的 (orthogonal), 如果 $|x| \vee |y| = e$, 正交元素可交换.

一个 l 群 G 的子集 H 称为 l 子群 (l-subgroup), 如果 H 是 G 中的子群和子格; l 子群 H 称为 G 的 l 理想 (l-ideal), 如果它在 G 中是正规的和凸的. 一个格序群的 l 子群的集合构成其全体子群的格的一个子格. 一个格序群的 l 理想的格是分配的. l 群 G 到 l 群 H 中的一个 l 同态 (l-homomorphism) 是群 G 到群 H 中的**同态** (homomorphism) φ, 使得

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y),$$
$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

l 同态的核正好是 l 群的 l 理想. 如果 G 是一个 l 群且 $M \subset G$, 则集合 $M^{\perp} = \{x \in G: |x| \wedge |m| = e$ 对每一个 $m \in M\}$ 是 G 中凸 l 子群 (见**凸子群** (convex subgroup)).

全序集 L 到自身上的一对一保序映射的群 $A(L)$ 是一个 l 群 (如果对 $f, g \in A(L)$, 认为 $f \leqslant g$ 当且仅当对所有的 $\alpha \in L, f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$). 每一个 l 群 l 同构于关于某一适当集合 L 的格序群 $A(L)$ 的一个 l 子群.

所有格序群的类是表征 $\langle \cdot, ^{-1}, e, \wedge, \vee \rangle$ 的一个簇 (见**群簇** (variety of groups)).它的最重要的子簇是能用全序群逼近的格序群的类 (可表示的 l 群 (representable l-groups) 的类, 亦见**全序群** (totally ordered group)).

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

В. М. Копытов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Anderson, M. and Feil, T., Lattice-ordered groups. An introduction, Reidel, 1988.

[A2] Glass, A. M. W. and Holland, W. Ch. (eds.), Lattice-ordered groups, Advances and techniques, Kluwer, 1989.

[A3] Martinez, J. (ed.), Ordered algebraic structures, Kluwer, 1989.

葛显良 译 李慧陵 校

有补格 [lattice with complements 或 complemented lattice; решетка с дополнениями]

具有零元 0 和单位 1 的一个**格** (lattice) L, 其中对任何元素 a 存在元素 b (称为元素 a 的补 (complement of the element)), 使得 $a \vee b = 1$ 且 $a \wedge b = 0$. 如果对任何满足 $a \leqslant b$ 的 $a, b \in L$, **区间** (interval) $[a, b]$ 是有补格, 则 L 称为相对有补格 (relatively complemented lattice). 每一个有补**模格** (modular lattice) 是相对有补格. 一个具有零元 0 的格称为: a) 部分有补格 (partially complemented lattice), 如果它的每一个形如 $[0, a], a \in L$ 的区间是有补格; b) 弱有补格 (weakly complemented lattice), 如果对任何 $b \nleqslant a$ 的 $a, b \in L$, 存在元素 $c \in L$, 使得 $a \wedge c = 0$ 且 $b \wedge c \neq 0$; c) 半有补格 (semi-complemented lattice), 如果对任何 $a \in L, a \neq 1$, 存在元素 $b \in L, b \neq 0$, 使得 $a \wedge b = 0$; d) 伪有补格 (pseudo-complemented lattice), 如果对任何 $a \in L$, 存在元素 a^*, 使得 $a \wedge x = 0$ 当且仅当 $x \leqslant a^*$; e) 拟有补格 (quasi-complemented lattice), 如果对任何 $x \in L$, 存在元素 $y \in L$, 使得 $x \wedge y = 0$ 且 $x \vee y$ 是稠元. 正交补格也起重要作用 (见**正交模格** (orthomodular lattice)). 对格中各种不同类型补之间的关系见 [4].

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982 (英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A. Hilger, 1977).

[3] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961 (英译本: Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Oliver & Boyd, 1964).

[4] Grillet, P. A. and Varlet, J. C., Complementedness conditions in lattices, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **36** (1967), no. 11-12, 628–642.

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 在一个**分配格** (distributive lattice) 中, 每一元素至多有一个补; 反之, 其中每一元素在其所在的每一区间中至多有一个相对补的格必是分配的.

参考文献

[A1] Beran, L., Orthomodular lattices, Reidel, 1985.

[A2] Grätzer, G., Lattice theory, Freeman, 1971.

[A3] Dubreil-Jacotin, M. L., Lesieur, L. and Croiset, R., Leçons sur la théorie des treilles, Gauthier-Villars, 1953.

葛显良 译 李慧陵 校

Laurent 级数 [Laurent series; Лорана ряд]

按差 $z-a$ 的非负整数幂或 $z-a$ 的非正整数幂排列的**幂级数** (power series) 的推广, 其形式为

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k. \tag{1}$$

级数 (1) 理解为两个级数之和: 一是 Laurent 级数的正则部分 (regular part of the Laurent series)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k,$$

另一是 Laurent 级数的主要部分 (principal part of the Laurent series)

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k.$$

当且仅当其正则部分和主要部分都收敛时, 才认定级数 (1) 收敛. Laurent 级数具有下列性质: 1) 如果 Laurent 级数的收敛域含有内点, 则此收敛域是一个圆心为点 $a \neq \infty$ 的圆环 $D = \{z \in \mathbf{C}: 0 \leqslant r < |z-a| < R \leqslant +\infty\}$; 2) 在收敛圆环 D 的所有内点处, 级数 (1) 绝对收敛; 3) 类似于幂级数, Laurent 级数在边界圆周 $|z-a| = r$ 和 $|z-a| = R$ 上各点处的性态可能有很大差别; 4) 级数 (1) 在每个紧集 $K \subset D$ 上一致收敛; 5) 级数 (1) 在 D 内的和是一个解析函数 $f(z)$; 6) 级数 (1) 能在 D 内逐项微分和逐项积分; 7) Laurent 级数的系数 c_k 可通过其和 $f(z)$ 由

公式

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}}\quad(k=0,\ \pm1,\ \cdots)\tag{2}$$

确定，其中 $\gamma=\{z:|z-a|=\rho,\ r<\rho<R\}$ 是以 a 为中心且位于 D 内的任一圆周；8) Laurent 级数展开式是唯一的，即如果在 D 内 $f(z)\equiv\varphi(z)$，则两者按 $(z-a)$ 的幂展开的 Laurent 级数的所有对应系数都相等．

对于以无穷远点 $a=\infty$ 为中心的情形，Laurent 级数的形式为

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_kz^k,\tag{3}$$

此时正则部分是

$$\sum_{k=-\infty}^{0}c_kz^k,$$

而主要部分是

$$\sum_{k=1}^{+\infty}c_kz^k.$$

(3) 的收敛域的形状为

$$D'=\{z:\ 0\leqslant r<|z|<R\leqslant+\infty\},$$

公式 (2) 成为

$$c_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{k+1}f(z)dz,\ k=0,\ \pm1,\ \cdots,$$

其中 $\gamma=\{z:|z|=\rho,\ r<\rho<R\}$．此外，所有性质均与有限中心 a 时的情形相同．

Laurent 级数的应用主要基于 Laurent 定理 (Laurent theorem) (1843 年)：圆环 $D=\{z:0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ 内的任一单值**解析函数** (analytic function) $f(z)$ 在 D 内可由一个收敛 Laurent 级数 (1) 表示．特别是，解析函数 $f(z)$ 在其单值特征孤立奇点 a 的一个去心邻域 $D=\{z:0<|z-a|<R\}$ 内可通过 Laurent 级数表示，这是研究 $f(z)$ 在孤立奇点邻域中性态的主要工具．

对于多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的全纯函数 $f(z)$，下述命题可看作单复变量 Laurent 定理的推广：在圆环 $D_\nu=\{z_\nu\in\mathbf{C}:\ 0\leqslant r_\nu<|z_\nu-a_\nu|<R_\nu\leqslant+\infty\}$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 之积 D 中全纯的任一函数 $f(z)$ 在 D 中可表示为收敛多重 Laurent 级数 (multiple Laurent series)：

$$f(z)=\sum_{|k|=-\infty}^{+\infty}c_k(z-a)^k,\tag{4}$$

其中求和遍及所有整多重指标 $k=(k_1,\cdots,k_n)$，而

$$|k|=k_1+\cdots+k_n,$$

$$(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n},$$

$$c_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+n}},$$

此处 γ 是圆周 $\gamma_\nu=\{z_\nu\in\mathbf{C}:\ z_\nu=a_\nu+\rho_\nu e^{it},\ r_\nu<\rho_\nu<R_\nu,\ 0\leqslant t\leqslant2\pi\}$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 之积．级数 (4) 的收敛域是对数凸的，它还是相对完全 **Reinhardt 区域** (Reinhardt domain)．然而，多重 Laurent 级数 (4) 的用途有限，因为对于 $n\geqslant2$，全纯函数 $f(z)$ 不可能有孤立奇点．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 4 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第四章)．

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 设 k 是任一域，术语 Laurent 级数 (Laurent series) 也常用来表示形如

$$\sum_{i=-N}^{\infty}a_iX^i,\ a_i\in k,\ N\in\mathbf{Z}$$

的形式展开式．两个这类展开式可逐项相加，而其相乘则如下：

$$\left(\sum_{i=-N}^{\infty}a_iX^i\right)\left(\sum_{i=-M}^{\infty}b_iX^i\right)=\sum_{j=-N-M}^{\infty}c_jX^j,$$

其中

$$c_j=\sum_{\substack{k+l=j\\k,\,l\in\mathbf{Z}}}a_kb_l$$

(注意这是有限和)．在这样的加法与乘法下，Laurent 级数构成一个域，记作 $k((X))$．它是形式幂级数环 $k[[X]]$ 的商域，称为形式 Laurent 级数域 (field of formal Laurent series)．如果 $a_{-N}\neq0$，则赋值定义为 $V(\sum_{i=-N}^{\infty}a_iX^i)=-N$．这就使 $k((X))$ 成为离散赋值完全域；其整环为 $k[[X]]$，极大理想为 $Xk[[X]]$，剩余域为 k．(亦见**赋值** (valuation)．)

k 上的 Laurent 多项式 (Laurent polynomial) 是形如 $\sum_{i=-N}^{M}a_iX^i(-N\leqslant M,\ N,\ M\in\mathbf{Z})$ 的表示式．

还可以更一般地定义多变量 (形式) Laurent 级数和非交换 Laurent 级数，见 [A1]．

参考文献

[A1] Hutchins, H. C., Examples of commutative rings, Polygonal, 1981.

[A2] Cohn, P. M., Skew field constructions, Cambridge Univ. Press, 1977.

[A3] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本：L. V. 阿尔福斯，复分析，上海科学技术出版社，1984)．

[A4] Hörmander, L., An introduction to complex analysis

in several variables, North-Holland, 1973.

[A5] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979 (中译本: E. C. 梯其玛希, 函数论, 科学出版社, 1962).

【译注】 事实上, K. Weierstrass 于 1841 年已在其论文[B1]中研究了具有正负幂的级数, 即现称的 Laurent 级数. 但如同他的其他一些早期论文一样, 这篇论文只是到他的全集第一卷印行时(1894年)才发表.

参考文献

[B1] Weierstrass, K., Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Gronztn liegt, Mathematische werke, Johnson, reprint, I, 51 − 66.

沈永欢 译

Лаврентьев 定理[Lavrent'ev theorem; Лаврентьева теорема]

1)描述集合论中的 Лаврентьев 定理: $\mathbf{R}^n$ 中两个集合之间的拓扑映射可以扩张成包含它们的 G_δ 型集合之间的**同胚**(homeomorphism)映射. 此定理有一个推论: 集合的 Hausdorff 类型是一个拓扑不变量(见[1]).

2)逼近论中的 Лаврентьев 定理给出了关于一致逼近可能性的一个判别准则: 在紧集 $K\subset \mathbf{C}$ 上连续的函数可用多项式在 K 上一致逼近的充要条件是, K 是一个不能分开复平面的无内点紧集(见[2]).

3)拟共形映射理论中的 Лаврентьев 定理: 设 D_z 和 D_w 是平面上两个以分段光滑曲线为边界的单连通区域, z_1, z_2, z_3 和 w_1, w_2, w_3 分别是两区域边界上的正向编号三元点组. 那么, 其特征方程函数具有一致连续偏导数的任意强椭圆方程组

$$\Phi_1(x, y, u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y)=0,$$

$$\Phi_2(x, y, u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y)=0,$$

总存在一个唯一的 D_z 到 D_w 上的同胚映射, 它给出了方程组的一组解 $u(x,y)$, $v(x,y)$, 且在该映射下, 上述三元边界点组之间相互对应.

4)力学中的 Лаврентьев 定理(机翼理论, 孤立波, 不稳定动力学形式, 流, 累积电荷理论, 定向爆炸)见[4].

定理 1)−4) 属于 M. A. Лаврентьев.

参考文献

[1] Lavrentieff, M., Contribution à la thèorie des ensembles homéomorphes, *Fund. Math.*, **6** (1924), 149 − 160.

[2] Лаврентьев, M. A., 《Изв. АН СССР. Сер. Матем.》, **12**(1948), 6, 513 − 554.

[3] Лаврентьев, M. A., 《Тр. физико-матем. ин-та АН СССР, Отдел матем.》, **5**(1934), 159 − 245.

[4] Михаил Алексеевич Лаврентьев, M., 1971 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР. Сер. математики, в 12).

В. А. Зорич 撰

【补注】 1)此定理在下列更广泛的情形仍成立: 如果 X 和 Y 是完全可度量化空间, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, 且 $f: A\to B$ 是同胚映射, 则存在满足 $A\subseteq A^*$ 和 $B\subseteq B^*$ 的 G_δ 型集(见 $F_\sigma(G_\delta)$ **型集**(set of type $F_\sigma(G_\delta)$)) $A^*\subseteq X$ 和 $B^*\subseteq Y$ 及一个扩张 f 的同胚 $f^*: A^*\to B^*$.

在扩张理论中和构造反例时, 此定理是很有用的.

2)此定理被 **Мергелян 定理**(Mergelyan theorem)包括. 见[A6]−[A8], [A11].

3)与 Лаврентьев 的名字有关的另一问题如下.

考虑下列两个最优化问题:

$$\left.\begin{aligned}&\inf\int_0^T L(t, x, \dot{x})dt,\\ &x(0)=\xi_0,\ x(T)=\xi_1,\ x\in L_1;\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{A1})$$

$$\left.\begin{aligned}&\inf\int_0^T L(t, x, \dot{x})dt,\\ &x(0)=\xi_0,\ x(T)=\xi_1,\ x\in C^1.\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{A2})$$

即设 x 在(A1)中是绝对连续的, 在(A2)中是连续可微的, 则有 $\inf(\mathrm{A1})<\inf(\mathrm{A2})$. 这就是熟知的 Лаврентьев 现象(Lavrent'ev phenomenon). 作为推论, 即使 L 是光滑的, (A1)的极小化子也不满足 **Euler-Lagrange 方程**(Euler-Lagrange equation).

参考文献

[A1] Aarts, J., Completeness degree, a generalization of dimension, *Fund. Math.*, **63** (1968), 28 − 41.

[A2] Chapman, T. A., Dense σ-compact subsets of infinite-dimensional manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 399 − 426.

[A3] Douwen, E. K. van, A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic, *Adv. Math.*, **52** (1984). 1 − 33.

[A4] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A5] Mill, J. van, Domain invariance in infinite-dimensional linear spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **101** (1987), 173 − 180.

[A6] Mergelyan, S. N., On a theorem of M. A. Lavrent'ev, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **3** (1962), 281−286. (*Dokl. Akad. Nank SSSR*, **77** (1951), 565 − 568.)

[A7] Mergelyan, S. N., On the representation of functions by series of polynomials on closed sets, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **3** (1962), 287 − 293. (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **78** (1951), 405 − 408.)

[A8] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[A9] Cesari, L., Optimization theory and applications, Springer, 1983, Sect. 18.5.

[A10] Lavrent'ev, M., Sur quelques problèmes du calcul des

variations, Ann. Mat. Pura Appl., 4 (1926), 7—28.
[A11] Davis, Ph. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975, p. 278 ff.
[A12] Lavrent'ev, M. A., Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations, Noordhoff, 1963 (译自俄文). 白苏华、胡师度 译

惯性律 [**law of inertia; инерции закон**]，二次型的下述定理，用变数的线性变换

$$(x_1, \cdots, x_s) = (y_1, \cdots, y_s)Q$$

(其中 Q 为实系数非奇异矩阵) 以任何方式把一个实系数二次型

$$\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} x_i x_j$$

化为平方和

$$\sum_{i=1}^{s} b_i y_i^2$$

时 (亦见**二次型的约化** (quadratic forms, reduction of))，使 $b_i > 0$ (或 $b_i < 0$) 成立的指数 i 的个数 p (或 n) 是固定不变的．经典形式的惯性律是由 J. J. Sylvester 建立的，此命题有时也称为 Sylvester 定理 (Sylvester theorem)．

现代形式的惯性律是关于有序域上对称双线性型性质的下述命题：设 E 是有序域 k 上的有限维向量空间，其上有一非退化的对称双线性型 f．这时，存在一个整数 $p \geqslant 0$，对 E 中关于 f 的任何正交基 $e_1, \cdots, e_s$，s 个元素

$$f(e_i, e_i), i = 1, \cdots, s,$$

中都恰好有 p 个正的，恰好有 $n = s - p$ 个负的．数对 (p, n) 称为 f 的符号差 (signature)，而数 n 称为它的惯性指数 (index of inertia)．两个等价的双线性型有同样的符号差．如果 k 是 **Euclid 域** (Euclidean field)，则符号差相等是双线性型等价的充分条件．如果惯性指数 $n = 0$，则 f 称为正定的，如果 $p = 0$，则 f 称为负定的．这些情况分别由性质"对任何非零的 $x \in E$ 有 $f(x, x) > 0$ 或 $f(x, x) < 0$"所刻画．由惯性律得知，E 是子空间关于 f 为正交的直和

$$E = E_+ \oplus E_-,$$

f 在 E_+ 上的限制是正定的，而在 E_- 上的限制是负定的，且

$$\dim E_+ = p, \ \dim E_- = n$$

(于是 E_+ 与 E_- 的维数与分解无关)．

有时也取

$$\sigma(f) = p - n$$

为 f 的符号差．如果两个型 f 和 g 确定域 k 的 **Witt 环** (Witt ring) $W(k)$ 中的同一个元素，则有 $\sigma(f) = \sigma(g)$．此外，对任何非退化的型 f_1, f_2 以及 $\sigma(\langle 1 \rangle) = 1$，有 $\sigma(f_1 \oplus f_2) = \sigma(f_1) + \sigma(f_2)$ 以及 $\sigma(f_1 \otimes f_2) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2)$，因此映射 $f \to \sigma(f)$ 定义了从 $W(k)$ 到整数环 $\mathbf{Z}$ 的一个同态．如果 k 是 Euclid 域，那么此同态是一个同构．

惯性律可以推广到极大有序域 k 上的 Hermite 双线性型的情形，也可推广到 k 的二次扩域或 k 上的四元数体上的 Hermite 双线性型的情形中，见 [1]，[4]．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6 (译自法文).
[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesleg, 1974.
[3] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
[4] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973. В. Л. Попов 撰

【补注】术语指数 (index) 也用来表示 $\min(p, n)$．

张明尧 译 朱尧辰 校

大数律 [**law of large numbers; больших чисел закон**]

一个普遍原理，按照这一原理，在某些很一般的条件之下，随机因素的联合作用导致一个实际上是非随机的结果．当试验次数增加时，一个随机事件发生的频率趋向于它的概率 (这可能是在机会博奕中首先注意到的现象)，可以作为这个原理的第一个例子．

17 世纪末 J. Bernoulli ([1], [12]) 证明了一个定理．该定理指出，在一列独立的试验中，如果某个确定事件 A 在每次试验中发生的概率有相同的值 p $(0 < p < 1)$，那么当 $n \to \infty$ 时，关系式

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (1)$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 成立；其中 μ_n 是这个事件在头 n 次试验中发生的次数，而 μ_n / n 是发生的频率．**Bernoulli 定理** (Bernoulli theorem) 被 S. Poisson ([2]) 推广到独立试验序列中事件 A 发生的概率随试验次数变化的情形．设第 k 次试验中的这一概率为 $p_k (k = 1, 2, \cdots)$，且表

$$\bar{p}_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

那么按照 **Poisson 定理** (Poisson theorem)，当 $n \to \infty$ 时，对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \bar{p}_n\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (2)$$

成立．这个定理的严格证明首先由 П. Л. Чебышев 在 1846 年给出，他的方法与 Poisson 的十分不同，是基于某个极值的考虑，而 Poisson 则是从上述概率的

一个渐近公式推出(2)的．这个公式又基于 Gauss 的一个定律，它在当时还是未曾严格证明的．Poisson 是第一个采用"大数律"这一术语的人，他用它来命名他自己加以推广的 Bernoulli 定理．

Bernoulli 与 Poisson 定理的一个进一步的自然推广是如下事实的推论，即随机变量 μ_n 可以表为独立随机变量的和

$$\mu_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

其中 $X_k = 1$，如果 A 在第 k 次试验中发生；否则 $X_k = 0$．数学期望 $\mathrm{E}(\mu_n/n)$ (恒等于数学期望 $\mathrm{E}X_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的平均值) 在 Bernoulli 情形为 p 而在 Poisson 情形为 $\overline{p}_n$．换句话说，在这两种情形下，所考虑的都是变量 X_k 的算术平均与它们的期望值的算术平均之差．

在他发表于 1867 年的"论平均量"这一著作中，Чебышев 证明了：对于独立随机变量序列 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$，在相当一般的假定下，当 $n \to \infty$ 时，对任意 $\varepsilon > 0$，关系式

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} + \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\mathrm{E}X_1 + \cdots + \mathrm{E}X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \quad (3)$$

成立．Чебышев 假定所有数学期望 $\mathrm{E}X_k^2$ 都以同一常数为界，虽然他的证明清楚地表明，只需要求 X_k 的方差 $\mathrm{D}X_k = \mathrm{E}X_k^2 - (\mathrm{E}X_k)^2$ 的有界性，甚至只需要求

$$B_n^2 = \mathrm{D}X_1 + \cdots + \mathrm{D}X_n = o(n^2), \ n \to \infty$$

便已足够．就这样，Чебышев 指出，Bernoulli 定理是可以大大推广的．A．A．Марков 注意到进一步扩充的可能性，并且建议对 Bernoulli 定理的所有推广(特别是对(3))都采用"大数律"这一术语．Чебышев 的方法是基于对数学期望全部性质的严格立论且利用所谓的 **Чебышев 不等式(概率论中的)** (Chebyshev inequality (in probability theory))．对于概率(3)，它产生如下形式的估计

$$n^{-2}\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}X_k.$$

这个估计可以用一个更精确的估计来替代——但需在更受限制的条件之下，见 **Бернштейн 不等式** (Bernstein inequality)．大数律此后的证明全都是 Чебышев 方法以各种外延形式的发展．利用随机变量 X_k 的适当"截尾"(用辅助变量 $X'_{n,k}$ 来替代原来的变量，即如果 $|X_k - \mathrm{E}X_k| \leqslant L_n$，则令 $X'_{n,k} = X_k$；如果 $|X_k - \mathrm{E}X_k| > L_n$，则令 $X'_{n,k} = 0$，其中 L_n 为常数)，Марков 把大数律推广到各项的方差不存在的情形．例如他证明了，如果存在常数 $\delta > 0$ 及 $L > 0$ 使对所有 n，

$$\mathrm{E}|X_n - \mathrm{E}X_n|^{1+\delta} < L,$$

那么(3)也是正确的．Хинчин 定理 (Khinchin theorem, 1929) 以类似手段证明：如果 X_n 有相同分布且 $\mathrm{E}X_n$ 存在，则大数律(3)成立．

对于独立随机变量之和，有可能论述或多或少是最后版本的大数律．为此，采取一种更普遍的观点是方便的，它涉及渐近常值随机变量序列的概念．随机变量序列 $Y_1, \cdots, Y_n, \cdots$ 称为渐近常值的，如果存在一列常数 $C_1, \cdots, C_n, \cdots$，使得对任意 $\varepsilon > 0$，当 $n \to \infty$ 时，

$$\mathrm{P}\{|Y_n - C_n| > \varepsilon\} \to 0 \quad (4)$$

(即 $Y_n - C_n$ 依概率收敛于零)．如果(4)对某列 C_n 成立，那么它对 $C'_n = mY_n$ 也成立，其中 mY 为随机变量 Y 的中位数(见**中位数(统计学中的)** (median (in statistics)))．此外，代替独立随机变量序列 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$，也可取随机变量的所谓**三角阵列** (triangular array)：

$$X_{1,1}, \cdots, X_{1,k_1},$$
$$X_{2,1}, \cdots, X_{2,k_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{n,1}, \cdots, X_{n,k_n},$$

(第一个足标为行数，而第二个表示变量在该行中的号数)．每一行中的随机变量假定是相互独立的．如果设 $k_1 = 1, k_2 = 2, \cdots, X_{n,k} = X_k/n$，则序列情形易化为三角阵列情形．

令

$$Y_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,k_n}.$$

对于独立随机变量和大数律的适用性的一般问题即可陈述如下：在什么条件下，和 Y_n 是渐近常值的？

这一问题由 A．H．Колмогоров 在 1928 年作出了回答．不失一般性，可设变量 $X_{n,k}$ 的中位数都为零．令 $\widetilde{X}_{n,k} = X_{n,k}$，如果 $|X_{n,k}| \leqslant 1$；$\widetilde{X}_{n,k} = 0$，如果 $|X_{n,k}| > 1$．和 Y_n 为渐近常值的必要充分条件是以下两极限式同时满足：

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{P}\{|X_{n,k}| > 1\} \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时}$$

且

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\widetilde{X}_{n,k}^2 \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时}.$$

和数 $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\widetilde{X}_{n,k}$ 即可取作 C_n. 这些条件的充分性易由 Чебышев 方法来论证. 如果数学期望 $\mathsf{E}X_{n,k}$ 存在, 那么允许选择 $C_n = \mathsf{E}Y_n$ 的补充条件是容易找到的, 由此即产生出依经典公式(3)成立大数律的必要充分条件. 对于独立同分布的变量序列 $\{X_n\}$, 正如同前面陈述的 Хинчин 定理, 这些条件就简化为其数学期望的存在性. 同时, 其算术平均 Y_n 为渐近常值的必要充分条件则是

$$nP\{|X_1| > n\} \to 0, \text{ 当 } n \to \infty. \qquad (5)$$

条件(5)不成立情形的例子是容易找到的. 例如, 如果所有 X_n 都有密度为 $1/\pi(1+x^2)$ (对应的特征函数为 $\exp\{-|t|\}$) 的 **Cauchy 分布** (Cauchy distribution), 这个条件就不成立. 这时, 算术平均 $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ 有特征函数 $\exp\{-n|t/n|\} = \exp\{-|t|\}$, 由此推出, 对任意 n, 它与其各项有同样的分布.

大数律不适用的最重要的情形包含随机游动中返回起始点的时间问题. 例如, 在对称 **Bernoulli 随机游动** (Bernoulli random walk) 中, 从开始到第 n 次返回起始点所经历的时间 T_n 是 n 个独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 之和, 其中 X_1 是第一次返回所经时间, X_2 是第一次与第二次返回之间的时间, 等等. 变量 $2T_n/\pi n^2$ 的分布当 $n \to \infty$ 时收敛于一个非退化的极限分布, 其密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x} x^{-3/2}, \; x > 0;$$

当 $x \leqslant 0$ 时则为零. 于是, 在这种情形下, X_i 的算术平均即 T_n/n 的分布, 粗略地说, 是位于长度的阶为 n 的线段上 (而在大数律适用的情形下, 应位于长度为 $o(1)$ 的线段上).

对于相依随机变量之和, 大数律 (无论是依其经典的或更普遍的形式) 的适用性与随机变量 X_i 与 X_j, 当其足标之差 $|i-j|$ 增加时的渐近独立性有着首要的联系. 相应的定理首先由 Марков 在 1907 年对于 **Марков 链** (Markov chain) 中的变量给出证明. 事实上, 设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 为一有限状态的齐次 Марков 链, 并设所有一步转移概率都是正的. 这里, X_j 与 X_i 当 $|i-j| \to \infty$ 时的渐近独立性是下述事实的推论: X_j 在 X_i 取一固定值下的条件分布, 当 $j - i \to \infty$ 时趋于一个不依赖于 X_i 选择值的极限 (Марков 遍历定理 (Markov ergodic theorem)). 大数律即由此定理推出: 首先建立, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\mathsf{E}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - a\right]^2 \to 0,$$

其中 $a = \lim_{k\to\infty} \mathsf{E}X_k$; 因此即得, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \to 0.$$

如下更普遍的情形则是由 Бернштейн 条件保证的: 如果 $\mathsf{D}X_j < L$, $|R(X_i, X_j)| \leqslant \varphi(|i-j|)$, 其中 L 为一常数, R 为相关系数, 而 $\varphi(n)$ 为一当 $n \to \infty$ 时趋于零的函数, 那么大数律(3)可用于变量 $\{X_n\}$. 对于宽平稳序列, 相关条件尚可稍许弱化, 即用

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_j = 0$$

来替代, 其中 $R_j = R(X_i, X_{i+j})$.

上述诸结果还可以各种方式加以推广. 首先, 以上只是考虑了依概率收敛. 也可以考虑其他类型的收敛, 包括以概率 1 收敛, 均方收敛, 等等 (事实上, 上面的许多条件都可以保证均方收敛, 因而蕴含依概率收敛). 以概率 1 收敛的情形是很重要的, 为此特别命名为**强大数律** (strong law of large numbers).

其次, 很多这样的定理经过适当修正后都可应用于取值于任意维 Euclid 空间、Hilbert 空间或某些 Banach 空间的随机向量序列. 例如, 如果 $\{X_n\}$ 是一列取值于一可分 Banach 空间中的独立同分布随机向量, 且 $\mathsf{E}\|X_n\|$ ($\|x\|$ 表示 x 的范数) 为有穷, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\mathsf{P}\left\{\left\|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathsf{E}X_1\right\| > \varepsilon\right\} \to 0.$$

大数律, 当考虑它的最一般形式时, 是与**遍历定理** (ergodic theorem) 紧密关联的. 显然, 许多定理也可应用于平均值 $(1/T)\int_0^T X(t)\,dt$ 的情形, 其中 $X(t)$ 为一连续参数随机过程 (例如见[10]).

最后, 代替考虑随机变量之和, 还可考虑它们的其他对称函数. 事实上, 在 А. Я. Хинчин (1951－1955) 证明统计力学中的某些结论时就这样做了 (见[9]). 他获得的结果可以由下例说明. 设 $X_{n,1}, \cdots, X_{n,n}$ 是在球面

$$X_{n,1}^2 + \cdots + X_{n,n}^2 = n\mu, \; \mu > 0$$

上均匀分布的一个点的坐标. 那么大数律适用于一广类对称函数 $f(X_{n,1}, \cdots, X_{n,n})$, 即当 $n \to \infty$ 时它们的值是渐近常值的 (这与 P. Lévy 在 1925 年所做的观察结果类似: 极大量变元的充分正则的函数在其定义域的大部分中几乎为常数).

用以说明大数律的广泛的统计数据, 可以在较早的教科书中找到, 例如见[4], [11].

参考文献

[1] Bernoulli, J., Ars conjectandi, in Werke, Vol. 3, Birkhäuser, 1975, 107－286.

[2] Poisson, S. D., Récherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle, etc., Paris, 1837.
[3] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.-Л., 1947.
[4] Марков, А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.
[5] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.
[6] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本: Б. В. 哥涅坚科等著, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 1955).
[7] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall & Wiley, 1953.
[8] Grenander, U., Probabilities on algebraic structures, Wiley, 1963.
[9] Хинчин, А. Я., Симметрические функции на многомерных поверхностях, в кн. Памяти А. А. Андронова, М., 1955, 541 – 574.
[10] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 科学出版社, 1966).
[11] Uspensky, J. V., Introduction to mathematical probability, McGraw-Hill, 1937. Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Révész, P., The laws of large numbers, Acad. Press, 1968.
[A2] Hoffman-Jφrgensen, J., Pisier, G., The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, *Ann. Prob.*, 4 (1976), 587 – 599.
[A3] Hall, P., Heyde, C. C., Martingale limit theory and its application, Acad. Press, 1980. 潘一民 译

排中律 [**law of the excluded middle**; **исключенного третьего закон**]

古典逻辑中表明两个命题“A”或“非 A”中的一个为真的定律. 数理逻辑中排中律用公式 $A \vee \neg A$ 表示, 其中 $\vee$ 表示**析取** (disjunction), 并且 $\neg$ 表示**否定** (negation). 从直觉主义 (构造论) 的观点来看, 确定命题 $A \vee \neg A$ 的真值意味着确定 A 或 $\neg A$ 的真值. 因为没有通用的方法, 在有限步之内确定一个任意的命题或它的否定的真值, 排中律受到了数学基础中直觉主义和构造论的代表者们的批判 (见**直觉主义** (intuitionism); **构造数学** (constructive mathematics)).

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dalen, D. van (ed.), Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism, Cambridge Univ. Press, 1981.

卢景波 译

重对数律 [**law of the iterated logarithm**; **повторного логарифма закон**]

概率论中的一个极限定理, 它是**强大数律** (strong law of large numbers) 的精密化. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列随机变量, 且令

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

为简单起见, 假定对每个 n, S_n 有零中位数. 关于强大数律的定理是讨论在什么条件下, 当 $n \to \infty$ 时, $S_n / a_n \to 0$ 几乎必然 ($a.\ s.$) 成立, 其中 $\{a_n\}$ 为一数列, 而关于重对数律的定理则是考虑数列 $\{c_n\}$, 使之成立

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{c_n} = 1 \quad (a.\ s.), \tag{1}$$

或

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{c_n} = 1 \quad (a.\ s.). \tag{2}$$

式 (1) 等价于对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mathsf{P}\{S_n > (1+\varepsilon)c_n (i.\ o.)\} = 0,$$

且

$$\mathsf{P}\{S_n > (1-\varepsilon)c_n (i.\ o.)\} = 1,$$

其中 $i.\ o.$ 表示无穷次发生.

形如 (1) 与 (2) 的关系式在比强大数律所蕴含的估计更受限制的条件下成立. 如果 $\{X_n\}$ 是一列独立有相同分布且数学期望等于零的随机变量, 那么

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \ (a.\ s.), \ \text{当}\ n \to \infty\ \text{时}$$

(Колмогоров 定理 (Kolmogorov theorem)); 若添加条件 $0 < \mathsf{E}X_1^2 < \infty$ 成立, 则成立更强的关系式 (2), 此时

$$c_n = (2nb \ln\ln(nb))^{\frac{1}{2}},$$

其中 $b = \mathsf{E}X_1^2$ (Hartman-Wintner 定理 (Hartman-Wintner theorem)).

关于重对数律的第一个一般类型的定理是由 A. H. Колмогоров ([1]) 得到的如下结果: 设 $\{X_n\}$ 是一列数学期望等于零且方差有穷的独立随机变量, 又令

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k^2.$$

如果当 $n \to \infty$ 时 $B_n \to \infty$, 且存在一列正常数 $\{M_n\}$ 使得

$$|X_n| \leqslant M_n \ \text{且}\ M_n = o\left[\left(\frac{B_n}{\ln\ln B_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

那么 (1) 与 (2) 对于

$$c_n = (2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}$$

成立．在$\{X_n\}$为一列有相同分布且仅取两个可能值的独立随机变量的特殊情形，这一断言由 A．Я．Хинчин（[2]）导出．J．Marcinkiewicz 与 A．Zygmund（[3]）指出，在 Колмогоров 定理的条件下，不可能用 O 代替 o．W．Feller（[4]）对于独立有界非相同分布随机变量序列，研究了 Колмогоров 重对数律的一种推广．这一定律的其他推广可见[5]．还有如下与 Hartman-Wintner 定理有关的结果（见[6]）：如果$\{X_n\}$是一列独立相同分布的随机变量且有无穷方差，那么

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{|S_n|}{(n\ln\ln n)^{1/2}}=\infty \quad (a.s.)$$

关于独立随机变量序列的重对数律所得的结果已经成为出发点，来多方面研究这个定律对相依随机变量与向量序列以及随机过程的适用性．

参考文献

[1] Kolmogorov, A. N. [A. H. Колмогоров], Ueber das Gesetz des iterierten Logarithmus, *Math. Ann.*, **101** (1929), 126 – 135.

[2] Khintchine, A. [A. Я. Хинчин], Ueber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Fund. Math.*, **6** (1924), 9 – 20.

[3] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., Rémarque sur la loi du logarithme itéré, *Fund. Math.*, **29** (1937), 215 – 222.

[4] Feller, W., The general form of the so-called law of the iterated logarithm, *Trans. Amer. Soc.*, **54** (1943), 373 – 402.

[5] Strassen, V., An invariance principle for the law of iterated logarithm, *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, **3** (1964), 211 – 226.

[6] Strassen, V., A converse to the law of iterated logarithm, *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, **4** (1965 – 1966), 265 – 268.

[7] Hartman, P., Wintner, A., On the law of the iterated logarithm, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 169 – 176.

[8] Lamperty, J., Probability, Benjamin, 1966.

[9] Петров, B. B., Суммы независимых случайных величин, M., 1972（英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975）.

B．B．Петров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hall, P., Heyde, C. C., Martingale limit theory and its application, Acad. Press, 1980.

[A2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1968（中译本：W．费勒，概率论及其应用，科学出版社，1979）.

[A3] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963（中译本：M．洛易甫，概率论，科学出版社，1966）.

潘一民 译

最小公倍数［**least common multiple**；**наименьшее общее кратное**］

在整数，特别是自然数的有限集合 $a_1, \cdots, a_n$ 的公倍数中的最小正数．如果 $a_1\cdots a_n \neq 0$，则数 $a_1, \cdots, a_n$ 的最小公倍数存在；它通常记为$[a_1, \cdots, a_n]$．

最小公倍数的性质是：

1）$a_1, \cdots, a_n$ 的最小公倍数是任何其他公倍数的因数；

2）$[a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}] = [[a_1, \cdots, a_n], a_{n+1}]$；

3）如果把整数 $a_1, \cdots, a_n$ 表示为

$$a_1 = p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}, \cdots, a_n = p_1^{\nu_1}\cdots p_s^{\nu_s},$$

其中 $p_1, \cdots, p_s$ 是不同的素数，$\alpha_i \geqslant 0$，$\nu_i \geqslant 0$，$i=1, \cdots, s$，而 $\mu_i = \max\{\alpha_i, \cdots, \nu_i\}$，$i = 1, \cdots, s$，则

$$[a_1, \cdots, a_n] = p_1^{\nu_1}\cdots p_s^{\nu_s};$$

4）如果 $ab>0$，则$[a, b]\cdot(a, b) = a\cdot b$，其中$(a, b)$是 a 和 b 的**最大公因数**（greatest common divisor）．

由于最后这个性质，两个数的最小公倍数可以由 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm）求得．对于整环的元素以及对于交换环的理想都可定义最小公倍数的概念．

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 9 изд., M., 1981（中译本：И．M．维诺格拉陀夫，数论基础，高等教育出版社，1956）.

[2] Бухштаб, A. A., Теория чисел, 2 изд., M., 1966.

[3] Faure, R., Kaufmann, A. and Denis-Papin, M., Mathématique nouvelles, 1 – 2, Dunod, 1964.

B．И．Нечаев，A．A．Бухштаб 撰

【补注】 最小公倍数的其他常用记号是：l.c.m.$(a_1, \cdots, a_n)$，lcm$(a_1, \cdots, a_n)$，L.C.M.$(a_1, \cdots, a_n)$等等．在唯一因子分解整环中，最小公倍数存在并且是唯一的（不计单位）．

张鸿林 译

最不利分布［**least-favourable distribution**；**наименее благоприятное распределение**］

统计判决问题中使风险函数达到最大值的**先验分布**（a priori distribution）．

设 X 是在样本空间$(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}, P_\theta)(\theta\in\Theta)$中取值的随机变量，需要根据 X 的实现从判决空间$(\mathfrak{D}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{D}})$中选择一判决 d；这里，假设未知参数 θ 是在样本空间$(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta, \pi_t)(t\in T)$中取值的随机变量．设 $L(\theta, d)$为损失函数，它表示参数真值为 θ，采取判决 d 时蒙受的损

失．在用 **Bayes 方法**(Bayesian approach)进行判决的统计问题中，族$\{\pi_t, t\in T\}$中的先验分布 π_t 称为对于判决 d 的最不利的(least favourable)．如果

$$\sup_{t\in T}\rho(\pi_t, d)=\rho(\pi_t^*, d),$$

其中

$$\rho(\pi_t, d)=\int_\Theta\int_{\mathfrak{X}} L(\theta, d(x))\,dP_\theta(x)\,d\pi_t(\theta)$$

是风险函数，表示作出判决 d 造成的平均损失．利用最不利分布 π_t^* 可以计算由作出 d 所造成的最严重的(平均)损失 $\rho(\pi_t^*, d)$．在实际工作中其实并不用最不利分布，而恰恰相反，力求采取参数 θ 变化时能避免最大损失的判决，这意味着寻求使最大风险最小化的极小化极大判决 d^*，即

$$\inf_{d\in\mathfrak{D}}\sup_{t\in T}\rho(\pi_t, d)=\sup_{t\in T}\rho(\pi_t, d^*).$$

在用 Bayes 方法处理复合假设对简单假设的检验问题中，常借助下述的 Wald 约化(Wald reduction)确定一个最不利分布．假设欲根据随机变量 X 的实现检验复合假设 H_0：X 的分布律属于族 $H_0=\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$，其简单备选假设为 H_1：随机变量 X 服从分布律 Q；设

$$p_\theta(x)=\frac{dP_\theta(x)}{d\mu(x)} \quad 和 \quad q(x)=\frac{dQ(x)}{d\mu(x)},$$

其中 $\mu(\cdot)$ 是 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}})$ 上的某 σ 有限测度，而$\{\pi_t, t\in T\}$是$(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$上的先验分布族．那么，对于任意 $t\in T$，复合假设 H_0 可以联系于一个简单假设 H_t：随机变量 X 服从概率密度为

$$f_t(x)=\int_\Theta p_\theta(x)\,d\pi_t(\theta)$$

的概率律．根据 **Neyman-Pearson 引理**(Neyman-Pearson lemma)，对于简单假设 H_t 对简单备选假设 H_1 的检验，存在基于似然比的**最大功效检验**(most-powerful test)．设 β_t 是该检验的功效(见**统计检验的功效**(power of a statistical test))，则最不利分布是族$\{\pi_t, t\in T\}$中先验分布 π_{t^*}，它满足 $\beta_{t^*}\leq\beta_t$(对于一切 $t\in T$)．最不利分布具有性质：随机变量 X 在假设 H_{t^*} 下的概率密度 $f_{t^*}(x)$ 距备选密度 $q(x)$ "最近"，即假设 H_{t^*} 是族$\{H_t, t\in T\}$中距备选假设 H_1"最近"的．见 **Bayes 方法**(Bayesian approach)．

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

[2] Zachs, S., Theory of statistical inference, Wiley, 1971.

М. С. Никулин 撰　周概容 译

最小数算子 [**least-number operator**; **наименьшего числа оператор**]，μ 算子(μ-operator)，极小化算子(minimization operator)

由一些函数构造一新函数的如下方式．令 g 是一 $(n+1)$ 元算术函数，即变元和值皆取自然数的函数．这里只假定 g 是部分函数(partial function)，即不一定对一切变元都有定义．称 n 元算术函数 f 由 g 经最小数算子而得到，若对任意自然数 $k_1, \cdots, k_n, k$，有

$$f(k_1, \cdots, k_n)=k,$$

当且仅当对一切 $l<k$ 的 l，$g(k_1, \cdots, k_n, l)$ 有定义且值不等于 0，而 $g(k_1, \cdots, k_n, k)$ 有定义且值为 0．若 f 由 g 经最小数算子而得到，则记为

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\mu y[g(x_1, \cdots, x_n, y)=0].$$

最小数算子的一个最重要性质如下所述：若 g 是**一可计算函数**(computable function)，则上述函数 f 永远是部分可计算的．实际上，若有一算法计算 g，那么 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的值可如下计算．计算 $g(x_1, \cdots, x_n, 0)$．若计算过程终止，即 $g(x_1, \cdots, x_n, 0)$ 有定义，且若 $g(x_1, \cdots, x_n, 0)=0$，则令 $f(x_1, \cdots, x_n)=0$；但若 $g(x_1, \cdots, x_n, 0)\neq 0$，则开始计算 $g(x_1, \cdots, x_n, 1)$．若过程终止且 $g(x_1, \cdots, x_n, 1)=0$，则令 $f(x_1, \cdots, x_n)=1$；但若 $g(x_1, \cdots, x_n, 1)\neq 0$，则继续计算 $g(x_1, \cdots, x_n, 2)$；等等．若存在一个 y，使得对一切 $z<y$，$g(x_1, \cdots, x_n, z)$ 有定义且值不为零，而 $g(x_1, \cdots, x_n, y)$ 有定义且值为零，则计算过程终止．此时 $f(x_1, \cdots, x_n)=y$．

在定义部分递归函数类时，最小数算子起重要作用(见**部分递归函数**(partial recursive function))．

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

杨东屏 译

最小二乘法 [**least squares, method of**; **наименьших квадратов метод**]

误差理论(errors, theory of)中根据带随机误差的测量结果估计未知量的方法之一．最小二乘法亦用于利用其他(较简单)函数近似表示给定函数，故在处理观测结果时这往往是有益的．最小二乘法由 C. F. Gauss (1794—1795) 和 A. Legendre (1805—1806) 最先提出．А. А. Марков 和 А. Н. Колмогоров 给出了最小二乘法的严格论据和众多应用的界定．在线性关系(见下文)且观测结果不含系统误差只含随机误差的最简单场合，由最小二乘法求出的未知量的估计是观测值的线性函数．这些估计不含系统偏差，是无偏的(见**无偏估**

计量(unbiased estimator)). 假如随机观测误差独立且服从正态分布，则最小二乘法提供的未知量的估计有最小方差，即这些估计是有效的(见**统计估计**(statistical estimation)). 在一切可以提供无偏估计的方法中，最小二乘法在上述意义下是最优的. 不过，如果随机误差的分布显著偏离正态分布，则最小二乘法也可能不是最优的.

在(按 Gauss)论证最小二乘法时假定，用根据观测结果计算的某量 μ 的近似值 X 代替其(未知)精确值时，所造成的"损失"与误差平方 $(X-\mu)^2$ 成比例；把使"损失"均值 $\mathrm{E}(X-\mu)^2$ 最小的无系统误差的量 X 视为最优估计. 正是这一要求构成最小二乘法的基础. 在一般情形下，寻求在最小二乘法意义下的最优估计是一个十分复杂的问题，因此实际中将此问题简化，取 X 为不含系统误差的观测结果的一个线性函数，使在一切线性函数的类中它的平均误差最小. 如果随机观测误差服从正态分布，且被估计量 μ 对观测结果均值的依赖是线性的(这是最小二乘法的应用中十分常见的情形)，则该问题的解同时也是一般问题的解. 在此情形下，最优估计 X 也服从均值为 μ 的正态分布，从而随机变量 X 的概率密度

$$p(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

在点 $x=\mu$ 处达到最大值. 正是该性质表达了误差理论中的常见的论断"由最小二乘法求出的估计 X 是未知参数 μ 的最可能值"的确切含意。

一个未知数的情形. 假设为估计未知数 μ 的值进行 n 次独立观测，得结果 $Y_1,\cdots,Y_n$，即 $Y_1=\mu+\delta_1$，$\cdots$，$Y_n=\mu+\delta_n$，其中 $\delta_1,\cdots,\delta_n$ 是随机误差(按经典误差理论中的定义，随机误差(random errors)是数学期望为 $\mathrm{E}\delta_i=0$ 的独立随机变量；倘若 $\mathrm{E}\delta_i\neq 0$，则 δ_i 称为系统误差(systematic errors)). 按照最小二乘法，取使如下平方和最小的 X 作为 μ 的估计(因此方法而得名):

$$S(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i(X-Y_i)^2,$$

其中

$$p_i=\frac{k}{\sigma_i^2}\text{，而 }\sigma_i^2=\mathrm{D}\delta_i=\mathrm{E}\delta_i^2$$

(系数 $k>0$ 可以任选). 量 p_i 称为权(weight)，而 σ_i^2 称为第 i 次观测的平方偏差(squared deviation). 特别地，如果所有观测都同等精确，则 $\sigma_1=\cdots=\sigma_n$，且这时可以取 $p_1=\cdots=p_n=1$；如果每一个 Y_i 是 n_i 次等精度测量的算术平均值，则令 $p_i=n_i$.

如果 X 取为加权平均值

$$X=\overline{Y}=\frac{1}{P}\sum p_iY_i\text{，其中 }P=\sum p_i\text{，}$$

则和 $S(X)$ 最小. 量 μ 的估计 $\overline{Y}$ 不含系统误差，其权为 P 和方差 $\mathrm{D}\overline{Y}=k/P$. 特别地，如果观测有相同精度，则 $\overline{Y}$ 是观测结果的简单算术平均值:

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum Y_i\text{，而 }\mathrm{D}\overline{Y}=\frac{\sigma^2}{n}\quad.$$

在某些一般假设下可以证明，如果观测次数 n 充分大，则估计 $\overline{Y}$ 的分布与数学期望为 μ 而方差为 k/P 的正态分布差别很小. 这时，近似等式 $\mu\approx\overline{Y}$ 的绝对误差小于 $t\sqrt{k/P}$ 的概率接近如下积分值:

$$I(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{1}$$

(例如，$I(1.96)=0.950$；$I(2.58)=0.990$；$I(3.00)=0.997$).

如果测量的权 p_i 给定，而因子 k 在观测之前未定，则该因子和估计量 $\overline{Y}$ 的方差可以由公式

$$k\approx\frac{S(\overline{Y})}{n-1}$$

和

$$\mathrm{D}\overline{Y}=\frac{k}{P}\approx s^2=\frac{S(\overline{Y})}{(n-1)P}$$

来估计(两个估计量都是无偏的).

在实际中重要的是误差 δ_i 服从正态分布的情形，这时可以求出"近似等式 $\mu\approx\overline{Y}$ 的绝对误差小于 ts"(t 是任意正数)的概率的精确值

$$I_{n-1}(t)=C_{n-1}\int_0^t\left(1+\frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2}dv, \tag{2}$$

其中常数 C_{n-1} 的选择决定于条件 $I_{n-1}(\infty)=1$(自由度为 $n-1$ 的 **Student 分布**(Student distribution)). 当 n 很大时，可以用公式(1)代替(2). 不过，当 n 不大时利用(1)会造成大的误差. 例如，根据(1)与值 $I=0.99$ 对应的 $t=2.58$；当 n 较小时，作为相应方程 $I_{n-1}(t)=0.99$ 的解 t 的真值列在下表中:

n ···	2	3	4	5	10	20	30
t ···	63.66	9.92	5.84	4.60	3.25	2.86	2.76

例 为确定某物体的质量，进行了 10 次独立等精度称量，得如下结果(单位: 克):

Y_i ···	18.41	18.42	18.43	18.44	18.45	18.46
n_i ···	1	3	3	1	1	1

(其中 n_i 是测得质量 Y_i 的次数；$n=\sum n_i=10$). 因为所有称量是等精度的，故应设 $p_i=n_i$，而作为未知质量 μ 的估计量应选取量 $Y=\sum n_iY_i/\sum n_i=18.431$. 例如，设 $I_9=0.95$，由自由度为 9 的 Student 分布表可见 $t=2.262$，从而近似等式 $\mu\approx 18.431$ 的最大绝对误差为

$$ts=t\sqrt{\sum n_i\frac{(Y_i-\overline{Y})^2}{90}}=2.262\cdot 0.0048=0.011\ .$$

于是，$18.420<\mu<18.422$ 的概率为 0.05 .

几个未知数的情形(线性关系)．假设 n 个观测结果 $Y_1,\cdots,Y_n$ 与 $m\,(m<n)$ 个未知数 $x_1,\cdots,x_m$ 有如下独立线性关系

$$Y_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j+\delta_i,\quad i=1,\cdots,n, \tag{3}$$

其中 a_{ij} 是已知系数，δ_i 是独立随机测量误差．要求估计未知量 x_j(此问题可视为上述问题的推广，其中 $\mu=x_1, m=a_{i1}=1;\ i=1,\cdots,n$)．

因为 $\mathrm{E}\,\delta_i=0$，所以测量结果均值 $y_i=\mathrm{E}\,Y_i$ 与未知数 $x_1,\cdots,x_m$ 满足如下线性方程：

$$y_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\quad i=1,\cdots,n\ . \tag{4}$$

从而，未知数 x_j 是方程组(4)的解(假设其中的方程相容)．被测量 y_i 和随机误差 δ_i 的精确值一般未知，因此通常将方程组(3)和(4)写成所谓条件方程(conditional equations)：

$$Y_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\quad i=1,\cdots,n\ .$$

按照最小二乘法，用使偏差平方和

$$S=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(Y_i-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}X_j\right)^2.$$

达到最小的量 X_j 作未知数 x_j 的估计量(同上面的情形一样，p_i 是测量的权，Y_i 是与随机误差 δ_i 的方差成反比的量)．条件方程通常不相容，即对于任意 X_j 的值，差

$$\Delta_i=Y_i-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}X_j,\ i=1,\cdots,n,$$

一般不会全为 0．最小二乘法在于选使和 S 最小的 X_j 的值作估计值．在一些特别的场合，当条件方程相容，即有解时，其解与按最小二乘法求得的估计相同．

平方和 S 是关于变量 X_j 的二次多项式；对于使所有一阶偏导数为 0，即满足

$$\frac{\partial S}{\partial X_j}=-2\sum_{i=1}^{n}p_i\Delta_i=0,\ j=1,\cdots,m$$

的 $X_1,\cdots,X_m$ 的值，此多项式达到最小值．由此可见，由最小二乘法求出的估计量 X_j 应满足所谓正规方程(normal equations)．正规方程在 Gauss 记号下有如下形式：

$$\sum_{j=1}^{m}[pa_ja_l]X_j=[pXa_l],\ l=1,\cdots,m, \tag{5}$$

其中

$$[pa_ja_l]=\sum_{i=1}^{n}p_ia_{ij}a_{il},$$

$$[pYa_l]=\sum_{i=1}^{n}p_iY_ia_{il}\ .$$

由正规方程组的解，得到的估计量不含系统误差($\mathrm{E}X_j=x_j$)；量 X_j 的方差 $\mathrm{D}X_j$ 等于 kd_{jj}/d，其中 d 是方程组(5)的行列式，d_{jj} 是对应于对角元素 $[pa_ja_j]$ 的子式(换句话说，d_{jj}/d 是估计量 X_j 的权)．如果比例系数 k(k 称为单位权的方差(variance per unit weight))事先未知，则为估计 k 和方差 $\mathrm{D}X_j$ 利用公式

$$k\approx\frac{S}{n-m}\quad 和\quad \mathrm{D}X_j\approx s_j^2=\frac{Sd_{jj}}{d\,(n-m)}$$

(S 是原平方和的最小值)．在某些一般假设下可以证明，如果观测次数 n 充分大，则近似等式 $x_j\approx X_j$ 的绝对误差小于 ts_j 的概率接近积分(1)的值．如果随机观测误差 δ_i 服从正态分布，则一切比值 $(X_j-x_j)/s_j$ 都服从自由度为 $n-m$ 的 Student 分布(与一个未知数的情形一样，由积分(2)求近似等式之绝对误差的确切估计)．此外，和 S 的最小值在概率意义下与 $X_1,\cdots,X_m$ 独立，因此估计量 X_j 之方差 $\mathrm{D}X_j\approx s_j^2$ 的近似值与估计量 X_j 独立．

最小二乘法最典型的应用之一，是使方程(3)中 $a_{ij}=a_j(t_i)$ 的观测结果 Y_i 的"修匀"，其中 $a_j(t)$ 是某参数 t 的已知函数(如果 t 是时间，则 $t_1,t_2,\cdots$ 是进行观测的时刻)．应用中特别常见的一种情形，称为抛物插值(parabolic interpolation)，这时 $a_j(t)$ 是多项式(例如，$a_1(t)=1,\ a_2(t)=t, a_3(t)=t^2,\cdots$)；如果 $t_2-t_1=\cdots=t_n-t_{n-1}$，而且观测是等精度的，则为求估计量 X_j 可以利用正交多项式表．应用中另一重要情形，称为调和插值(harmonic interpolation)，这时 $a_j(t)$ 为三角函数(例如，$a_j(t)=\cos(j-1)t,\ j=1,\cdots,m$).

例　为估计一种化学分析方法的精度，取事先已经知道其成分的 10 份 CaO 的标准试样，并测定其浓度．测定结果列在下表中(i —— 试验号，t_i —— CaO 的实际浓度，T_i —— 化学分析测定的 CaO 的浓度，$Y_i=T_i-t_i$ —— 化学分析误差)：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	4	8	12.5	16	20	25	31	36	40	40
Y_i	−0.3	−0.2	−0.4	−0.4	−0.2	−0.5	+0.1	−0.5	−0.6	−0.5

如果化学分析的结果不含系统误差，则 $\mathrm{E}Y_i=0$．如果有系统误差，则作为第一逼近可将其表示为 $\mathrm{E}Y_i=\alpha+\beta t_i$($\alpha$ 称为固定偏倚(constant bias))，而 βt_i 称为方法偏倚(methodical bias))或等价形式

$$\mathrm{E}\,Y_i=(\alpha+\beta\bar{t})+\beta(t_i-\bar{t}),$$

其中

$$\bar{t}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}t_i=23.25\ .$$

为求 α 和 β 的估计量，只需估计 $x_1=\alpha+\beta\bar{t}$ 和 $x_2=\beta$．这里条件方程为

$$Y_i=x_1+x_2(t_i-\bar{t}),\quad i=1,\cdots,10,$$

从而 $a_{i1}=1$，$a_{i2}=t_i-\bar{t}$（因为根据假设观测都同精度或同方差（见**同方差性**(homoscedasticity)），所有 $p_i=1$）．因为 $[a_1a_2]=[a_2a_1]=\sum(t_i-\bar{t})=0$，正规方程组的形式变得特别简单

$$[a_1a_1]X_1=[Ya_1];\quad [a_2a_2]X_2=[Ya_2],$$

其中

$$[a_1a_1]=10,\quad [a_2a_2]=\sum(t_i-\bar{t})^2=1569,$$

$$[Ya_1]=\sum Y_i=-3.5,$$

$$[Ya_2]=\sum Y_i(t_i-\bar{t})=-8.225.$$

此方程组之解的分量的方差为

$$\mathrm{D}X_1=\frac{k}{[a_1a_1]}=\frac{k}{10}\quad 和\quad \mathrm{D}X_2=\frac{k}{[a_2a_2]}=\frac{k}{1569},$$

其中 k 是单位权的未知方差（这里 k 是变量 Y_i 中任何一个的方差）．由于此例中解的分量值为 $X_1=-0.35$，$X_2=-0.00524$，故

$$k\approx\frac{S}{n-m}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{10}[Y_i-X_1-X_2(t_i-\bar{t})]^2=0.0427,$$

$$\mathrm{D}X_1\approx s_1^2=0.00427,\quad \mathrm{D}X_2\approx s_2^2=0.000272,$$

$$s_1=0.065,\quad s_2=0.00522.$$

如果随机观测误差服从正态分布，则比值 $|X_j-x_j|/s_j\,(j=1,2)$ 按 Student 律分布．特别地，如果观测结果不含系统误差，则 $x_1=x_2=0$，即比 $|X_1|/s_1$ 和 $|X_2|/s_2$ 服从 Student 分布．由自由度为 8 的 Student 分布表可见，如果确有 $x_1=x_2=0$，则 $|X_1|/s_1$ 和 $|X_2|/s_2$ 之中每一个都以概率 0.999 不大于 5.04，以概率 0.95 不大于 2.31．在该例中，$|X_1|/s_1=5.38>5.04$，因此应否定关于无系统误差的假设．同时，因为 $|X_2|/s_2=1.004<2.31$，故应认为关于无系统误差的假设（$x_2=0$）与观测结果不矛盾．于是，可以得出结论：为根据观测结果 T 确定 t，应利用近似公式 $t=T+0.35$．

几个未知数的情形（非线性关系）．假设 n 次测量结果 Y_i 与 m 个未知数 $x_j\,(m<n)$ 有函数关系 $Y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)+\delta_i\,(i=1,\cdots,n)$，其中 δ_i 是未知的随机误差，函数 f_i（未必是线性的）可微．根据最小二乘法，取使平方和

$$S=\sum_{i=1}^{n}p_i[Y_i-f_i(X_1,\cdots,X_m)]^2$$

最小的量 X_j 做 x_j 的估计量．由于函数 f_i 是非线性的，故这时正规方程 $\partial S/\partial X_j=0$ 的求解十分困难．有时通过某种变换可将非线性关系变为线性的．

例如，在铁磁化时，磁场强度 H 与磁感应强度 B 之间有如下经验公式 $B=H/(x_1+Hx_2)$（系数 x_1 和 x_2 对给定 H_i 由 B_i 的测定值来求）．磁感应 B 是 x_1 和 x_2 的非线性函数．然而磁感应的倒数对 x_1 和 x_2 的关系是线性的．对原方程和变换后的方程运用最小二乘法，一般会得到未知数 x_1 和 x_2 的不同估计；但是，如果测定磁感应的随机误差明显小于被测量的量 B_i，则有 $\mathrm{D}(1/B)\approx B^{-4}$．因此应赋于量 $1/B_i$ 以权 $(1/B_i)^4$；自然可以指望，在这些条件下，非线性和线性两种情形估计量的差异实际上并不重要．

在有些情形下，如果无法通过恒等变换将非线性方程化为线性的，则采用其他线性化方法．由给定的 n 个方程中任选 m 个方程，其解 $X_1^0,\cdots,X_m^0$ 作为未知数 x_j 的第零次逼近．若令 $\xi_j=X_j-X_j^0$，则条件方程可以写成

$$Y_i=f_i(X_1^0+\xi_1,\cdots,X_m^0+\xi_m),\ i=1,\cdots,n.$$

将右侧按 ξ_j 的幂展为级数并取其线性各项，得

$$Y_i-(f_i)_0=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0\xi_j,\quad i=1,\cdots,n,$$

其中 $(f_i)_0$ 和 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0$ 是函数 f_i 及其对 x_j 的导数在 $x_1=X_1^0,\cdots,x_m=X_m^0$ 处的值．此方程组是线性的，故很容易用最小二乘法估计未知数 ξ_j．估计出 ξ_j 之后，得未知数的第一次逼近 $X_j^1=X_j^0+\xi_j$．以量 X_j^1 作初始逼近，重复全部运算直到相继两次逼近在规定精度下相重合．如果误差 δ_i 的方差减小，则过程收敛．

极常见的是，当 $\mathrm{D}\delta_i$ 较小时第一次逼近就足够了：再要求以明显超出 $\sqrt{\mathrm{D}X_j}$ 的精度求 X_j 就没有意义．

在许多实际中重要的场合（其中包括估计复杂的非线性关系时），未知参数的个数十分多，因此实施最小二乘法只有利用现代计算技术才有成效．

参考文献

[1] Марков, А.А., Исчисление вероятностей, изд. 4, М., 1924.

[2] Колмогоров, А.Н., 《Успехи матем. наук》, 1 (1946), 1, 57 – 70.

[3] Линник, Ю.В., Методы наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

[4] Налимов, В.В., Применение математической статистики при анализе вещества, М., 1960（英译本：Nalimov, V.V., The application of mathematical statistics to chemical analysis, Pergamon, 1963）.

[5] Helmert, F.R., Die ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Teubner, 1907.

Л.Н. Большев 撰

【补注】 实际上，Gauss 为论证最小二乘法而提出了正

态分布(normal distribution). 此外，最小二乘估计作为"最优线性无偏估计"(现代提法称之为 Gauss-Марков 定理 (Gauss-Markov theorem)) 的最初词源，实际上是由该估计在 Bayes 意义上(见 **Bayes 方法** (Bayesian approach)) 作为以 μ 为中心点的"μ 的最可能值"派生的. 见 [A1].

估计在被重复测量的向量 Y 和 X 间(假定的)线性关系 $Y=AX$ (线性回归 (linear regression)) 中的系数时，最小二乘法的应用(结果)，见**回归矩阵** (regression matrix) 和**回归分析** (regression analysis).

参考文献

[A1] Stigler, S.M., The theory of statistics, Harvard Univ. Press, 1986.

[A2] Draper, N.R. and Smith, H., Applied regression analysis, Wiley, 1981(中译本：王学仁，温忠粦编译，应用回归分析，重庆大学出版社，1989).

[A3] Rao, C.R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965(中译本：C.R. 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1985).

[A4] Daniel, C. and Wood, F.S., Fitting equations to data, computer analysis of multifactor data for scientists and engineers, Wiley, 1971.

周概容 译

Лебедев 变换 [Lebedev transform; Лебедева преобразование]

积分变换

$$F(\tau)=\int_0^\infty [I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)]K_{i\tau}(x)f(x)\,dx,$$

$$0\leqslant\tau<\infty,$$

其中 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$ 是变形**柱函数** (cylinder functions). 它是由 Н. Н. Лебедев ([1]) 引入的. 如果

$$x^{-1/2}f(x)\in L(0,1),\ x^{1/2}f(x)\in L(1,\infty),$$

则对于几乎所有的 x，有反演公式

$$f(x)=-\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty F(\tau)\tau\sinh\pi\tau K_{i\tau}^2(x)\,d\tau.$$

参考文献

[1] Лебедев, Н. Н., 《Сиб. матем. ж.》, 3 (1962), 2, 213 – 222.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 下列一对变换也称为 Лебедев 变换(或 Конторович-Лебедев **变换** (Kontorovich-Lebedev transform))

$$G(\tau)=\int_0^\infty g(x)x^{-1/2}K_{i\tau}(x)\,dx,$$

$$g(x)=\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \tau\sinh\pi\tau\, K_{i\tau}(x)G(\tau)\,d\tau.$$

参考文献

[A1] Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Prentice-Hall, 1965(译自俄文).

[A2] Sneddon, I. N., The use of integral transforms, McGraw-Hill, 1972.

张鸿林 译

Lebesgue 常数 [Lebesgue constants; Лебега константы]

1) 量

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt,$$

其中的

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin(t/2)}$$

是 **Dirichlet 核** (Dirichlet kernel). 对于每一个 n, Lebesgue 常数 L_n 等于

(1) $|S_n(f,x)|$ 的对所有 x 及使得对几乎处处 t 有 $|f(t)|\leqslant 1$ 的所有连续函数 f 的最大值;

(2) $|S_n(f,x)|$ 的对所有 x 及使得 $|f(t)|\leqslant 1$ 的所有连续函数 f 的上确界;

(3) 积分

$$\int_0^{2\pi}|S_n(f,x)|\,dx$$

的关于满足

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt\leqslant 1$$

的所有函数 f 的上确界.

这里的 $S_n(f,x)$ 是以 2π 为周期的函数 f 的 **Fourier 级数** (Fourier series) 的 n 阶部分和. 下面的渐近公式成立:

$$L_n=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1),\ n\to\infty.$$

特别地，当 $n\to\infty$ 时 $L_n\to\infty$; 这和某些连续函数的 Fourier 三角级数的发散性有关. 在更广一些的意义下，对其他**正交系** (orthogonal system) 定义 Lebesgue 常数为量

$$L_n=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)}\int_a^b|D_n(x,t)|\,dt,$$

其中的 $D_n(x,t)$ 是关于给定的 (a,b) 上的正交函数系的 Dirichlet 核; L_n 在关于这些函数系的 Fourier 级数收敛性的问题中起着重要的作用. Lebesgue 常数是由 H. Lebesgue 于 1909 年引进的，也见 **Lebesgue 函数** (Lebesgue function).

参考文献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1, Cambridge Univ. Press, 1988.

К. И. Осколков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, 1966, Chapts. 4 &6 (中译本: 切尼, 逼近论导引, 上海科学技术出版社, 1981).

[A2] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Blaisdell, 1969.

2) 插值法中的 Lebesgue 常数是数

$$\lambda_n = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=0}^{n} |l_{nk}(x)|, \ n = 1, 2, \cdots,$$

其中的

$$l_{nk}(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

而 $x_0, \cdots, x_n$ 是在某个区间 $[a, b]$ 中的两两互不相同的插值点.

设 $C[a, b]$ 和 $\mathscr{P}_n[a, b]$ 分别是 $[a, b]$ 上的连续函数空间及同一区间上的带一致度量的至多 n 次代数多项式的空间, 并设 $P_n(x, f)$ 是次数 $\leqslant n$ 的插值多项式, 它在点 $x_0, \cdots, x_n$ 处取值与 f 相同. 如果视 P_n 为联系 $P_n(x, f)$ 与 $f(x)$ 的算子 (即: P_n: $C[a, b] \to \mathscr{P}_n[a, b]$), 则有 $\|P_n\| = \lambda_n$, 等式的左边是有界线性算子空间 $\mathscr{L}(C[a, b], \mathscr{P}_n[a, b])$ 中的算子模, 而且有不等式

$$\|f(x) - P_n(x, f)\|_{C[a, b]} \leqslant (1 + \lambda_n) E_n(f),$$

其中的 $E_n(f)$ 是 f 用至多 n 次代数多项式逼近时的最佳逼近.

对 $[a, b]$ 中的插值点的任一种选取, 都有 $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$. 对于等距插值点的情形, 存在常数 $c > 0$ 使得 $\lambda_n \geqslant c 2^n n^{-3/2}$. 在区间 $[-1, 1]$ 的情形, 若插值点即为 n 次 Чебышев 多项式的零点, 则 Lebesgue 常数有最小的增长阶, 即

$$\lambda_n \approx \ln n.$$

如果 f 在 $[a, b]$ 上 m 阶可导, $Y = \{y_k\}_{k=0}^{n}$ 是给定的数集 ("值 $f(x_k)$ 的逼近值"), 又设 $P_n(x, Y)$ 是次数 $\leqslant n$ 的插值多项式, 它在点 x_k 处取值 $y_k (k = 0, \cdots, n)$ 及

$$\lambda_{nm} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=1}^{n} |l_{nk}^{(m)}(x)|, \ n = 0, 1, \cdots,$$

则有

$$\|f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x, Y)\|_{C[a, b]} \leqslant$$

$$\leqslant \|f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x, f)\|_{C[a, b]} +$$

$$+ \lambda_{nm} \max_{k=0, \cdots, n} |f(x_k) - y_k|.$$

任意区间 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 常数 λ_{nm} 与区间 $[-1, 1]$ 上的 Lebesgue 常数 Λ_{nm} 之间有关系式

$$\Lambda_{nm} = \left(\frac{b - a}{2} \right)^m \lambda_{nm},$$

特别地, 有 $\lambda_n = \Lambda_{n0}$. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 确定 "最优节点" (即, 对于固定的正整数 $n \geqslant 2$, 确定点 $x_0, \cdots, x_n$ 使 λ_n 最小) 的问题一直被人们所关注. S. N. Bernstein 于 1931 年猜测道, 当 $\sum_{k=0}^{n} |l_{nk}(x)|$ "等振荡" 时 λ_n 最小. 这一猜测被 T. A. Kilgore 所证实 (参见 [A1]), [A1] 中还包含一个有关历史的陈述.

参考文献

[A1] Kilgore, T. A., A characterization of the Lagrange interpolation projection with minimal Tchebycheff norm, *J. Approx. Theory*, **24** (1978), 273 - 288.

[A2] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Blaisdell, 1969, Sect. 4. 2.

朱学贤 译 潘文杰 校

Lebesgue 准则 [Lebesgue criterion; Лебега признак]

关于 **Fourier 级数** (Fourier series) 点态收敛性的一个判别法. 如果周期为 2π 且在区间 $[0, 2\pi]$ 上可积的函数 f 在点 x_0 处对某个 $\delta > 0$ 满足条件

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_h^\delta \left| \frac{\varphi_{x_0}(t+h)}{t+h} - \frac{\varphi_{x_0}(t)}{t} \right| dt = 0, \quad (*)$$

其中

$$\varphi_{x_0}(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S,$$

则 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于数 S. 此准则为 H. Lebesgue 所证明 ([1]). 条件 (*) 等价于下面两个条件的联立:

$$\int_0^h |\varphi_{x_0}(t)| dt = o(h),$$

$$\int_h^\delta \frac{1}{t} |\varphi_{x_0}(t+h) - \varphi_{x_0}(t)| dt = o(1), \ h \downarrow 0.$$

Lebesgue 准则强于 **Dirichlet 准则 (关于级数收敛性的)** (Dirichlet criterion (convergence of series)), **Jordan 准则** (Jordan criterion), **Dini 准则** (Dini criterion), **de la Vallée-Poussin 准则** (de la Vallée-Poussin criterion) 以及 **Young 准则** (Young criterion).

参考文献

[1] Lebesgue, H., Récherches sur le convergence des séries de Fourier, *Math. Ann.*, **61** (1905), 251 - 280.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary [Bari], N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

Б. И. Голубов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

沈永欢 译

Lebesgue 分解 [Lebesgue decomposition; Лебега разложение]

1) 有界变差函数的 Lebesgue 分解是把有界变差函数表示为至多三项之和的一种典范表示. 如果 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则它可表示为

$$f(x)=A(x)+S(x)+D(x),$$

其中 A 是绝对连续函数 (见**绝对连续性** (absolute continuity)), S 是**奇异函数** (singular function), D 是**跳跃函数** (jump function). 在某些情形下, 例如当 $f(a)=A(a)$ 时, 这个表示是唯一的. 此分解为 H. Lebesgue 所建立 (1904, 见 [1]).

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 上、下册, 高等教育出版社, 1955).

[3] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. R. Halmos, 测度论, 科学出版社, 1965).

Б. И. Голубов 撰

2) 定义于可测空间 $(X, \mathfrak{A})$ ($\mathfrak{A}$ 是一个 σ 代数) 上的 σ 有限广义测度 μ 关于定义于同一空间上的 σ 有限广义测度 ν 的 Lebesgue 分解是 μ 的形如 $\mu=\alpha+\beta$ 的表示式, 其中 α, β 是 σ 有限广义测度, α 关于 ν 是绝对连续的 (见**绝对连续性** (absolute continuity)), β 关于 ν 是奇异的 (见**互相奇异测度** (mutually-singular measures)). 这种表示总存在且唯一.

参考文献

[1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. R. Halmos, 测度论, 科学出版社, 1965).

[2] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear operators, 1–3, Interscience, 1958–1971.

В. В. Сазонов 撰 沈永欢 译

Lebesgue 维数 [Lebesgue dimension; Лебега размерность]

一种用覆盖 (见**覆盖 (集合的)** (covering (of a set))) 来定义的维数. 它是拓扑空间 X 的最重要的**维数不变量** (dimension invariant) $\dim X$, 为 H. Lebesgue ([1]) 所发现. 他猜想, 对 n 维立方体 I^n 有 $\dim I^n=n$. L. E. J. Brouwer ([2]) 首先证明此猜想及较强的恒等式: $\dim I^n=\operatorname{Ind} I^n=n$. П. С. Урысон (对度量紧统类) 给出了不变量 $\dim X$ 的精确定义, 他证明, 对这类空间 X, 有

$$\dim X=\operatorname{ind} X=\operatorname{Ind} X$$

(Урысон 恒等式 (Urysohn identity), 见**维数论** (dimension theory)). W. Hurewicz 和 Л. А. Тумаркин 于 1925 年将此恒等式推广到所有可分度量空间类.

对于紧统 X, Lebesgue 维数定义为具有下列性质的最小整数 n: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 X 的重数 $\leqslant n+1$ 的有限 ε 开覆盖; 度量空间的 ε 覆盖 (ε-covering) 是其所有元素的直径都 $<\varepsilon$ 的覆盖, X 的有限覆盖的重数 (multiplicity of a finite covering) 是这样的最大整数 k, 使得存在 X 的一点, 含于已给覆盖的 k 个元素. 对任意正规 (特别是可度量化) 空间 X, Lebesgue 维数是这样的最小整数 n, 使得对 X 的任意有限开覆盖 ω, 存在一个加细它的重数为 $n+1$ 的 (有限开) 覆盖 α. 覆盖 α 称为覆盖 ω 的加细 (refinement of a covering), 如果 α 的每个元素至少是 ω 的一个元素的子集.

参考文献

[1] Lebesgue, H., Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces à n et $n+p$ dimensions, *Math. Ann.*, **70** (1911), 166–168.

[2] Brouwer, L. E. J., Über den Natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.*, **142** (1913), 146–152.

[3] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности…, М., 1973.

П. С. Александров 撰

【补注】 Lebesgue 维数也称为覆盖维数 (covering dimension) 或 Čech-Lebesgue 维数 (Čech-Lebesgue dimension). 覆盖的重数也称为覆盖的阶 (order of the covering).

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978.

[A2] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1941.

白苏华、胡师度 译

Lebesgue 函数 [Lebesgue function; Лебега функций]

函数

$$L_n^{\Phi}(t)=\int_a^b\left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dx,\ t\in[a, b],$$

其中的 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是给定的在区间 $[a, b]$ 上关于 Lebesgue 测度正交的函数系, $n=1, 2, \cdots$. 当正交系是在任意测度空间上给出时, Lebesgue 函数可类似地定义. 等式

$$L_n^{\Phi}(t)=\sup_{f\ \|f\|_{C[a,b]}\leqslant 1}|S_n(f)(t)|,\ t\in[a, b]$$

成立, 其中

$$S_n(f)(t)=\sum_{k=1}^n c_k(f)\varphi_k(t)$$

是 f 关于 Φ 的 **Fourier 级数** (Fourier series) 的 n 阶部分和. 在 Φ 是**三角函数系** (trigonometric system) 的情形, Lebesgue 函数是常数即 **Lebesgue 常数** (Lebe-

sgue constants). 这是由 H. Lebesgue 引进的.

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

Б. С. Кашин 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

Lebesgue 不等式 [**Lebesgue inequality**; **Лебега неравенство**]

利用最佳逼近对 **Fourier 级数** (Fourier series) 部分和偏差的估计式. 就三角函数系而言, Lebesgue 不等式即为

$$\max_x |R_n(f,x)| \leqslant (L_n+1)E_n(f), \quad n=1, 2, \cdots,$$

其中 $R_n(f,x)$ 是周期 2π 的连续函数 f 的(三角) Fourier 级数的第 n 余项, L_n 是 **Lebesgue 常数** (Lebesgue constants), $E_n(f)$ 为 n 次三角多项式对 f 的最佳一致逼近(误差)(见**最佳逼近** (Best approximation)). Lebesgue 不等式是一个具有一般特征的关系式. 对任意规范正交系, 通过适当定义 Lebesgue 常数和最佳逼近, 有类似的不等式成立. 此外, 关于 Fourier 级数的余项与按其他空间, 例如, $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 空间范数意义下的最佳逼近的比较也有类似的不等式成立. Lebesgue 不等式及类似的关系式在逼近论中常被用来估计最佳逼近的下界. 该不等式是由 H. Lebesgue 建立的.

参考文献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2. Cambridge Uinv. Press, 1988.

К. И. Осколков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Blaisdell, 1969, Sect. 4. 1.

王仁宏、檀结庆 译

Lebesgue 积分 [**Lebesgue integral**; **Лебега интеграл**]

积分 (integral) 概念的最重要推广. 设 (X, μ) 为具有非负完全可数可加测度 μ (见**可数加性集函数** (countably-additive set function); **测度空间** (measure space)) 的空间, 这里 $\mu X < +\infty$. 简单函数 (simple function) 是**可测函数** (measurable function) $g: X \to \mathbf{R}^1$, 它至多取可数个值: 如果 $x \in X_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, $g(x) = y_n$, 对 $n \neq k$, $y_n \neq y_k$. 简单函数 g 称为可和的 (summable), 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu X_n$$

绝对收敛 (见**绝对收敛级数** (absolutely convergent series)); 此级数的和即为 Lebesgue 积分

$$\int_X g\, d\mu.$$

函数 $f: X \to \mathbf{R}^1$ 称为在 X 上可和的, $f \in L_1(X, \mu)$, 如果有简单可和函数列 g_n, 在全测度集上**一致收敛** (uniform convergence) 于 f, 并且极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu = I$$

有限. 数 I 即为 Lebesgue 积分 $\int_X f\, d\mu$. 这是完整的定义: 极限 I 存在且不依赖于序列 g_n 的选择. 若 $f \in L_1(X, \mu)$, 则 f 为 X 上可测的几乎处处有限函数. Lebesgue 积分为 $L_1(X, \mu)$ 上非负线性泛函且具有下列性质:

1) 若 $f \in L_1(X, \mu)$ 且 $\mu\{x \in X: f(x) \neq h(x)\} = 0$, 则 $h \in L_1(X, \mu)$ 且

$$\int_X f\, d\mu = \int_X h\, d\mu.$$

2) 若 $f \in L_1(X, \mu)$, 则 $|f| \in L_1(X, \mu)$ 且

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leqslant \int_X |f|\, d\mu.$$

3) 若 $f \in L_1(X, \mu)$, $|h| \leqslant f$ 且 h 是可测的, 则 $h \in L_1(X, \mu)$ 且

$$\left|\int_X h\, d\mu\right| \leqslant \int_X f\, d\mu.$$

4) 若 $m \leqslant f \leqslant M$ 且 f 是可测的, 则 $f \in L_1(X, \mu)$ 且

$$m\mu X \leqslant \int_X f\, d\mu \leqslant M\mu X.$$

在 $\mu X = +\infty$ 且 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu X_n < +\infty$ 情形下, Lebesgue 积分定义为 $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\, d\mu$, 只要此极限对任何满足 $\mu E_n < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ 的序列 E_n 存在且有限. 此时上述性质 1), 2), 3) 保持正确, 但性质 4) 不真.

关于 Lebesgue 积分号下取极限过程, 见 **Lebesgue 定理** (Lebesgue theorem).

若 A 为 X 中**可测集** (measurable set), 则 Lebesgue 积分 $\int_A f\, d\mu$ 或者由换 X 为 A 像上面那样定义, 或者定义为 $\int_X f\chi_A\, d\mu$, 这里 χ_A 为集 A 的特征函数; 两个定义是等价的. 若 $f \in L_1(A, \mu)$, 则对任何可测集 $A_1 \subset A$, 有 $f \in L_1(A_1, \mu)$. 若 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 且对每个 n, A_n 可测, 对 $n \neq k$, $A_n \cap A_k = \varnothing$ 且 $f \in L_1(A, \mu)$, 则

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu.$$

反之, 若在关于 A_n 的上述条件下对每个 n 有 $f \in L_1(A_n, \mu)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}|f|\, d\mu < +\infty$, 则 $f \in L_1(A, \mu)$ 且上述等式成立 (Lebesgue 积分的 σ 可加性).

由 $F(A) = \int_A f\, d\mu$ 确定的集 $A \subset X$ 的函数是关于 μ 绝对连续的 (见**绝对连续性** (absolute continuity)); 若 $f \geqslant 0$, 则 F 为关于 μ 绝对连续的非负测度. 其逆为 **Radon-Nikodým 定理** (Radon-Nikodým theorem).

关于函数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$, 如果测度 μ 是 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure), 那么 "Lebesgue 积分" 一词

可应用于相应的泛函；这里，可和函数集简记为 $L_1(\mathbf{R}^n)$，而积分则记为 $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx$. 对其他测度，此泛函称为 **Lebesgue-Stieltjes 积分**（Lebesgue-Stieltjes integral）.

若 $f:[a,b]\to\mathbf{R}^1$，$f\in L_1[a,b]$ 且 $x:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 为非减绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt.$$

若 $f:[a,b]\to\mathbf{R}^1$，$f\in L_1[a,b]$ 且 $g:[a,b]\to\mathbf{R}^1$ 为 $[a,b]$ 上单调的，则 $fg\in L_1[a,b]$ 且存在点 $\xi\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

成立（第二中值定理（second mean-value theorem））.

H. Lebesgue 于 1902 年给出关于 $X\subset\mathbf{R}^1$ 与 μ 为 Lebesgue 测度的积分的定义. 他曾构造简单函数列，在有限测度集 E 上几乎处处一致逼近可测非负函数 $f:E\to\mathbf{R}^1$，并证明逼近 f 的那些简单函数列的积分的公共极限的存在性（有限或无穷）. Lebesgue 积分是积分概念的各种推广的基础. 正如 Н. Н. Лузин 指出（[2]），称为绝对可积性的性质 2）将 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 的 Lebesgue 积分与所有其他广义积分区别开来.

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

[2] Лузин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.-Л., 1951.

[3] Колмогоров, А. Н. и Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯莫格洛夫与 С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957）.

И. А. Виноградова 撰

【补注】 关于积分概念的其他推广，见 A **积分**（A-integral）；**Bochner 积分**（Bochner integral）；**Boks 积分**（Boks integral）；**Burkill 积分**（Burkill integral）；**Daniell 积分**（Daniell integral）；**Darboux 和**（Darboux sum）；**Denjoy 积分**（Denjoy integral）；**Колмогоров 积分**（Kolmogorov integral）；**Perron 积分**（Perron integral）；**Perron-Stieltjes 积分**（Perron-Stieltjes integral）；**Pettis 积分**（Pettis integral）；**Radon 积分**（Radon integral）；**Stieltjes 积分**（Stieltjes integral）；**Strong 积分**（Strong integral）；**Wiener 积分**（Wiener integral）. 自然，亦见 **Riemann 积分**（Riemann integral）. 又见**二重积分**（double integral）；**反常积分**（improper integral）；**Fubini 定理**（Fubini theorem）（关于改变积分次序）.

参考文献

[A1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950（中译本：哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）.

[A2] Pesin, I. N., Classical and modern integration theories, Acad. Press, 1970（译自俄文）.

[A3] Saks, S., Theory of the integral Hafner, 1952（译自波兰文）.

[A4] Royden, H., Real analysis, Macmillan, 1968.

[A5] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1978（中译本：W. 鲁丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1982）.

[A6] Hewitt, H. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

郑维行 译 沈祖和 校

Lebesgue 测度［**Lebesgue measure; Лебега мера**］，$\mathbf{R}^n$ 中的

一个可数可加测度 λ，它是 n 维区间的体积函数到更广的集类 $\mathscr{A}$——Lebesgue 可测集类上的扩张. 类 $\mathscr{A}$ 包含 **Borel 集**（Borel set）类 $\mathscr{B}$，并且 $\mathscr{A}$ 由所有形如 $A\cup B$ 的集合组成，其中 $B\subset B_1$，$A, B_1\in\mathscr{B}$，且 $\lambda(B_1)=0$. 对任何 $A\in\mathscr{A}$，

$$\lambda(A)=\inf\sum_j\lambda(I_j),\qquad(*)$$

这里下确界是对所有可能满足 $A\subset\bigcup I_j$ 的可数区间族 $\{I_j\}$ 而取的. 公式（*）对每个 $A\subset\mathbf{R}^n$ 有意义并且定义了一个集函数 λ^*（在 $\mathscr{A}$ 上与 λ 一致），λ^* 称为 Lebesgue 外测度（outer Lebesgue measure）. 集合 A 属于 $\mathscr{A}$，当且仅当对每个有界区间 I，有

$$\lambda(I)=\lambda^*(A\cap I)+\lambda^*(I\setminus A);$$

对所有 $A\subset\mathbf{R}^n$，有

$$\lambda^*(A)=\inf\{\lambda(U): A\subset U,\ U\text{ 为开集}\},$$

并且对所有的 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\lambda(A)=\lambda^*(A)=\sup\{\lambda(F): A\supset F,\ F\text{ 为紧集}\};$$

如果 $\lambda^*(A)<\infty$，则上面最后等式对从属关系 $A\in\mathscr{A}$ 是充分的；如果 O 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个正交算子，且 $a\in\mathbf{R}^n$，则对任何 $A\in\mathscr{A}$，有 $\lambda(OA+a)=\lambda(A)$. Lebesgue 测度是由 H. Lebesgue 引进的（[1]）.

参考文献

[1] Lebesgue, H., Intégrale, longeur, aire, Univ. Paris, 1902. Thesis.

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

[3] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950（中译本：P. R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）.

[4] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯尔莫戈罗夫，С. В.

福明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957）. B. B. Сазонов 撰

【补注】 Lebesgue 测度是 **Haar 测度**（Haar measure）、乘积测度（当 $n>1$ 时）和 **Hausdorff 测度**（Hausdorff measure）的一个很特殊的例子．其实，在历史上 Lebesgue 测度是这些测度的第一个例子．

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965. 束立生 译 苏维宜 校

Lebesgue 数 [Lebesgue number; Лебега число]

1）度量空间 X 的开覆盖 ω 的 Lebesgue 数是这样的任意数 $\varepsilon>0$：如果 X 的子集 A 的直径 $<\varepsilon$，则 A 至少被 ω 的一个元素包含．紧统的任意开覆盖（见**覆盖（集合的）**（covering (of a set)））都至少有一个 Lebesgue 数；可以作出直线的一个二元素覆盖，它没有 Lebesgue 数．

2）度量空间 X 的闭子集系 λ 的 Lebesgue 数是这样的任意数 $\varepsilon>0$：如果直径 $\leqslant\varepsilon$ 的集合 $A\subset X$ 与 λ 的某个子系 λ' 的所有元素相交，则该集系的诸元素之交非空．紧统的任意有限闭子集系至少有一个 Lebesgue 数． Б. А. Посынков 撰 白苏华、胡师度 译

Lebesgue 点 [Lebesgue point; Лебега точка]

设 f 是 (a,b) 上给定的 Lebesgue 可和函数，它的 Lebesgue 点是指实变量 x 的值，使关系式

$$\int_0^h |f(x\pm t)-f(x)|\,dt=o(h),\ h\to 0$$

成立．据 **Lebesgue 定理**（Lebesgue theorem），此关系式成立的点所成的集（所谓 **Lebesgue 集**（Lebesgue set））在 (a,b) 上有完全（Lebesgue）测度，亦即，在几乎每个点 x 即在所有 Lebesgue 点，函数 f 与它在点 $x\pm t$ 的邻域的值依平均意义相差很小．Lebesgue 点概念在多变量函数情形下有其类似（见 **Lebesgue 集**（Lebesgue set））．这种类型的 Lebesgue 定理的概念与论断构成关于几乎处处收敛问题的各种研究，尤其是关于奇异积分的研究的基础．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Формин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯莫格洛夫与 С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957）. К. И. Осколков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970（中译本：斯坦，奇异积分与函数的可微性，北京大学出版社，1986）. 郑维行 译 沈祖和 校

Lebesgue 集 [Lebesgue set; Лебега множество]，关于定义在开集 $G\subset\mathbf{R}^k$ 上的局部可和函数 f 的满足关系式

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\frac{1}{\lambda(\Delta)}\int_\Delta |f(y)-f(x)|\,dx=0$$

的点 $y\in G$ 所成的集合，其中 Δ 为含有点 y 的闭立方体，而 λ 为 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）．这里函数 f 可以是实的或向量值的．

【补注】 当 f 是实值且局部可积时，它的 Lebesgue 集的补集有（Lebesgue）零测度．此结果在利用极大函数研究函数的可微性时有用，见 [A1]． B. B. Сазонов 撰

参考文献

[A1] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970（中译本：斯坦，奇异积分与函数的可微性，北京大学出版社，1986）.
[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1978（中译本：鲁丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1982）. 郑维行 译 沈祖和 校

Lebesgue 空间 [Lebesgue space; Лебега пространство]

一个与"标准模型"同构的**测度空间**（measure space）$(M,\mathfrak{B},\mu)$（这里 M 为集，$\mathfrak{B}$ 是 M 的子集所成的 σ 代数，称为可测集类，而 μ 是定义在可测集类上的测度）．所述标准模型是由一个区间 Δ 与至多可数个点 a_i 组成（在"极端"情形下该"模型"只含一个区间或只含点列 a_i），其上赋予下列测度 m：对 Δ 取通常的 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure），而对点列取测度 $m(a_i)=m_i>0$；这里假定测度 m 已标准化，即 $\mu(M)=m(\Delta)+\sum m_i=1$．"同构"可以依严格意义或模 0 来理解；从而可分别得到狭义与广义的 Lebesgue 空间概念（在广义情形下可称为模 0 Lebesgue 空间）．利用测度空间 $(M,\mathfrak{B},\mu)$ 的"内在性质"可给出 Lebesgue 空间的定义（见[1]－[3]）．

由于任何具有标准化测度（定义于 Borel 子集上并依通常方法完全化）的完全可分度量空间为 Lebesgue 空间，此空间便是最常见具有标准化测度的一类空间．除了所有测度空间共有的性质外，Lebesgue 空间还具有许多特别"好的"性质．例如，测度空间 $(\mathfrak{B},\mu)$ 上的 Boole σ 代数的任何自同构都可由一个 Lebesgue 空间 M 的某个**自同构**（automorphism）生成．在许多自然运算下，我们可以从 Lebesgue 空间得到 Lebesgue 空间．这样，Lebesgue 空间 M 中的一个正测度的子集 A，其本身仍是 Lebesgue 空间（假定它的可测子集是 M 中的可测子集且测度为 $\mu_A(X)=\mu(X)/\mu(A)$）；有限或可数个 Lebesgue 空间的直积仍是 Lebesgue 空间．Lebesgue 空间的其他

性质与可测分划（见**可测分解**（measurable decomposition））有关．

参考文献

[1] Halmos, P. R. and Neumann, J. von, Operator methods in classical mechanics. Ⅱ, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 2, 332－350.

[2] Рохлин, В. А.,《Матем. сб.》, **25** (1949), 1, 107－150.

[3] Haezendonck, J., Abstract Lebesgue-Rokhlin spaces, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **25** (1973), 3, 243－258.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 关于 Lebesgue 空间与可测分划，包括 Lebesgue 空间的内在描述，亦见[A1]．

参考文献

[A1] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinaĭ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982, Appendix 1（译自俄文）.

郑世骏 译 苏维宜 校

Lebesgue 谱 [Lebesgue spectrum; Лебеговский спектр]

谱论(spectral theory)中的一个术语．设 A 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子，U 是酉算子．算子 A、U 分别有简单 Lebesgue 谱(simple Lebesgue spectrum)，如果它们酉等价于复值函数 $f(\lambda)$ 的一个空间上乘以 λ 的乘法算子，这些函数分别定义在实轴 $\mathbf{R}$ 上和圆周

$$S^1=\{\lambda:\lambda\in\mathbf{C},\ |\lambda|=1\}$$

上，并且

$$\|f\|^2=\int|f(\lambda)|^2d\lambda<\infty,$$

其中的积分分别在 $\mathbf{R}$ 上和在 S^1 上关于通常的 **Lebesgue 测度**(Lebesgue measure)进行；因此有 Lebesgue 谱这个名称(见**酉等价算子**(unitarily-equivalent operators))．对 U 这个定义与下述的等价：H 有一个规范正交基 e_j ($j=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，使得 $Ue_j=e_{j+1}$．而且，一个算子有 Lebesgue 谱，如果 H 可分解为不变子空间的正交直和，在每一个子空间上这个算子有简单 Lebesgue 谱．虽然对一给定的算子可以有许多这样的分解，每一个分解的被加项的个数是相同的(它可能是无限基数(cardinal number))．这个数称为 Lebesgue 谱的重数(multiplicity of the Lebesgue spectrum)．最后，对按弱(或强，在给定的情形下是一样的)算子拓扑连续的单参数酉算子群 $U(t)$ 也可以引入类似的概念．由 Stone 定理，$U(t)=e^{iAt}$，这里 A 是一个自伴算子(见**算子半群**(semigroup of operators)；**半群的生成算子**(generating operator of a semi-group))．如果 A 有一定重数的 Lebesgue 谱，就说 $U(t)$ 有相同的性质．例如，群 $U(t)$ 有简单 Lebesgue 谱，如果它在 $L_2(\mathbf{R})$ 中酉等价于群 $f(\lambda)\to e^{i\lambda t}f(\lambda)$，反过来，这个群又等价于同一空间 $L_2(\mathbf{R})$ 中的移位群 $f(\lambda)\to f(\lambda+t)$．

Д. В. Аносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Helson, H., The spectral theorem, Springer, 1986.

鲁世杰 译 葛显良 校

Lebesgue-Stieltjes 积分 [Lebesgue-Stieltjes integral; Лебега-Стилтьеса интеграл]

Lebesgue 积分(Lebesgue integral)的一种推广．对于非负测度 μ "Lebesgue-Stieltjes 积分"一词用于当 $X=\mathbf{R}^n$，μ 为非 Lebesgue 测度的情形；于是积分 $\int_X f\,d\mu$ 像一般情形下 Lebesgue 积分一样定义．若 μ 是变号的，则 $\mu=\mu_1-\mu_2$，这里 μ_1，μ_2 均为非负测度，而 Lebesgue-Stieltjes 积分定义为

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f\,d\mu_1-\int_X f\,d\mu_2,$$

只要右边两个积分存在．对 $X=\mathbf{R}^1$ 情形，μ 的可数可加性与有界性条件等价于 μ 由某个有界变差函数 Φ 生成．此时 Lebesgue-Stieltjes 积分可写为

$$\int_a^b f\,d\Phi$$

的形式．关于离散测度的 Lebesgue-Stieltjes 积分实际上是一数项级数．

参考文献

[1] Kamke, E., Das Lebesgue-Stieltjes Integral, Teubner, 1960.

И. А. Виноградова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

郑维行 译 沈祖和 校

Lebesgue 求和法 [Lebesgue summation method; Лебега метод суммирования]

求**三角级数**(trigonometric series)之和的一种方法．级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (*)$$

在点 x_0 处按 Lebesgue 求和法可求和，其和为 s，是指在该点的某个邻域 $(x_0-h,\ x_0+h)$ 内积分级数

$$\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)$$

收敛且其和 $F(x)$ 在点 x_0 处具有等于 s 的对称导数：

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{h}=s.$$

后一条件也可表示为如下形式：

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)\frac{\sin nh}{nh}\right]=s.$$

在不是总能对每个收敛三角级数(*)求和的意义下，

Lebesgue 求和法不是正则的（见**正则求和法**（regular summation method））；但如果（*）是一个可积函数 f 的 **Fourier 级数**（Fourier series），则它按 Lebesgue 求和法几乎处处可求和，其和为 $f(x)$. 本方法是 H. Lebesgue 提出的（见[1]）.

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur les séries trigonométriques, Gauthier-Villars, 1906.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961（英译本：Bary [Bari], N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）.

И. И. Волков 撰 沈永欢 译

Lebesgue 定理 [Lebesgue theorem; Лебега теорема]

1）维数论中的 Lebesgue 定理：对任意 $\varepsilon>0$, n 维立方体具有重数 $\leqslant n+1$ 的有限 ε 闭覆盖，同时又存在一个 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n)>0$，使得此 n 维立方体的任意有限 ε_0 闭覆盖的重数都 $\geqslant n+1$（亦见**覆盖（集合的）**（covering (of a set)））. 这个结论后来导致一个基本的维数不变量的定义，即正规拓扑空间 X 的 **Lebesgue 维数**（Lebesgue dimension）$\dim X$. Б. А. Пасынков 撰

【补注】 此定理也称为 Lebesgue 覆盖定理（Lebesgue covering theorem）或"铺石定理"（Pflastersatz）（见**维数**（dimension））. 用**维数论**（dimension theory）的说法，就是对所有 n, $\dim I^n=n$ 成立.

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978.

[A2] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1941.

[A3] Kuratowski, C., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1972（译自波兰文）.

2）积分号下求极限的 Lebesgue 定理：设在可测集 E 上给定了一个可测函数 f_n 的序列，它在 E 上几乎处处（或依测度）收敛于函数 f. 如果存在一个 E 上可和函数 Φ，使得对所有 n 和 x 有

$$|f_n(x)|\leqslant\Phi(x),$$

则 f_n 和 f 都是 E 上可和的，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

H. Lebesgue 首先证明了这个定理（[1]）. 当 Φ 为常数且 E 具有有限测度时是此定理的重要特款，也称为 Lebesgue 定理，更早为 Lebesgue 得到（[2]）.

最先为 B. Levi（[3]）证明的一个定理有时也称为 Lebesgue 定理：设在可测集 E 上给定一个非减的非负可测函数序列 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots(x\in E)$ 且

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

几乎处处成立，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

参考文献

[1] Lebesgue, H., Sur les intégrales singulières, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, **1** (1909), 25–117.

[2] Lebesgue, H., Intégrale, longueur, aire, Univ. Paris, 1902. Thesis.

[3] Levi, B., Sopra l'integrazione delle serie, *Rend. Ist. Lombardo sue Lett.* (2), **39** (1906), 775–780.

[4] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

[5] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974（第二版中译本：И. П. 那汤松，实变函数论，高等教育出版社，1958）.

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 这里的 Lebesgue 定理也称为**控制收敛定理**（dominated convergence theorem），Levi 定理通常也称为**单调收敛定理**（monotone convergence theorem）.

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1–3, Interscience, 1958–1971.

[A2] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950（中译本：P. R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）.

[A3] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

白苏华、胡师度 译

Leech 格 [Leech lattice]

【补注】 J. Leech 在 1967 年（[A1]）应用**球填装**（packing）与二元**纠错码**（error-correcting code）特别是 Golay 码之间的密切关系定义的 $\mathbf{R}^{24}$ 中的一个特殊的格，亦见**点格**（lattice of points），**数的几何**（geometry of numbers）. 现在对它有多种不同的描述方法. Leech 格的自同构群（即将它映射到自身之上的正交变换组成的群）对于寻找**零散单群**（sporadic simple group）是极其重要的（见[A2]）. $\mathbf{R}^n$ 中半径与给定球相同、互不交叠且与给定球相切的球的最大个数称为球的 Newton 数或吻接数（Newton or kissing number of a ball）. 现在只知道，当 $n=2,3,8,24$ 时，它分别是 6, 12, 240 及 196560. 当 $n=24$ 时，其值是 A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane 及 В. И. Левенштейн 独立求出的. $\mathbf{R}^{24}$ 中达到牛顿数的球的（唯一的）安放方式是由这些球的中心属于 Leech 格的球填装实现的. 我们猜测 Leech 格给出 $\mathbf{R}^{24}$ 中最紧密的球的格填装. 作为证实这个猜测的第一步，已经证明在所有球的格填装中 Leech 格的球填装有极大密度（见[A5]）. 关于 Leech 格的详细介绍，见[A3].

参考文献

[A1] Leech, J., Note on sphere packings, *Canad. J.*

Math., **19**(1967), 251 – 267.
[A2] Griess, R. L., The friendly giant, *Invent. Math*., **69**(1982), 1 – 102.
[A3] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices and groups, Springer, 1993.
[A4] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.
[A5] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.
[A6] Thompson, T. M., From error-correcting codes through sphere packings to simple groups, Math. Assoc. Amer, 1983. P. M. Gruber 撰 朱尧辰 译

Lefschetz 对偶性 [Lefschetz duality; Лефшеца двойственность], Lefschetz-Poincaré 对偶性 (Lefschetz-Poincaré duality)

由 Lefschetz 建立起来的、有关同调和上同调间的一个对偶性断言．更确切些，若 (X, A) 为一个空间偶，使 $X\setminus A$ 为 n 维拓扑流形，那么对任意的可换群 G 和 i，存在同构

$$H_i(X, A; G)\cong H_c^{n-i}(X\setminus A; G),$$

这里右边的上同调取紧支上同调．如果流形 $X\setminus A$ 不可定向，和通常一样，应取局部系数的上同调．

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 原始文章为 [A1]. Lefschetz 对偶性的一个好的近代叙述可见 [A2]．也可见 [A3]（是从层的上同调的观点写的）．

参考文献

[A1] Lefschetz, S., Manifolds with a boundary and their transformations, *Trans. Amer. Math. Soc*., **29**(1927), 429 – 462.
[A2] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, Cambridge Univ. Press, reprint, 1980.
[A3] Iversen, B., Cohomology of sheares, Springer, 1986.

沈信耀 译 黄华乐 校

Lefschetz 公式 [Lefschetz formula; Лефшеца формула]

将一拓扑空间的自同态不动点个数用上同调群的相应自同态的迹表示出来的公式．

这公式首先由 S. Lefschetz 对有限维可定向拓扑流形（[1]）和有限胞腔复形(见 [2],[3])证明．在 Lefschetz 的这些论文之前有 L.E.J.Brouwer (1911) 关于 n 维球到其自身的连续映射的不动点的定理．有限胞腔复形的 Lefschetz 公式的新证法由 H. Hopf 给出（见 [9]）．

令 X 为连通可定向的 n 维紧拓扑**流形** (manifold) 或 n 维有限**胞腔复形** (cell complex)，$f:X\to X$ 是一个**连续映射** (continuous mapping)，$\Lambda(f,X)$ 是 f 的 **Lefschetz 数** (Lefschetz number)．设映射 $f:X\to X$ 的所有的不动点都是孤立的．对每一个不动点 $x\in X$，令 $i(x)$ 为其 Kronecker 指标 (Kronecker index)（即 f 在 x 的邻域中的局部**映射度**（degree of a mapping)）．于是对 X 和 f 的 Lefschetz 公式是

$$\sum_{f(x)=x} i(x)=\Lambda(f, X). \tag{1}$$

Lefschetz 公式可以推广到紧 Euclid 邻域收缩核的任意连续映射上去（[8]）．

令 X 为一紧的可定向微分流形，而 $f:X\to X$ 为一可微映射．f 的不动点 $x\in X$ 称为非奇异的 (non-singular)，若它是孤立的，且 $\det(df_x-E)\neq 0$，这里 df_x: $T_x(X)\to T_x(X)$ 是 f 在 x 的微分，E 是恒等变换．对于非奇异不动点 x，其指标即 $\operatorname{sgn}\det(df_x-E)$．这时，Lefschetz 公式 (1) 表示，Lefschetz 数 $\Lambda(f, X)$ 等于指标为 $+1$ 的不动点数与指标为 -1 的不动点数之差；因此，Lefschetz 数不能超过不动点总个数．这时 (1) 的左方可以与 $X\times X$ 上的 $\Gamma_f\Delta$ 的相交指标用同样方法决定，这里 Γ_f 是 f 的图象，而 $\Delta\subset X\times X$ 是对角线 (见**相交指标（代数几何学中的）** (intersection index (in algebraic geometry)))．

Lefschetz 公式的一个推论是 Hopf 公式 (Hopf formula)，它指出，**Euler 示性数** (Euler characteristic) $\chi(X)$ 等于 X 上的整体 C^∞ 向量场 v 的零点指标和 (设 v 的所有零点均为孤立的)（见 [5]）．

对于紧复流形和 Dolbeault 上同调，也有 Lefschetz 公式的一种变形（见 [5]）. 令 X 为一 m 维紧复流形，而 $f:X\to X$ 是具有非奇异不动点的全纯映射．设 $H^{p,q}(X)$ 是 X 的 (p,q) 型 Dolbeault 上同调 (见**微分形式** (differential form))，又设 f^*: $H^{p,q}(X)\to H^{p,q}(X)$ 是 f 诱导出的自同态．数

$$\Lambda(f, \mathcal{O}_X)=\sum_{q=0}^{m}(-1)^q \operatorname{Tr}(f^*; H^{0,q}(X))$$

称为全纯 Lefschetz 数 (holomorphic Lefschetz number)，于是有以下的全纯 Lefschetz 公式 (holomorphic Lefschetz formula):

$$\Lambda(f, \mathcal{O}_X)=\sum_{f(x)=x}\frac{1}{\operatorname{sgn}\det(E-df_x)},$$

df_x 是 f 在 x 处的全纯微分．

在抽象代数几何学中，Lefschetz 公式是寻求 **Weil 上同调** (Weil cohomology) 的起点，这与定义在有限域上的代数簇的 **ζ 函数** (zeta function) 的 Weil 猜想有关．对于具有紧支集的 l 进上同调，其系数在可构造的 Q_l 层中，而 Q_l 是 l 进数的域，l 是异于域 k 的特征的素数，对于这种情况，在抽象代数几何学中也已建立了 Lefschetz 公式的类比．这公式常称为迹公式 (trace formula)．

令X为有限域k上的**代数簇**(algebraic variety)或**概形**(scheme)，$F:X\to X$是一Frobenius态射(见**Frobinius自同构**(Frobenius automorphism))，$\mathscr{F}$是X上的层，$H_c^i(X,\mathscr{F})$是簇(概形)X的系数在$\mathscr{F}$中且有紧支集的上同调．于是态射F决定了上同调的自同态

$$F^*:H_c^i(X,\mathscr{F})\to H_c^i(X,\mathscr{F})\ .$$

若$k_n\supset k$是域k的n次扩张，$X_n=X\otimes k_n$，$\mathscr{F}_n=\mathscr{F}\otimes k_n$是由$X$和$\mathscr{F}$通过标量域的扩张而得的簇(概形)与层，则相应的Frobenius态射$F_n:X_n\to X_n$等于F的n次幂．

现令X为具有q个元素的有限域k上的有限型分离概形，$\mathscr{F}$是X上的可构造$\mathbf{Q}_l$层，l是与k的特征不同的素数，X^{F^n}是态射F^n的不动几何点的集合，或者等价地说$X(k_n)$是概形X的值在域k_n中的几何点的集合．于是，对任意$n\geq 1$，以下的Lefschetz公式(或称迹公式(trace formula))成立：

$$\sum_{x\in X^{F^n}}\mathrm{Tr}(F^{n^*},\mathscr{F}_x)=\sum_i(-1)^i\mathrm{Tr}(F^{*n},H_c^i(X,\mathscr{F}))\ . \tag{2}$$

(见[6]，[7])，其中$\mathscr{F}_x$是$\mathscr{F}$在x上的茎．对于常值层$\mathscr{F}=\mathbf{Q}_l$，有$\mathrm{Tr}(F^{n^*},\mathbf{Q}_l)=1$，而(2)的左方即为$X$的值在$k_n$中的几何点个数．特别地，当$n=1$时，即为$X$的值在基域$k$中的点数．若概形$X$在$k$上正常(例如，若$X$是$k$上的完全代数簇)，则$H_c^i(X,\mathscr{F})=H^i(X,\mathscr{F})$，(2)的右方即为Frobenius自同态在$X$的通常上同调中迹的交替和．

公式(2)也有推广(见[7])．

参考文献

[1] Lefschetz, S., Intersections and transformations of complexes and manifolds, *Trans. Amer. Soc. Math.*, **28** (1926), 1 – 49.

[2] Lefschetz, S., The residual set of a complex manifold and related questions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **13** (1927), 614 – 622.

[3] Lefschetz, S., On the fixed point formula, *Ann. of Math.*(2), **38** (1937), 819 – 822.

[4] Kleiman, S.L., Algebraic cycles and the Weil conjectures, in J. et al. Giraud (ed.): *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland and Masson, 1968, 359 – 386.

[5] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[6] Deligne, P., Cohomologie étale, SGA 4 1/2, Lecture notes in math., 569, Springer, 1977.

[7] Grothendieck, A., Cohomologie l-adique et fonctions L, SGA 5, Lecture notes in math., 589, Springer, 1977.

[8] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

[9] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (中译本：沙爱福，施雷发，拓扑学，高等教育出版社，1959)．

В.А. Исковских 撰

【补注】 关于抽象代数几何学中的Lefschetz公式和A. Grothendiech的推广，亦见[A1]．

参考文献

[A1] Feitag, E. and Kiehl, R., Etale Cohomology and the Weil conjecture, Springer, 1988.

齐民友 译

Lefschetz数[Lefschetz number; Лефшеца число]

由一个链(上链)复形或拓扑空间到其自身中的映射的一个不变量．令X是一个Abel群的链复形(或一个拓扑空间)，$f:X\to X$是一0次自同态(或相应为一连续映射，见**映射度**(degree of a mapping))，$H_i(X,\mathbf{Q})$是对象X的系数在有理数域$\mathbf{Q}$中的**同调群**(homology group)，而且

$$\sum_i\dim_{\mathbf{Q}}H_i(X,\mathbf{Q})<\infty,$$

令t_i是以下线性变换的**迹**(trace)：

$$f_*:H_i(X,\mathbf{Q})\to H_i(X,\mathbf{Q})\ .$$

f的Lefschetz数(Lefschetz number)之定义即为

$$\Lambda(f)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^it_i\ .$$

对于上链复形，定义是类似的．特别是，恒等映射e_X的Lefschetz数即为对象X的**Euler示性数**(Euler characteristic)$\chi(X)$．若X是一自由Abel群的链(上链)复形或一拓扑空间，则数$\Lambda(f)$恒为整数．Lefschetz数是S. Lefschetz([1])中引入的，以解决连续映射的不动点的个数问题(见**Lefschetz公式**(Lefschetz formula))．

要求$\mathbf{Q}$上的有限维线性空间X_i所成的复形X之自同态f的Lefschetz数，可以应用以下的公式(有时称为Hopf迹公式(Hopf trace formula)：

$$\Lambda(f)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iT_i\ ,$$

T_i是线性变换$f:X_i\to X_i$的迹．特别地，若X是一个有限**胞腔空间**(cellular space)，$\varphi:X\to X$是X到其自身中的连续映射，$\psi:X\to X$是φ的胞腔逼近，则

$$\Lambda(\varphi)=\Lambda(\psi)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iT_i\ ,$$

T_i是由ψ诱导出的变换

$$\psi_{\#}:C_i(X,\mathbf{Q})\to C_i(X,\mathbf{Q})$$

的迹，$C_i(X,\mathbf{Q})$是X上的有理i维链群．

以上所述都可以推广到任意系数域的情况．

参考文献

[1] Lefschetz, S., Intersections and transformations of complexes and manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28** (1926), 1－49.

[2] Seifert, H. amd Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (中译本：沙爱福，施雷发，拓扑学，高等教育出版社，1959).

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dugundji, J. and Granas, A., Fixed point theory, PWN, 1982.

齐民友 译

Lefschetz 定理 [Lefschetz theorem; Лефшеца теорема]

1) Lefshcetz 不动点定理 (Lefschetz fixed-point theorem) 或 Lefschetz-Hopf 定理 (Lefschetz-Hopf theorem)，可以将一连续映射的不动点个数用 **Lefschetz 数** (Lefschetz number) 来表示的定理．于是，若有限 **CW 复形** (CW-complex) (亦见**胞腔空间** (cellular space)) X 的**连续映射** (continuous mapping) $f: X \to X$ 没有不动点，则其 Lefschetz 数 $L(f)$ 为零．这个结论的一个特例即关于不动点的 **Brouwer 定理** (Brouwer theorem).

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Greenberg, M. J. and Harper, J. R., Algebraic topology, a first course, Benjamin Cummings, 1981.

2) Lefschetz 超平面截面定理 (Lefschetz hyperplane－section theorem) 或弱 Lefschetz 定理 (weak Lefschetz theorem)：令 X 为一复射影空间 $\mathbf{C}P^N$ 中的复维数 n 的子代**数簇** (algebraic variety)，$P \subset \mathbf{C}P^N$ 为经过 X 的所有奇点 (如果有的话) 的超平面，$Y = X \cap P$ 为 X 的超平面截面；则当 $i < n$ 时，相对**同调群** (homology group) $H_i(X, Y, \mathbf{Z})$ 为零．故自然同态

$$H_i(Y, \mathbf{Z}) \to H_i(X, \mathbf{Z})$$

当 $i < n-1$ 时是同构，而当 $i = n-1$ 时是满射 (见 [1]).

用万有系数公式 (见 **Künneth 公式** (Künneth formula))，对任意上同调群也可得到相应的论断．在每一情况下，对系数在有理数域中的上同调，对偶的论断总是成立的：由嵌入 $Y \subset X$ 所诱导的上同调空间的同态

$$H^i(X, \mathbf{Q}) \to H^i(Y, \mathbf{Q}),$$

当 $i < n-1$ 时为同构，当 $i = n-1$ 时为单射 (见 [6]).

对同伦群也有类似的结论成立：当 $i < n$ 时，$\pi_i(X, Y) = 0$．特别地，典范同态 $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ 当 $n \geq 3$ 时是同构，$n = 2$ 时是满射 (关于基本群的 Lefschetz 定理)．这个定理可以推广到任意代数闭域 (见 [7]) 以及 Y 是 X 的正规完全交的情况 (见 [8]).

3) 硬 Lefschetz 定理 (hard Lefschetz theorem) 是关于一个复 **Kähler 流形** (Kähler manifold) 的上同调分为本原分支的 Lefschetz 分解的存在性的定理．

令 V 为一紧的 n 维 Kähler 流形，其 Kähler 形式为 ω，令

$$\eta \in H^{1,1}(Y, \mathbf{C}) \subset H^2(V, \mathbf{C})$$

是 ω 在 de Rham 同构下的 (1,1) 型上同调类 (见 **de Rham 上同调** (de Rham cohomology)；若 V 是具有自然 Hodge 度量的 $\mathbf{C}$ 上的射影代数簇，则 η 是对偶于一超平面截面的同调类的上同调类)，令

$$L: H^i(V, \mathbf{C}) \to H^{i+2}(V, \mathbf{C})$$

是由乘以 η 所定义的线性算子，即

$$Lz = z \cdot \eta, \quad z \in H^i(V, \mathbf{C}).$$

对任何 $h = 0, \cdots, n$，有同构 (见 [1])

$$L^k: H^{n-k}(V, \mathbf{C}) \to H^{n+k}(V, \mathbf{C}).$$

用 $H_0^{n-k}(V, \mathbf{C})$ 记算子

$$L^{h+1}: H^{n-k}(V, \mathbf{C}) \to H^{n+k+2}(V, \mathbf{C})$$

的核，并称为簇 V 的 $(n-k)$ 上同调的本原部分．$H_0^{n-k}(V, \mathbf{C})$ 的元素称为本原上同调类 (primitive cohomology class)，相应的闭链称为本原闭链 (primitive cycles)．硬 Lefschetz 定理确定了上同调可分解为本原上同调的直和 (称为 Lefschetz 分解 (Lefschetz decomposition))：

$$H^m(V, \mathbf{C}) = \bigoplus_{k=0}^{[m/2]} L^k H_0^{m-2k}(V, \mathbf{C}),$$

对所有 $m = 0, \cdots, 2n$．映射

$$L^k: H_0^{m-2k}(V, \mathbf{C}) \to H^m(V, \mathbf{C}), k = 0, \cdots, [m/2]$$

是嵌入．Lefschetz 分解与 Hodge 分解

$$H^m(V, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(V, \mathbf{C})$$

可交换 (见 **Hodge 猜想** (Hodge conjecture)) (见 [13])．特别是 $H^{p,q}(V, \mathbf{C})$ 的本原部分 $H_0^{p,q}(V, \mathbf{C})$ 有定义，而且

$$H_0^m(V, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H_0^{p,q}(V, \mathbf{C}).$$

硬 Lefschetz 定理与 Lefschetz 分解在关于 l-adic 上同调与晶体上同调的抽象代数几何学中都有类似物 (见 [4]，[14]).

4) (1,1) 型上同调的 Lefschetz 定理是关于一个复代数簇的二维代数上同调类与 (1,1) 型上同调类之间

对应的定理．

令 V 是域 $\mathbf{C}$ 上的一个非奇异射影代数簇．元素 $z\in H^2(V,\mathbf{Z})$，若其(Poincaré 意义下) 对偶的上同调类是由某个**除子**(divisor)所决定的，就称为代数的(algebraic)．(1,1)型上同调的 Lefschetz 定理断言，$z\in H^2(V,\mathbf{Z})$ 为代数的，当且仅当

$$z\in j(H^2(V,\mathbf{Z}))\cap H^{1,1}(V,\mathbf{C}),$$

这里 $H^{1,1}(V,\mathbf{C})$ 是二维复上同调空间 $H^2(V,\mathbf{C})$ 的(1,1)型 Hodge 分量，而映射 $j:H^2(V,\mathbf{Z})\to H^2(V,\mathbf{C})$ 是由自然嵌入 $\mathbf{Z}\to\mathbf{C}$ 诱导的(见[1]，亦见[6]，[12])．对于维数大于 2 的代数上同调类，见 **Hodge 猜想**(Hodge conjecture)．

对任意复解析流形 V，对于 $H^2(V,\mathbf{Z})$ 中同时为 V 上复线丛的陈(省身)类的元素，有一个类似的刻画(见[11])．

参考文献

[1] Lefschetz, S., L' analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, 1950.

[2] Lefschetz, S., On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to Abelian varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22** (1921), 327 - 482.

[3] Lefschetz, S., On the fixed point formula, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 819 - 822.

[4] Berthelot, P., Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p>0$, Springer, 1974.

[5] Deligne, P. and Katz, N., Groupes des monodromie en géométrie algébrique, SGA 7^2, Springer, 1973.

[6] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[7] Grothendieck, A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, SGA 2, North-Holland & Masson, 1968.

[8] Hartshorne, R., Ample subvarieties of algebraic varieties, Springer, 1970.

[9] Mumford, D., Abelian Varieties, Oxford Univ. Press, 1974.

[10] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本:米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988)．

[11] Wells, jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[12] Chern, S.S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

[13] Weil, A., Introduction ȧ l'étude des variétés kahlériennes, Hermann, 1958.

[14] Deligne, P., La conjecture de Weil, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273 - 307.

В. А. Исковских 撰

【补注】 关于经典的 Lefschetz 超平面截面定理的现代处理，见[A1]．

弱的和硬的(亦称强的) Lefschetz 定理对艾达尔上同调([A4])和**相交同调**(intersection homology)([A5]，[A6])也都成立．对于 l-adic 上同调的的硬 Lefschetz 定理的证明，见[A2]．

参考文献

[A1] Lamotke, K., The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz, *Topology*, **20** (1981), 15 - 51.

[A2] Deligne, P., La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137 - 252.

[A3] Greenberg, M. J. and Harper, J. R., Algebraic topology, a first course, Benjamin Cummings, 1981.

[A4] Milne, J., Etale cohomology, Princeton Univ. Press, 1980.

[A5] Goresky, M. and MacPherson, R., Stratified Morse theory, Springer, 1988.

[A6] Beĭlinson, A., Bernstein, J. and Deligne, P., Faisceaux pervers, *Astérisque*, **100** (1982).

齐民友 译

Legendre 条件[Legendre condition; Лежандра условие]

A. M. Legendre 于 1786 年提出的变分学中最简单问题解的必要条件:为了曲线 $y_0(x)$ 给予泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx,\ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2$$

的一个极小值，必须在 $y_0(x)$ 的所有点被积函数对 y' 的二阶导数应是非负的:

$$F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\geqslant 0,\ x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

如果 y 是带有坐标 $y_1,\cdots,y_n$ 的 n 维向量，则 Legendre 条件要求二次型的非负性

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}F_{y_i'y_j'}(x,y_0(x),y_0'(x))\eta_i\eta_j\geqslant 0,$$
$$x\in[x_1,x_2],\ \eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{R}^n.$$

对泛函的极大值的情况，Legendre 条件中不等式的符号要反过来．对关于条件极值的变分问题，类似于 Legendre 条件的是 **Clebsch 条件**(Clebsch condition)．

Legendre 条件，与 **Euler 方程**(Euler equation)相像，是对弱极值的必要条件．如果违反了 Legendre 条件，则泛函的二阶变分不保持其符号，而且曲线 $y_0(x)$ 不给予此泛函一个极值．

如果在 Legendre 条件中非严格不等式的符号换成严格不等式符号，则此条件称为强 Legendre 条件(strong Legendre condition)．强 Legendre 条件，与 Legendre 条件不同，不是必要的．极值的充分条件的阐述中涉及强 Legendre 条件．其上强 Legendre 条件满足的一条极值曲线称为非奇异极值曲线(non-singular extremal)．这样的一条极值曲线是二次连续可微的，而且关于它的 Euler 方程能表示成一个最高阶导数解出的二阶常微分方程．如果在非奇异极值曲线上强 **Jacobi 条件**(Jacobi condition)满足，则可以构造

一个围绕给定极值曲线的极值曲线场，它是研究极值的充分条件的第一步.

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М., 1950(中译本：М. А. 拉弗林契叶夫，Л. А. 留斯切尔涅克，变分学教程，高等教育出版社，1953).

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947. И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 Legendre 条件也用于最优控制理论（见[A1]和**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of)). 也有对奇异控制问题的必要条件，它推广了 Legendre-Clebsch 条件，有时称为 Kelley 条件（Kelley conditions）([A2]).

参考文献

[A1] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Blaisdell, 1969.

[A2] Kelley, H. J., Kopp, R. E. and Moyer, H. G., Singular extremals, in G. Leitmann (ed.), Topics of Optimization, Acad. Press, 1967, 63 – 101.

[A3] Akhiezer, N. I., The calculus of variation, Blaisdell, 1962(译自俄文).

[A4] Cesari, L., Optimization: theory and applications: problems with ordinary differential equations, Springer, 1983. 葛显良 译 鲁世杰 校

Legendre 方程[Legendre equation; Лежандра уравнение]

见 **Legendre 函数**（Legendre functions).

Legendre 函数[Legendre functions; Лежандра функции]

作为 Legendre 方程（Legendre equation）

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right]y=0 \quad (*)$$

之解的函数，其中 ν 和 μ 是任意数. 如果 $\nu=0, 1, \cdots$，而 $\mu=0$，则方程（*）限制于$[-1, 1]$的解称为 **Legendre 多项式**（Legendre polynomials）；对于整数 $\mu(-\nu\leqslant\mu\leqslant\nu)$，方程（*）的限制于$[-1, 1]$的解称为 Legendre 连带函数（Legendre associated functions). А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1965.

[A2] Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Dover, reprint, 1972(译自俄文). 张鸿林 译

Legendre 流形[Legendre manifold; Лежандрово многообразие]

$(2n+1)$维切触流形(contact manifold) M^{2n+1}(切触流形，即赋有一个 **Pfaff 形式**(Pfaffian form) α，而在其一切点上 α 与其外微分之 n 次外幂的外积 $\alpha\wedge(d\alpha)^n\neq0$ 的流形)的一个 n 维光滑子流形 L^n，使得决定 M^{2n+1} 的切触结构的 Pfaff 形式 α 在 L^n 上恒为零(即对于 L^n 之某点上切于 L^n 的任一向量 X，$\alpha(X)=0$). 在 $M^{2n+1}=\mathbf{R}^{2n+1}$ 而局部坐标为 $(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n,r)$，$L^n$ 为以 q_i 为坐标的子流形而 $\alpha=\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i-dr$ 的重要情况下，L^n 为 Legendre 流形，即指它是由以下形式的方程组所决定的

$$r=f(q_1,\cdots,q_n),\ p_1=\frac{\partial f}{\partial q_1},\ \cdots,\ p_n=\frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

如果也可以用 p_i 作 L^n 上的坐标，则 p_i 与 q_i 由 **Legendre 变换**(Legendre transform)相联系；若在某点的邻域不能作这样的变换，则该点是 Legendre 变换的奇点.

Legendre 变换的例子虽然很早就在分析学和几何学的种种问题中出现，但 Legendre 流形概念本身却出现得比较晚，而是作为 **Lagrange 流形**(Lagrangian manifold)的类比出现的.

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974(中译本：В.И. 阿诺尔德，经典力学中的数学方法，高等教育出版社，1993).

[2] Arnold, V. I. and Giventhal, A. B., Symplectic geometry, Dynamical Systems, Ⅳ, Springer, 1989, Chapt. 4 (译自俄文). Д. В. Аносов 撰

【补注】 由一阶偏微分方程的解到 Legendre 流形的推广是 S. Lie 提出的，见[A1]，§23, 26，虽然他并没有给出这个名词.

参考文献

[A1] Арнольд, В. И., Варченко, А. Н., Гусейн-Заде, С. М., Особенности дифференциальных отображений, М., 1982(英译本：Arnol'd, V. I., Gusein-Zade, S. M., Varchenko, A. N., Singularities of differentiable maps, 1, Birkhäuser, 1985, Chapt, 20).

[A2] Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen, Ⅱ, Teubner, 1930. 齐民友 译

Legendre 多项式[Legendre polynomials; Лежандра многочлены]，球面多项式（spherical polynomials）

区间$[-1, 1]$上具有单位权 $\varphi(x)=1$ 的正交多项式. 标准化 Legendre 多项式由 **Rodrigues 公式**（Rodrigues formula）

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n=0, 1, \cdots$$

定义并有表示式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

最常用的一些公式是

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),$$
$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x);$$
$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,$$
$$(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-xnP_n(x),$$
$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x).$$

Legendre 多项式可定义为其生成函数展开式的系数:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,$$

右边的级数对 $x\in[-1,1]$ 收敛.

前几个标准化 Legendre 多项式具有下列形式:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2},$$
$$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2},\ P_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8},$$
$$P_5(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{8},$$
$$P_6(x)=\frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}.$$

n 阶 Legendre 多项式满足微分方程 (Legendre 方程 (Legendre equation))

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0,$$

该方程出现于用分离变量法求球面坐标的 **Laplace 方程** (Laplace equation) 的解中. 标准正交的 Legendre 多项式具有形式:

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),\ n=0,1,\cdots,$$

并满足一致估计和加权估计

$$|\hat{P}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2n+1}{2}},\ x\in[-1,1].$$

$$(1-x^2)^{1/4}|\hat{P}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2n+1}{\pi n}},\ x\in[-1,1].$$

在区间 $(-1,1)$ 内按 Legendre 多项式系展开的 Fourier 级数类似于三角 **Fourier 级数** (Fourier series) (亦见 **Fourier 级数 (关于正交多项式系的)** (Fourier series (in orthogonal polynomials))); 有一条关于这两个级数同等收敛性的定理, 它断言函数 f 的 Fourier-Legendre 级数在点 $x\in(-1,1)$ 处收敛, 当且仅当函数

$$F(\theta)=(\sin\theta)^{1/2}f(\cos\theta)$$

的三角 Fourier 级数在点 $\theta=\arccos x$ 处收敛. 在端点的邻域内情况则不同, 因为序列 $\{\hat{P}_n(\pm1)\}$ 以速度 $\sqrt{n}$ 递增. 如果 f 在 $[-1,1]$ 上连续且满足阶 $\alpha>1/2$ 的 **Lipschitz 条件** (Lipschitz condition), 则 f 的 Fourier-Legendre 级数在整个区间 $[-1,1]$ 上一致收敛到 f. 如果 $\alpha=\frac{1}{2}$, 则该级数在点 $x=\pm1$ 处通常是发散的.

Legendre 多项式由 A. M. Legendre 引进 ([1]).

亦见**正交多项式** (orthogonal polynomials) 的参考文献.

参考文献

[1] Legendre, A. M., *Mém. Math. Phys. présentés à l'Acad. Sci. par divers savants*, **10** (1785), 411 – 434.

[2] Hobson, E. W., The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge Univ. Press, 1931.

П. К. Суетин 撰

【补注】 Legendre 多项式属于 **Gegenbauer 多项式** (Gegenbauer polynomials) 族、**Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials) 族和**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials) 族. 它们可写为**超几何函数** (hypergeometric function). 从历史观点和教学观点两方面看, Legendre 多项式作为 2 维球面 $S^2=SO(3)/SO(2)$ 上的**带球函数** (zonal spherical function) 的群论解释都可作为典型. 这种解释的一个值得注意的成果是 Legendre 多项式的加法公式 (addition formula).

沈永欢 译

Legendre 符号 [Legendre symbol; Лежандра символ]

对奇素数 p 和不被 p 整除的整数 a 定义的数 p 和 a 的**算术函数** (arithmetic function). Legendre 符号由 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 表示. 如果**同余式** (congruence) $x^2\equiv a \pmod p$ 可解, 则 $\left(\frac{a}{p}\right)=1$; 否则 $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$. 有时候 Legendre 符号也定义于被 p 整除的数 a, 这时取 $\left(\frac{a}{p}\right)=0$. Legendre 符号有下列性质:

1) 如果 $a\equiv b \pmod p$, 则 $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{p}\right)=1$;

3) $\left(\frac{a}{p}\right)=a^{(p-1)/2} \pmod p$;

4) $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$;

5) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$;

6) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$;

7) 如果 p 和 q 是奇素数, 则

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{(p-1)/2\cdot(q-1)/2}.$$

最后这条性质首先为 C. F. Gauss (1796) 所证明,

称为二次互反律(quadratic reciprocity law).上述这些性质使有可能简单地计算 Legendre 符号而不需依赖解同余式.例如

$$\left(\frac{438}{593}\right)=\left(\frac{2}{593}\right)\left(\frac{3}{593}\right)\left(\frac{73}{593}\right)=$$

$$=+1\left(\frac{593}{3}\right)\left(\frac{593}{73}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{73}\right)=$$

$$=-1\left(\frac{3}{73}\right)^2=-1.$$

Legendre 符号的计算借助于 **Jacobi 符号**(Jacobi symbol)的使用而更加方便.对于固定的 p, Legendre 符号是模 p 剩余类的乘法群的实特征标(见**群的特征标**(character of a group)).

它是由 A.M.Legendre 于 1785 年引进的.

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.(中译本:И.М.维诺格拉陀夫,数论基础,高等教育出版社,1952). Ю.В.Нестеренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., Introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

Legendre 定理[Legendre theorem; Лежандра теорема]

1)系数 a,b 和 c 两两互素,无平方因子且符号不全相同的不定(Diophantine)方程

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

有非零有理解,当且仅当所有下列三个**同余式**(congruence)可解:

$$x^2\equiv -bc(\bmod |a|),$$

$$x^2\equiv -ca(\bmod |b|),$$

$$x^2\equiv -ab(\bmod |c|).$$

任意有有理系数的三元**二次型**(quadratic form)的零点表示问题可归结为 Legendre 定理.

这是由 A.M.Legendre 于 1785 年证明的.

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972, гл. 1, § 7.(英译本:Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966, Chapt. 1. Par 7).

Ю.В.Нестеренко 撰

【补注】Legendre 定理是有关有理**二次型**(quadratic form)的 Hasse-Minkowski 定理的本质部分.

2)三角形的内角的和不超过两个直角.

3)假如某一三角形的内角的和等于两个直角,那么其他任何三角形的内角的和等于两个直角.

定理 2)和 3)是 A.M.Legendre 于 1800 年和 1833 年试图证实 Euclid 的平行性公设(见**第五公设**(fifth postulate))时加以证明的.G.Saccheri(见 **Saccheri 四边形**(Saccheri quadrangle))建立了类似的论断.

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.-Л., 1949.

[2] Погорелов. А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968(英译本:Pogorelov, A. V., Lectures on the foundations of geometry, Noordhoff, 1966).

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Efimov, N. V. Höhere Geometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1960(译自俄文).

[A2] Norden, A. P., Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1958(译自俄文).

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

Legendre 变换[Legendre transform; Лежандра преобразование]

1)数学分析中的一种变换,它建立对偶空间中对象之间的对偶性(平行于解析几何学中的射影对偶性和凸几何学中的极对偶性,见**对偶性**(duality)).设 $f: A\to \mathbf{R}$ 是赋范空间 X 的开集 A 上考虑的光滑函数且具有这样的性质:映射 $x\to f'(x)$(这里 $f'(x)$ 是 f 的 **Fréchet 导数**(Fréchet derivative))把 A 一一地映成集合 $B\subset X^*$.那么 f 的 Legendre 变换是 B 上由以下公式定义的函数

$$f^*(x^*)=\langle x^*,(f')^{-1}(x^*)\rangle-f((f')^{-1}(x^*)).\tag{1}$$

如果 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的函数且行列式 $\det(\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j)$ 在 A 中不为 0, Legendre 变换由公式

$$f'(x)=y,\ f^*(y)=\langle x,f'(x)\rangle-f(x)\quad(1')$$

给出;这里

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x^i y^i,\ f'(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right].$$

变换 $x\to f^*(f'(x))$ 可追溯到 G. Leibniz;其一般形式是由 A. M. Legendre 定义的(1789),但更早地为 L. Euler 所考察(1776).

如果 f 是光滑的,严格凸的,且在无穷远增大快于线性函数的有限维函数, Legendre 变换可以这样定义:

$$f^*(x^*)=\max_{x\in\mathbf{R}^n}(\langle x^*,x\rangle-f(x)).\tag{2}$$

用 sup 取代 max 的表达式(2)被当作凸函数对偶性理论的基础(见**共轭函数**(conjugate function)).

例 一元函数

$$f_p(x)=\frac{|x|^p}{p}, \quad 1<p<\infty,$$

的 Legendre 变换是函数

$$f_{p'}(y)=\frac{|y|^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

具有标量积(·,·)的 Hilbert 空间 X 中函数 $(x, x)/2$ 的 Legendre 变换是函数 $(y, y)/2$.

以变量替换 $x \to y=f'(x)$ 为基础的 Legendre 变换是**邻近变换**(proximity transformation)的特殊情形; Legendre 变换的本质在于作为点 $(x, f(x))$ 的集合和它的切平面的包络族的空间中曲面的对偶描述的可能性,这些切平面由线性泛函 x^* 和仿射切函数 $x \to \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)$ 组成的对 $(x^*, \langle x^*, \cdot\rangle - f^*(x^*))$ 给出.

Legendre 变换在分析学中起重要作用,特别在凸分析中(见[1],[2],[4]),在微分方程论中,在变分学中(见[6]),以及在经典力学、热力学、弹性理论和数学物理的其他分支中.这样,Legendre 变换,对微分方程 $F(x, y, y')=0$ 的解 y 的应用,把它化成方程 $F(Y', XY'-Y, X)=0$ 的解 Y,这里 $X=y'(x)$, $Y(X)=y^*(X)$,有时后一方程比原方程更容易积分.对经典变分学中问题的 **Lagrange 函数**(Lagrangian)应用 Legendre 变换,把它化成 **Hamilton 函数**(Hamilton function).这里 Euler 方程组(在变分学中)和 Lagrange 方程(在经典力学中)改变为一个等价的典范方程组.在热力学中 Legendre 变换导致一种由某些状态函数到其他状态函数的转换,例如由比容和熵到温度和压力的转换.

参考文献

[1] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, М., 1970(中译本: Г. М. 菲赫金哥尔茨,微积分学教程,第一卷第一、二分册,高等教育出版社,1956).

[2] Goursat, E., Course d'analyse mathématique, 1, Gauthier-Villars, 1918.

[3] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974(英译本: Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978).

[4] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[5] Fenchel, W., On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 73–77.

[6] Carathéodory, C., Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen erste Ordnung, Teubner, 1956.

В. М. Тихомиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, II, Interscience, 1962(译自德文)(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特,数学物理方法, II,科学出版社, 1977).

2) 一个积分变换

$$f(n)=T\{F(x)\}=\int_{-1}^{1} P_n(x)F(x)dx, \quad n=0, 1, \cdots,$$

这里 $P_n(x)$ 是 n 次 **Legendre 多项式**(Legendre polynomials).反演公式有形式

$$T^{-1}\{f(n)\}=F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[n+\frac{1}{2}\right]P_n(x)f(n),$$

$$-1<x<1,$$

如果这级数收敛. Legendre 变换用公式

$$T\left\{\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dF(x)}{dx}\right\}=-n(n+1)f(n),$$

$$n=0, 1, \cdots$$

将微分运算

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$$

化成代数运算.对 Legendre 变换有卷积定理: 如果

$$T\{F_i(x)\}=f_i(n), \quad i=1, 2,$$

则

$$f_1(n) f_2(n)=T\{h(x)\},$$

这里

$$h(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_{E(x)} \frac{f_1(\xi) f_2(\xi)}{\sqrt{1-x^2-\xi^2-\eta^2+2x\xi\eta}}\, d\xi d\eta,$$

且 $E(x)$ 是椭圆 $\xi^2+\eta^2-2x\xi\eta=1-x^2$ 的内部. Legendre 变换是 **Jacobi 变换**(Jacobi transform)的一个特殊情形.

参考文献

[1] Tranter, C. J., Legendre transforms, *Quart. J. Math.*, **1** (1950), 1–8.

[2] Брычков, Ю. А., Прудников, А. П., Итоги науки. Математический анализ, 1966, М., 1967, 7–82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

葛显良 译 鲁世杰 校

Leibniz 准则 [**Leibniz criterion**; **Лейбница признак**],关于交错级数收敛性的

如果交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n>0$$

的各项单调减小($a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$)并趋向于零($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$),则此级数收敛;此外,级数的余项

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

的符号与其第一项相同,按绝对值来说,小于第一项.这个准则是 G. Leibniz 于 1682 年建立的.

В. И. Битюцков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964; 英文版, Blackie, 1951.

张鸿林 译

Leibniz 公式 [Leibniz formula; Лейбница формула], 关于积的导数的

通过两个函数的 $k = 0, \cdots, n$ 阶导数(零阶导数视为函数本身)表示这两个函数之积的 n 阶导数的公式.也就是说,如果函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在某一点具有直到 s 阶的导数,则在这一点上,其积 uv 具有同样一些阶的导数,并且对于 $n = 0, \cdots, s$, 有

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

这个公式是 G. Leibniz 在 1695 年致 J. Bernoulli 的一封信中提出的. Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

Leibniz 级数 [Leibniz series; Лейбница ряд]

交错级数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

它收敛于 $\pi/4$. G. Leibniz 于 1673 – 1674 年考虑过这个级数. В. И. Битюцков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964; 英文版: Blackie, 1951.

张鸿林 译

双纽线函数 [lemniscate functions; лемнискатные функции]

椭圆函数(elliptic function)的一种特殊情形.这类函数产生于特殊形式的椭圆积分

$$z = \int_0^u (1 - t^4)^{-1/2} dt$$

的反演;而这类积分首次出现于 G. Fagnano 计算 **Bernoulli 双纽线**(Bernoulli lemniscate)的长度的工作中(1715).双纽线函数本身则是由 C. F. Gauss 引进的(1797).

有两种双纽线函数:

$$u = \cos \operatorname{lemn} z = \operatorname{cl} z,$$

和

$$\sin \operatorname{lemn} z = \operatorname{sl} z = \cos \operatorname{lemn}\left(\frac{\omega}{2} - z\right),$$

其中

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 (1 - t^4)^{-1/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

双纽线函数可通过模为 $k = \sqrt{2}/2$ 的 **Jacobi 椭圆函数**(Jacobi elliptic function)来表示:

$$\operatorname{sl} z = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{sn}(z\sqrt{2})}{\operatorname{dn}(z\sqrt{2})}, \quad \operatorname{cl} z = \operatorname{cn}(z\sqrt{2}).$$

在 **Weierstrass 椭圆函数**(Weierstrass elliptic functions)理论中,双纽线函数出现于所谓调和情形,此时不变量 $g_2 = 4$, $g_3 = 0$.

参考文献

[1] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 2.

Е. Д. Соломенцев 撰 沈永欢 译

双纽线 [lemniscates; лемнискаты]

1)阶数为 $2n$ 的平面代数曲线,其上任何一点到 n 个固定点(焦点)$F_1, \cdots, F_n$ 的距离之积等于某一给定常数 r(双纽线的半径(radius of the lemniscates))的 n 次乘幂.双纽线在 Descartes 直角坐标系的方程是

$$|(z - z_1)\cdots(z - z_n)| = r^n, \ r > 0, \ z = x + iy.$$

圆是具有一个焦点的双纽线,**Cassini 卵形线**(Cassini oval)是具有两个焦点的双纽线.亦见 **Bernoulli 双纽线**(Benoulli lemniscate)和 **Booth 双纽线**(Booth lemniscate). Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1–3, Chelsea, reprint, 1971.

2)双纽线是一多项式等模曲线.设焦点 $F_k: z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, \cdots, n)$ 各不相同,则当双纽线半径充分小时,双纽线由 n 个两两不交的闭联集组成.半径充分大时,双纽线由一个连通分支构成.正如 D. Hilbert 在 1897 年所证明的,任意简单连通有限区域的边界 Γ 可由一个双纽线任意近似,亦即,对于任何 $\varepsilon > 0$ 可以找到一个双纽线 A 满足 Γ 上每一点的 ε 邻域含有 A 的点,并且 A 上的每一点都含在 Γ 上某一点的 ε 邻域.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (英译本: Markushevich,

A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977.
[2] Walsh, J. L., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc., 1965.

Е. Д. Соломенцев 撰 杨路、曾振柄 译

长度 [length; длина]

度量空间中线的伸展的数值特征. 直线段的长度 (length of a segment of a straight line) 是其两个端点之间用某个作为单位长度的线段测度的距离. 折线的长度 (length of a broken line) 是其各部分长度之和. 简单弧的长度 (length of a simple arc) 是内接于该弧的折线长度的上确界. 任一连续曲线具有有限或无穷长度. 如果此曲线长度为有限, 则它称为可求长的 (rectifiable). 直角坐标系中由方程 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b$, f 具有连续导数 $f')$ 确定的平面曲线的长度 (length of a planar curve) 由积分

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

给定. 如果此曲线由参数形式

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

给出, 则其长度由

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

给定. 可求长曲线的长度并不依赖于参数化. 由参数形式 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 给出的空间曲线的长度 (length of a spatial curve) 由公式

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

给定. 对于 n 维空间情形,

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum_{i=1}^n[x_i'(t)]^2}\,dt.$$

设 γ 是在连续可微曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 上由函数 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 给出的连续可微曲线, 则它的从对应于参数值 $t=t_0$ 的点起算的弧段长度等于

$$s(t,t_0)=\int_{t_0}^t|\mathbf{r}'(t)|dt=\int_{\gamma(P_0,P)}|d\mathbf{r}(u,v)|=\int_{t_0}^t\sqrt{I},$$

其中 I 是所给曲面的**第一基本形式** (first fundamental form). 在具有度量张量 g_{ik} 的 Riemann 空间中由函数 $x^i=x^i(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 给出的连续可微曲线的长度是

$$s=\int_{t_1}^{t_2}ds=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt.$$

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 科学出版社, 第一卷, 1987; 第二、三、四卷, 1989; 第五卷, 1991).
[A2] Blumenthal, L., Menger, K., Studies in geometry, Freeman, 1970.
[A3] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad. Press, 1955.

沈永欢 译

长度面积原理 [length-and-area principle; длины и площади принцип]

表述属于某特殊曲线族的曲线长度同该族曲线所覆盖的面积之间关系的一个原理.

设 $w=f(z)$ 是开区域 G 内的正则函数. 设 $n(w)$ 是方程 $f(z)=w$ 位于 G 内的根的个数; $l(\rho)$ 是 G 内满足 $|f(z)|=\rho$ 的诸曲线的总长度; A 是 G 的面积; 并设

$$p(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(\rho e^{i\theta})d\theta,\ \rho>0.$$

则长度面积原理由不等式

$$\int_0^\infty\frac{l(\rho)^2d\rho}{\rho p(\rho)}\leqslant 2\pi A$$

给出 ([2]). 已发现此原理在单复变函数理论中有广泛应用 [1]-[4].

例如, 长度面积原理应用于在圆盘 $|z|<1$ 内正则函数性质的研究. 特别, 被用来证明下述定理 ([2]): 若函数 $w=f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ 在 $|z|<1$ 内正则且具有不多于 q 个零点, 其中位于 $|z|<1/2$ 内的零点不多于 h 个, $\mu_q=\max_{0\leqslant\nu\leqslant q}|a_\nu|$, 则

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho p(\rho)}<2\ln\frac{1}{1-r}+A(q),$$

其中

$$R_1=(h+2)2^{h-1}\mu_h,\ R_2=\max_{|z|=r}|f(z)|,\ 0<r<1,$$

而 A_q 是依赖于 q 的常数.

长度面积原理及其种种推广 (例如长度体积原理 (length-volume principle)) 亦被应用于 n 维空间的拟共形映射和带有有界 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral) 的映射 [4]-[7].

这一原理的导出要用到 **Буняковский 不等式** (Bunyakovskiĭ inequality). 随后关于曲线长度同其所覆盖的区域的关系的研究, 引出研究单叶共形和拟共形映射的一个重要方法——极值度量法 (见**极值度量法** (extremal metric, method of the); 比如, 见 [8]).

大约在 1930 年，这一方法以一种不大精确的形式（**带形法**（**解析函数**）(strip method (analytic functions)))被用来研究前面提到的单连通与多连通区域的映射性质.

参考文献

[1] Ahlfors, L. V., Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, *Acta Soc. Sci. Fennica* (*Al*), **9** (1930), 1 − 40.
[2] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.
[3] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970.
[4] Суворов, Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, новосиб., 1965.
[5] Крейнес, М. А., 《Матем. сб.》, **9** (1941), 3, 713 − 719.
[6] Овчинников, И. С., Метрические вопросы теории функций и отображений, 1971, в. 3, 98 − 115.
[7] Lelong-Ferrand, J., Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier-Villars, 1955.
[8] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

И. П. Митюк 撰

【补注】 Буняковский 不等式在英语文献中通常称为 (Cauchy-)Schwarz(-Буняковский) 不等式. 杨维奇 译

偏序集的长度 [**length of a partially ordered set**; **длина частично упорядоченного множества**]

在这集合中**链**（chain）的长度中的最大者. 存在有有限长度的无穷偏序集. Т. С. Фофанова 撰

【补注】 亦见**偏序集**（partially ordered set).

葛显良 译 李慧陵 校

透镜空间 [**lens space**; **линзовое пространство**]

一个奇维数的流形，呈现为循环群 $\mathbf{Z}_h$ 在球面 S^{2n-1} 上的等距自由作用的**轨道**（orbit）空间（见**群在流形上的作用**（action of a group on a manifold)). 把 S^{2n-1} 视作取定一个基的复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球面是方便的. 假设 $\mathbf{Z}_h$ 通过用 $\zeta_k = e^{2\pi i m_k/h}$ 乘坐标 z_k 而作用在每个 z_k 上，其中 m_k 是模 h 可逆的. 那就是，存在数 l_k，使得 $m_k l_k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, h)$. 这指定了 $\mathbf{Z}_h$ 在 S^{2n-1} 上的一个等距自由（感谢 m_k 是模 h 可逆这个条件）作用，并且任何这样的作用存在适当的坐标系内描述的这种形式. 对于用公式 $\pm \zeta^q \prod_{k=1}^n (\zeta^{l_k} - 1)$ 的方法构造的透镜空间 $L = S^{2n-1}/\mathbf{Z}_h$，定义了相应于单位元素 ζ 的第 h 个根的 **Reidemeister 挠率**（Reidemeister torsion). 任何一个分片线性透镜空间 $\bar{L}$ 同构于它必须有相同的（至多差 $\pm \zeta^q$）挠率，实际情况是数 $\{l_k\}$ 和 $\{\bar{l}_k\}$ 的集合必须恰好相合. 因此，这些集合唯一地表示了透镜空间的特征，至多差一个分片线性同构，甚至至多差一个等距；另一方面，由挠率的拓扑不变性，在差一同构的意义下，它们也唯一地表示了透镜空间的特征. 透镜空间直到 $2n-2$ 维是非球面的（即 $\pi_i L = 0,\ 2 \leqslant i \leqslant 2n-2$)，且考虑到球面 S^{2n-1} 是 $\bar{L}$ 的**万有覆叠**（universal covering）这个事实，**基本群**（fundamental group）等于 $\mathbf{Z}_h$. L 的同调恰好与群 $\mathbf{Z}_h$ 的同调直至维数 $2n-2$ 是一致的，即从 2 直到 $2n-2$ 的所有维数，它等于 $\mathbf{Z}_h$，而 $H_0(L) = H_{2n-1}(L) = \mathbf{Z}$. 空间 L 的方向极限给出了型 $K(\mathbf{Z}_h, n)$ 的一个 **Eilenberg-MacLane 空间**（Eilenberg-MacLane space). 两个透镜空间同伦等价，当且仅当**环绕系数**（linking coefficient）$l(a^j, a^{n-j}) \in Q/\mathbf{Z}$ 相一致，其中 a 是 2 维上同调群的生成元. 借助于这些不变量，可以在透镜空间中建立非对称流形的存在性.

在 3 维情形下，透镜空间与有亏格 1 的 **Heegaard 图**（Heegaard diagram）的流形相一致，所以，它们是 **Seifert 流形**（Seifert manifold). 将 $\mathbf{Z}_h$ 在 S^3 上的作用的基本区域表示成“透镜”，即球截形和它的镜象的并是方便的；这就是透镜曲面名字的起因.

参考文献

[1] Poincaré, H., Избранные труды. т. 2, 1972, 728.
[2] Rham, G. de, Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples, *Comm. Math. Helv.*, **4** (1932), 151 − 154.
[3] Seifert, H. and Threlfall, W., A textbook of topology, Acad. Press, 1980 (translated from the German).
[4] Milnor, J. and Burlet, O., Torsion et type simple d'homotopie, in A. Haefliger and R. Narasimhan (eds.): Essays on topology and related topics, *Coll. Geneve*, 1969, Springer, 1970, 12 − 17.

А. В. Чернавский 撰 薛春华 译

Leray 公式 [**Leray formula**; **Лере формула**], Cauchy-Fantappiè 公式 (Cauchy-Fantappiè formula)

关於多复变数 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ $(n \geqslant 1)$ 全纯函数的一个积分公式，它拓广了 Cauchy 积分公式（见 **Cauchy 积分**（Cauchy integral)).

令 D 为复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的一有限域，具有逐块光滑边界 ∂D，并令 $\chi(\zeta; z): \partial D \to \mathbf{C}^n$ 为 $\zeta \in \partial D$ 的一光滑向量值函数，它取值于 $\mathbf{C}^n$，使得在 ∂D 上到处有数量积

$$\langle \zeta - z, \chi(\zeta; z) \rangle = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu) \chi_\nu(\zeta; z) \neq 0,$$

对所有 $z \in D$. 那么任何在 D 上全纯并在闭区域 $\bar{D}$ 上连续的函数 $f(z)$ 都可以表为形式

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,\delta(\chi(\zeta; z)) \wedge d\zeta}{\langle \zeta - z, \chi(\zeta; z) \rangle^n},\ z \in D. \qquad (*)$$

公式 (*) 拓广了一个复变量解析函数的经典 Cauchy 积分公式，并称为 Leray 公式（Leray formula). J. Leray 得到这个公式（见 [1])，称之为 Cauchy-

Fantappiè 公式(Cauchy-Fantappiè formula).在这个公式中,微分形式 $\delta(\chi(\zeta;z))$ 和 $d\zeta$ 按以下规律构成:

$$\delta(\chi(\zeta;z))=\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^{\nu-1}\chi_\nu(\zeta;z)d\chi_1(\zeta;z)\wedge\cdots$$

$$\cdots\wedge d\chi_{\nu-1}(\zeta;z)\wedge d\chi_{\nu+1}(\zeta;z)\wedge\cdots\wedge d\chi_n(\zeta;z)$$

和

$$d\zeta=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n,$$

其中 $\wedge$ 是外乘积的符号(见**外乘积**(exterior product)).由改变函数 χ 的形式从公式(*)可以得到各种不同的积分表示.必须记住,一般来说,(*)中的 Leray 积分(Leray integral)当 z 在 D 外时不为零.

亦见 **Bochner-Martinelli 表示分式**(Bochner-Martinelli representation formula).

参考文献

[1] Leray, J., Le calcul différentielle et intégrale sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, **87**(1959), 81-180.(中译文:《数学译丛》,1965, 5, 40-87).

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, *2* изд., ч. 2, М., 1976. Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】Leray 公式常理解为更一般的表达式,对在 $\mathbf{C}^n$ 中一区域 D 上任意足够光滑(例如 C^1)的函数都成立.令 $\chi(\zeta,z)$,δ 和 d 定义如上,$\psi(\zeta,z)=\langle\zeta-z,X(\zeta,z)\rangle$.再者,对 $z\in D,\zeta\in\partial D$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 定义:

$$\eta^\chi(z,\zeta,\lambda)=(1-\lambda)\frac{\chi(\zeta,z)}{\psi(\zeta,z)}+\lambda\frac{(\overline{\zeta-z})}{\|\zeta-z\|^2}.$$

令 $L^\chi_{\partial D}f(z)$ 代表(*)的右端.它对 ∂D 上的可测函数 f 都有定义.对 ∂D 上的连续 1 形式 u 定义

$$R^\chi_{\partial D}u(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\substack{\zeta\in\partial D\\0\leqslant\lambda\leqslant1}}u\wedge\delta_{\zeta,\lambda}(\eta)\wedge d\zeta,$$

$\delta_{\zeta,\lambda}$ 表示在 δ 的定义中的外导数是关于 ζ 和 λ 的.其次,对定义在 D 上的 1 形式 u 成立 Bochner-Martinelli 算子(Bochner-Martinelli operator)

$$B_Du(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\zeta\in\partial D}u\wedge\delta_\zeta\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{\|\zeta-z\|^2}\right]\wedge d\zeta.$$

现在令 f 为 $\overline{D}$ 上的连续函数,使得 $\bar\partial f$ 在其上也是连续的,那么 Leray 公式为

$$f(z)=L^\chi_{\partial D}f(z)-R^\chi_{\partial D}\bar\partial f(z)-B_D\bar\partial f(\chi),\quad\text{(A1)}$$

其中 $z\in D$.

如果 f 在 D 上是全纯的,那么(A1)变为(*).特别重要的情况是,当 ζ 固定时,其中 χ 且因此 ψ 是 z 的全纯函数时——这只有当 D 是拟凸时才发生;这时 ψ 是一全纯支撑函数(holomorphic support function)(即对所有 $p\in\partial D$ 存在一 p 的邻域 U_p,使得 ψ 在这个邻域是全纯的,并且 $\{z\in U_p:\psi(z)=0\}\cap\overline{D}=\{p\}$),它的存在紧密联系于连续变化的全纯峰函数(holomorphic peaking functions)的存在.(D 的一个连续变化的全纯峰函数是一函数 $P:\overline{D}\times\partial D\to\mathbf{C}$,使得对每一固定的 $p\in\partial D$:1)$P(\cdot,p)$ 是在 D 全纯在 $\overline{D}$ 连续的、又 2)$P(p,p)=1$ 且 $|P(z,p)|<1$ 对所有 $z\in\overline{D}\setminus\{p\}$.如果 $\partial D\in C^{k+3}$,$P(z,\cdot)$ 要求对每一固定的 $z\in D$ 是 C^k 的).那么 $L^\chi_{\partial D}f$ 对 ∂D 上每一连续的 f 是全纯的,并且算子

$$u\mapsto f=-(R^\chi_{\partial D}u+B_Du)$$

对 $\overline{D}$ 上的(0,1)形式 u,是非齐次 Cauchy-Riemann 方程(inhomogeneous Cauchy-Riemann equation)

$$\left.\begin{array}{c}\bar\partial f=u\\ \text{具有可积条件}\,\bar\partial u=0\end{array}\right\}\qquad\text{(A2)}$$

的解.

因此,Leray 公式已经变为解 **Levi 问题**(Levi problem)(Г. М. Хенкин[A1]和 E. Ramirez de Arellano[A3]的工作)和获得(A2)的解的估计的一重要工具.特别地,下列精确估计对强拟凸域成立:存在一解 f 具有 $\|f\|_{1/2}\leqslant C\|u\|_\infty$,其中 C 只依赖于区域,$\|\cdot\|_{1/2}$ 表示 Hölder 1/2 范数,又 $\|\cdot\|_\infty$ 表示上确界范数.许多分析学家在这方向作出了贡献,著名的有 Г. М. Хенкин 和 А. В. Романов;H. Grauert 和 I. Lieb 以及 N. Kerzman 和 R. M. Range.

参考文献

[A1] Хенкин, Г. М., Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения, 《Матем. сб.》, **78**(120)(1969): 4. 611-632.

[A2] Henkin, G. M. [G. M. Khenkin] and Leiterer, J. L., Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser, 1984.

[A3] Ramirez de Arellano, E., Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis, *Math. Ann.*, **184**(1970), 172-187.

[A4] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

【译注】Leray 公式可以拓广到(p,q)型微分形式的情形,这时称为 Koppelman-Leray 公式,它可以用来解(p,q)型 $\bar\partial$ 方程(见[B1][B2][B3]).还可拓广到 Stein 流形上去(见[B3][B4]).

参考文献

[B1] Øvrelid, N., Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar\partial$-equation, *Math. Scand.*, **29**(1971), 137-160.

[B2] Berndtsson, B. and Anderson, M., Henkin-Ramirez formulas with weight factors, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **32**(1983), 91-110.

[B3] 钟同德、黄 沙，多元复分析，河北教育出版社，1990．

[B4] Demailly, J.P. and Laurent-Thiebaut, C., Formules intégrales pour les formes differéntielles de type (p, q) dans les variétés de Stein, *Ann. scient. E'c. Norm. Sup.*, **20** (1987), 579 – 598.

钟同德 译

Leray 谱序列 [Leray spactral sequence; Лере спектральная последовательность]，连续映射的谱序列（spectral sequence of a continuous mapping）

一个将拓扑空间 X 的取值于可换群层 $\mathscr{S}$ 的上同调与它在连续映射 $f: X \to Y$ 下的直接象 $f_q(\mathscr{S})$ 的上同调联系起来的谱序列．更确切些，Leray 谱序列的第二项是

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, f_q(\mathscr{S})),$$

而它的极限 E_∞ 是由分次群 $H^*(X, \mathscr{S})$ 的滤子所决定的双分次群．Leray 谱序列可以推广到支集属于特定族的上同调去．J. Leray 于 1946 年（见 [1], [2]）就局部紧空间和具紧支集上同调的情形，构作了 Leray 谱序列．

若 $\mathscr{S} = A$ 是对应于可换群 A 的常值层，f 是以 F 为纤维的局部平凡纤维丛的投射，又空间 Y 为局部可缩的，那么 $f_q(\mathscr{S})$ 是局部常值层．这时项 E_2 有特别简单的形式．

局部可缩性可以用 X, Y, F 的其他拓扑条件代替（例如，Y 是局部紧的，F 是紧的）．

利用奇异上同调，对于具有纤维是道路连通的 Serre 纤维化，可以造一个 Leray 谱序列的相应物，它也具有上述局部平凡纤维丛的 Leray 谱序列的全部性质（Serre 谱序列（Serre spectral sequence））．对奇异同调，也有相应的谱序列．

参考文献

[1] Leray, J., L'anneau spectral et I'anneaux filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *J. Math. Pures Appl.*, **29** (1950), 1 – 139.

[2] Leray, J., L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, *J. Math. Pures Appl.*, **29** (1950), 169 – 213.

[3] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[4] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959.

Д. А. Пономарев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.

[A2] Serre, J. P., Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, (2), **54** (1951), 425 – 505.

沈信耀 译 余建明 校

字母 [letter; буква]

一个符号体系的基本记号，不考虑它所表示的意义．一个字母通常由约定引入推理过程，是用来根据一定的规则构造给定的符号体系的表达式的基本"砖块"．这些规则组成了该符号体系的语法（syntax of a symbolism）．对这样得到的表达式的解释形成了该符号体系的语义（semantics of a symbolism）．

Н. М. Нагорный 撰 苏开乐 译

等高线 [level lines; уровня линия]，Green 函数的点集

$$L_\lambda = \{z \in D: G(z, z_0) = \lambda = \text{常数}\}, \quad 0 \leqslant \lambda < \infty,$$

其中 $G(z, z_0)$ 是复平面内区域 D 具有极点 $z_0 \in D$ 的 **Green 函数**（Green function）．若 D 为单连通者，则该集的构造容易由 D 到圆盘 $|\zeta| < 1$ 且将点 z_0 变成 $\zeta = 0$ 的共形映射确定．Green 函数在这一变换下是不变的，同时关于圆盘 $|\zeta| < 1$ 且极点在 $\zeta = 0$ 处的 Green 函数即 $-\log|\zeta|$ 的等高线是圆周 $|\zeta| =$ 常数．因此，在单连通区域的情形，等高线 $G(z, z_0) = \lambda$ 是一条简单闭曲线，当 $\lambda = 0$ 时它与 D 的边界重合而当 $\lambda \to +\infty$ 时则趋于 z_0．若区域 D 为 m 连通并且它的边界由 Jordan 曲线 $C_v (v = 1, \cdots, m)$ 所组成，则：当 $\lambda > 0$ 充分大时，等高线是 Jordan 曲线；当 $\lambda \to +\infty$ 时，相应的等高线趋于点 z_0，而对于减小 λ，它离开 z_0；若 $m > 1$，则对于 λ 的某些值，等高线有自交点并且分解成不交的简单闭曲线；对于充分小的 λ，等高线由 m 条 Jordan 曲线组成，且当 $\lambda \to 0$ 时这些曲线的每一条趋于 D 的边界曲线之一．

在具有单连通余集的有界闭集 B 上用多项式作函数逼近的问题中，对 B 的边界点与 B 的余集的等高线之间的距离的估计起着重要的作用（见 [4], [5]）．

对于由类 $S = \{f: f(z) = z + \cdots, f$ 在 $|z| < 1$ 内正则单叶$\}$ 的函数（见**单叶函数**（univalent function））所作的圆盘 $|z| < 1$ 的单叶共形映射，等高线 $L(f, r)$（圆周 $|z| = r < 1$ 的象）的状态直观地给出畸变度．类 S 的任一函数把圆盘 $|z| < r$, $0 < r < 2 - \sqrt{3}$，映射成**凸域**（convex domain），而把圆盘 $|z| < r$, $0 < r < \tanh \pi/4$，映射成**星形区域**（star-like domain）．等高线 $L(f, r)$, $f \in S$, $0 < r < 1$，属于圆环

$$K_r = \{w: r(1+r)^{-2} \leqslant |w| \leqslant r(1-r)^{-2}\}$$

并且围成一个包含坐标原点的单连通区域．

关于类 S 中等高线 $L(f, r)$ 的曲率 $K(f, r)$，有如下的精确估计:

$$K(f, r) \geqslant \frac{1 - 4r + r^2}{r} \left[\frac{1+r}{1-r} \right]^2,$$

并且只对函数 $f(z)=z/(1+z)^2$ 在点 $z=r$ 才有等式成立．在类 S 中，$K(f,r)$ 的精确上界目前(1984)尚未知晓．至于 S 的星形函数子类(见**星形函数**(starlike function))中的 $K(f,r)$ 的精确上界具有形式

$$K(f,r)\leqslant\frac{1+4r+r^2}{r}\left[\frac{1-r}{1+r}\right]^2,$$

并且只对函数 $f(z)=z/(1-z)^2$ 在 $z=r$ 才有等式成立．

对于由类 S 的函数所作的圆盘 $|z|<1$ 的映射，等高线 $L(f,r)$ 的拐点的数目以及违反星形性条件的点(即等高线上这样的点，当 z 在圆周 $|z|=r$ 上按给定方向移动时，向量径的旋转方向在这些点处改变)的数目随着 r 的增加可能呈非单调的变化，即当 $r_1<r_2$ 时，可以证明等高线 $L(f,r_1)$ 与 $L(f,r_2)$ 相比较可以有更多的拐点和更多的违反星形性条件的点．

参考文献

[1] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962.
[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966(英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer, Math. Soc., 1969).
[3] Александров, И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.
[4] Дзядык, В. К., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 23(1959), 5, 697 − 763.
[5] Лебедев, Н. А., Широков, Н. А., 《Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем.》, 6(1971), 4, 311 − 341.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】 关于所提到逼近问题的非苏联的参考文献有[A1]和[A2]．从中还可找到其他的参考文献．亦见(单)**复变函数逼近**(approximation of functions of a complex variable)．

参考文献

[A1] Buvoets, L., Hogeveen, W. and Korevaar, J., Inverse approximation theorems of Lebedev and Tamrazov, in P. L. Butzer (ed.): Functional analysis and approximation (Oberwolfach 1980), Birkhäuser, 1981, 265 − 281.
[A2] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation in Komplexen, Birkhäuser, 1980, Chapt 1, § 6.

杨维奇 译

水平集[**level set**; **уровня множество**]，函数 f 的

在 $\mathbf{R}^n$ 中使 $f=$ 常数的点集．若函数 f 为定义于平面 $\mathbf{R}^2$ 中正方形 Q 上并有满足 **Lipschitz 条件**(Lipschitz condition)的偏导数，则对区间 $\min f<c<\max f$ 中几乎所有的 c，水平集

$$M_c=\{x\in Q: f(x)=c\}$$

由有限条正则曲线(在其上 $\operatorname{grad} f\neq 0$)组成．见 **Sard 定理**(Sard theorem)．

М. И. Войцеховский 撰　郑维行 译　沈祖和 校

Levi-Civita 联络[**Levi-Civita connection**; **Леви-Чивита связность**]

Riemann 空间 M 上的一种**仿射联络**(affine connection)，它是 **Riemann 联络**(Riemannian connection)(即**度量张量**(metric tensor)关于它为共变常量的联络)，并且**挠率**(torsion)为零．M 上的仿射联络被这些条件唯一地确定，因此每个 Riemann 空间 M 具有唯一的 Levi-Civita 联络．这个概念最早作为 Riemann 几何中向量的**平行移动**(parallel displacement)的概念出现在1917年的 T. Levi-Civita 的工作([1])中．这种想法本身可追溯到 F. Minding，他在1837年引入了曲面上曲线展开的概念．

在 M 上的局部坐标系下，设 $ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$，则 M 上 Levi-Civita 联络可用形式 $\omega^i_j=\{^{\,i}_{jk}\}dx^k$ 来定义，其中

$$\left\{\begin{matrix} i\\ jk\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{il}\left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right];$$

它的**曲率张量**(curvature tensor)由下列公式定义：

$$d\omega^i_j+\omega^i_k\wedge\omega^k_j=\frac{1}{2}R^i_{j\,kl}dx^k\wedge dx^l.$$

令 $R_{ij,kl}=g_{im}R^m_{jkl}$，则

$$R_{ij,kl}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}\right\}+$$
$$+g_{pq}\left[\left\{\begin{matrix} p\\ il\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} q\\ jk\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix} p\\ ik\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} q\\ jl\end{matrix}\right\}\right];$$

因而

$$R_{ij,kl}=-R_{ij,lk},\ R_{ij,kl}=R_{kl,ij},$$
$$R_{ij,kl}+R_{ik,lj}+R_{il,jk}=0.$$

Levi-Civita 联络的曲率张量有 $n^2(n^2-1)/12$ 个本质分量，其中 $n=\dim M$．例如，对于 $n=2$，只有一个本质分量：$R_{12,12}=K\det|g_{ij}|$，其中 K 是 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature)．

若 Riemann 空间 M 被等距浸入于 Euclid 空间 E^N 中，则它的 Levi-Civita 联络可刻画如下：对于 $M\subset E^N$ 上任意两个向量场 X,Y，在一点 $x\in M$ 的**共变导数**(covariant derivative)$(\nabla_Y X)_x$ 是 E^N 中向量场 X 关于向量 $Y_x\in T_x(M)$ 的普通微分 $(d_Y X)_x$ 在切平面 $T_x(M)\subset E^N$ 上的正交投影．换言之，无限邻近的切平

面到原切平面上的映射由正交投影来实现.

参考文献

[1] Levi-Civita, T., Nozione di parallelismo in una varietá qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **42** (1917), 173 – 205.

[2] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[3] Рашевский, П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П.К. 洛薛夫斯基, 黎曼几何与张量解析, 高等教育出版社, 1955).

Ю.Г.Лумисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

【译注】

参考文献

[B1] Do Carmo, M.P., Riemannian geometry, Birkhäuser Boston, 1992.

[B2] 白正国等, 黎曼几何初步, 高等教育出版社, 1992.

沈一兵 译

Levi 条件 [Levi condition; Леви условие]

可以有效地验证复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的区域在 Levi 意义下的拟凸性的一个条件. 它是 E.E.Levi ([1]) 提出来的并由如下构成. 假设区域 D 在边界点 $\zeta\in\partial D$ 的一个邻域 U_ζ 是由条件

$$D\cap U_\zeta=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in U_\zeta:\varphi(z)=\varphi(z,\bar z)<0\}$$

规定, 其中实函数 φ 属于 $C^2(U_\zeta)$类, 并且 grad $\varphi(\zeta)\neq 0$. 如果 D 在 ζ 是 Levi 拟凸的, 那么 (复) Hessian

$$H(\zeta;\varphi)(a,\bar a)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar z_k}(\zeta)a_j\bar a_k\geqslant 0 \quad (1)$$

是非负的 (对于所有 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$), a 复正交于 grad$\varphi(\zeta)$, 即使得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}(\zeta)a_k=0. \quad (2)$$

反之, 如果条件

$$H(\zeta;\varphi)(a,\bar a)>0 \quad (3)$$

在点 $\zeta\in\partial D$ 对所有满足 (2) 的 $a\neq 0$ 满足, 那么 D 在 ζ 是 Levi 拟凸的.

当 $n=2$ 上述不等式 (1) 和 (3) 可以分别用更简单的等价不等式 $L(\varphi)(\zeta)\geqslant 0$ 和 $L(\varphi)(\zeta)>0$ 代替, 其中

$$L(\varphi)=-\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial\bar z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z_1\partial z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial\bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar z_2} \end{vmatrix}$$

是 Levi 函数 $\varphi(z)$ 的行列式 (determinant of the Levi function $\varphi(z)$).

Levi 条件 (1)-(3) 已经拓广到复流形上的区域 (见[4]).

参考文献

[1A] Levi, E.E., Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analiticke de due o più variabili complesse, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **17** (1910), 61 – 87.

[1B] Levi, E.E., Sulle ipersurficie dello spazio a 4 dimensione che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **18** (1911), 69 – 79.

[2] Владимиров, В.С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V.S., Methods of the theory of functions of many complex variables, M.I.T., 1966).

[3] Шабат, Б.В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

[4] Gunning, R.C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Printice-Hall, 1965.

Е.Д.Соломенцев 撰

【补注】 由定义, D 在 ζ 是 Levi 拟凸的 (Levi pseudo-convex at ζ), 如果 (1) 为满足 (2) 的向量所满足; D 称为在 ζ 是严格 (Levi) 拟凸的 (strictly (Levi) pseudo-convex at ζ), 如果 (3) 为满足 (2) 的向量所满足.

区域 D 称为 (Levi) 拟凸的, 如果在每一边界点都是 Levi 拟凸的.

对具 C^2 边界的区域, Levi 拟凸性等价于下列任何一种:

a) $\log d(z)$ 在 D 是多次调和的 (即 D 是 Hartogs 拟凸的), 其中 $d(z)$ 表示 z 到 D 的边界的欧氏距离.

b) K 在 D 中相对紧蕴含 $\hat K$ 在 D 中相对紧, 其中 $\hat K=\{z\in D:\rho(z)\leqslant\sup_{z\in K}\rho(z)$ 对 D 上的每一多次调和函数 $\rho\}$.

参考文献

[A1] Krantz, S.G., Function theory of several complex variables, Wiley (interscience), 1982.

钟同德 译

Levi-Мальцев 分解 [Levi-Mal'tsev decomposition; Леви-Мальцева разложение]

特征为零的域上的有限维 Lie 代数 L、表成其根 R(L 的最大的可解理想) 和一个半单 Lie 子代数 $S\subset L$

的(作为向量空间)的直和．它由 E.E.Levi([1])和 A．И. Мальцев ([2]) 得到．Levi-Мальцев 定理指出，这样的分解 $L=R+S$ 总是存在的．进一步，精确至相差一个形如 exp(ad$z$)的自同构，S 是唯一的，其中 ad$z$ 是由其诣零根(最大的幂零理想)中元素 z 决定的 Lie 代数 L 的内导子．如果 G 是一个连通的或单连通的实 Lie 群，那么有 G 的闭的单连通的解析子群 R 和 S 满足 $R\cap S=\{e\}$，其中 R 是 G 的最大连通闭可解正规子群，S 是 G 的一个半单子群，而且映射 $(r, s)\to rs$, $r\in R$, $s\in S$ 是流形 $R\times S$ 到 G 上的一个解析同构；此时，分解 $G=RS=SR$ 也同样称为是一个 Levi-Мальцев 分解．

参考文献

[1] Levi, E.E., *Atti. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **40** (1906), 3-17.

[2] Мальцев, А. И., 《Докл. АН СССР》, **36** (1942), 2, 46-50.

[3] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964)．

[4] Кирилов, А.А., Элементы теория придставлений, М., 1972 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976)．

[5] Наймарк, М.А., Теория придставлений групп, М., 1976 (英译本: Naĭmark, M. A., Theory of group repres-entations, Springer, 1982)．

А.И. Штерн 撰

【补注】 被称为 Levi 因子(Levi factor)的 S(如果 S 是个半单子代数或半单子群，也称为 Levi 子代数(Levi subalgebra)或 Levi 子群(Levi subgroup)) 的存在性是 Levi 确定的，而 Levi 因子的共轭性是 Мальцев 证明的．

对于代数群 G 类似的分解 $G=RS$ 成立．此时 R 是其最大幂幺正规子群，而 S 是个极大约化子群(Mostow 定理(Mostow theorem))．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文)．

[A2] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

【译注】

参考文献

[B1] 严志达、许以超，Lie 群及其 Lie 代数，高等教育出版社，1985．

牛凤文 译 邓邦明 校

Levi 问题 [Levi problem; Леви проблема]

在一给定**解析空间**(analytic space)的区域是 Stein **空间**(stein space)的几何特征问题；它是由 E. E. Levi ([1]) 对仿射空间 $\mathbf{C}^n$ 的区域以如下形式提出的. 令 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的一区域，它的每一边界点 ζ 具有下列性质: 存在 ζ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的一邻域 U 和在 $U\cap D$ 中的一全纯函数不能全纯开拓到 ζ. D 是否一**全纯域**(domain of holomorphy)? 这个性质等价于关于区域 D 的下列任一断言: 1) 没有点 $\zeta\in\partial D$ 存在一有界全纯曲面序列 S_ν, 收敛于一全纯曲面 S, 使 $\partial S_\nu\to\partial S$, $\overline{S}_\nu$, $\partial S\subset D$, $\zeta\in S$; 2) 区域 D 是拟凸的，即 $-\log\rho(z, \partial D)$ $(z\in D)$, 其中 ρ 是 Euclid 距离，是 D 中的**多次调和函数**(plurisubharmonic function); 3) D 是一拟凸流形，即 D 中的一多次调和函数当接近于 ∂D 时趋于 $+\infty$. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的 Levi 问题已在 1953—1954 被冈潔, H. Bremermann 和 F. Norguet 独立地肯定解决了，而且冈潔在更一般的形式下 (关于展布在 $\mathbf{C}^n$ 上的区域 (见**覆叠域**(covering domain))) 解决了这个问题 (见 [2]-[6]). 冈潔的结果已经被推广到展布在任何 Stein 流形的区域的情形: 如果这样的区域 D 是一拟凸流形，那么 D 是一 Stein 流形. Levi 问题也在其他许多情形下被肯定地解决了，例如、对展布在射影空间 CP^n 或展布在一 Kähler 流形在其上存在一强多次调和函数 (见 [2]) 的区域，以及对具有正全纯双截曲率 (见 [7]) 的 Kähler 流形中的区域. 同时，拟凸流形和区域不是 Stein 流形和甚至不是全纯凸的例子也知道了. 一个复空间是一 Stein 空间的充要条件是，它是强拟凸的 (见**拟凸和拟凹**(pseudo-convex and pseudo-concave)). 而且，在任何复空间中的一强拟凸域是全纯凸的，并且是一 Stein 空间的真修改(见 [2], [4], 亦见**修改**(modification); **真态射**(proper morphism)．

Levi 问题也可对无穷维复拓扑向量空间 E 中的区域 D 提出. 如果 E 是局部凸的又 D 是一全纯域，那么 D 是拟凸的，即在 D 中有一多次调和函数当接近于 ∂D 时趋于 $+\infty$. 逆定理甚至在 Banach 空间也不成立，但对具有可数基的 Banach 空间以及对许多其他种类的空间都已证明是成立的 (见 [2]).

参考文献

[1] Levi, E. E., Sulle superficie dello spazio a 4 dimensione che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **18** (1911), 69-79.

[2A] Онищик, А. Л., Пространствами Штейна, Итоги науки и техники. Алгебра. Топология Геометрия. М., **11** (1974), 125-151.

[2B] Онищик, А. Л., Псевдовыпуклость в теории комплексных пространствами, Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М., **15** (1977), 93-171.

[3] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of many complex variables, M. I. T., 1966).

[4] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[5] Фукс, Б. А., Специальные главы теории аналитических функции мнотих комплексных переменных,

M., 1963.(英译本: Fuks, B. A., Special chapters of the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).
[6] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2-функции нескольких переменных, М., 1976.
[7] Suzuki, O., Pseudoconvex domains on a Kähler manifold with positive holomorphic, bisectional curvature, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, **12** (1976), 191 – 214; 439 – 445. А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Wu, H., Complex differential geometry, Birkhäuser, 1983.

【译注】 复流形上的 Levi 问题是由 Grauert, H. 在1958年用层论方法解决的([B1]). 复空间上的 Levi 问题是 Narasimhan、R. 在 1962年解决的([B2]).

参考文献

[B1] Grauert, H., On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 460 – 472.
[B2] Narasimhan, R., The Levi problem for complex spaces II, *Math. Ann.*, **144** (1962), 195 – 216.

钟同德 译

Lévy 典范表示 [Lévy canonical representation; Леви каноническое представление]

关于**无穷可分分布** (infinitely-divisible distribution) 的**特征函数** (characteristic function) 对数 $\ln\varphi(\lambda)$ 的一个公式:

$$\ln\varphi(\lambda)=i\gamma\lambda-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\left[e^{i\lambda x}-1-\frac{i\lambda x}{1+x^2}\right]dM(x)+$$
$$+\int_{0}^{\infty}\left[e^{i\lambda x}-1-\frac{i\lambda x}{1+x^2}\right]dN(x),$$

其中 Lévy 典范表示的特征量 γ, σ^2, M 与 N 满足如下条件: $-\infty<\gamma<\infty$, $\sigma^2\geqslant 0$, $M(x)$ 与 $N(x)$ 分别为 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, \infty)$ 上的非减左连续函数, 且使

$$\lim_{x\to\infty}N(x)=\lim_{x\to-\infty}M(x)=0$$

以及

$$\int_{-1}^{0}x^2dM(x)<\infty,\quad \int_{0}^{1}x^2dN(x)<\infty.$$

对于每一无穷可分分布, 在 Lévy 典范表示中有唯一一组特征量 γ, σ^2, M, N 与之对应; 反之, 对满足上述条件的一组特征量 γ, σ^2, M 与 N, Lévy 典范表示确定一无穷可分分布特征函数的对数.

例如, 对于有均值 a 与方差 σ^2 的**正态分布** (normal distribution):

$$\gamma=a,\ \sigma^2=\sigma^2,\ N(x)\equiv 0,\ M(x)\equiv 0.$$

对于有参数 λ 的 **Poisson 分布** (Poisson distribution):

$$\gamma=\frac{\lambda}{2},\ \sigma^2=0,\ M(x)\equiv 0,$$
$$N(x)=\begin{cases}-\lambda, & x\leqslant 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

对指数为 α 的**稳定分布** (stable distribution), $0<\alpha<2$, 与之对应的 Lévy 表示为

$$\sigma^2=0,\ \gamma\ 任意,\ M(x)=\frac{c_1}{|x|^\alpha},\ N(x)=-\frac{c_2}{x^\alpha},$$

其中 $c_i\geqslant 0$ $(i=1, 2)$ 为常数 $(c_1+c_2>0)$. 无穷可分分布的 Lévy 典范表示由 P. Lévy 于 1934 年提出. 它推广了 A. H. Колмогоров 1932 年针对有有穷方差的无穷可分分布的情形发现的一个公式. 关于 $\ln\varphi(\lambda)$, 还有一个等价于 Lévy 典范表示的公式, 它是由 A. Я. Хинчин 于 1937 年提出的, 因而称为 **Lévy-Хинчин 典范表示** (Lévy-Khinchin canonical representation). 函数 N 与 M 的概率意义以及 Lévy 典范表示的应用领域可解说如下: 对每一无穷可分的分布函数 F, 对应一个随机连续的平稳独立增量过程

$$X=\{X(t):0\leqslant t<\infty\},\ X(0)=0,$$

它满足

$$F(x)=\mathsf{P}\{X(1)<x\}.$$

这种类型的**可分过程** (separable process) X, 其样本轨道以概率 1 无第二类不连续点; 因此, 对于 $b>a>0$, 若定义 $Y([a, b))$ 等于集合

$$\{t:\ a\leqslant\lim_{\tau\downarrow 0}X(t+\tau)-\lim_{\tau\downarrow 0}X(t-\tau)<b,$$
$$0\leqslant t\leqslant 1\}$$

中元素的个数, 即区间 $[0, 1]$ 上跃度位于 $[a, b)$ 中的跳的个数, 则 $Y([a, b))$ 确为一随机变量. 用这个记法, 对相应于 F 的函数 N 就有

$$\mathsf{E}\{Y([a, b))\}=N(b)-N(a).$$

类似的关系式对函数 M 也成立.

可分过程 X 样本轨道的许多性质可以用分布函数 $\mathsf{P}\{X(1)<x\}$ 的 Lévy 典范表示的特征量来表述. 特别是, 如果 $\sigma^2=0$,

$$\lim_{x\to 0}N(x)>-\infty,\quad \lim_{x\to 0}M(x)<\infty,$$

$$\gamma=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\,dM(x)+\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dN(x),$$

那么 X 的几乎所有样本轨道都是阶梯函数，且在任意有穷区间上只有有限个跳．如果 $\sigma^2=0$ 且

$$\int_{-1}^{0}|x|dM(x)+\int_{0}^{1}x\,dN(x)<\infty,$$

那么 X 的样本轨道以概率 1 在任意有穷区间上有有界变差．利用 Lévy 典范表示的特征量，还可以直接计算视为 Марков 随机函数的过程 X 的**无穷小算子**(infinitesimal operator)．无穷可分分布函数的许多分析性质也可直接通过它的 Lévy 典范表示的特征量来表述．

对于在一大类代数构造上给出的无穷可分分布，也有类似的 Lévy 典范表示．

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本：Б. В. 哥涅坚科等，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955).

[2] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

[3] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本：Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[4] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973 (英译本：Gihman, I. I., Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, Springer, 1975).

[5] Itô, K., Stochastic processes, Aarhus Univ., 1969.

Б. А. Рогозин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Loève, M., Probability theory, 1, Springer, 1977.

[A2] Breiman, L. P., Probability, Addison-Wesley, 1968.

[A3] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970.

[A4] Heyer, H., Probability measures on locally compact groups, Springer, 1977.

[A5] Parthasarathy, K. R., Probability measures on metric spaces, Acad. Press, 1967.

[A6] Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N., Introduction to the theory of random processes, Saunders, 1969 (译自俄文).

潘一民 译

Lévy-Cramér 定理 [Lévy-Cramér theorem; Леви-Крамера теорема]

如果两个独立非常值随机变量的和是正态分布的，那么每个被加项也是正态分布的．此结果由 P. Lévy ([1]) 提出而由 H. Cramér ([2]) 加以证明．等价的陈述是：1) 如果两个真分布的卷积为正态分布，那么它们的每一个也是正态分布；2) 如果 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是特征函数，且

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t)=\exp(-\gamma t^2+i\beta t), \qquad (*)$$
$$\gamma\geqslant 0,\ -\infty<\beta<\infty,$$

那么

$$\varphi_j(t)=\exp(-\gamma_j t^2+i\beta_j t),\ \gamma_j\geqslant 0,$$
$$-\infty<\beta_j<\infty.$$

在陈述 1) 中，Lévy-Cramér 定理可以推广到两个符号测度的卷积，但对其负变差有某种限制；在陈述 2) 中，它可推广到如下情形，即代替条件 (*) 而考虑条件

$$\prod_{j=1}^{m}\{\varphi_j(t)\}^{\alpha_j}=\exp\{-\gamma t^2+i\beta t\},$$
$$\gamma\geqslant 0,\ -\infty<\beta<\infty,\ t\in E,$$

其中 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 为特征函数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为正数，而 E 是以原点为其极限点的实数集．还有一些结果，把 Lévy-Cramér 定理推广到 Euclid 空间以及局部紧 Abel 群中的随机变量．

Lévy-Cramér 定理具有如下的稳定性，即独立随机变量和的分布对正态分布的接近，蕴含着每一被加项的分布对正态分布的接近；稳定性的定性估计也是已知的．

对于 Poisson 分布 (Райков 定理 (Raĭkov theorem))，对于 Poisson 分布与正态分布的卷积，以及对于其他某些无穷可分分布类，与 Lévy-Cramér 定理类似的定理也已经得到 (见[6])．

参考文献

[1] Lévy, P., Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchaînés, *J. Math. Pures Appl.*, **14** (1935), 347－402.

[2] Cramér, H., Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, *Math. Z.*, **41** (1936), 405－414.

[3] Райков, Д. А., 《Докл. АН СССР》, **14** (1937), 9－12.

[4] Линник, Ю. В., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **2** (1957), 34－59.

[5] Сапогов, Н. А., 《Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астр.》, 1959, 19, 78－105.

[6] Линник, Ю. В., Островский, И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972 (英译本：Linnik, Yu. V., Ostrovskiĭ, I. V., Decomposition of random variables and vectors, Amer. Math. Soc., 1977).

[7] Фельдман, Г. М., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **22** (1977), 1, 136－143.

И. В. Островский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Linnik, Yu. V., Decomposition of probability laws, Oliver and Boyd, 1964(译自俄文).

[A2] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1960.

[A3] Lukacs, E., Laha, R. G., Applications of characteristic functions, Griffin, 1964.

[A4] Rossberg, H.-J., Jesiah, B., Siegel, G., Analytic methods of probability theory, Akad. Verleg, 1985.

潘一民 译

Lévy 不等式 [Lévy inequality; Леви неравенство]

按相应中位数中心化的独立随机变量和的极大值分布的一个不等式. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是一组独立的随机变量, 令 $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, mX 是随机变量 X 的**中位数(统计学中的)** (median (in statistics)), 则对任意 x, 成立 Lévy 不等式

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n}(S_k - m(S_k - S_n)) \geqslant x\right\} \leqslant 2\mathrm{P}\{S_n \geqslant x\}$$

及

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n}|S_k - m(S_k - S_n)| \geqslant x\right\} \leqslant 2\mathrm{P}\{|S_n| \geqslant x\}.$$

这些不等式的直接推论是关于对称分布随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的 Lévy 不等式:

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant x\right\} \leqslant 2\mathrm{P}\{S_n \geqslant x\}$$

及

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n}|S_k| \geqslant x\right\} \leqslant 2\mathrm{P}\{|S_n| \geqslant x\}.$$

Lévy 不等式可以看作 **Колмогоров 不等式** (Kolmogorov inequality) 的推广. Lévy 不等式是 Lévy([1]) 在研究独立随机变量和的分布向稳定律收敛的一般问题时得到的. 它们还有对鞅的推广([2]).

参考文献

[1] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

[2] Loéve, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963(中译本: M. 洛易甫, 概率论, 科学出版社, 1966).

А. В. Прохоров 撰 潘一民 译

Lévy-Хинчин 典范表示 [Lévy-Khinchin canonical representation; Леви-Хинчина каноническое представление]

关于**无穷可分分布** (infinitely-divisible distribution) 的**特征函数** (characteristic function) 对数 $\ln\varphi(\lambda)$ 的一个公式:

$$\ln\varphi(\lambda) =$$

$$= i\gamma\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2}\right]\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x),$$

其中被积函数在 $x=0$ 处等于 $-\lambda^2/2$, 而特征量 γ 与 G 是使 γ 为一实数, G 为一非减左连续的**有界变差函数** (function of bounded variation).

Lévy-Хинчин 典范表示由 А. Я. Хинчин (1937) 提出, 而它等价于稍前由 P. Lévy (1934) 提出的一个公式, 称为 **Lévy 典范表示** (Lévy canonical representation). 对于每一无穷可分分布, 在 Lévy-Хинчин 典范表示中对应唯一的一组特征量 γ 与 G; 反之, 对如上的任一组 γ 与 G, Lévy-Хинчин 典范表示确定一个无穷可分分布的特征函数的对数. 为使由特征量 γ_n, G_n $(n=1, 2, \cdots)$ 确定的无穷可分分布序列弱收敛于以 γ, G 为特征量的分布 (它必然是无穷可分的), 其必要充分条件是当 $n \to \infty$ 时 $\lim\gamma_n = \gamma$, 且 G_n 弱收敛于 G.

参考文献见 **Lévy 典范表示** (Lévy canonical representation).

Б. А. Рогозин 撰

【补注】 关于弱收敛的概念, 见**分布的收敛** (distributions, convergence of).

潘一民 译

Lévy 度量 [Lévy metric; Леви метрика]

一维随机变量的**分布函数** (distribution function) 空间 $\mathscr{F}$ 中的一种度量, 即对任意 $F, G \in \mathscr{F}$, 令

$$L \equiv L(F,G) =$$

$$= \inf\{\varepsilon: F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \varepsilon,\ \forall x\}.$$

这是由 Lévy 引出的(见[1]). 如果在 F 和 G 的图之间画上边平行于坐标轴的正方形(在图的不连续点添上垂直线段), 则它们之中最大的边长就是 L.

Lévy 度量可以看作 **Lévy-Прохоров 度量** (Lévy-Prokhorov metric) 的特殊情形. Lévy 度量的定义可以延拓到所有 $\mathbf{R}^1$ 上的非降函数类 M 上(度量允许取无穷值).

Lévy 度量最重要的性质. 1) Lévy 度量导出 $\mathscr{F}$ 中的弱拓扑(见**分布的收敛** (distributions, convergence of)). 度量空间 $(\mathscr{F}, L)$ 是完全可分的. M 中函数序列按度量 L 的收敛性等价于完全收敛.

2) 如果 $F \in M$, 且若令

$$F_{-1}(x) = \inf\{t: F(t) < x\},$$

则对任意 F, $G \in M$,

$$L(F,G) = L(F_{-1}, G_{-1}).$$

3) Lévy 度量的正则性: 对任意 $F, G, H \in \mathscr{F}$,

$$L(F \star H, G \star H) \leqslant L(F,G)$$

(其中 $\star$ 表示**卷积(函数的)** (convolution (of functions))). 这一性质的推论是半可加性:

$$L(F_1 \star F_2, G_1 \star G_2) \leqslant L(F_1, G_1) + L(F_2, G_2)$$

和“平滑不等式”:

$$L(F,G) \leqslant L(F*H, G*H) + 2L(E,H)$$

(E 是在零点处的退化分布).

4)如果 $\alpha_k \geqslant 0, F_k, G_k, \in \mathscr{F}$, 则

$$L[\sum \alpha_k F_k, \sum \alpha_k G_k] \leqslant \max[1, \sum \alpha_k] \max L(F_k, G_k).$$

5)如果 $\beta_r(F)(r>0)$ 是分布 F 的**绝对矩**(absolute moment),则

$$L(F,E) \leqslant (\beta_r(F))^{r/(r+1)}.$$

6)M 上的 Lévy 度量与积分平均度量

$$\rho_1 = \rho_1(F,G) = \int |F(x) - G(x)| dx$$

之间的关系是

$$L^2 \leqslant \rho_1.$$

7)M 上的 Lévy 度量与一致度量

$$\rho = \rho(F,G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

之间的关系是

$$L \leqslant \rho \leqslant L + \min\{Q_F(L), Q_G(L)\}, \qquad (*)$$

其中

$$Q_F(x) = \sup_t |F(t+x) - F(t)|$$

($Q_F(x)$ 是 $F \in \mathscr{F}$ 的**集中函数**(concentration function)).特别地,如果函数之一,例如 G,有一致有界的导数,则

$$\rho \leqslant [1 + \sup_x G'(x)] L.$$

(*) 的一个推论是当极限分布连续时弱收敛和一致收敛等价的 Pólya-Гливенко 定理.

8)如果 $F_{a,\sigma}(x) = F(\sigma x + a)$,其中 a 和 $\sigma > 0$ 是常数,则对任意 $F, G \in \mathscr{F}$,

$$L(\sigma F, \sigma G) \leqslant \sigma L(F_{a,\sigma}, G_{a,\sigma})$$

(特别地,Lévy 度量对于分布的推移是不变的),且

$$\lim_{\sigma \to 0} L(F_{a,\sigma}, G_{a,\sigma}) = \rho(F,G).$$

9)如果 f, g 是与分布函数 F、G 相应的**特征函数**(characteristic function),则对任意 $T > e$,

$$L(F,G) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + 2e \frac{\ln T}{T}.$$

Lévy 度量的概念可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 上分布函数的情形.

参考文献

[1] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

[2] Золотарев, В. М., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **112**(1971), 224 – 231.

[3] Золотарев, В. М., Сенатов, В. В., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **20**(1975), 2, 239 – 250.

[4] Линник, Ю. В., Островский, И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972 (英译本: Linnik, Yu. V. and Ostrovskii, I. V., Decomposition of random variables and vectors, Amer. Math. Soc., 1977).

В. М. Золотарев 撰

【补注】注意:在苏联数学文献(且在上面的主要文章)中,分布函数通常是左连续的,而在西方文献中,它们是右连续的.所以在 2)和 7)中必须稍作改变.

设 F 是一分布函数,或更广义地,是一个非降左连续函数,则 F 具有可数的不连续点集.这个集合的补集称为 F 的连续集(continuity set)$C(F)$.分布函数序列 F_n 称为弱收敛于分布 F,如果在 F 的连续集 $C(F)$ 上收敛.如果还有 $F_n(+\infty) \to F(\infty)$ 及 $F_n(-\infty) \to F(-\infty)$,则称此序列完全收敛(亦见**分布的收敛**(convergence of distributions)和**收敛性的类型**(convergence, types of)).

参考文献

[A1] Billingsley, P., Convergence of Probability measures, Wiley, 1968.

[A2] Hengartner, W. and Theodorescu, R., Concentration functions, Acad. Press, 1973.

[A3] Loève, M., Probability theory, Springer, 1978, p. 180 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 上册, 科学出版社, 1965).

刘秀芳 译

Lévy-Прохоров 度量 [Lévy-Prokhorov metric; Леви-Прохорова метрика]

由**度量空间**(metric space)(U, d) 上有限 **Borel 测度**(Borel measure)所成的空间 $\mathfrak{M}$ 上由下式定义的一个度量:

$$\pi(P, Q) = \inf\{\varepsilon: P(A) \leqslant Q(A^\varepsilon) + \varepsilon,$$
$$Q(A) \leqslant P(A^\varepsilon) + \varepsilon, \text{ 对一切 } A \in \mathfrak{B}\},$$

其中 $\mathfrak{B}$ 是 (U, d) 的 Borel 集的 σ 代数且

$$A^\varepsilon = \{x: d(x, y) < \varepsilon, y \in A\}.$$

Lévy-Прохоров 度量是由 Ю. В. Прохоров([1])作为 **Lévy 度量**(Lévy metric)的推广而引进的.如果在定义中略去两个不等式中之一,并且将 $\mathfrak{B}$ 用 $\mathfrak{B}$ 的一切开集或闭集族代替,则量 π 要改变(见[2]).

Lévy-Прохоров 度量最重要的性质.

1)度量空间 $(\mathfrak{M}, \pi)$ 是可分的,当且仅当 (U, d) 是可分的(见**可分空间**(separable space)).

2) 若空间 ($\mathfrak{M}$, π) 是完全的 (见**完全空间** (complete space)), 则空间 (U, d) 是完全的. 若 $\mathfrak{M}$ 的一切测度有可分支集, 则反之亦然.

3) 在概率测度的空间 $\mathfrak{M}$ 中, Lévy-Прохоров 度量有类似于 Lévy 度量的那些性质, 即正则性质 3) (见 **Lévy 度量** (Lévy metric)) 及其推论, 性质 4) 与 5)、性质 6) (在 $U=\mathbf{R}^1$ 情形下), 性质 7) 的部分 (指 $\pi \leqslant \text{var}$), 与性质 8) 的一个类似性质, 对 (U, d) 为线性赋范空间情形: 若 $P_{a,\sigma}(A)=P(\sigma A+a)$ ($\sigma>0$, $a\in U$), 则对任何 P, $Q\in\mathfrak{M}$,

$$\pi(\sigma P, \sigma Q) \leqslant \sigma\pi(P_{a,\sigma}, Q_{a,\sigma}),$$

$$\lim_{\sigma\to 0}\pi(P_{a,\sigma}, Q) = \underline{\text{var}}(P, Q).$$

4) 当 $U=\mathbf{R}^k$ 时, $\mathfrak{M}$ 中的 Lévy-Прохоров 度量可以通过与测度 P, Q 相应的特征函数 f, g 来估计 (见[3], [4]).

5) Lévy-Прохоров 度量是关于概率距离 (probability distance)

$$\kappa(X, Y)=\inf\{\varepsilon: P\{d(X, Y)>\varepsilon\}<\varepsilon\}$$

的最小度量, 即对任意具有固定边缘分布 P_X, $P_Y\in\mathfrak{M}$ 的随机变量 X, Y, 等式 $\pi(P_X, P_Y)=\inf\kappa(X, Y)$ 对所有联合分布 P_{XY} 成立.

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., 《Теория вероятн. и её примен.》, **1** (1956), 2, 177 – 238.

[2] Dudley, R. M., Distances of probability measures and random variables, *Ann. Math. Stat.*, **39** (1968), 1563 – 1572.

[3] Юринский, В. В., 《Теория вероятн. и её примен.》, **20** (1975), 1, 3 – 12.

[4] Абрамов, В. А., 《Теория вероятн. и её примен.》, **21** (1976), 2, 406 – 410.

[5] Strassen, V., The existence of probability measures with given marginals, *Ann. Math. Stat.*, **36** (1965), 2, 423 – 439.

[6] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

В. М. Золотарев 撰

【补注】 亦见**分布的收敛** (distributions, convergence of); **测度的收敛** (convergence of measures); **概率测度的弱收敛** (weak convergence of probability measures).

郑世骏 译 苏维宜 校

字典序 [**lexicographic order**; **лексикографический порядок**]

偏序集 (partially ordered set) X_α 的**直积** (direct product)

$$X=\prod_{\alpha\in L}X_\alpha$$

上的一种序, 这里指标集 L 是良序的 (见**全良序集** (totally well-ordered set)), 定义如下: 如果 $\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\}\in X$, 则 $\{x_\alpha\}\leqslant\{y_\alpha\}$, 当且仅当或者对所有的 $\alpha\in L, x_\alpha=y_\alpha$, 或者存在一个 $\alpha\in L$, 使得 $x_\alpha<y_\alpha$ 而对所有的 $\beta<\alpha, x_\beta=y_\beta$. 按字典序排序的集合 X 称为集合 X_α 的字典积 (lexicographic product) 或序数积 (ordinal product). 如果所有的集合 X_α 一致 (对所有的 $\alpha\in L, X_\alpha=Y$), 则它们的字典积称为 Y 的一个序数幂且表示成 ${}^LY$. 也称 X 是按第一差异原理排序 (如同词在字典中的排序). 这样, 如果 L 是自然数序列, 则

$$\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}<\{y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$$

是指, 对某个 k,

$$x_k<y_k, \text{且对所有 } i<k, x_i=y_i.$$

字典序是偏序集的有序积的一种特殊情形 (见[3]). 字典序对任何偏序指标集 L 能类似地定义 (见[1]), 但是在这种情况下在集合 $\prod_{\alpha\in L}X_\alpha$ 上的关系不必是通常意义下的一个序 (见**序 (集合上的)** (order (on a set))).

有限多个良序集的字典积是良序的. 链的字典积是一个**链** (chain).

对有限的 L, 字典积由 G. Cantor ([4]) 在全序集的序型的积的定义中首先考虑.

字典序在数学以外广泛地使用, 例如用于字典、参考书等中词的排序.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

[3] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970 (英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A. Hilger, 1977).

[4A] Cantor, G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre Ⅰ, *Math. Ann.*, **46** (1895), 481 – 512.

[4B] Cantor, G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre Ⅱ, *Math. Ann.*, **49** (1897), 207 – 246.

[5] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 怎样一种**全序集** (totally ordered set) $(X, \succ)$ 容许有一个函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 使得 $x\succ x'$ 当且仅当 $f(x)\geqslant f(x')$? 这个问题在数理经济学中是值得注意的 (效用函数 (utility function), 见[A1]. $\mathbf{R}^2$ 上的字典序表明不是所有的全序集容许有效用函数.

参考文献

[A1] Debreu, G., Theory of values, Yale Univ. Press, 1959.

葛显良 译 李慧陵 校

l'Hospital 法则 [**l'Hospital rule** 或 l'Hôpital rule; **Лопиталя правило**]

通过把函数之比的极限转化为所给函数导数之比的极限以消除 0/0 型或 ∞/∞ 型的不定性的一个法则. 对于在数轴上点 a 的一个去心右邻域中定义的实值函数 f, g 的情形, l'Hospital 法则具有形式

$$\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (*)$$

对于 0/0 不定型即

$$\lim_{x\downarrow a}f(x)=\lim_{x\downarrow a}g(x)=0$$

和 ∞/∞ 不定型即

$$\lim_{x\downarrow a}f(x)=\lim_{x\downarrow a}g(x)=\infty$$

这两种情形, l'Hospital 法则在下述条件下均成立: f 和 g 在某个区间 (a,b) 内可微; 对所有点 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$; 存在导数之比的有限或无穷极限

$$\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(对于 ∞/∞ 不定型, 如果此极限为无穷, 则它只能是定号无穷). 在上述条件下, 函数之比的极限 $\lim_{x\downarrow a}f(x)/g(x)$ 存在且 $(*)$ 成立. 对于左侧极限和双侧极限的情形, 还有对于 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形, 在作出一些自然的更改后, 上述论断仍为真.

在实际应用 l'Hospital 法则求函数之比的极限时, 有时必须相继使用该法则若干次.

在上述假定下, 导数之比 $f'(x)/g'(x)$ 极限存在是函数本身之比 $f(x)/g(x)$ 极限存在的一个充分条件, 但不是必要条件.

参考文献

[1] l'Hospital, G. F., Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, Paris, 1696.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975 (中译本: С. М. 尼柯尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 人民教育出版社, 1980 – 1981).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 此法则或许应归功于 Johann Bernoulli, 他曾为 l'Hospital 侯爵讲授数学.

参考文献

[A1] Шилов, Г. Е., Математический анализ, М., 1961 (英译本: Shilov, G., Mathematical analysis, M. I. T., 1974).

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

[A3] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

【译注】 关于"补注"中所说的历史情形, 可参阅 [B1].

参考文献

[B1] Boyer, C. B., A history of mathematics, Princeton Univ. Press, 1968, Chapt. XX, 4.

沈永欢 译

说谎者悖论 [**liar paradox**; **лжеца парадокс**]

见悖论 (antinomy).

Lie 容许代数 [**Lie-admissible algebra**; **Ли допустимая алгебра**]

【补注】 换位子代数是 **Lie 代数** (Lie algebra) 的 (非结合) **代数** (见**非结合环与非结合代数** (non-associative rings and algebras)). 它源于标准代数的一个定义恒等式并由 A.A.Albert 于 1948 年首先引入 ([A1]). 对于域 F 上的一个代数 $\mathfrak{A}$, 它的换位子代数 (commutator algebra) $\mathfrak{A}^-$ 是定义在向量空间 $\mathfrak{A}$ 上具有乘法 $[x,y]=xy-yx$ 的反交换代数. 如果 $\mathfrak{A}^-$ 是个 Lie 代数, 即 $\mathfrak{A}^-$ 满足 Jacobi 恒等式 (Jacobi identity) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, 则 $\mathfrak{A}$ 被称为是 Lie 容许的 (Lie admissible) (LA). 起初, Lie 容许代数的很多结构理论是在一些附加条件之下给出的, 诸如可挠恒等式 (flexible identity) $(xy)x=y(yx)$ 或幂结合性 (power-associativity) (即每个元素生成一个结合子代数), 或者二者皆有. 一个代数 $\mathfrak{A}$ 是可挠 Lie 容许的 (flexible Lie-admissible) (FLA), 当且仅当它满足恒等式

$$[x,yz]=y[x,z]+[x,y]z, \qquad (A1)$$

当而且仅当映射 $x\otimes y\to xy$ 是由 $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的关于 $\mathfrak{A}^-$ 的在伴随作用下的 Lie 模同态. 因此, Lie 代数的表示在 FLA 代数的结构理论中起主要作用 ([A2]). Lie 代数和结合代数都是 FLA 代数的例子.

由所有 $\mathfrak{A}^-$ 半单的幂结合的 FLA 代数 $\mathfrak{A}$ 的分类的 Albert 问题 (Albert problem) 开始, 关于各式各样的数学的、物理的和几何的背景的结构理论的普遍话题被凝聚到关于 $\mathfrak{A}^{-1}$ 指定的 Lie 代数结构的情形. Albert 问题在 1962 年首先对特征 0 代数闭域 F 上的有限维代数 $\mathfrak{A}$ 被解决, 且这样的代数结果是 Lie 代数 ([A3]). 当 $\mathfrak{A}^-$ 是典型 Lie 代数或广义 Witt 代数 ([A2], [A4]) (见 **Witt 代数** (Witt algebra)) 时, 这个结果被拓广到 Char $F\neq 0$ 情形. 在 1981 年, 这些代数在不假定有幂结合性的条件下进行了分类: 当如上所述的 $\mathfrak{A}^-$ 在基础域 F 上是单的时候, 对于固定的纯量 $\beta\in F$, $\mathfrak{A}$ 的乘法 ★ 由

$$x\star y=\frac{1}{2}[x,y]+\beta x\# y \qquad (A2)$$

给出, 这里对于非 $A_n(n\geqslant 2)$ 型的 $\mathfrak{A}^{-1}$, $\beta=0$, 而对于 $A_n(n\geqslant 2)$ 型的 $\mathfrak{A}^{-1}$, $\beta\neq 0$, 且用

$$x\# y=xy+yx-\frac{2}{n+1}(\operatorname{Tr}xy)I$$

来定义 $\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{sl}(n+1,F)$ 上的 #, 其中 xy 代表矩阵 x

和 y 的积，而 I 是单位矩阵．这样有 A_n $(n\geqslant 2)$ 型 $\mathfrak{A}^{-1}$ 的代数 $\mathfrak{A}$ 不可能是幂结合的．如果 $\mathfrak{A}^{-1}$ 是半单的，$\mathfrak{A}$ 必为(A2)给出的单代数的直和．这种分类可以拓广到 $\mathfrak{A}^{-1}$ 的可解根(见**环与代数的根**(radical of rings and algebras))是 $\mathfrak{A}^{-}$ 的直和项或是交换的情形([A2])．1984 年 Albert 问题中的代数 $\mathfrak{A}$ 在无挠性情形被决定了([A7])：如果 $\mathfrak{A}^{-}$ 是半单的，有分解 $\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{S}_1+\cdots+\mathfrak{S}_n$ $(n\geqslant 2)$，其中 $\mathfrak{S}_i$ 是 $\mathfrak{A}^{-}$ 的单理想，则 $\mathfrak{A}$ 的乘法 $\star$ 形如 $x\star y=[x,y]/2+\tau_{ij}(y)x+\tau_{ji}(x)y$，对 $x\in\mathfrak{S}_i$，$y\in\mathfrak{S}_j$，其中 τ_{ij} 是 $\mathfrak{S}_j$ 上的线性函数，并且满足有根据 2、3 或 4 个顶点的图的所规定的某些条件．

1978 年，R.M.Santilli 由一个带外项的在经典力学里代表一个一般非自伴牛顿系统的 Hamilton 方程的修正形式得到了 LA 代数(括号式)([A8])．这样一个形式导出一个时间展开

$$\frac{dA(a)}{dt}=\sum_{i,j=1}^{2n}\frac{\partial A}{\partial a^i}S^{ij}(t,a)\frac{\partial H}{\partial a^j}\equiv(A,H)\text{，}\quad(A3)$$

其中 $a=(a^1,\cdots,a^{2n})$ 是一个 $2n$ 维流形的局部图，H 是个 **Hamilton**，而 (S^{ij}) 是一个有分解 $S^{ij}=\omega^{ij}+T^{ij}$，$\omega^{ij}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，且 $T^{ij}=T^{ji}(i,j=1,\cdots,2n)$ 区域中的非奇异 C^∞ 张量．对称张量(T^{ij})表示系统中非自伴力的状态．换位子 $(A,H)-(H,A)$ 根据典型的 **Poisson 括号**(Poisson brackets) [,] 由 $2[A,H]$ 给出，即由(A3)给出，(S^{ij})在 $a^1,\cdots,a^{2n}$ 中 C^∞ 函数的 $\mathbf{R}$ 空间上决定了一个 Lie 容许积(,)，这里 $\mathbf{R}$ 是实数域．括号(,)或 (S^{ij}) 被称为是一个基本 Lie 容许括号(fundamental Lie-admissible bracket)或张量(tensor)．更一般地，如果在一个区域中对一个斜对称非奇异 C^∞ 张量 (Ω^{ij}) 有 $S^{ij}=\Omega^{ij}+T^{ij}$，则 (S^{ij}) 或括号式(A3)的 Lie 容许性可由 Ω^{ij} 中的一阶偏微分方程来描述．对这些方程，在特定条件下被称为一般余辛张量(general cosymplectic tensor)的一般解 (Ω^{ij}) 存在，并在 Birkhoff 力学(Hamilton 力学的一种推广)中起中心作用([A9])．此时，(,) 或 (S^{ij}) 被称为一般 Lie 容许括号(general Lie-admissible bracket)或张量(tensor)．用量子力学语言说，它就引出一个物理系统中的算子的结合代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个时间发展方程 $idA/dt=ARH-HSA$，其中 R 和 S 一般是 $\mathfrak{A}$ 中的非 Hermite 非奇异算子，这些算子代表非自伴力([A8])．由这个被认为是 Heisenberg 方程推广的方程可以得到一个 LA 代数 $\mathfrak{A}(r,s)$，称为 $\mathfrak{A}$ 的 (r,s) 转化(mutation)，其乘法定义在有 1 结合代数上，对于固定的可逆元 $r,s\in\mathfrak{A}$，$x\star y=xry-ysx$．$\mathfrak{A}(r,s)$ 一般地不是挠性的或幂结合的．事实上，这些条件中的任意一个都等价于对 $\mathfrak{A}$ 的中心的某个可逆元 a 的关系 $r=as$([A10])．上述方法的一个特殊情形在 1967([A11]) 已经被 Santilli 研究过，他第一次把 LA 代数引入物理：对于实数 λ，μ，$(S^{ij})=\begin{pmatrix}0&\lambda_1\\\mu_1&0\end{pmatrix}$ 时的括号式(A3)和代数 $\mathfrak{A}(\lambda,\mu)$ 被认为是 Hamilton 力学和量子力学的一种推广．按照 Santilli 的见解([A8])，这种 Lie 容许手法的目的是促使建立在 Lie 代数或它们的分次超对称扩张上的现代物理模型向一般 Lie 容许模型转化，这种转化本质上允许把粒子作为可扩散的，从而允许附加接触、非位势和非 Hamilton 交互作用．

从一个不同的观点，1978 年 S.Okubo([A12]) 运用 FLA 代数 $\mathfrak{A}$ 推广建立在结合律基础上的相容的标准量子化过程的框架．一个量子化称为相容的(consistent)，如果运动的 Hamilton 方程 $dQ/dt=i[H,Q]$ 可再现其原始 Lagrange 方程．这样一个量子化只依赖于标准的交换关系和恒等式(A1)在 $\mathfrak{A}$ 中实现．如果 $\mathfrak{A}$ 由一个物理系统的算子组成，那么利用(A1)可以看到，对于某个 $iH\in\mathfrak{A}$，Heisenberg 方程 $dx/dt=i[H,x]$ 本质上是 $\mathfrak{A}$ 中的最一般的时间发展方程，其中 $[H,x]=Hx-xH$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的换位子．如果 Hamilton H 在 $\mathfrak{A}$ 中是幂结合的，那么对于状态向量 ψ 满足 $id\psi/dt=H\psi$ 的 Schrödinger 公式，其时间发展算子 $\exp(itH)$ 是完全确定的．进一步，如果 H 在 $\mathfrak{A}$ 中是弱结合的，即对任意正整数 m,n 和 $x\in\mathfrak{A}$，有 $(H^m x)H^n=H^m(xH^n)$，则和在通常量子力学中一样，Heisenberg 方程在 $\mathfrak{A}$ 中的解形如 $x=e^{itH}x(0)e^{-itH}$．这样代数的一个例子是实伪八元数代数(real pseudo-octonion algebra) P_8，它有定义在迹为 0 的 3×3 Hermite 矩阵的 $\mathbf{R}$ 空间上的乘法 $x\star y=\mu xy+(1-\mu)yx-1/3(\mathrm{Tr}xy)I$，其中 $\mu=1/2\pm(\sqrt{3}/6)i$([A2])．P_8 是个 FLA **可除代数**(division algebra)，同时 P_8^- 同构于 $\mathfrak{su}(3)$，并与分子物理 SU(3) 有些关系．它同样在实可除代数结构理论中起重要作用([A2])．

域 F 上的代数 $\mathfrak{A}$ 被称为 Мальцев 容许的(Mal'tsev-admissible)(MA)，如果它的换位子代数 $\mathfrak{A}^{-1}$ 变成一个 Мальцев **代数**(Mal'tsev algebra)，即 $\mathfrak{A}^{-1}$ 满足 Мальцев 恒等式(Mal'tsev identity)

$$[[x,y],[x,z]]=[[[x,y],z],x]+[[[y,z],x],x]+\\+[[[z,x],x],y]\text{．}$$

它与 Мальцев 代数一样，是作为 LA 代数的一种自然的推广提出来的，而且它的结构理论与 LA 代数的结构理论平行([A2])．交错代数(**见交错环与交错代数**(alternative rings and algebras))是挠性 Мальцев 容许(FMA)代数的例子，而八元数代数(亦称 **Cayley-Dickson 代数**(Cayley-Dickson algebra))是 FMA 但不是 LA．对于特征非 2 的域上的一个有标准对合 $x\to\bar{x}$ 的八元数代数 $\mathfrak{A}$，可以得到一个带有定义在 $\mathfrak{A}$ 上的乘法 $x\star y=\overline{xy}$ 的代数 $\mathfrak{A}_\star$．代数 $\mathfrak{A}_\star$ 称为仿八元数代数

(para-octonion algebra)，是个无恒等元的单 FMA 代数，从而不是交错的([A2])．一个代数 $\mathfrak{A}$(不一定含恒等元)称复合代数(composition algebra)，如果存在一个 $\mathfrak{A}$ 上的非退化二次型 q，使得对任意 $x, y \in \mathfrak{A}$ 有 $q(xy)=q(x)q(y)$．任意有限维的挠性合成代数(Char $F \neq 2$)必然是个 1, 2, 4 或 8 维的 MA 代数，而对于维数 8，八元数代数、伪八元数代数和平行八元数代数是仅有的此类代数([A13])．对于一个 MA 代数 $\mathfrak{A}$，设 $d(x,y)=\mathrm{ad}[x,y]+[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]$，其中 $\mathrm{ad}x$ 是由 $y \to [x,y]$ 给出的 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 的伴随映射．那么，$d(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}^-$ 的导子代数 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}^-$ 的一个 Lie 子代数(亦见**环中的导子**(derivation in a ring))，而且如果 $\mathfrak{A}$ 是 FMA，那么 $d(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 亦为 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ 的一个子代数，同时映射 $x \otimes y \to xy$ 是 $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的对于 $d(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 的 Lie 模同态．设 $\mathfrak{A}$ 在特征为零的域 F 上是有限维的．如果 $\mathfrak{A}^-$ 是半单的，则 $d(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 亦然．正因为如此，实质上关于 FLA 代数的所有结果都可以推广到 FMA 代数上([A2])．如果 $\mathfrak{A}$ 是 FMA，而 $\mathfrak{A}^-$ 是中心单的，在 F 上非 Lie，那么，$\mathfrak{A}$ 是一个 Мальцев 代数同构于一个从八元数代数得到的一个 7 维单 Мальцев 代数(见 **Мальцев 代数**(Mal'tsev algebra))．如果 $\mathfrak{A}^-$ 是半单的，而 F 是代数闭的，那么 $\mathfrak{A}$ 是由(A2)给出的单代数和单 Мальцев 代数的直和．旨在量子力学中推广 Lie 容许代数和八元数代数两种手段，某些关于 MA 代数的工作以代数形式主义方法推进到物理学中．

LA 和 MA 代数也源于 Lie 群和约化齐性空间上的微分几何．对一个有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的(连通的) Lie 群 G，决定 G 上所有(左)不变仿射联络(affine connection) ∇ 归结为有定义在 $\mathfrak{g}$ 上的乘法 $\star$ 的所有代数 $(\mathfrak{g},\star)$ 的分类问题；关系由对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$，$\nabla_X Y = X \star Y$ 给出．此时，$(\mathfrak{g},\star)$ 称为 ∇ 的联络代数(connection algebra)．这些扭自由的联络对应有 $(\mathfrak{g},\star)^- = \mathfrak{g}$ 的 LA 代数 $(\mathfrak{g},\star)$(即 $X\star Y - Y \star X = [X,Y]$)([A14])．此外，如果 ∇ 的**曲率张量**(curvature tensor)是零(亦即，∇ 平坦)，那么 $(\mathfrak{g},\star)$ 满足左对称恒等式(left-symmetric identity)

$$X\star(Y\star Z)-(X\star Y)\star Z = Y\star(X\star Z)-(Y\star X)\star Z.$$

G 上的左不变仿射结构的分类归结为具有 $(\mathfrak{g},\star)^- = \mathfrak{g}$ 的左对称代数 $(\mathfrak{g},\star)$ 的分类([A15])．G 上 ∇ 的其他几何性质，诸如短程线、完整、伪 Riemann 结构和无穷小生成子可用 $(\mathfrak{g},\star)$ 的术语刻画．例如，如果 $\mathfrak{g}$ 中每个向量场是一个对于 ∇ 的 G 上仿射微分同胚的单参量群的一个无穷小生成子，则 ∇ 的联络代数 $(\mathfrak{g},\star)$ 是 FLA([A14])．

设 G/H 是个约化**齐性空间**(homogeneous space)，有确定的分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$(直和)，其中 $\mathfrak{h}$ 是 G 的一个闭 Lie 子群 H 的 Lie 代数，$\mathfrak{m}$ 是使得 $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ 的子空间(或，等价地，$(\mathrm{Ad}H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$)．在 G/H 上 G 不变的仿射联络 ∇ 的集合与满足 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{m},\star)$(即 $\mathrm{Ad}\,H$ 包含在 $(\mathfrak{m},\star)$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{m},\star)$) 的代数 $(\mathfrak{m},\star)$ 的集合之间有一个一一对应．对于 $X, Y \in \mathfrak{m}$，$[X, Y]$ 到 $\mathfrak{m}$ 上的投影 XY 把 $\mathfrak{m}$ 转化成一个反交换代数 $(\mathfrak{m}, XY)$，称为约化代数(reductive algebra)．更一般地，代数 $\mathfrak{A}$ 称为是约化容许的(reductive admissible)，如果 $\mathfrak{A}^-$ 同构于对一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的某个约化分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$ 的 $(\mathfrak{m}, XY)$．这些 G/H 上的扭自由的联络对应满足 $(\mathfrak{m},\star)=(\mathfrak{m},XY)$，且 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{m},\star)$，或 $\mathrm{Ad}H \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{m},\star)$ 的约化容许代数 $(\mathfrak{m},\star)$．任意 MA 代数 $\mathfrak{A}$ 都是满足 $\mathfrak{g}=\mathfrak{A}^- \oplus d(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 的约化容许的，其中 $\mathfrak{g}$ 是对任意 $X, Y \in \mathfrak{A}$ 及 $D, D' \in d(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ 有乘法

$$[X+D, Y+D'] = [X,Y]+D(Y)-D'(X)+d(X,Y)+ \\ +[D,D']$$

的 Lie 代数．G/H 上 ∇ 的几何性质，如上所述可用联络代数 $(\mathfrak{m},\star)$ 刻画．关于这些的详细解释，见[A15]-[A17])．

参考文献

[A1] Albert, A. A., Power associative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 552-593.

[A2] Myung, H.C., Malcev-admissible algebras, Birkhäuser, 1986.

[A3] Laufer, P.J. and Tomber, M.L., Some Lie admissible algebras, *Canad. J. Math.*, **14** (1962), 287-292.

[A4] Myung, H.C., Some classes of flexible Lie-admissible algebras, *Trans. Amer. Math. Soc*, **167** (1972), 79-88.

[A5] Okubo, S. and Myung, H.C., Adjoint operators in Lie algebras and the classification of simple flexible Lie-admissible algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **264** (1981), 459-472.

[A6] Benkart, G.M. and Osborn, J.M., Flexible Lie-admissible algebras, *J. of Algebra*, **71** (1981), 11-31.

[A7] Benkart, G.M., Power-associative Lie-admissible algebras, *J. of Algebra*, **90** (1984), 37-58.

[A8] Santilli, R.M., Lie-admissible approach to the hadronic structure, II, Hadronic Press, 1982.

[A9] Santilli, R. M., Foundations of theoretical mechanics, II, Springer, 1982.

[A10] Osborn, J.M., The Lie-admissible mutation $A(r,s)$ of an associative algebra A, *Hadronic J.*, **5** (1982), 904-930.

[A11] Santilli, R.M., Imbedding of Lie algebras in nonassociative structures, *Nuovo Cimento A* (10), **51** (1967), 570-576.

[A12] Okubo, S., Non-associative quantum mechanics via flexible Lie-admissible algebras, in R. Casabuoni, G. Domokos and S.Koveski-Domokos (eds.): Proc .Third Workshop Current Problems in High Energy Physics,

Johns Hopkins Univ. Press., 1979, 103－120.

[A13] Okubo, S., Classification of flexible composition algebras Ⅰ, Ⅱ, *Hadronic J.*, **5** (1982), 1564－1612.

[A14] Myung, H.C. and Sagle, A. A., Lie-admissible algebras and affine connections on Lie groups, in S. A. Park (ed.): Proc. Workshops in Pure Math., Vol. 7, Algebraic Structures, Pure Math. Res. Assoc., 1988, 115－148.

[A15] Kim, H., Complete left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups, *J. Differential Geom*, **24** (1986), 373－394.

[A16] Sagle, A. A., Invariant Lagrangian mechanics, connections and non-associative algebras, *Algebra, Groups Geom.*, 3 (1986), 199－263.

[A17] Myung, H.C. and Sagle, A. A., On the construction of reductive Lie-admissible algebras, *J. Pure Appl. Algebra*, **53** (1988), 75－91.

H.C. Myung 撰　牛凤文 译　邓邦明 校

Lie 代数 [Lie algebra; Ли алгебра]

一个有单位元的交换环 k 上的酉 k 模 L，带有一个 $L\times L$ 到 L 的满足下列二性质的双线性映射 $(x, y)\mapsto[x, y]$:

1) $[x, x]=0$ (从而有反交换律 $[x, y]=-[y, x]$);

2) $[x,[y, z]]+[y,[z, x]]+[z,[x, y]]=0$ (Jacobi 恒等式 (Jacobi identity)).

于是，一个 Lie 代数是 k 上的一个代数 (通常不交换)；按常规方法可定义子代数、理想、商代数和 Lie 代数的同态等概念. 一个 Lie 代数说是交换的 (commutative)，如果对任意 $x, y\in L$ 都有 $[x, y]=0$.

最重要的情形是 k 为域 (特别是当 $k=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时) 且 L 是 k 上向量空间 (有限维或无穷维) 的情形.

19 世纪末在数学上出现了 Lie 代数，它与 Lie 群的研究密切相关 (见 **Lie 群** (Lie group)，亦见**局部 Lie 群** (Lie group, local)；**Lie 变换群** (Lie transformation group)；**Lie 定理** (Lie theorem))，且更早一些时候，它曾以含蓄形式出现在力学中. 这个概念出现的一个共通先决条件是“无穷小变换”概念，它至少可追溯到微积分学的发端时代. Hamilton 方程的类 C^2 的积分对于满足 Jacobi 恒等式的 Poisson 括号是封闭的，这一现象是可用 Lie 代数语言表述的最早的事实之一 (见 [8], [10]). 术语“Lie 代数”是 1934 年由 H. Weyl 引进的 (那时“群的无穷小变换”和“无穷小群”等术语已被使用). 经历着时间的推移，Lie 代数的作用随着 Lie 群在数学 (特别在几何学) 以及在古典力学和量子力学的地位不断上升. 这种情形首先可由 Lie 代数在其他各式各样的泛代数中的特殊地位加以解释. 近年来 (80 年代) Lie 代数不再仅仅被理解为群论问题线性化的有用而有力的工具 (无论是在 Lie 群理论中，还是在一个极有意义的范围内吸引着它且发展速度远远超过它的代数群理论中 (见**代数群** (algebraic group))，还是在相对独立的有限群理论中 (见**有限群** (finite group)))，而且也是线性代数中许多极好而困难的问题的来源.

下面是几个引出 Lie 代数重要例子的来源.

1) 在一般代数的框架中，Lie 代数的意义首先被这样的事实所决定，即任意一个 k 代数 A 的所有导子 (见**环的导子** (derivation in a ring)) 的集合 $\operatorname{Der}(A)$ 是一个具有运算

$$[D_1, D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1$$

的 Lie 代数. Lie 代数 L 的形如

$$\operatorname{ad}x: y\mapsto[x, y],\ x, y\in L$$

的导子称为内导子 (inner derivations) 或伴随变换 (adjoint transformations). 它们在 $\operatorname{Der}(L)$ 中构成一个子代数 $\operatorname{ad}L$，且映射 $x\to\operatorname{ad}x$ 是 Lie 代数 $L\to\operatorname{Der}L$ 的同态 (Lie 代数 L 的伴随表示 (adjoint representation))；它的象 $\operatorname{ad}L$ 同构于 L 对于其中心

$$Z(L)=\{x\in L: [x, y]=0,\ 对所有\ y\in L\}$$

的商代数.

2) Lie 代数的另外一个来源与下面简单的观测有关. 如果 L 是 k 上具有乘法 $(x, y)\mapsto xy$ 的结合代数 (见**结合环与代数** (associative rings and algebras))，那么在 k 模 L 中用规则

$$(x, y)\mapsto[x, y]=xy-yx$$

确定的乘法赋予 L 一个 k 上的 Lie 代数结构. 称 $(L, [\,,\,])$ 是与结合代数 $(L, \cdot)$ 相伴的 Lie 代数. 于是，取 k 上所有 n 阶方阵的 (结合) 代数 $M_n(k)$ 为 $(L, \cdot)$，就得到 Lie 代数的典型例子.

Lie 代数 $M_n(k)$ 的子代数的下述四种类型的无穷系列称为典型的 (classical) Lie 代数 (其中 k 是特征为 0 的域):

$$A_n=\{x\in M_{n+1}(k): \operatorname{tr}x=0\},\ n\geqslant 1;$$

$$B_n=\{x\in M_{2n+1}(k): xB+B^t x=0\},\ n\geqslant 2,$$

$$B=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&0&E_n\\0&E_n&0\end{Vmatrix},\ E_n=\begin{Vmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{Vmatrix}\in M_n(k);$$

$$C_n=\{x\in M_{2n}: xC+C^t x=0\},\ n\geqslant 3,$$

$$C = \left\| \begin{matrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{matrix} \right\| ;$$

$$D_n = \{ x \in M_{2n} : xD + D^t x = 0 \} ,\ n \geqslant 4 ,$$

$$D = \left\| \begin{matrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{matrix} \right\| .$$

有 $\dim A_n = n(n+2)$, $\dim B_n = n(2n+1)$, $\dim C_n = n(2n+1)$, $\dim D_n = n(2n-1)$.

一个值得注意的结果是：在特征为零的代数闭域上，这些代数和维数分别为 14，52，78，133 和 248 的五种例外 Lie 代数 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 一起，在同构的意义下穷尽了全部的 k 上有限维单 Lie 代数（亦即，非交换的且不含异于 0 和自身的理想）（见**例外 Lie 代数**（Lie algebra, exceptional）；**半单 Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple））.

3）再一个 Lie 代数的来源是流形上的向量场（见 [13]，[14] 和**流形上向量场**（vector field on a manifold））. 设 F 是定义在 C^∞ 光滑**流形**（manifold）M 上的 C^∞ 光滑函数环. M 上所有 C^∞ 光滑向量场组成的向量空间 Vect(M)，对于在流形理论中起重要作用的换位算子（见 **Lie 括号**（Lie bracket））作成一个 Lie 代数; Lie 代数 Vect(M) 和 Lie 代数 Der(F) 是一致的. 一般地说，这个代数是无穷维的. 如果 M 是一个 Lie 群，那么 Vect(M) 中由所有左不变向量场组成的子空间是一个有限维子代数，且称之为 Lie 群 M 的 Lie 代数（Lie algebra of the Lie group M）; 它在 Lie 群理论中至关重要，使人们有可能把 Lie 群的很多性质用 Lie 代数的语言叙述出来. 亦见**代数群的 Lie 代数**（Lie algebra of an algebraic group）；**解析群的 Lie 代数**（Lie algebra of an analytic group）.

如果在上面的例子中用域 k 上的形式幂级数作成的交换代数 $\mathcal{O}_n(k) = k[[X_1, \cdots, X_n]]$ 代替 F，那么 Vect(M) 就被代之以一个由微分算子

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial X_i} ,\ f_i \in \mathcal{O}_n(k)$$

组成的形式向量场 Lie 代数 W_n. 由分别零化外微分形式

$$\omega = dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_{n+1} ,$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dX_i \wedge dX_{i+n}$$

的导子组成的子代数 $S_n \subset W_{n+1}$, $H_n \subset W_{2n}$，还有用 $\mathcal{O}_n(k)$ 的元素乘以形式

$$\omega = dX_{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (X_i dX_{i+n-1} - X_{i+n-1} dX_i)$$

得到的导子的子代数 $K_n \subset W_{2n-1}$，和代数 W_{2n} 一起组成无穷维单 Lie 代数的重要类型（Cartan 型 Lie 代数（Lie algebras of Cartan type））. 代数 W_n 称为一般的（general），S_n 称为特殊的（special）. H_n 称为 Hamiltonian，而 K_n 称为切触代数（contact algebra）. 这些代数是 S. Lie 在研究（$k = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）伪变换群时遇到的，然后由于各种原因被 E. Cartan 和其他人加以研究（见 [15]，[17]，[18]，[19]）.

4）下面的一般构造把 Lie $\mathbf{Z}$ 代数 L 和一个群 G 结合起来；可用于群论（见 **Burnside 问题**（Burnside problem），[16]）. 设

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$$

是 G 的下中心链，那么 L 是诸商群 G_i / G_{i+1} 的直和，并且，按定义，二个元素 $\bar{x} \in G_i / G_{i+1}$ 和 $\bar{y} = G_j / G_{j+1}$ 的乘积是 G_{i+j} / G_{i+j+1} 的元素. 即分别是 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 的代表元 $x \in G_i$ 和 $y \in G_j$ 的换位子的陪集. 这个运算用分配律可扩张到 L 的任意元. 关于这个结构亦有某些推广（见 [16]）.

Lie 代数的结构. 一个一般性的结果是 **Birkhoff-Witt 定理**（Birkhoff-Witt theorem），它特别表明了结构 2）在一定意义下具有泛性. 该定理的陈述如下：对域 k 上的任意一个 Lie 代数 L 都有一个结合的 k 代数 U，使得 L 可以被同构地嵌入与 U 相伴的 Lie 代数（U, [,]）中（见泛包络代数（Universal enveloping algebra））.

设 L 是特征零的域 k 上的一个有限维 Lie 代数. 那么 L 是线性的，即同构于某个确定的 Lie 代数 $M_n(k)$ 的一个子代数（Ado 定理（Ado theorem））. 在 L 中存在唯一的一个极大的称之为根基（radical）的可解理想 R（见可解 Lie 代数（Lie algebra, solvable））. 进一步，在 L 中有一个子代数 S（称为 Levi 子代数（Levi subalgebra）），使得 L 是向量空间 S 和 R 的直和，并且任意一个具有此性质的子代数均可由 L 的一个自同构将其变到 S 中（见 Levi-Mal'tsev 定理（Levi-Mal'tsev theorem），亦见 **Levi-Mal'tsev 分解**（Levi-Mal'tsev decomposition））. 这样的子代数 S 是半单的（亦即，根基等于 0），并且可以被刻画为 L 的一个极大半单子代数. 因此，L 是一个半单子代数和一个可解子代数的半直和，这就把特征为 0 的域上的有限维 Lie 代数的分类问题归结为刻画这两种类型的 Lie 代数以及半单 Lie 代数在一个可解 Lie 代数上的作用（通过 S 在 L 中的伴随表示对 R 的限制实现）. 尽管可解 Lie 代数在一定意义下可由具平凡结构的 1 维 Lie 代数得到（亦即，它们有子代数链 $L = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_n = 0$，使 L_i 是 L_{i-1} 的理想，且 L_{i-1}/L_i 是一维的），但其结果是如此之复杂，以至直到现在还没有一个关于可解 Lie 代数分类问题的适

当的形式. 与此相反, 特征为零的域上的有限维半单 Lie 代数可以被完全刻画出来(见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)): 任意一个这样的代数均分裂为单代数作为理想的直和(而且, 反过来, 单 Lie 代数的直和是半单的). 在代数闭域情形下, 单 Lie 代数已被完全列出(见上面的2)); 对任意域的情形, 存在着一个程序, 可在许多情形下(例如对 $k=\mathbf{R}$)得到它们的分类.

特征为 $p>0$ 的域上的有限维 Lie 代数(即使对代数闭域)尚未研究得如此详细. 这些 Lie 代数有很多特殊的性质. 例如甚至半单代数用单代数来刻画都不是平凡的(见[23]). 对任意 p 存在着单 Lie 代数的参数族, 使得取自不同族的每对单 Lie 代数互不同构. 特征 p 的 Lie 代数的理论正在开创中, 它奇妙地反映了对应于本原 Lie 伪群的两类不同的复 Lie 代数, 即有限维单代数和有限维可迁单代数的特性(见[17], [18], [19]).

无穷维 Lie 代数的研究始于 19 世纪, 与有限维 Lie 代数的研究同时. 这些代数自然地出现在 Cartan 在 1909 年([20])创立的本原伪变换群的分类中. 这些代数有一个滤结构, 其相关的分次 Lie 代数形如 $\oplus_{i=-1}^{\infty}G_i$, 而且是可迁的. 无穷维 Lie 代数是一个强有力的研究对象, 该研究不仅揭示了 Lie 代数与几何问题的联系, 也揭露了与其他很多数学分支的联系(见**分次 Lie 代数**(Lie algebra, graded), 亦见[17], [18], [22]). 无穷维 Lie 代数的例子最近出现在数学物理和形式变分学的某些方程的理论中(如 Korteweg-de Vries 方程)(见[14]).

无穷维 Lie 代数的抽象理论(例如, 见[9])现在处于发展的初始阶段. Lie 代数的表示论在 Lie 代数的结构理论和物理学的大部分应用中起重要作用.

亦见**超代数**(superalgebra); **Lie 代数簇**(Lie algebras, variety of).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975(译自法文).

[2] Jacobson, N., Lie algebra, Interscience, 1962(中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[3] Kaplansky, I., Lie algebras and locally compact groups, Chicago Univ. Press, 1971.

[4] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations, Interscience, 1966.

[5] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973(中译本: 庞特里亚金, 连续群(上)(下), 科学出版社, 1957).

[6] Thèorie des algèbras de Lie. Topologie des groupes de Lie, in Sem. S. Lie, Ecole Normale Super., 1962.

[7] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[8] Chevalley, C., Théoric des groupes de Lie, 3, Hermann, 1955.

[9] Amoyo, R. K. and Stewart, I., Infinite-dimensional Lie algebras, Noordhoff, 1974.

[10] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972(中译本: J. E. 汉弗莱斯, 李代数及其表示理论导引, 上海科学技术出版社, 1981).

[11] Seligman, G. B., Modular Lie algebras, Springer, 1967.

[12] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974.

[13] Godbillon, C., Géometrie differentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

[14] Дубровин, Б. А., Новиков, С. П., Фоменко, А. Т., Современная геометрия, М., 1979(英译本: Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T. and Novikov, S. P., Modern geometry, Springer, 1984).

[15] Международный конгресс математиков. Ницца., 1970, Доклады советских математиков, М., 1972, 111-117.

[16A] Кострикин, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **21** (1957), 289-310.

[16B] Кострикин, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23** (1959), 3-34.

[16C] Кострикин, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **34** (1970), 744-756.

[17] Guillemin, V. and Sternberg, S., An algebraic model of transitive differential geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 16-47.

[18A] Кац, В. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **32** (1968), 1323-1367.

[18B] Кац, В. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **38** (1974), 800-834.

[19] Кострикин, А. И., Шафаревич, И. Р., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **33** (1969), 251-322.

[20] Cartan, E., Les groupes de transformations continues, infinis, simples, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup*, **26** (1909), 93-161.

[21] Lazard, M., Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup*, **71** (1954), 101-190.

[22] Singer, I. M. and Sternberg, S., The infinite groups of Lie and Cartan, Part Ⅰ (the transitive groups), *J. d'Anal. Math.*, **15** (1965), 1-114.

[23] Block, R. E., Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal, *Ann. of Math.* (2), **90** (1969), 433-459.

А. И. Кострикин, В. Л. Попов 撰

【补注】 现在设 k 的特征 $p>0$. 一个特征 $p(p>0)$ 的典型单 Lie 代数乃是特征 0 时相应于根系 A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 的单代数中某一个的

“类似”. 其例子可以通过取这些代数之一的 Chevalley 基而得到; 这就给出了定义在 $\mathbf{Z}$ 上的一个翻版 (也就是一个形式, 见**代数结构的形式** (form of an (algebraic) structure); 把这组基元的乘法表的系数模 p 约化就得到 $\mathbf{Z}/(p)$ 上的一个 Lie 代数; 如果必要, 约去该 $\mathbf{Z}/(p)$ 上代数的中心; 标量扩张到 $k \supset \mathbf{Z}/(p)$.

特征 $p>0$ 的典型代数把五种例外型 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 也算进去可能有些混乱. 典型 Lie 代数也可以用 Mills-Seligman 公理 (Mills-Seligman axioms) 刻画 ([11]): 如果 $\mathfrak{g}$ 是单的 (而且是有限维的), 并且有一个 **Cartan 子代数** (Cartan subalgebra) $\mathfrak{h}$, 它对角地作用在每个根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 上; 进一步, 如果对每个根 $\alpha \neq 0$ 都有 $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]=1$, 并且如果 $\alpha, \beta \neq 0$ 都是根时并非所有 $\alpha+i\beta$ $(i \in \mathbf{Z})$ 都是根, 那么 $\mathfrak{g}$ 是典型的. 一个带有非退化迹型的投射表示的单 Lie 代数是典型的 (反之亦然). 如果 k 是代数闭域, 典型单 Lie 代数可由它们的 Dynkin 图进行分类, 而在一个特征为 $p>0$ 的任意 (完全) 域 k 上的分类可从形式论 (见 (**代数**) **结构的形式** (form of an (algebraic) structure)) 入手. 例如, 在有限域上可以找到下述一系列 (不同构的) 形式 (对 $p \neq 2, 3$):

型 A_1, B, C, G_2, F_4, E_7, E_8: 1;

型 $A_n (n>1)$, $D_n (n>4)$, E_6: 2;

型 D_4: 3.

在特征 $p>0$ 的域 k 上, 除了典型单 Lie 代数外, 还有很多单代数. 某些在 Witt **代数** (Witt algebra) 中被描述, 而其余的所有已知的单 Lie 代数都是 Cartan 型单 Lie 代数 (simple Lie algebras of Cartan type). 它们是 W, S, H, K 型无穷维 Lie 代数和 Cartan 代数 (扭的) 类比, 并作为如下定义的导代数 $W(m; \mathbf{n})$ 的 (扭的) 子代数出现.

在多项式代数 $k[X_1, \cdots, X_m]$ 上定义 $\mu(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$ 得到一个余代数结构 (见**余代数** (coalgebra)) (使 $k[X_1, \cdots, X_m]$ 成为一个 Hopf **代数** (Hopf algebra)). 其对偶代数 $A(m)$ 是一个无穷维的交换结合代数, 由所有形式和 $\sum c_\alpha x^\alpha$ 组成, 其中 α 取遍非负整数的所有 m 元组. 其乘法由

$$x^\alpha x^\beta = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} x^{\alpha+\beta}$$

给出. 对非负整数 $\mathbf{n}$ 的每个 m 元组, 令 $A(m, \mathbf{n})$ 是由 x^α 张成, 其中 i 取遍 $\alpha_i < p^{n_i}$, 则 $A(m; \mathbf{n})$ 是 $A(m)$ 的一个子代数. 设 $W(m, \mathbf{n})$ 是 $A(m; \mathbf{n})$ 的导代数, 则 $W(m, \mathbf{n})$ 是维数为 $m p^{|n|}$ 的单代数, $|\mathbf{n}| = n_1 + \cdots + n_m$. $W(m; (1, \cdots, 1))$ 就是 Jacobson-Witt 代数 W_n, 见 Witt **代数** (Witt algebra). 对 $W(m; \mathbf{n})$ 的各种 (扭的) S, H, K 型子代数的描述见 [A4] – [A7]. 它们是 Cartan 型 Lie 代数. 广义 Kostrikin-Shafarevich 猜想 (generalized Kostrikin-Shafarevich conjecture) 称域 k 上的每个单 Lie 代数都是典型的或 Cartan 型的.

k 上的限制 Lie 代数 (restricted Lie algebra) $\mathfrak{g}$, 是对任意 $x \in \mathfrak{g}$ 均有 $y \in \mathfrak{g}$, 使 $(\mathrm{ad}(x))^p = \mathrm{ad}(y)$ 的代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 是单的, 则 y 是唯一的. 最初的 Kostrikin-Shafarevich 猜想 (Kostrikin-Shafarevich conjecture) 认为, 每个单的有限维限制 Lie 代数必为典型的或 Cartan 型的. 在特征 $p>7$ 的情形下这已被 R. E. Block 和 R. L. Wilson 证明 ([A5], [A4]).

Cartan 型单 Lie 代数与典型单 Lie 代数有很大差别: 前者有零 Killing 型; 它们的 Cartan 子代数可以任意次幂零且维数不尽相同; 其根子空间可以任意大; β 的 α 根链可包含所有的根 $\beta + i\alpha$ $(i=0, \cdots, p-1)$; 对于一个给定的维数可能有无穷多个互不共轭的 Cartan 子代数, 见 [A8] – [A11].

参考文献

[A1] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[A2] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras and their representations, Prentice Hall, 1974.

[A3] Britten, D. J. and Lemire, F. W. (eds.), Lie algebras and related topics, Amer. Math. Soc., 1986.

[A4] Block, R. E. and Wilson, R. L., Classification of restricted simple Lie algebras, *J. of Algebra*, **114** (1988), 115 – 259.

[A5] Block, R. E. and Wilson, R. L., The restricted simple Lie algebras are of classical or Cartan type, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **81** (1984), 5271 – 5274.

[A6] Block, R. E. and Wilson, R. L., Restricted simple Lie algebras, in D. J. Britten and F. W. Lemire (eds.), Lie algebras and related topics, Amer. Math. Soc., 1986, 3 – 18.

[A7] Wilson, R. L., A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic, *J. of Algebra*, **40** (1976), 418 – 465.

[A8] Benkart, G., Cartan Subalgebras in Lie algebras of Cartan type, in D. J. Britten and F. W. Lemire (eds.), Lie algebras and related topics, Amer. Math. Soc., 1986, 157 – 187.

[A9] Block, R. E., New simple Lie algebras of prime characteristic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 421 – 449.

[A10] Brown, G., Cartan subalgebras of Zassenhaus algebras, *Canad. J. Math.*, **27** (1975), 1011 – 1021.

[A11] Strade, H., Cartanalgebren im modularen Liealgebren, *Comm. in Algebra*, **5** (1977), 1335 – 1359.

【译注】 对于特征 $p>7$ 的代数闭域的情形，广义 Kostrinkin-Shafarevich 猜想已被 H. Strade 和 R. E. Wilson 证明是正确的（见[B1]）. 这就是说，在同构意义下，特征 $p>7$ 的代数闭域上有限维单 Lie 代数（不一定是限制的）必是典型的或 Cartan 型的. 至此，素特征 p 的代数闭域上有限维单 Lie 代数的分类问题，在 $p>7$ 时已完全解决.

参考文献

[B1] Strade, H. and Wilson, R. L., Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic. Bulletin Amer. Math. Soc., **24** (1991), 2, 357–362.

牛凤文 译 郝钢新 校

代数的 Lie 代数 [Lie algebra, algebraic; Ли алгебраическая алгебра]

1) 域 k 上有限维向量空间 V 的所有自同构的**一般线性群**（general linear group）的一个代数子群（见**代数群**（algebraic group））的 Lie 代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 是 V 的所有自同态的 Lie 代数的任意一个子代数，则必有包含 $\mathfrak{g}$ 的最小的代数的 Lie 代数；称其为 Lie 子代数 $\mathfrak{g}$ 的代数包（algebraic envelope 或 algebraic hull）. 任意代数闭域 k 上的一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是代数的一个必要条件，是对于每个线性算子 $u\in\mathfrak{g}$，其半单和幂零分量 s 和 n 均属于 $\mathfrak{g}$（见 **Jordan 分解**（Jordan decomposition））. 这个条件决定了所谓殆代数的 Lie 代数（almost-algebraic Lie algebras）. 但是，它不是使 $\mathfrak{g}$ 为代数的 Lie 代数的充分条件. 对于特征为 0 的域 k 的情形，使 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为代数的一个充分必要条件是，对于 n 和 $s=\mathrm{diag}(s_1,\cdots,s_m)$，所有的形如 $\varphi(s)=\mathrm{diag}(\varphi(s_1),\cdots,\varphi(s_m))$ 的算子都在 $\mathfrak{g}$ 中，其中 φ 是 k 到 k 的任意一个 $\mathbf{Q}$ 线性映射. 对于特征数 $p>0$ 的域的情形，[3]研究了代数的代数的结构.

2) 交换环 k 上的一个 Lie 代数 L，在其中对任意 $x\in L$，定义在 L 上的伴随变换 $\mathrm{ad}x: y\to[x,y]$ 是某个首 1 而其余系数取自 k 的多项式的根. 域 k 上的有限维 Lie 代数是个代数的 Lie 代数. 反过来是不成立的：在任意域 k 上都有具有无限多个生成元的无穷维代数的 Lie 代数（[4]）. 在**诣零 Lie 代数**（Lie algebra, nil）类中很多关于代数的 Lie 代数的问题已经解决.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.
[2] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2, Hermann, 1951.
[3] Seligman, G., Modular Lie algebras, Springer, 1967.
[4] Голод, Е. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 273–276.

Ю. А. Бахтурин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hochschild, G., Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer, 1981.

牛凤文 译 邓邦明 校

例外 Lie 代数 [Lie algebra, exceptional; Ли особая алгебра]

非典型的单 Lie 代数（见**半单 Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple））. 在特征为零的代数闭域上有 5 种例外的 Lie 代数：E_6, E_7, E_8, F_4 和 G_2，维数分别是 78、133、248、52 和 14. 指标是这些 Lie 代数的秩. 这些例外 Lie 代数的最简单的线性表示分别有维数 27、56、248、26 与 7. 代数 G_2 是 **Cayley-Dickson 代数**（Cayley-Dickson algebra）的导子代数（见**环中导子**（derivation in a ring）），而 F_4 是唯一的例外的 **Jordan 代数**（Jordan algebra）的导子代数，这里的 Jordan 代数可表成 Cayley-Dickson 代数上 3 阶 Hermite 矩阵代数. 代数 E_6 是导子及用例外 Jordan 代数的元素乘的线性包络. 代数 E_7 和 E_8 及非代数闭域上所有例外 Lie 代数的形式都同样与 Cayley-Dickson 代数相关. 例外 Lie 代数的各种模型可通过它们的用循环群的分次而得到（亦见**分次代数**（graded algebra））. 对应例外 Lie 代数的连通的 Lie 群称为例外群（exceptional groups），经常用同样的字母表示. 例如，复群 G_2 是 $\mathbf{C}$ 上 Cayley-Dickson 代数的自同构群；复群 F_4 是 $\mathbf{C}$ 上例外 Jordan 代数的自同构群.

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962（中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964）.
[2] Jacobson, N., Exceptional Lie algebras, M. Dekker, 1971.
[3] Freudenthal, H., Oktaven, Ausnahmengruppen und Oktavengeometrie, Math. Inst. R. U. Utrecht, 1960.
[4] Rozenfel'd, B. A., Einfache Lie-gruppen und nichteuklidische Geometrie, in Algebraical and topological foundations of geometry, Pergamon, 1962, 135–155.
[5] Винберг, Э. Б., в кн.: Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу…, в. 13, М., 1966, 7–9.
[6] Tits, J., Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionelles I. Construction. *Indag. Mat.*, **28** (1966), 233–237.
[7] Tits, J., Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Springer, 1967.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 见对于 Cartan 矩阵的**半单 Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple）和例外 Lie 代数的 Dynkin 图. 同样的题目也包含了关于任意域上，特别是实数域上，单 Lie 代数的分类信息.

牛凤文 译 邓邦明 校

指数 Lie 代数 [Lie algebra, exponential; Ли экспоненциальная алгебра]，（E）型 Lie 代数（Lie algebra of type (E)）

一个有限维的实 **Lie 代数**（Lie algebra）$\mathfrak{g}$，对它的

每个元素 X，伴随表示(见 **Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group))的算子 ad$X$ 没有纯虚特征值．代数 $\mathfrak{g}$ 到对应的单连通 Lie 群 G 的**指数映射**(exponential mapping)$\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是个微分同胚，且 G 是个**指数 Lie 群**(Lie group, exponential)．

每个指数 Lie 代数都是可解的(见**可解 Lie 代数**(Lie algebra, solvable))．**R** 上的**幂零 Lie 代数**(Lie algebra, nilpotent)是个指数 Lie 代数．指数 Lie 代数类位于所有可解 Lie 数的类和所有超可解(见**超可解 Lie 代数**(Lie algebra, supersolvable))的类中间，它关于子代数、商代数和有限直和是封闭的，但对于扩张不是封闭的．

最简单的指数 Lie 代数但不为超可解 Lie 代数的例子是以 X, Y, Z 为基，用公式

$$[X, Y] = 0, [Z, X] = a_{11} X + a_{12} Y,$$

$$[Z, Y] = a_{21} X + a_{22} Y$$

刻画求法的 3 维 Lie 代数，其中 $[a_{ij}]$ 是个复的但不是纯虚特征值的实矩阵．以 X, Y, Z 为基，以

$$[X, Y]=0, \ [Z, X]=Y, \ [Z, Y]=-X$$

为定义关系的 3 维 lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 是可解的，但不是指数 Lie 代数．

一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是指数的，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的所有根(见**根系**(root system))形如 $\alpha+i\beta$，其中 α 和 β 是 $\mathfrak{g}$ 上实线性型且 β 与 α 成比例(见[1])，或者 $\mathfrak{g}$ 没有商代数能包含一个同构于 $\mathfrak{g}_0$ 的子代数．

可参考**指数 Lie 群**(Lie group, exponential)．

В. В. Горбацевич 撰 牛凤文 译 邓邦明 校

自由 Lie 代数[Lie algebra, free; Ли свободная алгебра]，环 R 上的

可指出自由生成集 X 的 **Lie 代数**(Lie algebra) $L=L(X)$，从 X 到 R 上的任意代数 G 的映射均可扩张成 L 到 G 的同态．X 的基数完全决定了 $L(X)$，称为 $L(X)$ 的秩(rank)．一个自由 Lie 代数是一个自由 R 模(其基，见**基本换位子**(basic commutator))．域上自由 Lie 代数的一个子代数本身也是自由 Lie 代数(Ширшов 定理(Shirshov theorem)，[1])．如果 $R=\mathbf{Z}$，那么此事只有在 L/M 是自由 Abel 群的条件下才成立([2])．域上一个自由 Lie 代数的所有有限生成的子代数构成其所有子代数格的一个子格([3])．W. Magnus([4])建立了自由 Lie 代数与自由群及与自由结合代数二者之间的关系．

参考文献

[1] Ширшов, А. И.,《Матем. сб.》, **33**(1953), 2, 441－452.

[2] Witt, E., Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, *Math. Z.*, **64**(1956), 195－216.

[3] Кукин, Г. П.,《Алгебра и логика》, **16**(1977), 5, 577－585.

[4] Magnus, W., Ueber Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, *J. Reine Angew. Math.*, **177**(1937), 105－115.

[5] Bakhturin, Yu. A., Identical relations in Lie algebras, VNU, 1987(译自俄文).

Ю. А. Бахтурин 撰

【补注】 可以从由 X 生成的自由结合代数 $A(X)$ 开始去构造 $L(X)$，先把 $A(X)$ 取 Lie 乘 $[a, b]=ab-ba$ 作成 Lie 代数 $A(X)$．于是 $L(X)$ 是 $A(X)$ 的由 X 生成的 Lie 子代数，而 $A(X)$ 是 $L(X)$ 的泛包络代数(universal enveloping algebra)．

在 R 是特征为 0 的域时，关于 $A(X)$ 的哪些元素属于 $L(X)$，由 Specht - Wever 定理(Specht - Wever theorem)和 Friedrichs 定理(Friedrichs theorem)分别给出更明确的结果．前者指出，一个 m 次的齐次元 a 属于 $L(X)$，当且仅当 $\sigma a=ma$，其中 $\sigma: A(X) \to L(X)$ 是由对 $x_{ij} \in X$，

$$\sigma(x_{i_1} \cdots x_{i_m})=[[\cdots[x_{i_1}, x_{i_2}]\cdots], \ x_{i_m}]$$

定义的线性映射．Friedrichs 定理指出，对于 X 有限情形，$a \in A(X)$ 属于 $L(X)$，当且仅当 $\delta a=a\otimes 1+1\otimes a$，其中 δ 是对任意 $x \in X$ 由 $\delta x=x\otimes 1+1\otimes x$ 定义的 $A(X) \to A(X)\otimes A(X)$ 同态．

自由 Lie 代数是 Campbell - Baker - Hausdorff 公式在其最一般形式下的最佳阐述．

参考文献

[A1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962(中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[A2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975(译自法文).

牛凤文 译 邓邦明 校

全可解 Lie 代数[Lie algebra, fully - solvable; треугольная алгебра Ли]

同**超可解 Lie 代数**(Lie algebra, supersolvable)．

分次 Lie 代数[Lie algebra, graded; Ли градуированная алгебра]

由一个交换群 A 来分次的域 K 上的 **Lie 代数**(Lie algebra) $\mathfrak{g}$，分解成子空间 $\mathfrak{g}_\alpha(\alpha\in A)$ 的直和，满足 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$．如果 A 是一个**序群**(ordered group)，则对于每个滤 Lie 代数(见**滤代数**(filtered algebra))，其相伴**分次代数**(graded algebra)就是一个分次 Lie 代数．

分次 Lie 代数在有限维单 Lie 代数，Jordan 代数及其推广，以及本原伪变换群的分类中起重要作用(见[3]，[4])．对于任意的实半单 Lie 代数，其 **Cartan 分解**(Cartan decomposition)可以认为是 $\mathbf{Z}_2$ 分次的．对称 Riemann 空间的局部分类可归结为 $\mathbf{Z}_2$ 分次

的复单 Lie 代数的分类([6]).

某些分次 Lie 代数的结构. 1) 设 U 是一个有递增滤子(U_k: $k\in\mathbf{Z}$)的结合代数(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)). 假定 $[U_k, U_l]\subset U_{k+l-d}$, 其中 d 是一个固定的自然数, 再设 $\mathfrak{u}_k=U_{k+d}/U_{k+d-1}$. 那么 U 中的换位子运算在空间 $\mathfrak{u}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{u}_k$ 上诱导出一个 $\mathbf{Z}$ 分次 Lie 代数结构. 用这种办法可以得到一些以 **Poisson 括号**(Poisson brackets)为换位子的函数 Lie 代数. 在以下二例中, 对于 $k>0$, $U_k=U_1^k$; 对于 $k<0$, $U_k=0$. a) 设 U 是具有多项式系数的线性微分算子作成的代数, 而 U_1 是由它的生成元 $p_i=\partial/\partial x_i$, $q_i=x_i(i=1,\cdots,m)$ 张成的子空间. 那么 $[U_k, U_l]\subset U_{k+l-2}$, 且 $\mathfrak{u}$ 是以 p_i 和 q_i 的多项式为元素, 以通常的 Poission 括号为换位子运算的 Lie 代数. b) 设 U 是有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的**泛包络代数**(universal enveloping algebra), 且 $U_1=\mathfrak{g}$. 那么, $[U_k, U_l]\subset U_{k+l-1}$, 且 $\mathfrak{u}$ 典范同构于 $\mathfrak{g}$ 上的对称代数(作为向量空间), 也就是对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上的多项式代数. (Poincaré-Birkhoff-Witt 定理(Poincaré-Birkhoff-Witt theorem)). 如果 $\mathfrak{g}$ 是连通 Lie 群 G 的 Lie 代数, 那么 $\mathfrak{u}$ 的元素的换位子可以看作是在余切丛 T^*G 上对应的左不变函数的 Poisson 括号, 或者是在余伴随表示的轨道上的 Poisson 括号, 这一表示由轨道上的标准辛结构所确定.

2) 设 $\mathrm{Char}\,k\neq 2$, 而 E 是 k 上一个带有非奇异二次型 Q 的 n 维向量空间; 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 E 的一个正交基. **Clifford 代数**(Clifford algebra) $C(Q)$ 到一维子空间 $\langle e_{i_1},\cdots,e_{i_k}\rangle$ $(i_1<\cdots<i_k)$ 的和的分解, 是它的一个 $\mathbf{Z}_2^n$ 分次. 对于 $n=2m$, 代数 $C(Q)$ 的迹为零的元素构成一个 A_N 型的单分次 Lie 代数, $N=2^m-1$; 它的分次是高度对称的; 特别地, 所有的分次子空间都是等价的. 类似的分次(用各种有限群)对于其它单 Lie 代数亦存在([1]).

3) 每个变换 Lie **伪群**(pseudo-group)对应一个向量场 Lie 代数. 该 Lie 代数在任意点的芽 l 有一个自然的 $\mathbf{Z}$ 滤结构

$$l=l_{-1}\supset l_0\supset l_1\supset\cdots,$$

其中 l_k 包含那些向量场的芽, 其坐标可展成不含有低于 $k+1$ 次项的幂级数. 它的相伴分次 Lie 代数可看作多项式向量场的 Lie 代数.

单分次 Lie 代数的分类. 下面四个系列的单的无限维分次 Lie 代数对应着单的本原 Lie 伪群(见[5]):

W_n, n 维仿射空间上所有多项式向量场作成的 Lie 代数;

S_n, W_n 中由散度为零的向量场组成的子代数;

H_n, 此处 $n=2m$, W_n 中由零化微分形式

$$\sum_{i=1}^{m}dx_i\wedge dx_{m+i}$$

的向量场(Hamilton 向量场)组成的子代数.

K_n, 此处 $n=2m+1$, W_n 中由微分形式

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{m+i}dx_i-x_idx_{m+i})+dx_n$$

乘以一个函数的向量场组成的子代数.

在特征 $p>0$ 的域上可以定义类似于 W_n, S_n, H_n 和 K_n 的有限维单分次 Lie 代数(见[5]).

用下列方法可以得到其他类型的单分次 Lie 代数([4]). 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ 是由一个不可分解的 Cartan 矩阵 $A=\|a_{ij}\|(i,j=1,\cdots,n)$ 确定的 Lie 代数(从现在起使用 **Cartan 矩阵**(Cartan matrix)条款). 代数 $\mathfrak{g}$ 具有一个使得 $h_i\in\mathfrak{g}_0$, $e_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ 的 $\mathbf{Z}^k$ 分次, 其中 α_i 是第 i 个位置为 1 的行 $(0\cdots1\cdots0)$. 使 $\mathfrak{g}_\alpha\neq 0$ 的元素 $\alpha\in\mathbf{Z}^n$ 称为根, 而 α_i 称为单根. 任意根都是单根的带同号整系数的线性组合, 且对任意 $\alpha\in\mathbf{Z}^n$, $\dim\mathfrak{g}_\alpha<\infty$. $\mathfrak{g}$ 对于其中心(它含在 $\mathfrak{g}_0$ 中)的商代数 $\mathfrak{g}'(A)$ 作为分次代数是单的, 即不含非平凡的分次理想.

设 R 是正系数矩阵 A 的行向量的线性组合的全体. 那么, 下列情形之一成立:

(P) R 含一行, 其所有元素都是正的;

(Z) R 含一个零行;

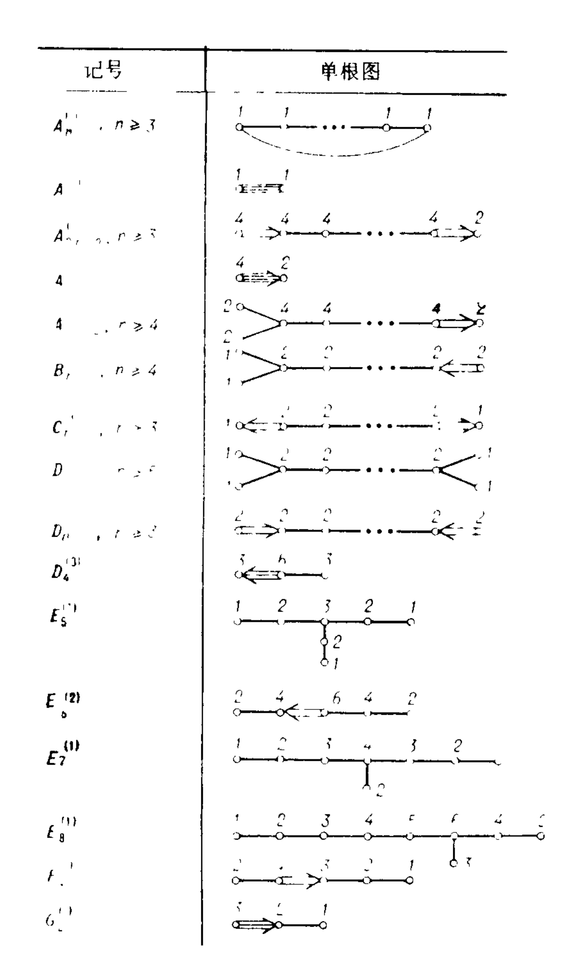
(N) R 含一行, 其所有元素非负.

在情形(P)下, $\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{g}'(A)$ 是有限维单 Lie 代数. 在情形(N)下, $\mathfrak{g}(A)$ 是无限维单 Lie 代数. 在情形(Z)下, 代数 $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'(A)$ 仅仅作为分次代数是单的. 它可以转换成一个 $K[u,u^{-1}]$ 代数, 使得: a) $u\mathfrak{g}'_\alpha=\mathfrak{g}'_{\alpha+\nu}$, 其中 ν 是正整数的行; 且 b) 商代数 $\mathfrak{g}'/(1-u)\mathfrak{g}'=\bar{\mathfrak{g}}$ 是有限维单 Lie 代数. 行 ν 的诸分量 ν_i 的最大幺因子等于 1, 2 或 3, 称为代数 $\mathfrak{g}'$ 的**指数**(index of the algebra $\mathfrak{g}'$).

下面的表是带有(Z)型 Cartan 矩阵的所有单分次 Lie 代数的细目. 这里代数 $\mathfrak{g}'$ 用与之相伴的单有限维 Lie 代数 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的相同的符号表示, 但用括号附加其指数.

单根的图刻画了矩阵 A. 它的顶点与单根对应; 第 i 个和第 j 个顶点用 $(a_{ij}a_{ji})$ 重边相连, 如果 $|a_{ij}|>|a_{ji}|$, 则方向是由顶点 i 到顶点 j, 而若 $|a_{ij}|=|a_{ji}|$, 则无向. 顶点上方标上数 ν_i.

以具有(Z)型 Cartan 矩阵的分次 Lie 代数为工具可进行 $\mathbf{Z}_m$ 分次有限维单 Lie 代数的分类(见[4], [2]). 换言之, 设 $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'(A)$, 其中 A 满足条件(Z), 设 p: $\mathbf{Z}^n\to\mathbf{Z}$ 是使 $p(\alpha_i)\geqslant 0$ 且 $p(\nu)=m$ 的同态. 那么对任意 $k\in\mathbf{Z}$, $\mathfrak{g}'_k=\sum_{p(\alpha)=k}\mathfrak{g}'_\alpha$ 被同构地映到子空间 $\bar{\mathfrak{g}}_k\subset\bar{\mathfrak{g}}$ 上. 它仅由 k 模 m 的剩余



类确定，且分解 $\bar{\mathfrak{g}}=\sum_{k=0}^{m-1}\bar{\mathfrak{g}}_k$ 是 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的 $\mathbf{Z}_m$ 分次．如果域 K 是代数闭的，那么用上述方法，可以不重复地得到 K 上所有 $\mathbf{Z}_m$ 分次的有限维单 Lie 代数．$\mathfrak{g}'$ 的指数等于代数 $\bar{\mathfrak{g}}$ 模去内自同构群的自同构 $\theta: x\mapsto(\exp(2\pi ik/m))x,\ x\in\mathfrak{g}_k$ 的阶数．

满足下述条件的 $\mathbf{Z}$ 分次单 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}_k$ 有一个分类：a）对某个 C 和 N，$\dim\mathfrak{g}_k\leqslant C|k|^N$；b）$\mathfrak{g}$ 由子空间 $\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ 生成；c）$\mathfrak{g}_0$ 在 $\mathfrak{g}_{-1}$ 上的表示是不可约的．在这种情况下，$\mathfrak{g}$ 是有限维的，或者是代数 W_n, S_n, H_n, K_n 之一，或者是由（Z）型 Cartan 矩阵定义的，带有一个适当的 $\mathbf{Z}$ 分次的代数 $\mathfrak{g}'(A)$，见[4]．

一个 **Lie 超代数**（superalgebra）有时称为 $\mathbf{Z}_2$ 分次 Lie 代数．

参考文献

[1] Алексеевский А. В.,《Функциональный анализ и его приложения》, 8 (1974), 4, 1 – 4.

[2] Винберг, Э. Б.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 40 (1976), 3, 488 – 526.

[3] Кантор, И. Л.,《Тр. семинара по векторному и тензорному анализу…》, 1972, 16, 407 – 499.

[4] Кац, В. Г.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 32 (1968), 6, 1323 – 1367.

[5] Кострикин, А. И., Шафаревич, И. Р.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 33 (1969), 2, 252 – 322.

[6] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ 称为 Kac-Moody 代数（Kac-Moody algebras）；它们与数学和数学物理的很多领域密切相关（见[A2]）．

有时也用分次 Lie 代数（graded Lie algebra）这一名词表达另一种含义．即一个 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}/(2)$ 分次向量空间 $V=\oplus V_i$ 具有乘法

$$[,]: V\times V\to V,$$

使得

$$[V_i, V_j]\subset V_{i+j},$$

$$[x, y]=(-1)^{ij+1}[y, x],\ x\in V_i,\ y\in V_j,$$

且

$$(-1)^{ik}[[x, y], z]]+(-1)^{ji}[[y, z], x]+$$
$$+(-1)^{kj}[[z, x], y]=0.$$

对所有 $x\in V_i$、$y\in V_j$，$z\in V_k$ 成立．也可以说，$V=\oplus V_i$ 有一个分次 Lie 积（graded Lie product）或分次 Lie 括号（graded Lie bracket）．

分次 Lie 括号可以很自然地产生，例如代数和复结构的形变的上同调理论（[A4]）．一个带有分次 Lie 括号的分次向量空间 V 不是通常意义下的 Lie 代数．一个 Lie 超代数是一个具有 $\mathbf{Z}/(2)$ 分次 Lie 括号的 $\mathbf{Z}/(2)$ 分次向量空间．

Virasoro 代数（Virasoro algebra）在量子场论的新进展中有根本性的重要地位．这是一个具有基底 L_k $(k\in\mathbf{Z})$ 和 c、以及交换关系

$$[L_m, L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}c$$

的（$\mathbf{Z}$分次）Lie 代数．见[A1]．

参考文献

[A1] Kac, V. G. and Raina, A. K., Bombay lectures on highest weight representations, World Scientific, 1987.

[A2] Kac, V. G., Infinite-dimensional Lie algebras, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A3] Mathieu, O., Classification des algèbres de Lie graduées simples de croissance ≤ 1', *Invent. Math.*, 86 (1986), 371 – 426.

[A4] Hazewinkel, M. and Gerstenhaber, M. (eds.), Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988.

牛凤文 译

线性 Lie 代数 [Lie algebra, linear; Ли линейная алгебра], 域 k 上的

线性 Lie 代数，其元素是 k 上**向量空间** (vector space) V 的线性变换的 **Lie 代数** (Lie algebra) g；元素的加法以及其元素用 k 中元素去乘均按常规定义，而两元素 $x, y \in g$ 的换位子由公式

$$[x, y] = xy - yx$$

给出 (xy 和 yx 为线性变换的通常乘积)．由 V 的所有线性变换组成的线性 Lie 代数记成 $\mathfrak{gl}(V)$．如果 $V = k^n$，$\mathfrak{gl}(V)$ 可自然地等同于 k 上所有 n 阶方阵的集合，并记为 $\mathfrak{gl}(n, k)$．任意线性 Lie 代数必为某个 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数．

例 1) 设 V 有结合代数结构．那么 V 的所有导子 (见**环中的导子** (derivation in a ring)) 构成一个线性 Lie 代数．如果 V 是一个 Lie 代数，那么对于一个固定元素 $x \in V$，由公式 $y \to [x, y]$，$y \in V$，定义的与 x 相伴的 V 上线性变换是 V 的一个导子，把它记成 $\mathrm{ad}\, x$．集合

$$\mathrm{ad}\, V = \{\mathrm{ad}\, x : x \in V\}$$

是个线性代数，称为 V 的伴随线性 Lie 代数 (adjoint linear Lie algebra) 或内导子 Lie 代数 (Lie algebra of inner derivations)．2) 设 k 是个域且对某个非平凡的绝对值是完全的，设 V 是 k 上完全赋范空间，并设 G 是 V 的变换的线性 Lie 群 (linear Lie group)，即 V 的所有自同构的 Lie 群的一个 Lie 子群，那么解析群 G 的 Lie 代数 (见**解析群的 Lie 代数** (Lie algebra of an analytic group)) 可自然地与 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个 Lie 子代数等同起来，即它是一个线性 Lie 代数．

任意一个有限维 Lie 代数到某个线性 Lie 代数的同构映射的存在性问题，在关于群论和 Lie 代数的第一批论文中就已经提出了，但到 1935 年才由 Ado 定理 (Ado theorem) 正面解答 (见 [4])：特征 0 的域上的每个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 都有一个忠实的有限维表示 ρ (进一步，如果 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的最大幂零理想，可选择 ρ 使 $\rho(\mathfrak{n})$ 的所有元素都幂零，亦见 **Lie 代数的表示** (representation of a Lie algebra))．一般地，这个定理对于 Lie 群的类推不一定成立；例如，2 阶实的幺模矩阵群的**万有覆叠** (universal covering) 没有忠实的线性表示．

亦见**代数的 Lie 代数** (Lie algebra, algebraic)．

参考文献

[1] Понтрягин, Л.С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本：Л．С．庞特里雅金，连续群 (上) (下)，科学出版社，1957)．

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison - Wesley, 1975 (译自法文)．

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965．

[4] Адо, И.Д., 《Успехи матем. наук》, **2** (1947), 6, 159 – 173．

В.Л.Попов 撰　牛凤文 译　邓邦明 校

局部 Lie 代数 [Lie algebra, local; Ли локальная алгебра]

局部 Lie 代数的元素是光滑实流形 M 上的光滑函数 (或更一般地说，是 M 上光滑向量丛 E 的光滑截面)，其换位子运算在 C^∞ 拓扑下连续且有局部特性，即

$$\mathrm{supp}\,[f_1, f_2] \subset \mathrm{supp}\, f_1 \cap \mathrm{supp}\, f_2,$$

其中 f 是函数 (截面) f 的支集．对于有一维纤维的向量丛 E (特别地，对通常函数)，局部 Lie 代数的完全分类是已知的 (见 [3])．事实上，在这种情况下，换位子运算是一阶的双可微算子，其形式如下：

$$[f_1, f_2] =$$

$$= \sum_{i,j} c^{ij}(x)\partial_i f_1 \partial_j f_2 + \sum_k a^k(x)\,(f_1 \partial_k f_2 - f_2 \partial_k f_1),$$

其中 $\partial_i = \partial / \partial x^i$ 是对 M 上的局部坐标的偏导数．其次，设 $P(x)$ 是由向量

$$a(x) = \sum_k a^k(x)\partial_k \text{ 和 } c^i(x) = \sum_j c^{ij}(x)\partial_j,$$

$$i = 1, \cdots, n$$

生成的 $T_x M$ 的子空间，$T_x M$ 是 M 在点 x 处的切空间，则广义函数 $\{P(x): x \in M\}$ 是可积的，故 M 可以分解成积分流形的并 $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$．换位子运算与到 M_α 上的限制可交换，并且由此在 M_α 上引起的局部 Lie 代数的结构在以下意义下可迁的，即对于任意点 x，$P(x)$ 与包含 x 的积分流形 M_α 的切空间重合．

如果不计基和纤维中变元的变换，每个可迁局部 Lie 代数由基础流形的维数局部地确定．对于偶数维的流型，它同构于 **Poisson 括号** (Poisson brackets) 代数，而对于奇数维流形，它同构于 Lagrange 括号代数 (见 **Lagrange 括号** (Lagrange bracket)，亦见 [1])．

局部 Lie 代数的一个例子是 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的 Lie 代数结构，它可以说明一般的理论，其中

$$[f_1, f_2] = \sum_{i,j,k} c_k^{ij} x^k \partial_i f_1 \partial_j f_2,$$

这里 c_k^{ij} 是 n 维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的结构常数 (见 [2])．此时，流形 $M = \mathbf{R}^n$ 自然地等同于 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$，而到子流型 M_α 的划分重合于 $\mathfrak{g}^*$ 到**余伴随表示** (coadjoint representation) 的轨道的划分．

局部 Lie 代数是作为一类无穷维 Lie 群的 Lie 代数出现的．特别地，它们是在 J. F. Ritt 意义下的微分群的 Lie 代数 ([4])．[5] 刻画了与具有 2 维纤维的线上的丛相联系的局部 Lie 代数．所有这样的局部 Lie 代数都是 Lagrange 括号代数 (在这种情况下，与

向量场的 Lie 代数重合)用一个带有一维纤维的平凡局部 Lie 代数所作的扩张. [6] 给出了"单纯"局部 Lie 代数的一个分类.

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Математические методы классической физики, М., 1974(英译本. Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978).

[2] Березин, Ф. А., 《Функциональный анализ и его приложения》, **1** (1967), 2, 1 - 14.

[3] Кириллов, А. А., 《Успехи Матем. Наук》, **31** (1976), **4**, 57 - 76.

[4] Ritt, J. F., Differential groups and formal Lie theory for an infinite number of variables, *Ann. of Math*. (2), **52** (1950), 708 - 726.

[5] Ritt, J. F., Differential groups of order two, *Ann. of Math*. (2), **53** (1951), 491 - 519.

[6] Weisfeiler, B., On Lie algebras of differential formal groups of Ritt, *Bull. Amer. Math. Soc*., **84** (1978), 1, 127 - 130.

【补注】 关于局部 Lie 代数(及其相关结构)在向量子化作形变论逼近中的作用的说明可见[A1].

А. А. Кириллов 撰

参考文献

[A1] Lichnérowicz, A., Applications of the deformations of algebraic structures to geometry and mathematical physics, in M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber (eds.): Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988, 855 - 896.

牛凤文 译

诣零 Lie 代数 [Lie algebra, nil; Ли нильалгебра]

域 k 上的一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 有函数 $n:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbf{N}$, 使得对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$ 有 $(\mathrm{ad}x)^{n(x,y)}(y)=0$. 其中 $(\mathrm{ad}x)(y)=[x,y]$. 对于诣零 Lie 代数的主要问题涉及关于 $\mathfrak{g},k,n$ 的使 $\mathfrak{g}$ 为(局部)幂零的条件(见**幂零 Lie 代数**(Lie algebra, nilpotent)). 一个 k 上有限维的诣零 Lie 代数是幂零的. 另一方面, 在任意域上都有有限生成的诣零代数不是幂零的([1]). 设 n 是个常数. 如果 $\mathrm{Char}\,k=0$ 或 $n\leqslant p+1$, 其中 $p=\mathrm{Char}\,k>0$, 诣零 Lie 代数必为局部幂零的 (Кострикин 定理 (Kostrikin theorem), [2]). 在 $\mathfrak{g}$ 是局部可解的情形下, 局部幂零性亦然保持. 如果 $n\geqslant p-2$, 一个无限生成的诣零 Lie 代数不一定是幂零的(见[3]), 且对于 $n\geqslant p+1$, 在可解性条件之下非幂零性仍可出现. 最近, Е. И. Зельманов 证明了, 如果 $\mathrm{Char}\,k=0$, 诣零 Lie 代数是幂零的(见[6]), 且如果 $n>p+1$, 则诣零代数也是局部幂零的. 特征 $p>0$ 的域 k 上的诣零 Lie 代数的研究与 **Burnside 问题**(Burnside problem)密切相连.

参考文献

[1] Голод, Е. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 273 - 276.

[2] Кострикин, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 23 (1959), 1, 3 - 34.

[3] Размыслов, Ю. П., 《Алгебра и логика》, **10** (1971), 1, 33 - 44.

[4] Bahturin, Yu., Lectures on Lie algebras, Akad Verlag, 1978.

[5] Braun, A., Lie rings and the Engel condition, J. of Algebra, **31** (1974), 287 - 292.

[6] Kostrikin, A. I., Around Burnside, Springer, 1989 (译自俄文).

Ю. А. Бахтурин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[A2] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972 (中译本: J. E. 汉弗莱斯, 李代数及其表示理论导引, 上海科学技术出版社, 1981).

牛凤文 译 邓邦明 校

幂零 Lie 代数 [Lie algebra, nilpotent; Ли нильпотентная алгебра]

域 k 上满足下列等价条件之一的代数(algebra) $\mathfrak{g}$:

1) 有 $\mathfrak{g}$ 的理想的有限降链 $\{\mathfrak{g}_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$, 使得 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n=\{0\}$, 且对 $0\leqslant i<n$, 有 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$;

2) 对于充分大的 k, $C^k\mathfrak{g}=\{0\}$ (相应地, $C_k\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$), 其中 $C^k\mathfrak{g}$ 和 $C_k\mathfrak{g}$ 分别是下中心列和上中心列的项;

3) 有 k 使得对任意 $x_1,\cdots,x_k\in\mathfrak{g}$ 都有 $\mathrm{ad}\,x_1\cdots\mathrm{ad}\,x_k=0$.

交换代数是幂零的. 如果 V 是 k 上有限维空间, 而 $F=\{V_i\}$ 是其中的一个**旗** (flag), 则

$$\mathfrak{n}(F)=\{x\in\mathrm{End}\,V:\ xV_i\subset V_{i-1},\ \text{对所有}\ i\geqslant1\}$$

是 V 的所有线性变换的 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个幂零子代数, 如果选择 V 的一个与旗 F 相容的基, 那么对此基代数 $\mathfrak{n}(F)$ 的元素可用主对角线为 0 的上三角矩阵表示. 如果 F 是完全旗(即 $\dim V_k=k$), 那么对应的**幂零线性 Lie 代数**(Lie algebra, linear) $\mathfrak{n}(m,k)$ 由所有主对角线为零的 $m=\dim V$ 阶上三角矩阵组成.

对于任意幂零 Lie 代数, 如果 $\dim\mathfrak{g}>1$, 则其换位子理想的余维数 $\mathrm{codim}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\geqslant2$. 特别地, 如果 $\dim\mathfrak{g}\leqslant2$, 则 $\mathfrak{g}$ 是交换的. 唯一的非交换的三维幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathfrak{n}(3,k)$. 对于几个小维数(当 $k=\mathbf{C}$, 对于 $\dim\mathfrak{g}\leqslant7$)幂零 Lie 代数已经开列出来, 但仍然没有它们分类的一般途径(1989).

幂零 Lie 代数(早期, 它们被称为特殊 Lie 代数(special Lie algebras)或 0 阶 Lie 代数)在 S. Lie 关于微分方程积分方法研究的第一阶段就已经遇到了. **可解 Lie**

代数(Lie algebra, solvable)的分类在一定意义下归结为枚举幂零 Lie 代数．在任意有限维 Lie 代数中都有一个最大的幂零理想([2] 的术语，诣零根(nil radical))．另一个幂零理想也被考虑了——不可约的有限维表示的核的交集(幂零根，亦见 **Lie 代数的表示**(representation of a Lie algebra))(见 [1],[4])．如果 $\mathfrak{r}$ 是代数 $\mathfrak{g}$ 的根，则幂零根 $\mathfrak{n}$ 与

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{r}$$

重合．商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是约化的(见**约化 Lie 代数**(Lie algebra, reductive))，并且 $\mathfrak{n}$ 是有此性质的最小的理想．如果 $\mathrm{char}\,k=0$，则诣零根由所有使得 $\mathrm{ad}\,x$ 幂零的 $x\in\mathfrak{r}$ 组成．

研究 **C** 上约化 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，自然提出幂零子代数，它们是**抛物子代数**(parabolic subalgebra)的幂零根．当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(V)$ 时，这些幂零子代数与上面考虑过的子代数 $\mathfrak{n}(F)$ 重合．$\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数(见 **Borel 子群**(Borel subgroup))是 $\mathfrak{g}$ 的一个由幂零元组成的极大子代数，不计共轭意义下是唯一的．更广的一类幂零 Lie 代数由 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数的由幂零元素组成的任意理想形成．当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(V)$ 时，这些幂零 Lie 代数已在 [6] 中被分类(标准诣零代数(standard nil algebras))，而一般情形下在 [7] 中．

一个幂零 Lie 代数的中心必是非平凡的，而任意一个幂零 Lie 代数均可由幂零代数的中心扩张列得到．幂零 Lie 代数类关于子代数、商代数、中心扩张、有限直和是封闭的．特别地，$\mathfrak{n}(n,k)$ 的任意子代数是幂零的．反之，任意一个有限维幂零 Lie 代数必然同构于 $\mathfrak{n}(m,k)$ 的一个子代数，对某个 m(如果 $\mathrm{char}\,k=0$)；这是 Ado 定理的特殊情形(见 [1], [2])．

如果 $\mathfrak{g}$ 是一个任意的有限维 Lie 代数，那么它的任意幂零理想对于 **Killing 型**(Killing form)必然与它正交；特别地，对于一个幂零 Lie 代数，该型是平凡的．

幂零 Lie 代数理论的主要定理之一是 Engel 定理(Engel theorem)：如果 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 是幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示，且对任意 $x\in\mathfrak{g}$，$\rho(x)$ 是幂零的，则必有一个完全标志 F，使得 $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{n}(F)$．Engel 定理意味着一个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，当且仅当对某个 n 和所有的 $x\in\mathfrak{g}$ 有 $\mathrm{ad}^n x=0$，也就是任意 $x\in\mathfrak{g}$ 都幂零．

Engel 定理包含了一个关于幂零 Lie 代数的幂零表示的刻画；这个关于任意有限维表示的刻画是 H. Zassenhaus 的工作(见 [2])：如果 k 是代数闭的，而 V 是有限维 $\mathfrak{g}$ 模，则 $V=\oplus_{i=1}^{n}V_i$，其中子模 V_i 有这样的性质，每个 $x\in\mathfrak{g}$ 作用在它们上面的限制刚好是一个纯量算子和一个幂零算子的和．如果 V 是特征 0 的域 k 上的一个有限维向量空间，则任意代数的幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ 必形如 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{n}$ 分别是由属于 $\mathfrak{g}$ 的半单的和幂零的线性变换组成([5])．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975(译自法文)．

[2] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962(中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964)．

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965．

[4] Théorie des algèbras de Lie, Topologie des groupes de Lie, in Sém. S. Lie, Ecole Norm. Sup., 1955．

[5] Chevalley, C., Thèorie des groupes de Lie, 3, Hermann, 1955．

[6] Гуревич, Г. Б., 《Матем. сб.》, **35** (1954), 437–460．

[7] Хакимджанов, Ю. Б., 《Вестн. Моск. ун-та, Матем. механ.》, 1974, 6, 49–55．

В. В. Горбацевич 撰

【补注】设 g 是一个 Lie 代数．g 的**下中心列**(lower central series)由理想 $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\cdots,\mathfrak{g}^{i+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^i],\cdots$ 构成．它同样被称为降中心列(descending central series)．导出列(derived series)是理想列 $\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g}^{(0)},\mathfrak{g}^{(0)}],\cdots,\mathfrak{g}^{(i+1)}=[\mathfrak{g}^{(i)},\mathfrak{g}^{(i)}],\cdots$．上中心列(upper central series)由 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$ 的中心 $=\{x\in\mathfrak{g}:[x,y]=0\}$ 和归纳定义的 $\mathfrak{g}_{i+1}$ 构成．这里 $\mathfrak{g}_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，使得 $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_i$ 的中心．

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972(中译本：J. E. 汉弗莱斯，李代数及其表示论导引，上海科学技术出版社，1981)．

[A2] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1986．

牛凤文 译 邓邦明 校

代数群的 Lie 代数 [Lie algebra of an algebraic group; Ли алгебра алгебраической группы]

与**解析群的 Lie 代数**(Lie algebra of an analytic group)类似，存在着与仿射代数群相关的 Lie 代数．如同在解析情形一样，一个代数群 G 的 Lie 代数是在单位元处的 G 的切空间，其上的 Lie 代数结构用 G 上函数代数的左不变导子定义．精确定义如下．

设 K 是一个代数闭域，G 是 K 上的一个仿射代数群，$A=K[G]$ 是 G 上正则函数的代数，而 $\mathrm{Lie}(G)$ 是 K 代数 A 的某些导子的集合，这些导子与 G 的左平移所确定的 A 的自同构可变换．空间 $\mathrm{Lie}(G)$ 是一个具有运算 $[D_1,D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1$ 的 Lie 代数(见**线性 Lie 代数**(Lie algebra, linear))，并且运算 $D^{[p]}=D\circ\cdots\circ D$($p$ 个因子)在 $\mathrm{Lie}(G)$ 上定义了一个 Lie p 代数结构(如果域 K 的特征是正的，则 p 等于这一特征，如 K 的特征是零，则 p 等于

1)．设 $L(G)$ 是 G 在单位元 e 处的切空间，即 K 上的从 A 到模 $A/\mathfrak{m}_e$ 的所有 K 导子作成的向量空间，其中 $\mathfrak{m}_e$ 是 A 在 e 点的极大理想，再设 φ_e: $A \to A/\mathfrak{m}_e$ 是典范同态．对任意 $D \in \mathrm{Lie}(G)$，合成 $\varphi_e \circ D$ 是 $L(G)$ 的一个元素，且由公式 $D \to \varphi_e \circ D$ 定义的映射 $\mathrm{Lie}(G) \to L(G)$ 是 K 上向量空间的同构．这就可以把 $\mathrm{Lie}(G)$ 的 Lie p 代数结构转移到 $L(G)$ 上．这一 Lie p 代数 $L(G)$ 被称为代数群 G 的 Lie 代数．如果 k 是域 K 的一个子域，而且 G 定义在 k 上，那么定义在 G 上的 k 代数 $A_k \subset A$ 的所有左不变 k 导子作成 $\mathrm{Lie}(G)$ 上的 k 结构，且上述同构也可以定义在 k 上．

例　设 V 是 K 上一个有限维向量空间，且 $G = \mathrm{GL}(V)$ 是 V 的所有自同构作成的代数群．那么，G 在 e 处的切空间自然地等同于 $\mathrm{End}\,V$ 即 V 的所有自同态作成的向量空间，代数群 G 在 $\mathrm{End}\,V$ 上的 Lie 代数结构由公式 $[X, Y] = XY - YX$, $X^{[p]} = X^p$ 给出．这一 Lie 代数记作 $\mathfrak{gl}(V)$．

代数群的 Lie 代数有大量的性质类似于解析群的 Lie 代数．例如代数群的一个同态在单位元处的微分是它们的 Lie 代数的一个同态．代数群 G 的 Lie 代数的维数等于群 G 的维数．代数群 G 的 Lie 代数与 G 在单位元处的连通分支的 Lie 代数重合．一个代数群的伴随表示的微分是其 Lie 代数的伴随表示（亦见 **Lie 群的伴随表示**（adjoint representation of a Lie group））．如果 H 是代数群 G 的一个代数子群，则 $L(H)$ 是 $L(G)$ 的一个子代数．进一步，设 J 是 G 上所有在 H 上取零值的正则函数作成的理想，那么把 $L(G)$ 和 $\mathrm{Lie}(G)$ 等同起来，就可以把 $L(H)$ 刻画为 $\mathrm{Lie}(G)$ 的所有零化 J 的元素的集合．这种描述对于线性代数群，即 $\mathrm{GL}(V)$ 的代数子群的验证特别方便．事实上，设 J 是 $K[\mathrm{End}\,V]$ 的一个理想由在 G 上取零值的所有元素组成，那么 $L(G) \subset \mathfrak{gl}(V)$ 恰由 V 的如下自同态 X 组成，使得由 $\mathrm{End}\,V$ 的自同态 $Y \mapsto XY$ 导出的 $K[\mathrm{End}\,V]$ 上的导子把 J 变到自身．$L(G)$ 中的运算由上述 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的运算诱导．

如果 $p = 1$，仿射代数群及其 Lie 代数的联系本质上如同解析群及其 Lie 代数的联系那样密切．这就可以实质上把仿射代数群的研究归结为对其 Lie 代数的研究，反之亦然．进一步，线性代数群（即 $\mathrm{GL}(V)$ 的代数子群）的 Lie 代数可以用内在的刻画从 $\mathfrak{gl}(V)$ 的所有 Lie 子代数中区分出来（见**代数的 Lie 代数**（Lie algebra, algebraic））．当 $p > 1$ 时，这种联系不是那么密切，并且本质上失去了它的意义．一般来说，在这种情况下，仅有那些从群的信息得到的 Lie 代数的性质仍保持正确．与此相反，若 $p = 1$，很多定理建立了在反方向上这种联系的正确性．例如对于一个给定的群可能存在各式各样的连通子群，它们的 Lie 代数是重合的；一个非可解群的 Lie 代数可能是可解的（比如，$p = 2$ 时行列式为 1 的 2 阶矩阵群），等等．

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969 (second enlarged edition, Springer-Verlag, 1991).

[2] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2, Hermann, 1951.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hochschild, G., Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer, 1981.

牛凤文 译

解析群的 Lie 代数 [**Lie algebra of an analytic group**; **Ли алгебра аналитической группы**]

定义在关于一个非平凡**绝对值**（absolute value）是完全的域 k 上一个 Lie 群 G 的 Lie 代数——G 的 **Lie 代数**（Lie algebra）$\mathfrak{g}$ 看成一个**局部 Lie 群**（Lie group, local）．这就是，作为向量空间，$\mathfrak{g}$ 与 G 在点 e 的切空间等同．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 内的乘法运算 [,] 可以由下列等价的方式中任意一种来定义．

1) 令 ad 是群 G 的**伴随表示**（adjoint representation）的微分．则对于任意向量 $X \in \mathfrak{g}$ 来说，$\mathrm{ad}\,X$ 是空间 $\mathfrak{g}$ 的一个线性变换，并且 $\mathrm{ad}\,X(Y) = [X, Y]$，对于任意 $Y \in \mathfrak{g}$．

2) 令 $k = \mathbf{R}$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ 是 G 在 e 处两个切向量，又 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 G 内光滑曲线并且 X 和 Y 是 $t = 0$ 处的切向量，那么 $[X, Y]$ 是曲线 $q(t) = x(s)y(s)x(s)^{-1}y(s)^{-1}$ 在 $s = 0$ 处的切向量．这里 $s \geqslant 0$, $s^2 = t$．

3) 令 $U(G)$ 是 G 上支撑在 e 处广义函数所组成的结合 k 代数，乘法由卷积 $\star$ 定义．空间 $\mathfrak{g}$ 与双代数 $U(G)$ 的本原元素（见 **Hopf 代数**（Hopf algebra））的集合等同，并且对于任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$，向量 $X \star Y - Y \star X$ 仍在 $\mathfrak{g}$ 内，则 $X \star Y - Y \star X = [X, Y]$．

4) 令 $\mathscr{L}$ 是 G 上一切在 G 的元素左平移之下不变的向量场所组成的向量空间．向量场与它在点 $e \in G$ 的值之间的对应是向量空间 $\mathscr{L}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的一个同构．另一方面，对于任意向量场 $L \in \mathscr{L}$，令 G 上解析函数所组成的 k 代数 A 的一个左不变导子与之对应，这个对应由以下公式给出：对于任意 $f \in A$, $g \in G$, $L(f)(g) = (df)_g(L_g)$．这个对应是向量空间 $\mathscr{L}$ 到 A 的一切左不变导子所组成的向量空间 D 的同构．对于任意 $X \in \mathfrak{g}$，令 $L_X \in \mathscr{L}$ 表示这样一个左不变向量场：$(L_X)_e = X$．如果 $X, Y \in \mathfrak{g}$，那么积 $[X, Y]$ 可以定义为 $\mathfrak{g}$ 的这样一个向量，对于它来说，向量场 $L_{[X,Y]}$ 对应于代数 A 的导子 $L_X \cdot L_Y - L_Y \cdot L_X$．

例. 令 G 是系数在 k 内一切 n 阶非奇异矩阵所组成的解析群. 那么 G 在单位元处的切空间 $\mathfrak{g}$ 可以与系数在 k 内一切 n 阶矩阵所组成的空间等同. $\mathfrak{g}$ 上 Lie 代数结构由公式 $[X, Y] = XY - YX$ 来定义.

解析群与它的 Lie 代数之间的对应具有重要的函子性质, 并且将解析群的研究有效地归结为它们的 Lie 代数的研究. 就是说, 令 G_1 和 G_2 是解析群, 它们的 Lie 代数分别为 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$, 又令 $\varphi: G_1 \to G_2$ 是一个解析同态, 那么 $d\varphi_e: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 是一个 Lie 代数同态. 解析群 $G_1 \times G_2$ 的 Lie 代数与 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 同构. 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个解析群 G 的 Lie 代数, H 是 G 的一个 Lie 子群 (见 **Lie 群** (Lie group)) 而 $\mathfrak{h}$ 是解析群 H 的 Lie 代数, 则 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数; 当 H 是正规子群时, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想. 设 k 的特征为 0. Lie 子群的交的 Lie 代数就是它们的 Lie 代数的交. 解析同态 φ 的核的 Lie 代数是它们的 Lie 代数同态 $d\varphi_e$ 的核. 如果 H 是 G 的一个解析正规子群, 则商群 G/H 的 Lie 代数是 G 的 Lie 代数关于对应于 H 的理想的商代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 是解析群 G 的 Lie 代数而 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数, 那么有唯一的连通 Lie 子群 $H \subset G$ 以 $\mathfrak{h}$ 为其 Lie 代数, H 不一定在 G 内是闭的. 一个解析群的 Lie 代数是可解的 (幂零的, 半单的) 必要且只要这个群本身是可解的 (幂零的, 半单的).

然而与局部 Lie 群的情形不同, 解析群范畴与 Lie 代数范畴之间的联系并不是这两个范畴的等价. 就是说, 不同构的解析群可能具有同构的 Lie 代数. 具有同构的 Lie 代数的解析群称为局部同构的 (locally isomorphic). 在域 k 的特征为零的情形, k 上每一个有限维 Lie 代数对应着一类局部同构的解析群. 假设 $k = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 在所有局部同构的解析群中, 有一个连通的单连通群, 它确切到同构范围内是唯一的; 这种类型的解析群范畴与 k 上有限维 Lie 代数范畴等价. 特别地, 每一个 Lie 代数同态都是由对应的连通单连通解析群同态所诱导的. 任意局部同构于一个给定的连通单连通 Lie 群 G 的连通 Lie 群都具有形式 G/D, 这里 D 是一个位于 G 的中心内的离散正规子群.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 上册, 1957, 下册, 1958).

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[4] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[5] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

В. Л. Попов 撰

【补注】 $\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$ 上局部同构于一个单连通 Lie 群 G 的唯一的连通单连通 Lie 群称为 G 的**覆叠群** (covering group), 它的存在和唯一性是由 Л. С. Понтрягин (1966) 给出的.

所以, 一个 Lie 群 G 的整体结构如下. G 是由离散个连通分支组成的. 包含单位元的连通分支 G^0 在 G 内是正规的 (并且既开且闭). 于是 G/G^0 是一个离散群. 通常, 特别当 G 是紧的时候, G 是一个半直积: $G \simeq G^0 \times_S G/G^0$. 最后, 存在 G^0 的一个单连通的连通覆叠群 $\widetilde{G}^0$, 连同一个投射 $\widetilde{G}^0 \to G^0 \to \{1\}$, 核是离散的, 并且包含在 $\widetilde{G}^0$ 的中心内.

参考文献

[A1] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras and their representations, Prentice Hall, 1974.

郝钢新 译

约化 Lie 代数 [Lie algebra, reductive; Ли редуктивная алгебра]

特征为 0 的域 k 上的一个有限维 **Lie 代数** (Lie algebra), 它的伴随表示是完全可约的 (见 **Lie 群的伴随表示** (adjoint representation of a Lie group)); **Lie 代数的表示** (representation of a Lie algebra). 一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是约化的这个性质等价于下列性质中的任意一个:

1) $\mathfrak{g}$ 的根 $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ 与其中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 相重合;

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \dotplus \mathfrak{g}_0$, 其中 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个半单理想;

3) $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i$, 其中 $\mathfrak{g}_i$ 都是素理想;

4) $\mathfrak{g}$ 拥有一个忠实的完全可约的有限维线性表示.

一个 Lie 代数是约化的这一性质在基础域 k 上扩张和限制时均保持.

在 $k = \mathbf{R}$ 上一类重要的约化 Lie 代数是紧的 Lie 代数 (见**紧 Lie 群** (Lie group, compact)). 具有约化 Lie 代数的 Lie 群常被称为约化 Lie 群 (reductive Lie group). k 上 Lie 代数是约化的, 当且仅当它同构于一个 k 上约化代数群的 Lie 代数.

约化 Lie 代数概念的一种推广如下. 称 k 上有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中为约化的 (reductive), 如果伴随表示 $\mathrm{ad}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是完全约化的. 此时 $\mathfrak{h}$ 是个约化 Lie 代数. 如果 k 是代数闭的, 那么 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 为约化的充分必要条件是 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{r}(\mathfrak{h})$ 由半单线性变换组成.

参考文献

[1] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[2] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).

А. Л. Онищик 撰 牛凤文 译 邓邦明 校

半单 Lie 代数 [Lie algebra, semi-simple; Ли полупростая алгебра]

不含非零可解理想的 Lie 代数(见**可解 Lie 代数**(Lie algebra, solvable)). 以下考察特征为零的域上的有限维半单 Lie 代数(特征非零的域上的半单 Lie 代数(见 **Lie 代数**(Lie algebra))).

一个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 这与下列诸条的任意一个都等价:

1) $\mathfrak{g}$ 不含非零的交换理想;

2) $\mathfrak{g}$ 的 **Killing 型**(Killing form)是非退化的(Cartan 准则(Cartan criterion));

3) $\mathfrak{g}$ 可分解成非交换的单理想的直和;

4) $\mathfrak{g}$ 的每个有限维线性表示都是完全可约的(换言之, 每个有限维 $\mathfrak{g}$ 模都是半单的);

5) $\mathfrak{g}$ 的取值于任意有限维 $\mathfrak{g}$ 模一维上同调都是平凡的.

半单 Lie 代数的任意理想和任意商代数仍然是半单的. 一个 Lie 代数的条件 3) 中所述的分解是唯一的. 条件 5) 的一个特殊情况断定如下: 半单 Lie 代数的所有导子都是内导子. Lie 代数是半单的这一性质在基础域的扩张和限制下均保持.

设 $\mathfrak{g}$ 是代数闭域 k 上的一个半单 Lie 代数. 伴随表示把 $\mathfrak{g}$ 同构地映到 Lie 代数 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 上, 后者是 $\mathfrak{g}$ 的所有自同构的代数群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的 Lie 代数, 并且是**代数的 Lie 代数**(Lie algebra, algebraic). 一个元素 $X\in\mathfrak{g}$ 称为半单的(semi-simple)(幂零的(nilpotent)), 如果 $\mathrm{ad}\,X$ 是半单的(相应地, 幂零的). 元素 X 的这个性质在 $\mathfrak{g}$ 到另外的半单 Lie 代数的任意同态之下仍然保持. 恒等分支 $(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})^0$ 与 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群, 即由所有形如 $\exp(\mathrm{ad}\,X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ 的自同构生成的群重合.

在研究代数闭域 k 上的半单 Lie 代数时, 半单 Lie 代数的根起了重要作用, 根的定义如下. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 **Cartan 子代数**(Cartan subalgebra). 对于一个非零线性函数 $\alpha\in\mathfrak{h}^*$, 令 $\mathfrak{g}_\alpha$ 代表由条件

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g}:[H,X]=\alpha(H)X,\ H\in\mathfrak{h}\}$$

给出的线性子空间.

如果 $\mathfrak{g}_\alpha\neq0$, 那么称 α 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的一个根. 所有非零根的集合 Σ 称为 $\mathfrak{g}$ 的根系(root system 或 system of roots). 有根分解(root decompositon)

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha.$$

一个半单 Lie 代数的根系和根分解有下列性质:

a) Σ 生成 $\mathfrak{h}^*$, 而且是抽象意义下的一个约化根系(root system)(在实数域上 Σ 的线性包中). 系 Σ 是不可约的, 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是单的.

b) 对任意 $\alpha\in\Sigma$,

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=1.$$

存在唯一的元素 $H_\alpha\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$, 使得 $\alpha(H_\alpha)=2$.

c) 对于每个非零 $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ 有唯一的 $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, 使 $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$, 且

$$[H_\alpha,X_\alpha]=2X_\alpha,\ 同时\ [H_\alpha,Y_\alpha]=-2Y_\alpha.$$

并且,

$$\beta(H_\alpha)=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)},\ \alpha,\beta\in\Sigma,$$

其中 $(\ ,\ )$ 是由 Killing 型导出的标量积(内积).

d) 如果 $\alpha,\beta\in\Sigma$ 且 $\alpha+\beta\neq0$, 那么 $\mathfrak{g}_\alpha$ 和 $\mathfrak{g}_\beta$ 对于 Killing 型是正交的, 而且 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

根系 Σ 的一个基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 同样也称为代数 $\mathfrak{g}$ 的一个单根系(system of simple roots). 设 Σ_+ 是对应于给定基的正根系且设 $X_{-\alpha}=Y_\alpha$ $(\alpha\in\Sigma_+)$, 则元素

$$H_{\alpha_1},\cdots,H_{\alpha_k},X_\alpha\ (\alpha\in\Sigma)$$

构成 $\mathfrak{g}$ 的一个基, 称为 Cartan 基(Cartan basis). 另一方面, 元素

$$X_{\alpha_i},X_{-\alpha_i}\ (i=1,\cdots,n)$$

构成 $\mathfrak{g}$ 的一个生成系, 其定义关系有如下形式:

$$[[X_{\alpha_i},X_{-\alpha_i}],X_{\alpha_j}]=n(i,j)X_{\alpha_j},$$

$$[[X_{\alpha_i},X_{-\alpha_i}],X_{-\alpha_j}]=-n(i,j)X_{\alpha_j},$$

$$(\mathrm{ad}\,X_{\alpha_i})^{1-n(i,j)}X_{\alpha_j}=0,$$

$$(\mathrm{ad}\,X_{-\alpha_i})^{1-n(i,j)}X_{-\alpha_j}=0,$$

这里 $i,j=1,\cdots,n$, 同时

$$n(i,j)=\alpha_j(H_i)=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}.$$

性质 d) 蕴含着

$$[X_\alpha,X_\beta]=\begin{cases}N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}, & 如果\ \alpha+\beta\in\Sigma,\\ 0, & 如果\ \alpha+\beta\notin\Sigma,\end{cases}$$

其中 $N_{\alpha,\beta}\in k$. 元素 $X_\alpha(\alpha\in\Sigma_+)$ 可用如下方法选取,

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{-\alpha,-\beta},\ 且\ N_{\alpha,\beta}=\pm(p+1),$$

其中 p 是使得 $\beta-p\alpha\in\Sigma$ 的最大整数. 对应的 Cartan 基称为 Chevalley 基(Chevally basis). $\mathfrak{g}$ 在该基之下的结构常数都是整数, 这就可以把 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 与任意特征的域上的代数群(见 **Chevalley 群**(Chevalley group))结合起来. 如果 $k=\mathbf{C}$, 那么向量

$$iH_\alpha、X_\alpha - X_{-\alpha}、i(X_\alpha + X_{-\alpha})\ (\alpha \in \Sigma_+)$$

在 **R** 上的线性包是 $\mathfrak{g}$ 的一个紧实形式.

一个半单 Lie 代数在同构意义下被其 Cartan 子代数和对应的根系完全确定. 严格地说, 如果 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 都是 k 上半单 Lie 代数, $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 是它们的 Cartan 子代数, 而 Σ_1 和 Σ_2 是对应的根系, 那么每个能导出 Σ_1 和 Σ_2 同构的 $\mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ 的同构都可以扩张成 $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 的同构. 另一方面, 任意约化根系均可看作是某个半单 Lie 代数的根系. 于是, 一个代数闭域 k 上的半单 Lie 代数 (对应地, 非交换的单 Lie 代数) 的分类本质上与约化根系 (对应地, 不可约的约化根系) 的分类一致.

对应于 A 型—D 型根系的单 Lie 代数称为典型的 (classical), 且有如下形式.

A_n 型 $(n \geq 1)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, k)$, 由空间 k^{n+1} 的迹为 0 的线性变换组成; $\dim \mathfrak{g} = n(n+2)$.

B_n 型 $(n \geq 2)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, k)$, 由空间 k^{2n+1} 的对于给定的非奇异对称双线性型斜对称的线性变换组成; $\dim \mathfrak{g} = n(2n+1)$.

C_n 型 $(n \geq 3)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, k)$, 由空间 k^{2n} 的对于给定的非奇异斜对称双线性型斜对称的线性变换组成; $\dim \mathfrak{g} = n(2n+1)$.

D_n 型 $(n \geq 4)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, k)$, 由空间 k^{2n} 的对于一个给定的非奇异对称双线性型斜对称的线性变换组成; $\dim \mathfrak{g} = n(2n-1)$.

对应于 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型根系的单 Lie 代数称为特殊的 (special) 或例外的 (exceptional) (见**例外 Lie 代数** (Lie algebra, exceptional))

代数闭域上半单 Lie 代数在同构意义下由它的 **Cartan 矩阵** (cartan matrix) 唯一确定. 单 Lie 代数的 Cartan 矩阵有如下形式:

$$A_n: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{Vmatrix}$$

$$B_n: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$C_n: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$D_n: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_6: \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_7: \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_8: \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$F_4: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad G_2: \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

任意特征零的域 k 上的可分裂半单 Lie 代数 (一个半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为分裂的 (split), 如果它有一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, 使得算子 $\operatorname{ad} X\ (X \in \mathfrak{h})$ 的全部

特征根都在 k 中)的分类与代数闭域的情形相同，即每个不可约的约化根系对应于唯一的分裂单 Lie 代数．特别地，A 到 D 型的分裂单 Lie 代数有上面所说的形式，除在 B 和 D 的情形下必须考虑 Witt 指数为 n 的非奇异对称双线性型外．

域 k 上任意半单 Lie 代数的分类问题可归结为下述问题：在同构意义下列出所有 k 形式 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$，也就是所有使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_k K$ 的 k 子代数 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$．这里 K 是代数闭域且为 k 的一个代数扩张，而 $\mathfrak{g}$ 是 K 上给定的半单 Lie 代数．这个问题的解决也可以用根系的语言得到(见**代数群的形式**(form of an algebraic group)；**代数结构的形式**(form of an algebraic structure))．当 $\mathfrak{g}$ 是 k 上一个典型单 Lie 代数时(除 D_4 外)，有另外一个在 $\mathfrak{g}$ 中分类 k 形式的方法，这一方法基于对单结合代数的考查(见[3])．

当 $k = \mathbf{R}$ 时，半单 Lie 代数的分类可如下进行(见[6]，[7])．$\mathbf{R}$ 上的每个非交换的单 Lie 代数，或者是 $\mathbf{C}$ 上单 Lie 代数(认为是 $\mathbf{R}$ 上代数)，或者是 $\mathbf{C}$ 上一个单 Lie 代数的实形式．$\mathbf{C}$ 上一个单的典型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中的实形式 $\mathfrak{g}_0$ 的分类是这样的：

Ⅰ) A_n 型：$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ $(n \geqslant 1)$．A_{I}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{R})$．$A_{\mathrm{II}}$：$n+1 = 2m$ 是偶数，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}^*(2n)$，是由 $\mathfrak{sl}(2m, \mathbf{C})$ 中保持某种四元数结构的元素组成的子代数．A_{III}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p, n+1-p)$，是由 $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ 中对于正指数 p $(0 \leqslant p \leqslant (n+1)/2)$ 的非奇异 Hermiter 型斜对称的元素组成的子代数．

Ⅱ) B_n 型：$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbf{C})$ $(n \geqslant 2)$．B_{I}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(p, 2n+1-p)$，由空间 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上对于具正指数 p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ 的一个非奇异对称双线性型斜对称的线性变换组成．

Ⅲ) C_n 型：$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ $(n \geqslant 3)$．C_{I}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$，由空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 上对于一个非奇异斜对称双线性型斜对称的线性变换组成．C_{II}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(p, n-p)$ $(0 \leqslant p \leqslant n/2)$ 是由 $\mathfrak{su}(2p, 2(n-p))$ 中保持某种四元数结构的变换组成的子代数．

Ⅳ) D_n 型：$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, \mathbf{C})$ $(n \geqslant 4)$．D_{I}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(p, 2n-p)$，由空间 $\mathbf{R}^{2n}$ 上对于具正指数 $p(0 \leqslant p \leqslant n)$ 的一个非奇异对称双线性型斜对称的线性变换组成．D_{III}：$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}^*(2n, \mathbf{C})$，是由 $\mathfrak{so}(2n, \mathbf{C})$ 中保持特定四元数结构的变换组成的子代数．

W. Killing 在文[1]中首先考虑了域 $\mathbf{C}$ 上的半单 Lie 代数，给出了它们的分类，尽管他的一些证明存在缺陷，但被 E. Cartan([2])填补了．在 Killing 和 Cartan 的文章中，Lie 代数的根是作为算子 ad X 的特征根出现的．Cartan 也给出了实半单 Lie 代数的分类，所运用的方法是建立了这些代数与**整体对称 Riemann 空间**(globally symmetric Riemann space)的深刻联系．

参考文献

[1A] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen Ⅰ, *Math. Ann.*, **31** (1888), 252 - 290.

[1B] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen Ⅱ, *Math. Ann.*, **33** (1889), 1 - 48.

[1C] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen Ⅲ, *Math. Ann.*, **34** (1889), 57 - 122.

[1D] Killing, W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen Ⅳ, *Math. Ann.*, **36** (1890), 161 - 189.

[2] Cartan, E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continues, in Oeuvres complètes, Vol. 1 Gauthier-Villars, 1952, 137 - 287.

[3] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962(中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964).

[4] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[5] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1967.

[6] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[7] Araki, S., On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, *Osaka J. Math.*, **13** (1962), 1 - 34.

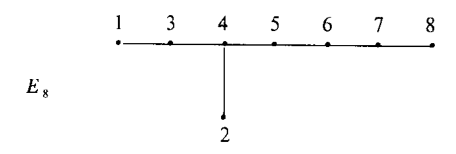
А. Л. Онищик 撰

【补注】 前面提到的定义关系 $(\mathrm{ad}\, X_{\alpha_i})^{1-n(i,j)}(X_{\alpha_j}) = 0$ 以 Serre 关系(Serre relations)闻名．

通常利用所谓 Dynkin 图(Dynkin diagrams)给出包含在 Cartan 矩阵 A_n-G_2 中的信息．

A_n	…	(n 结点)
B_n	…	(n 结点，$n \geqslant 2$)
C_n		(n 结点，$n \geqslant 3$)
D_n		(n 结点，$n \geqslant 4$)
E_6		(6 结点)
E_7		(7 结点)
E_8		(8 结点)
F_4		(4 结点)
G_2		(2 结点)

由对应的 Dynkin 图（Dynkin diagram，有时也称为 Dynkin graph）所揭示的 Cartan 矩阵的规则如下．给顶点一个标号，例如



在 Cartan 矩阵的对角线上所有元素都等于 2．如果顶点 i 和 j 不直接相连，那么矩阵元 $a_{ji}=a_{ij}=0$．如果顶点 i,j 由一个边直接相连，那么 $a_{ij}=-1=a_{ji}$．如果顶点 i,j 由 2 个，或 3 个边直接相连，且有由 i 到 j 的箭，则 $a_{ij}=-2$，$a_{ji}=-1$，或相应地 $a_{ij}=-3$，$a_{ji}=-1$．

参考文献

[A1] Frenkel, I. B. and Kac, V. G., Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, *Invent. Math.*, **62** (1980), 23 - 66.

[A2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975(译自法文).

[A3] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[A4] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972(中译本：J. E. 汉弗莱斯，李代数及其表示理论导引，上海科学技术出版社，1981).

牛凤文 译

可解 Lie 代数 [Lie algebra, solvable; Ли разрешимая алгебра]

域 K 上满足下列等价条件之一的 **Lie 代数**(Lie algebra) $\mathfrak{g}$：

1) 对于充分大的 k，$\mathfrak{g}$ 的导出列 $D^k\mathfrak{g}$ 的项都等于 $\{0\}$；

2) 有 $\mathfrak{g}$ 的理想的有限升链 $\{\mathfrak{g}_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$，使得 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_n=\{0\}$，且 $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$（也就是说，对所有 $0\leqslant i<n$，Lie 代数 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ 是交换的)；

3) 有子代数的有限升链 $\{\mathfrak{g}_i'\}_{0\leqslant i\leqslant m}$，使得 $\mathfrak{g}_0'=\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_m'=\{0\}$，$\mathfrak{g}_{i+1}'$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的理想，且对 $0\leqslant i<m$，$\mathfrak{g}_i'/\mathfrak{g}_{i+1}'$ 是一维的(交换的) Lie 代数．

幂零 Lie 代数(Lie algebra, nilpotent) 是可解的．如果 $F=\{V_i\}$ 是 K 上有限维空间 V 中的一个完全**旗**(flag)，则

$$\mathfrak{b}(F)=\{x\in\mathfrak{gl}(V):xV_i\subset V_i \text{ 对所有 } i\}$$

是 V 的所有线性变换的 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个可解子代数．如果在 V 中选择一个与 F 相容的基，那么对于这个基，$\mathfrak{b}(F)$ 的元素都可表成上三角矩阵；由此得到的可解线性 Lie 代数记成 $\mathfrak{t}(n,K)$，其中 $n=\dim V$．

可解 Lie 代数类关于子代数、商代数或扩张是封闭的．特别地，$\mathfrak{t}(n,K)$ 的任意子代数是可解的．如果 K 是代数闭域，且 $\operatorname{char}K=0$，那么任意有限维可解 Lie 代数都同构于对于某个 n 的 $\mathfrak{t}(n,K)$ 的一个子代数．可解 Lie 代数的主要性质之一可表述成 Lie 定理(Lie theorem)：设 $\mathfrak{g}$ 是特征 0 的代数闭域上的一个可解 Lie 代数，而 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 是它的一个有限维线性表示．那么在 V 中有一个完全的标志 F，使得 $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{b}(F)$．特别地，如果 ρ 是不可约的，则 $\dim V=1$．$\mathfrak{g}$ 的理想可以像构造完全标志那样选择，即使得 $\dim\mathfrak{g}_i=\dim\mathfrak{g}-i$．

特征 0 的域上的一个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是可解的，当且仅当代数 $D^2\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是幂零的．可解性的另一个判别准则(Cartan 准则 (Cartan criterion)) 是：$\mathfrak{g}$ 是可解的，当且仅当对 **Killing 型**(Killing form)(或对任意一个相应于 $\mathfrak{g}$ 的一个忠实的有限维表示的双线性型) $D^2\mathfrak{g}$ 正交于整个 $\mathfrak{g}$．

在可解 Lie 变换群的研究中，S. Lie 首先考查了可解 Lie 代数．可解 Lie 代数的研究在引进了任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的根(radical)(即最大可解理想)概念之后获得了重大意义，并证明了在 $\operatorname{char}K=0$ 的情形，代数 $\mathfrak{g}$ 是其根与一个极大半单子代数的半直和(见 **Levi-Мальцев 分解**(Livi-Mal'tsev decomposition))．这使得把任意 Lie 代数的分类问题归结为列数半单的(对于 $K=\mathbf{C}$ 情形已经被 W. Killing 完成)和可解 Lie 代数一事变为可能．(对 $K=\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$)可解 Lie 代数的分类仅做出维数 $\leqslant 6$ 的情形．

如果 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个可解的代数的子代数(见**代数的代数**(algebraic algebra))，其中 V 是特征 0 的域 K 上的有限维空间，则 $\mathfrak{g}$ 可以分裂为由 $\mathfrak{g}$ 的所有幂零变换构成的幂零理想和由半单变换组成的交换子代数的半直积([6])．一般地，任意分裂可解 Lie 代数(split solvable Lie algebra)，即 K 上的一个有限维可解 Lie 代数，它的每个元 x 均可分裂成 $x=s+n$，其中 $s,n\in\mathfrak{g}$，$[s,n]=0$，s 是半单的，n 是幂零的，具有类似的结构([8])．对于 K 上每个有限维可解 Lie 代数都有唯一对应的一个极小分裂 Lie 代数包含它(Мальцев 分解(Mal'tsev decomposition))．具有给定的 Мальцев 分解的可解 Lie 代数的分类问题已经解决([8])．这样，在特定的意义下，可解 Lie 代数的分类问题可归结为研究幂零 Lie 代数．

除去根，在任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中，还可以指明那些极大的可解子代数．如果 K 是特征 0 的代数闭域，那么 $\mathfrak{g}$ 的所有这样的子代数(称它们为 Borel 子代数(Borel subalgebras))都是共轭的．例如，$\mathfrak{t}(n,K)$ 是所有 n 阶矩阵的 Lie 代数的一个 Borel 子代数．如果 K 不是代数闭的或者如果 $\operatorname{char}K$ 是有限的，那么，一般地，Lie 定理不真．但它可以拓广到 K 是完满的且包含

所有伴随变换 ad$x$, $x\in\mathfrak{g}$, 的特征多项式 $\rho(x)$的特征根的情形．对于一个可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示(见 **Lie 群的伴随表示**(adjoint representation of a Lie group))，如果这个条件被满足，则称 $\mathfrak{g}$ 为三角的 (triangular)．代数闭域上可解 Lie 代数的很多性质可平移到三角 Lie 代数．特别地，如果 char$K$=0，则任意一个有限维的 Lie 代数的所有极大的三角子代数都是共轭的 (见 [1]，[7])．作为 Borel 代数的一个好的类似物，极大三角子代数被用于研究代数非闭域上的半单 Lie 代数．它们同样在刻画 Lie 群的连通**一致子群**(uniform subgroup)中起基本作用([9])．

参考文献

[1] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, **27** (1965), 55－150.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).

[3] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964).

[4] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[5] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[6] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 3 Hermann, 1955.

[7] Винберг, Э. Б.,《Докл. АН СССР》, **141** (1961), 270－273.

[8] Мальцев, А. И., Избр. Труды. т. 1, М., 1976, 155－176.

[9] Онищик А. Л.,《Матем. сб.》, 1967, т. 74, 398－416.

В. В. Горбацевич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972 (中译本: J. E. 汉弗莱斯，李代数及其表示理论导论，上海科学技术出版社，1981).

牛凤文 译 邓邦明 校

超可解 Lie 代数 [Lie algebra, supersolvable; Ли вполне разрешимая алгебра]，三角 Lie 代数 (triangular Lie algebra)

域 k 上有限维 **Lie 代数**(Lie algebra) $\mathfrak{g}$，对所有 $X\in\mathfrak{g}$ 伴随表示的算子 ad$X$ 的特征值都属于 k (见 **Lie 群的伴随表示** (adjoint representation of a Lie group))．

超可解 Lie 代数是可解的．超可解 Lie 代数类包含幂零 Lie 代数类，并含于指数 Lie 代数类(见**幂零 Lie 代数**(Lie algebra, nilpotent)；**指数 Lie 代数** (Lie algebra, exponential))．它关于子代数、商代数和有限直和是封闭的，但它对于扩张不是封闭的．

一个**完满域**(perfect field)上的超可解 Lie 代数，具有很多代数闭域上可解 Lie 代数的性质(见**可解 Lie 代数**(Lie algebra, solvable)) (Lie 定理，存在理想链 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_n=\{0\}$，满足 $\dim\mathfrak{g}_i=\dim\mathfrak{g}-i$ 及其他)．任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中都有极大超可解子代数，且它们都包含诣零根．如果 $k=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，或者 k 是完全的且 $\mathfrak{g}$ 是代数的线性的 Lie 代数，则所有超可解子代数都共轭．完全域 k 上的一个 k 可裂代数群(见**分裂群** (split group))对应的 k 上 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是个超可解 Lie 代数．

特征为零的域上的任意超可解 Lie 代数，均可同构地嵌入以 k 中元素为系数的上三角矩阵的 Lie 代数(它本身是超可解的)．最简单的超可解但不幂零的 Lie 代数的例子是以 X, Y 为基，由关系 $[X, Y]=X$ 决定的 2 维 Lie 代数．见**超可解 Lie 群** (Lie group, supersolvable)．

В. В. Горбацевич 撰 牛凤文 译 邓邦明 校

Lie 代数簇 [Lie algebras, variety of; Ли алгебр многообразие]，环 k 上的

k 上满足一个固定的恒等式组的 **Lie 代数** (Lie algebra) 类 $\mathfrak{V}$．最流行的 Lie 代数簇如下：由恒等式 $[x, y]\equiv 0$ 确定的 Abel Lie 代数簇 $\mathfrak{A}$，c 级幂零 Lie 代数簇 $\mathfrak{N}_c$ (在其中长度超过 c 的任何积均等于零)，长度 $\leqslant l$ 的可解 Lie 代数簇 $\mathfrak{S}_l$ (在其中导出列在不超过 l 步内收敛于零)．k 上所有 Lie 代数簇的全体 $v(k)$ 关于乘法是一个**广群** (groupoid)：$\mathfrak{W}=\mathfrak{U}\mathfrak{V}$，这里，$\mathfrak{W}$ 是借助于 $\mathfrak{U}$ 的理想的 $\mathfrak{V}$ 的代数的扩张类；$\mathfrak{S}_l=\mathfrak{A}^l$；$\mathfrak{A}^2$ 的代数称为亚 abel 的 (metabelian)．

Lie 代数簇理论的中心问题是要描述一个 Lie 代数簇的恒等式的基，特别地，它们是有限的还是无限的(如果 k 是 Noether 环)．如果 k 是特征 $p>0$ 的域，则存在局部有限 Lie 代数簇位于 $\mathfrak{A}^3$ 中且没有恒等式的有限基的例子．在特征为 0 的域 k 情况下，到现在(1989) 还没有无限基簇的实例．有限基性质在被幂零簇右乘下以及在与这样的簇的并运算下得以保持．在 Specht 簇 (Specht variety) (即其中每个簇有有限基)中有任意 Noether 环上的 Lie 代数簇 $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$，任意特征 $\neq 2$ 的域上的 $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_c$，以及由在特征为 0 的域 k 上二阶矩阵的 Lie 代数 k_2 内成立的恒等式所定义的簇 var(k_2)．在特征为 0 的域 k 上，仍不存在使得 var(A) 有无限基的有限维 Lie 代数 A 的例子，但在特征 $p>0$ 的无限域 k 上却有这样的实例．在有限域上，或更一般地，在含有幺元的任意有限环 k 上，有限 Lie 代数 A 的恒等式从它们的有限子系推出．

由有限 Lie 代数 A 生成的 Lie 代数簇 var(A) 称为 Cross 簇 (Cross variety)，并包含在由所有主因子阶 $\leqslant m$，所有幂零因子级 $\leqslant c$，且所有内导子 ad$x$ 被一个酉多项式 $f\in K[t]$ 零化的 Lie 代数组成的 Cross 簇 $\mathfrak{C}(f, m, c)$ 内．恰好非 Cross 簇(just non-Cross variety) (即所有真子簇均为 Cross 簇的非 Cross 簇)在可解的情况下已被描述，且存在非可解的恰好非 Cross 簇的例子．无限域上的广群 $v(k)$ 是含 0 与 1 的自由半群，在有限域上，$v(k)$ 不能是结合的．域 k 上的 Lie 代数簇 $\mathfrak{V}$

的子簇组成的格 $\mathscr{L}(\mathfrak{B})$ 是**模格**(modular lattice)，但一般不是**分配格**(distributive lattice)．仅在无限域情况下，格 $\mathscr{L}(\mathfrak{A}^2)$ 是分配的．特殊的 Lie 代数的恒等式基仅在少数几种非平凡情况下被找出：对 k_2 (char $(k)=0$ 或 char $(k)=2$)，还对某些亚 abel Lie 代数．关于带有恒等式 $(\mathrm{ad}\,x)^n=0$ 的 Lie 代数的一些重要结果业已得到(见**幂零 Lie 代数**(Lie algebra, nil))．

参考文献

[1] Артамонов, В. А., 《Успехи матем. наук》, **33**(1978), 2, 135-167.

[2] Amayo, R. and Stewart, I., Infinite-dimensional Lie algebras, Noordhoff, 1974.

[3] Бахтурин, Ю. А., Lectures on Lie algebras, Akad. Verlag, 1978.

[4] Бахтурин, Ю. А., Identical relations in Lie algebras, VNU, Utrecht, 1987.

Ю. А. Бахтурин 撰　陈公宁 译

Lie 括号 [Lie bracket; Ли скобка]

一个**微分流形**(differentiable manifold)上的向量场(见**流形的上向量场**(vector field on a manifold))的换位子．如果把在一个微分(类 C^∞ 的)流形 M 上类 C^∞ 的向量场作为 M 上类 C^∞ 的函数代数 $F(M)$ 的导子来考查，那么场 X 和 Y 的 Lie 括号由公式

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

给出，其中 $f \in F(M)$．在 M 上的所有类 C^∞ 的向量场的全体对于 Lie 括号是一个 **Lie 代数**(Lie algebra)．

А. Л. Онищик 撰

【补注】 两个向量场的 Lie 括号还可以看成是一个向量场在另一个的方向上的 **Lie 导数**(Lie derivative)．

牛凤文 译　邓邦明 校

Lie 导数 [Lie derivative; Ли производная]

流形 M 上张量场 Q 沿向量场 X 方向的 Lie 导数是 M 上与 Q 同类型的张量场 $\mathscr{L}_X Q$，它由下列公式给出：

$$(\mathscr{L}_X Q)_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\varphi_t^* Q)_x - Q_x \right), \quad x \in M,$$

其中 φ_t^* 是张量场空间的由向量场 X 生成的局部单参数变换群．在局部坐标 x^i 下，(k, l) 型张量场 $Q = (Q^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l})$ 沿向量场 $X = (X^i)$ 方向的 Lie 导数具有如下坐标 $(\partial_i = \partial / \partial x^i)$：

$$(\mathscr{L}_X Q)^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l} = X^i \partial_i Q^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l} - \sum_{\alpha=1}^{k} \partial_i X^{i_\alpha} Q^{i_1 \cdots \hat{i}_\alpha i i_{\alpha+1} \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_l} + \\ + \sum_{\beta=1}^{l} \partial_{j_\beta} X^j Q^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots \hat{j}_\beta j j_{\beta+1} \cdots j_l}.$$

亦见(**Lie 微分法**(Lie differentiation))．

Д. В. Алексеевский 撰　沈一兵 译

Lie 微分 [Lie differential; Ли дифференциал]，张量场 Q 沿向量场常 X 方向的

在由 X 生成的流形上局部单参数变换群 φ_t 诱导的变换下 Q 的增量的线性主部．张量场 Q 沿向量场 X 方向的 Lie 微分 $\delta_X Q$ 等于 $(\mathscr{L}_X Q)dt$，其中 $\mathscr{L}_X Q$ 是 Q 沿 X 方向的 **Lie 导数**(Lie derivative)．

Lie 微分的概念有下列物理解释．若 Euclid 空间的一区域的单参数变换群 φ_t 描述了速度场为 X 的流体的平稳流，t 是时间，Q 是描述流体某种特性的张量场(形变速度张量，应力张量，密度等)，则 Lie 微分 $\delta_X Q$ 表示从随流体运动的观察者看来，即在 Lagrange 变量下，Q 随时间而变化的主要线性部分．

Д. В. Алексеевский 撰　沈一兵 译

Lie 微分法 [Lie differentiation; Ли дифференцирование]

在一**微分流形**(differentiable manifold) M 上将一个可微向量场 X 与 M 上的可微分几何对象(见**几何对象理论**(geometric objects, theory of)) Q 联系起来以得出一种新的几何对象 $\mathscr{L}_X Q$ 的自然的运算，它描述 Q 关于由 X 所产生的 M 上的单参数(局部)变换群 φ_t 的变化率．几何对象 $\mathscr{L}_X Q$ 称为几何对象 Q 的 **Lie 导数**(Lie derivative)．这里设 M 上的变换在对象 Q 的空间中自然地诱导一个变换．

在 Q 为 M 上的向量值函数这个特例中，Lie 导数 $\mathscr{L}_X Q$ 即函数 Q 在向量场 X 的方向上的导数 $\partial_X Q$，而由下式给出：

$$(\mathscr{L}_X Q)(x) = \frac{d}{dt} Q \circ \varphi_t(x) \bigg|_{t=0}, \quad x \in M,$$

φ_t 是 X 在 M 上生成的单参数局部变换群，若将上式用局部坐标 x^i 来写，即为公式

$$\mathscr{L}_X Q(x^i) = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Q(x^i),$$

$$X = \sum_j X^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Lie 微分法在一般情况下定义如下．令 W 为一 $\mathrm{GL}^k(n)$ 空间，即有 k 阶一般微分群(即微分同胚 $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，$\varphi(0)=0$ 在原点的 k 节所成的群)固定作用于其上的流形．令 $Q: P^k M \to W$ 是 n 维流形 M 上的 k 阶 W 型几何对象，视为 M 上的 k 阶余标架 $P^k M$ 的主 $\mathrm{GL}^k(n)$ 从到 W 中的 $\mathrm{GL}^k(n)$ 等变映射．M 上向量场的 X 产生的流形 M 的单参数局部变换群 φ_t 在余标架流形 $P^k M$ 上诱导出一个单参数局部变换群 $\varphi_t^{(k)}$．它的速度场

$$X^k = \frac{d}{dt} \varphi_t^{(k)} \bigg|_{t=0}$$

称为 X 到 $P^k M$ 上的<u>完全提升</u>(complete lift)．W 型几

何对象 Q 对 M 上的向量场 X 的 Lie 导数定义为一个 TW 型几何对象 $\mathscr{L}_X Q$（TW 是 W 的切丛，W 自然地视为一 $\mathrm{GL}^k(n)$ 空间），由下式给出

$$\mathscr{L}_X Q = \frac{d}{dt} Q \circ \varphi_t^{(k)} \bigg|_{t=0} .$$

Lie 导数 $\mathscr{L}_X Q$ 在一点 $p_k \in P^k M$ 的值只依赖于 Q 在 p_k 处的 1 阶节，而且是线性依赖，还依赖于 $X^{(k)}$ 在此点的值(或与此等价，依赖于 X 在相应点 $x \in M$ 处的 k 阶节）．

若几何对象 Q 是线性的，即相应的 $\mathrm{GL}^k(n)$ 空间 W 是线性空间，而且 $\mathrm{GL}^k(n)$ 线性作用于其上，则切流形 TW 可以自然地等同于直积 $W \times W$，所以 Lie 导数

$$\mathscr{L}_X Q : P^k M \to TW = W \times W$$

可以看作一对 W 型的几何对象．第一个即 Q 本身，第二个是 Q 在向量场 $X^{(k)}$ 方向的导数 $\partial_{X^{(k)}} Q$，而通常就把它等同于 Q 的 Lie 导数:

$$\mathscr{L}_X Q = (Q, \partial_{X^{(k)}} Q) .$$

所以，线性几何对象的 Lie 导数可以看成与 Q 同类型的几何对象．

流形 M 的局部坐标 x^i 决定了 1 阶余标架流形 $P^1 M$ 的局部坐标 x^i, y_j^i：对 $\theta \in P^1 M$，有

$$\theta = \sum_j y_j^i \, dx^j .$$

在这些局部坐标下，任意 1 阶几何对象 $Q = Q(x^i, y_j^i)$（例如一张量场)在向量场

$$X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial X^j}$$

方向的 Lie 导数由下式给出

$$(\mathscr{L}_X Q)(x^i, y_j^i) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} Q - \sum_{i,j,l} y_l^i X_j^l \frac{\partial}{\partial y_j^i} Q ,$$

这里

$$X_j^l = \frac{\partial}{\partial x^j} X^l .$$

对任意阶几何对象的 Lie 导数也有类似的公式．

流形 M 上的微分形式空间的 Lie 导数 $\mathscr{L}_X$ 可以用外微分算子 d 和内乘法算子 i_X（定义为向量场与一微分形式的缩并）表示为下面的同伦公式

$$\mathscr{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d .$$

反之，作用在 p 形式 ω 上的外微分算子 d 也可以用 Lie 导数表示为以下公式

$$d\omega(X_1, \cdots, X_{p+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathscr{L}_{X_i} \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{p+1}) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(\mathscr{L}_{X_i} X_j, X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{p+1}) .$$

“ ^ ”表示其下的符号要略去．$X_1, \cdots, X_{p+1}$ 是向量场．

Lie 微分运算与**共变微分法**（covariant differentiation）对比，其区别在于后者需要引入一个联络而前者则决定于微分流形的结构，几何对象 Q 在向量场方向 X 的 Lie 导数则是两个几何对象 X 和 Q 的相伴而生的对象．

参考文献

[1] Slebodziński, W., Sur les équations Canonique de Hamilton, *Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique*, **17** (1931), 864－870.

[2] Лаптев, Б. Л., Ли дифференцирование, Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, 429 － 465.

[3] Yano, K., The theory of Lie derivatives and its applications, North-Holland, 1957.

[4] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

[5] Вагнер, В., 《Докл. АН СССР》, **46** (1945), 383－386.

[6] Лаптев, Б. Л., 《Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу》, **10** (1956), 227 － 248.

[7] Евтушик, Л. К., 《Докл. АН СССР》, **132** (1960), 998 － 1001.

[8] Palais, R. S., A definition of the exterior derivative in terms of Lie derivatives, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 902 － 908.

Д. В. Алексеевский 撰 齐民友 译

Lie 群 [Lie group; Ли группа]

一个具有**解析流形**（analytic manifold）结构的群 G，并且直积 $G \times G$ 到 G 内的映射 μ：$(x, y) \mapsto xy^{-1}$ 是解析的．换句话说，一个 Lie 群就是被赋予一个群和一个解析流形的相容结构的集合．一个 Lie 群称为实，复或 p 进的，根据它的解析流形在什么域上考虑而定．以下作为约定，只考虑实 Lie 群（每一个复 Lie 群通过对基域的限制，自然地被赋予一个实 Lie 群结构；至于 p 进数域上的 Lie 群，见 **p 进 Lie 群**（Lie group, p-adic），**解析群**（analytic group））．

Lie 群的例．实数域 $\mathbf{R}$ 上**一般线性群**（general linear group）$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$（亦见**线性群**（linear group）及其在自然 Euclid 拓扑之下的闭子群（J. von Neumann, 1927）．

Lie 群论的主要概念是在 1870 年左右由 S. Lie 引入数学中的．Lie 群是与微分方程用积分求解的可能性问题以及对连续变换群的研究相联系而产生的．群论对于高次代数方程的解的成功的应用，这已在 **Galois 理论**（Galois theory）的创立中显示出来，启发人们试图对于微分方程建立一个与 Galois 理论类似的理论．尽管群在微分方程理论中所占的地位多少与它在代数

方程理论中不同，但是这导致了与数学的许多有着深刻联系的 Lie 群论以及代数群论的创立．Lie 群最开始被定义为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$（或 $\mathbf{C}^n$）的局部变换群，这种变换解析地依赖于一组有限个参数，并且要求变换乘积的参数能够由因子的参数通过解析函数来表示．稍后，数学家转而抽象地考虑 Lie 群，不过仍然从局部观点来考虑（见**局部 Lie 群**（Lie group, local））．对 Lie 群整体结构系统的研究始于 E. Cartan 和 H. Weyl. Lie 群论第一个近代化的叙述是由 Л. С. Понтрягин 于 1938 年给出的（见[1]）．

如果把流形 G 和映射 μ 的解析性用可微分性来代替，是否会导致 Lie 群类的扩充？这个问题已由 Lie 解决：如果 μ 是二次连续可微分的，则 G 是一个 Lie 群．Hilbert 第五问题（Hilbert fifth problem）则是要考虑更为复杂的情形：如果 G 是一个 n 维拓扑流形且映射 $\mu:(x, y)\mapsto xy^{-1}$ 是连续的，问 G 是不是 Lie 群？对于紧群，von Neumann 于 1933 年给出这个问题正面的解决，对于局部紧 Abel 群，Понтрягин 于 1934 年给出正面的解决．对于一般情形，正面的答案是在 1952 年由 A. M. Gleason, D. Montgomery 和 L. Zippin 得到的（见[4]，亦见[18]）．这样一来，可以定义 Lie 群为一个**拓扑群**（topological group），它的拓扑空间是一个有限维（或局部 Euclid）**流形**（manifold）．这对于拓扑群的一般理论来说是非常重要的．

Lie 群 G 的一个子集 H 称为一个子群（subgroup）（更确切地说是一个 Lie 子群（Lie subgroup）），如果 H 是抽象群 G 的子群并且是解析流形 G 的子流形．Lie 群 G_1 与 G_2 之间的一个态射（morphism）是一个**解析映射**（analytic mapping）$f: G_1\to G_2$，它是抽象群的一个**同态**（homomorphism）；如果 f 还是一一映射且 f^{-1} 也是解析的，那么就称 f 是一个 Lie 群的同构（isomorphism of Lie groups）；在 f 是局部一一映射的情形（在单位元 e 的周围），就说 Lie 群 G_1 与 G_2 是局部同构的（locally isomorphic）．一个 Lie 群 G 的维数（dimension of a Lie group）就是 G 作为解析流形的维数．以下只考虑有限维 Lie 群．虽然许多结果都可以推广到 **Banach Lie 群**（Lie group, Banach）的情形．令 H 是有限维 Lie 群 G 的一个闭正规子群，则可以赋予商群 G/H 一个解析结构使得 G/H 成为一个 Lie 群，并且典范映射 $G\to G/H$ 是一个态射．

Lie 群与 Lie 代数之间的对应．在 Lie 群论中主要的研究方法是由 Lie 所创立的无穷小方法．这个方法使得能够将像 Lie 群这样一个复杂对象的研究在很大程度上简化为一个纯代数对象，**Lie 代数**（Lie algebra）的研究．对于每一个 Lie 群 G 有一个如下构成的 Lie 代数 $L(G)$ 与之对应（亦见**解析群的 Lie 代数**（Lie algebra of an analytic group））．G 上一个左不变向量场是一个关于左平移的微分不变的向量场，就是说，X 是一个左不变向量场，如果对于任意 $g, h\in G$ 来说，$(dL_g)X(h)=X(gh)$，这里 $L_g(h)=gh$．G 上左不变向量场构成一个向量空间．将向量场 X 与它在单位元 e 的值联系起来，这个向量空间可以与群 G 在 e 的切空间 $T_e(G)$ 等同看待．如果 $X, Y\in T_e(G)$，那么 Lie 括号（Lie bracket）$[X, Y]=X\circ Y-Y\circ X$ 仍是一个左不变向量场，并且这就在 $T_e(G)$ 内定义了一个双线性运算，对于这个运算来说，$T_e(G)$ 就是 Lie 代数 $L(G)$（这里向量场看成流形 G 上无穷次可微分实值函数的求导，$\circ$ 表示向量场的合成）．$L(G)$ 中换位运算 $[X, Y]$ 更为明白的构造如下：令 $x(t), y(t)$ 是 G 中经过单位元 e 的向量场 X, Y 的积分曲线，则 $[X, Y]$ 是曲线

$$z(s)=x(\sqrt{s})y(\sqrt{s})x(\sqrt{s})^{-1}y(\sqrt{s})^{-1}$$

在 e 上的切向量．

从一个 Lie 群 G 的 Lie 代数 $L(G)$ 通过**指数映射**（exponential mapping）$\exp: L(G)\to G$，它将每一个向量场 $X\in L(G)$ 映成它的积分曲线 $x(t)$ 在 $t=1$ 的值 $x(1)\in G$，就可以返回到 G 上．如果 G 是一个线性 Lie 群，即**一般线性群**（general linear group）$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 的一个子群，那么 $L(G)$ 可以与一般矩阵 Lie 代数 $L(n, \mathbf{R})$ 的一个子代数等同，而指数映射有形式

$$\exp X=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}X^m.$$

映射 $\exp: L(G)\to G$ 是解析的并且是一个局部同构，因此在群 G 的单位元的某个邻域内它定义一个局部坐标卡（chart）（典范坐标（canonical coordinates））．根据 **Campbell-Hausdorff 公式**（Campbell-Hausdorff formula），G 中的乘法在典范坐标内，即局部定义的映射

$$(X, Y)\to\exp^{-1}(\exp X\exp Y),\ X, Y\in L(G),$$

可以通过在 Lie 代数 $L(G)$ 内的运算给出．这样，局部地来看，一个 Lie 群由它的 Lie 代数完全确定．

Lie 群与 Lie 代数之间的对应具有深刻的函子性质．确切到局部同构的范围．Lie 群由它的 Lie 代数所确定；特别地，如果两个 Lie 群 G_1 和 G_2 是连通且单连通的，那么由它们的 Lie 代数的同构可得 $G_1\cong G_2$．一个 Lie 群 G 的弧连通子群与 Lie 代数 $L(G)$ 的子代数一一对应．令 $f: G_1\to G_2$ 是 Lie 群的一个态射．那么这个态射在单位元处的微分是 Lie 代数的一个同态：

$$df_e: L(G_1)\to L(G_2).$$

一般说来，并不是每一个同态 $L(G_1) \to L(G_2)$ 都具有 df_e 的形状，不过当 G_1 是单连通的时候就是这种情形．一个连通 Lie 群 G 的弧连通子群 H 是正规的必要且只要 $L(H)$ 是 Lie 代数 $L(G)$ 的理想；如果 H 在 G 中还是闭的，则

$$L(G/H) \cong L(G)/L(H).$$

根据构造，一个给定 Lie 群 G 的 Lie 代数 $L(G)$ 是一个解析不变量．实际上，$L(G)$ 是一个拓扑不变量；这可以由如下的 Cartan 定理（theorem of Cartan）立即推出：一个（实）Lie 群 G 到 Lie 群 H 内的连续同态映射是一个态射．对于复 Lie 群来说，这个断言不一定对，虽然它对于 p 进 Lie 群来说成立（见[3]）．一个连通 Lie 群 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 是一个 Lie 群，它可以等同于 $\mathrm{Aut}(L(G))$ 的一个 Lie 子群．特别，如果 Lie 群 G 是单连通的，那么

$$\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(L(G)) \text{ 且 } L(\mathrm{Aut}(G)) \cong D(L(G)),$$

这里 $D(L(G))$ 表示代数 $L(G)$ 的导子 Lie 代数．对应

$$g \to \mathrm{Ad}(g) = d_e(\mathrm{Int}(g)),$$

这里 $\mathrm{Int}(g)$ 是由 $g \in G$ 所施行的内自同构，称为 Lie 群 G 的伴随表示（adjoint representation of the Lie group）；它的微分是 Lie 代数 $L(G)$ 的伴随表示 $X \to \mathrm{ad}\, X$．亦见 **Lie 群的伴随表示**（adjoint representation of a Lie group）．

Lie 群的整体结构．具有一个给定的实 Lie 代数的整体 Lie 群的存在是 1930 年由 Cartan 证明的．他还证明了一个实 Lie 群的闭子群是 Lie 群．两种类型的 Lie 群具有特殊地位，就是：**半单 Lie 群**（Lie group, semi-simple）和**可解 Lie 群**（Lie group, solvable）．一个连通 Lie 群 G 称为半单的（semi-simple），如果它不含异于单位子群的连通可解正规子群；如果 G 不含非平凡连通正规子群，那么就称 G 是单的（simple）．半单，单或可解 Lie 群 G 的 Lie 代数分别是半单，单或可解 Lie 代数．对任意 Lie 群的研究主要归结为对半单和可解 Lie 群的研究．任意 Lie 群 G 有一个最大的连通可解正规子群，称为可解根（solvable radical）并且记作 $R(G)$．在 G 中有极大半单子群．如果 S 是它们之中的一个，则 $G = S \cdot R(G)$，并且所有极大半单子群都是共轭的；如果 G 是单连通的，则 $S \cap R(G) = (e)$，并且这个积是半直积（Levi-Мальцев 定理（Levi-Mal'tsev theorem））．这个分解的存在首先是由 E. Levi 于 1905 年对于复 Lie 代数证明的，而半单成分的共轭性则是由 А. И. Мальцев 于 1942 年建立的（见[16]，[3]，亦见 **Levi-Мальцев 分解**（Levi-Mal'tsev decomposition））．

关于可解 Lie 群最普遍的事实是由 Lie 得到的：域 **C** 上任意连通可解线性群可以化为三角形式；这就是说，对连通可解 Lie 群的描述归结为对一般三角群 $T(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ 的子群的描述．可解子群的详细研究已由 Мальцев 在[16]中做了．

在研究半单 Lie 群的结构时，它们的极大紧子群起着重要的作用，这种子群被 Cartan 与对称空间理论紧密地联系在一起研究过．根据 Cartan 的经典定理，一个半单 Lie 群 G 的极大紧子群是共轭的；如果 B 是 G 的一个极大紧子群，则存在一个子流形 $E \subset G$，它解析同构于一个 Euclid 空间，使得 $G = BE$，并且映射 $B \times E \to BE$，$(b, e) \mapsto be$，是解析流形的同构．这样，G 的拓扑结构由 B 的拓扑结构所确定．Мальцев（[16]）将 Cartan 定理推广到任意连通 Lie 群上．一个连通 Lie 群分成一个极大紧子群与一个 Euclid 空间的积的另一个分解是由岩沢找到的（见**岩沢分解**（Iwasawa decomposition））．

线性可表示性．从 Lie 群论发展的一开始，显然任意 Lie 群就与线性 Lie 群紧密联系的．Lie 证明了，在许多情况下，Lie 群局部同构于线性 Lie 群．一般性的定理是 И. Д. Адо 于 1935 年得到的：任意 Lie 群都局部同构于一个线性 Lie 群（见[15]）．同时也不难给出非线性 Lie 群的例子，例如，$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ 的单连通覆盖群，或（在域 **C** 的情形）复紧环面．如果 G 是一个单连通可解 Lie 群，则它的任意 Lie 子群都是单连通的并且同构于一个线性 Lie 群．在一般情形，以下关于线性可表示性的判别准则已被找到（[16]）：一个连通 Lie 群是线性的，必要且只要它的根 $R(G)$ 和半单商群 $G/R(G)$ 是线性的；其次，$R(G)$ 是线性可表示的，必要且只要它的换位子群是单连通的，而半单 Lie 群 $G/R(G)$ 的线性则依赖于它的中心的结构．紧的，以及复半单 Lie 群不仅是线性的，而且还是**线性代数群**（linear algebraic group）（[12]）．

分类．Lie 群论中主要问题之一就是对任意连通 Lie 群确切到同构范围内进行分类．在具有同一 Lie 代数的所有局部同构的连通 Lie 群类中，有唯一的单连通 Lie 群 G_0，而这一类的任意 Lie 群 G 都同构于 G_0/N，这里 N 是一个离散的中心正规子群．于是，Lie 群的分类就归结为有限维 Lie 代数的分类和对单连通 Lie 群中心的计算．另一方面，它归结为两种基本的不同类型群的分类：半单的和可解的（见**半单 Lie 群**（Lie group, semi-simple），**可解 Lie 群**（Lie group, solvable））．乍一看，可解 Lie 群的结构比较简单，它们的分类似乎并不太难．然而这种印象是靠不住的，迄今为止（1997），还没有希望得到可解 Lie 群的分类．相反地，半单 Lie 群已经被完全分类．复半单 Lie

代数的完全分类由 W. Killing 于 1888 - 1890 得出(见[1], [3]). 因为一个复半单 Lie 代数是单子代数的直和, 所以只需对单 Lie 代数进行分类即可. 一共只有九种类型的复单 Lie 代数, 就是四类无限系列

$$A_n, n \geq 1, B_n, n \geq 2, \quad C_n, n \geq 3, D_n, n \geq 4,$$

和五个例外代数

$$G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$$

(亦见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)). 复单 Lie 代数的无限系列对应于典型线性 Lie 群. 对应的单连通群有以下形式: A_n 型 — SL$(n+1, \mathbf{C})$; B_n 型 — Spin(f_{2n+1}), 对应于一个 $2n+1$ 维非奇异二次型 f_{2n+1} 的**旋量群**(spinor group); C_n 型 — $2n$ 次**辛群**(symplectic group); D_n 型 — Spin(f_{2n}). 不难计算这些群的中心. 例如, SL$(2n+1, \mathbf{C})$ 的中心是 $n+1$ 阶循环群, Spin(f_{2n+1}) 和辛群的中心是二阶循环群. 这样就得到复半单 Lie 群的分类. 实半单 Lie 群的分类看来要复杂一些, 它依赖于它们的实形式的分类(亦见**代数群的形式**(form of an algebraic group)). 这里最重要的一点是任意复半单 Lie 群 G 都存在唯一的紧实形式 B; 由此得出 Lie 代数 $L(G)$ 同构于 $L(B) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, 即由复化 Lie 代数 $L(B)$ 而得到. 根据这一点, Cartan 于 1914 得到复半单 Lie 群的实形式的完全分类. 用 **Galois 上同调**(Galois cohomology)的语言来说, 这等价于对集合 $H^1(\mathbf{R}, \mathrm{Aut}(G))$ 的描述(亦见**线性代数群**(linear algebraic group)).

后来 Killing 的方法由 Cartan 和 Weyl 加以完善, 这给出了解决许多其他分类问题的可能性, 并且发展了重要的 Lie 群表示论. 典型复单 Lie 群的半单子群的分类已经得到(见[17]).

近代的发展和应用. 在 20 世纪 50 年代, Lie 群论的发展开始了一个新的阶段, 这特别显示在代数群论的创立上(见**线性代数群**(linear algebraic group)). 较早的时候, C. Chevalley (见[12])已经详细地阐明了 Lie 群论中基本结果的代数性质. 代数几何方法的应用使得有可能将这些经典结果用一种新的方式加以阐述, 并且揭示了与函数论, 数论等理论的新的深刻联系. **p 进 Lie 群**(Lie group, p-adic)的理论有重大发展(见[3], [6]). 实际上 Lie 群与数学的所有主要分支都有联系: 通过 **Lie 变换群**(Lie transformation group)论与几何学、拓扑学的联系, 通过线性表示论与分析的联系等等. Lie 群对物理和力学的许多应用也是非常重要的.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973(中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 上册, 1957, 下册, 1958).

[2] Borel, A., Linear algebraic groups, second enlarged ed., Springer, 1991.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[4] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.

[5] Wigner, E., Group theory and its applications to quantum mechanics of atomic spectra, Acad. Press, 1959.

[6] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[7] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1967.

[8] "Théorie des algèbras de Lie. Topologie des groupes de Lie", in Sem. S. Lie, Ecole Norm. Super., 1962.

[9] Hamermesh, M., Group theory and its application to physical problems, Addison-Wesley, 1962.

[10] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[11] Чеботарев, Н. Г., Теория групп Ли, М.-Л., 1940.

[12A] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

[12B] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2 - 3, Hermann, 1951 - 1955.

[13] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

[14] Montgomery, D. and Zippin, L., Topological transformation groups, Interscience, 1964.

[15] Адо, И. Д., 《Изв. Физ.-матем. об-ва》(Казань), 7 (1935), 1 - 43.

[16] Мальцев, А. И., 《Матем. сб.》, 16 (1945), 163 - 190.

[17] Мальцев, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 8 (1944), 4, 143 - 174.

[18] Hilbert problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8** (1902), 437 - 479.

[19] Freudenthal, H. and Vries, H. de, Linear Lie groups, Acad. Press, 1969.

В. П. Платонов 撰

【补注】 关于 Lie 群的早期阐述亦见[A1]. 关于 Ado 定理也可以查阅[A2]. 关于 Cartan 对复半单 Lie 群实形式的分类见[10].

一个 C^2 群是解析的这个定理得归于 F. Schur (1893), 在这件事上他的阐述较 Lie 更为简洁. Campbell-Hausdorff 公式也可以同样追溯到 Schur (1891).

从 1950 年前后主要新的发展就是非紧半单 Lie 群的表示论的创立, 这大部分是由 Harish-Chandra ([A3])做的.

上面正文中所给出的两个 Lie 群局部同构的定义并不是最常见的那一种. 通常两个 Lie 群 G_1, G_2 称为局部同构的(locally isomorphic), 如果有 G_1 的单位元的邻域 U_1 和 G_2 的单位元的邻域 U_2, 它们之间存在一个解析流形的同构 $f: U_1 \to U_2$, 使得对于 x, y, $xy \in U_1$ 来说都有 $f(x)f(y)=f(xy)$, 并且对于 u, v, $uv \in U_2$ 来说, 都有 $f^{-1}(u)f^{-1}(v)=f^{-1}(uv)$.

参考文献

[A1] Mayer, W. and Thomas, T. Y., Foundations of the theory of Lie groups, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 770 − 822.

[A2] Ado, I. D., The representation of Lie algebras by matrices, *Transl. Amer. Math. Soc.* (1), **9** (1962), 308 − 327.

[A3] Harish-Chandra: Collected works, 1 − IV, Springer, 1984.

【译注】 关于复半单 Lie 群实形式的分类亦见[B1].

参考文献

[B1] 严志达、许以超, Lie 群及其 Lie 代数, 高等教育出版社, 1985.

郝钢新 译

Banach Lie 群[Lie group, Banach; Ли Банахова группа]

一个集合 G 同时被赋予一个群结构和一个解析 Banach 流形结构(见 **Banach 解析空间**(Banach analytic space)); 这两个结构在下述意义下是相容的: 由 $G \times G$ 到 G 内的映射 $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ 是解析的. 如果这个 Banach 流形是有限维的, 则这个概念就与通常 Lie 群概念一致.

例 一个带有加法运算的 Banach 空间, 一个带有乘法运算的 Banach 代数 A 的可逆元素集合 A^*, 以及一个光滑流形 M 上取值在一个 Lie 群 G 内的 k 阶光滑函数的集合 $C^k(M, G)$, 其中运算为逐点相乘, 都是 Banach Lie 群. 另一方面, 一个光滑流形 M 到它自身上的 k 阶光滑一一映射的集合 $\mathrm{Diff}^k M$ 不是 Banach Lie 群: 这时 Banach 流形的自然结构与群的自然结构(关于合成运算)不是相容的.

Lie 群论中一些基本定理对于 Banach Lie 群来说仍然成立: 对于每一个 Banach Lie 群有一个 Banach Lie 代数(Banach Lie algebra)与之对应, 从它出发反回来又可以得到一个局部 Banach Lie 群. 然而并不是每一个局部 Banach Lie 群都可以扩充为一个整体 Banach Lie 群(见[2]). 一个 Banach Lie 群的单位元的一个邻域被指数映射的象所覆盖; 在 Banach Lie 群的连通闭子群与相应的 Lie 代数的闭子代数之间有一个对应关系.

Banach Lie 群概念有许多推广(见[3]), 在这里 Banach 空间结构被一个线性拓扑空间结构或更为一般类型的结构所代替.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[2] Harpe, P. de la, Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space, Springer, 1972.

[3] Omori, H., Infinite dimensional Lie transformation groups, Springer, 1974.

А. А. Кириллов 撰 郝钢新 译

紧 Lie 群[Lie group, compact; Ли компактная группа]

一个紧群(compact group)又是一个有限维实 **Lie 群**(Lie group). 紧 Lie 群可以被刻画为一个有限维局部连通的紧拓扑群.

如果 G^0 是一个紧 Lie 群 G 的单位元的连通分支, 那么连通分支群 G/G^0 是有限的. 对连通紧 Lie 群结构的研究是 Lie 群论的一个基本课题.

下列连通紧 Lie 群的例子在紧 Lie 群的一般结构理论中扮演重要的角色.

1) 一切模为 1 的复数的乘法群 T^1.

2) 一切行列式为 1 的 n 阶复酉矩阵的群 $\mathrm{SU}(n)$.

3) 一切行列式为 1 的 n 阶实正交矩阵的群 $\mathrm{SO}(n)$.

4) 一切满足条件 $XJX^t=J$ 的矩阵 $X \in \mathrm{SU}(2n)$ 所构成的群 $\mathrm{Sp}(n)$, 这里

$$J=\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

t 是转置符号, E_n 是 n 阶单位矩阵.

连通紧 Lie 群的完全分类已在 E. Cartan ([1]) 和 H. Weyl ([2]) 的工作中得到. 就是以下这样.

1) 连通交换紧 Lie 群(connected commutative compact Lie groups). 就是**环面**(torus), 即形如 $T^n=T^1 \times \cdots \times T^1$($n$ 个因子)的群.

2) 连通半单紧 Lie 群(connected semi-simple compact Lie groups)(见**半单 Lie 群**(Lie group, semi-simple). 如果 G 是一个连通半单紧 Lie 群, 则 G 的泛覆盖群 $\widetilde{G}$ 也是一个紧 Lie 群(Weyl 定理(Weyl theorem)). $\widetilde{G}$ 的中心 Z 是有限的, 并且所有与 G 局部同构的连通 Lie 群都是紧的, 确切到同构范围内, 这些群都有形式 $\widetilde{G}/D$, 这里 $D \subset Z$. 半单紧 Lie 群的 Lie 代数在本质上可以被刻画为有限维实 Lie 代数中一切具有负定 **Killing 型**(Killing form)的代数.

上述两类连通 Lie 群的基本类型确定了任意紧 Lie 群的结构. 后一类确切到同构范围内就是一切形如 $(G \times T)/D$ 的群, 这里 G 是一个连通单连通紧 Lie 群, 具有中心 Z, T 是一个环面, 而 D 是群 $Z \times T$

的一个与 T 的交为单位元的有限子群. 任意紧 Lie 群的 Lie 代数在本质上也可以在一切有限维实 Lie 代数中刻画：它们就是这样的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，具有一个正定的标量积（，）使得对于任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 都有 $([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0$. 它们也称为紧 Lie 代数(compact Lie algebra).

这样，连通紧 Lie 群的分类就归结为连通单连通半单紧 Lie 群的分类（或者等价地，半单紧 Lie 代数的分类）和对它们的中心的描述. 半单紧 Lie 代数与半单复 Lie 代数（从而与约化根系，见**根系**（root system））一一对应. 这就是，如果 $\mathfrak{g}$ 是一个半单紧 Lie 代数，那么它的复化 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ 是半单的. 反之，在 $\mathbf{C}$ 上任意一个半单 Lie 代数内，有唯一的（确切到共轭范围内）紧实形式（见**（代数）结构的形式**(form of an (algebraic) structure)). 特别，单紧 Lie 代数和与之对应的连通单连通紧 Lie 群的分类的最终结果如下. 有四个所谓典型单紧 Lie 代数（classical simple compact Lie algebra）的无限系列，它们对应着以下不可约的约化根系的系列：$A_n, n \geq 1$, $B_n, n \geq 2$, $C_n, n \geq 3$, D_n, $n \geq 4$. 它们分别是群 $\mathrm{SU}(n+1)$, $\mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathrm{Sp}(n)$ 和 $\mathrm{SO}(2n)$ 的 Lie 代数. 此外，还有五个所谓例外单紧 Lie 代数(exceptional simple compact Lie algebras)，它们对应于 G_2, F_4, E_6, E_7 和 E_8 型根系. 任意一个单紧 Lie 代数都同构于这些 Lie 代数中之一，而它们自己互不同构，紧 Lie 群 $\mathrm{SU}(n)$ 和 $\mathrm{Sp}(n)$ $(n \geq 1)$ 是连通且单连通的. 群 $\mathrm{SO}(n)$ $(n \geq 3)$ 是连通的但不是单连通的. 它的泛覆盖群称为旋量紧 Lie 群 (spinor compact Lie group)，并且记作 $\mathrm{Spin}(n)$. 一个连通且单连通半单紧 Lie 群的中心与对应的单连通复 Lie 群的中心一致（见**半单 Lie 群**(Lie group, semi-simple)).

任意紧 Lie 群都有一个忠实线性表示；这样一个表示的象是一个实代数群. 任意紧 Lie 群 G 都有一个复化 $G_{\mathbf{C}}$（见 **Lie 群的复化** (complexification of a Lie group)). 再者，$G_{\mathbf{C}}$ 是一个复约化代数群（见**约化群** (reductive group))，它的仿射代数 A_G 可以被描述为 G 上一切表示函数 (representation functions) 的代数，即这样的连续复值函数 f 的代数，f 被 G 的元素平移的线性包络是有限维的. 代数 A_G 有一个自然的实结构，因而它确定了 $\mathbf{R}$ 上一个代数群. 这个群的实点组成 G，而复点组成 $G_{\mathbf{C}}$. 群 G 是 $G_{\mathbf{C}}$ 内一个极大紧子群. 作为一个结果，我们得到同构的紧 Lie 群类与 $\mathbf{C}$ 上约化代数群类之间的一一对应.

任意紧 Lie 群都是一个实解析群. 复紧解析群也称为复紧 Lie 群 (complex compact Lie group). 任意连通复紧 Lie 群（作为一个复 Lie 群）都同构于一个复环面 $\mathbf{C}^n/\Gamma$，这里 Γ 是 $\mathbf{C}^n$ 中一个秩为 $2n$ 的离散子群，并且（作为一个实 Lie 群）与 T^{2n} 同构. 两个复环面 $\mathbf{C}^n/\Gamma_1$ 与 $\mathbf{C}^n/\Gamma$（作为复 Lie 群）同构必要且只要 $\Gamma = g(\Gamma_1)$，对某个 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

参考文献

[1] Cartan, E., La topologie des groupes de Lie, Hermann, 1936.

[2] Weyl, H., 《Успехи матем. наук》, **4** (1938), 201 – 246.

[3] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，上册，1957，下册，1958).

[4] Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie, in Sém. S. Lie, Ecole Norm. Super., 1954 – 1955.

[5] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

[6] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本：Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[7] Винберг, Э. Б., Онищик, А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли, 1967/1968, М., 1969.

[8] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[9] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[10] Adams, J., Lectures on Lie groups, Benjamin, 1969.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bröcker, Th. and Tom Dieck, T., Representations of compact Lie groups, Springer, 1985.

郝钢新 译

导出 Lie 群 [Lie group, derived; Ли производная группа]

一个 **Lie 群** (Lie group) 的**换位子群** (commutator subgroup). 对于任意 Lie 群 G 来说，它的导出 Lie 群 $[G, G]$ 是 G 的一个正规（不一定闭）Lie 子群. 在群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中与它对应的理想就是换位子代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$（也称为 $\mathfrak{g}$ 的导出 Lie 代数 (derived Lie algebra)). 一个单连通（或连通线性）Lie 群 G 的换位子群在 G 中总是闭的.

参考文献

[1] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

А. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

指数 Lie 群 [Lie group, exponential; Ли экспоненциальная группа], (E) 型 Lie 群 (Lie group of type (E))

一个实有限维 **Lie 群** (Lie group) G，其中**指数映射** (exponential mapping) $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是**微分同胚** (diffeomorphism)，$\mathfrak{g}$ 是 G 的 **Lie 代数** (Lie alge-

bra).

任意指数 Lie 群都是可解并且单连通的，它的Lie代数是一个**指数 Lie 代数**(Lie algebra, exponential). 指数 Lie 群的连通子群，关于一个连通正规子群的商群以及有限直积都是指数 Lie 群. 然而作群扩张则不一定是指数 Lie 群. 一个**超可解 Lie 群**(Lie group, supersolvable)(特别，一个幂零 Lie 群)如果是单连通的，则一定是指数的.

一个指数 Lie 群的连通子群的交是连通的. 任意子集的中心化子也是连通的. 一个单连通 Lie 群是指数的必要且只要它没有包含 Euclid 平面运动群的泛覆盖群作为子群的商群.

参考文献

[1] Dixmier, J., L'application exponentielles dans les groupes de Lie résolubles, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 113 - 121.

[2] Saitô, M., Sur certains groupes de Lie résolubles, I, II, *Sci. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo*, 7 (1957), 1 - 11; 157 - 168. B. B. Горбацевич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bernal, P., et al., Réprésentation des groupes de Lie résolubles, Dunod, 1972. 郝钢新 译

全可解 Lie 群[Lie group, fully-solvable; треугольная группа Ли]

同**超可解 Lie 群**(Lie group, supersolvable).

局部 Lie 群[Lie group, local; Ли локальная группа], 局部解析群(local analytic group)

关于某一非平凡绝对值是完全的域 k 上一个**解析流形**(analytic manifold) G，连同一个特殊的元素 e(单位元)，一个开子集 $U \ni e$ 和流形 $U \times U$ 到 G 内的解析映射 $(g, h) \mapsto gh$ 以及邻域 U 到自身内的解析映射 $g \mapsto g^{-1}$，满足以下条件：

1) 在 e 的某个邻域内有 $ge = eg = g$;

2) 在 e 的某个邻域内有 $e = gg^{-1} = g^{-1}g$;

3) 对于 e 的某个邻域 $U' \subset U$ 来说，有 $U'U' \subset U$ 且 $g(hr) = (gh)r$，这里 g, h, r 是 U' 的任意元素.

局部 Lie 群最初是在 S. Lie 和他的学派的工作中作为局部 **Lie 变换群**(Lie transformation group)而出现的(见[1]).

令 G_1 和 G_2 是两个局部 Lie 群分别有单位元 e_1 和 e_2. G_1 到 G_2 内一个局部同态(local homomorphism)(记作 $f: G_1 \to G_2$)是 G_1 内 e_1 的某个邻域 U 的**解析映射**(analytic mapping) $f: U \to G_2$，使得 $f(e_1) = e_2$ 且 $f(gh) = f(g)f(h)$, g 和 h 是 e_1 的某个邻域 $U_1 \subset U$ 的任意元素. 局部同态按自然定义的合成仍是一个局部同态. 两个局部同态 $G_1 \to G_2$ 如果在 e_1 的某个邻域内一致，就称为等价的(equivalent). 如果有局部同态 f_1: $G_1 \to G_2$ 和 f_2: $G_2 \to G_1$ 使得合成映射 $f_2 \circ f_1$ 和 $f_1 \circ f_2$ 等价于恒等映射，就称局部 Lie 群 G_1 与 G_2 是等价的.

例. 令 $\bar{G}$ 是一个**解析群**(analytic group)，具备单位元 e. G 是 e 在 $\bar{G}$ 内一个开邻域，则 $\bar{G}$ 的解析结构在 G 上诱导了一个解析结构，并且 $\bar{G}$ 内的乘法和取元素的逆运算使 G 成为一个局部 Lie 群(特别，$\bar{G}$ 本身可以看成一个局部 Lie 群). 所有按这种方式从一个固定的解析群 $\bar{G}$ 所得到的局部 Lie 群 G 都是彼此等价的.

Lie 群论中基本问题之一就是上面例子的特征具有多大普遍性的问题. 就是说，是否每个局部 Lie 群都是(确切到等价范围内)某个解析群的一个邻域. 这个问题的答案是肯定的(见[2], [3], [4], 在 Banach Lie 群的情形，答案是否定的，见[4]).

研究局部 Lie 群最重要的工具就是局部 Lie 群与它的 **Lie 代数**(Lie algebra)之间的对应. 就是说，令 G 是域 k 上一个局部 Lie 群，e 是它的单位元. 在单位元 e 处选取解析流形 G 的一个**坐标卡**(chart) c 使得可以将 G 内 e 的某个邻域与 n 维坐标空间 k^n 的原点的某个邻域 U 等同起来. 于是 U 成为一个局部 Lie 群. 令 U_0 是局部 Lie 群 U 内原点的一个邻域，使得对于任意 $x, y \in U_0$，定义了乘积 $z = xy \in U$. 于是，U 内在邻域 U_0 内的乘法写成坐标形式可以用 n 个解析函数

$$z_i = f_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n), i = 1, \cdots, n,$$

来描述，这里 $(x_1, \cdots, x_n)$, $(y_1, \cdots, y_n)$, $(z_1, \cdots, z_n)$ 分别是点 $x, y \in U_0$ 和 $z = xy \in U$ 的坐标. 在原点的一个足够小的邻域内函数 f_i 被表示成一个收敛幂级数的和(以下仍以 f_i 记之)，而在 U 中单位元的存在和结合律则由看成 $2n$ 个变量的形式幂级数的这些级数的下列性质表示:

a) 对于一切 i, $f_i(x_1, \cdots, x_n; 0, \cdots, 0) = x_i$ 和 $f_i(0, \cdots, 0; y_1, \cdots, y_n) = y_i$.

b) 对于一切 i, $f_i(u_1, \cdots, u_n; f_1(v_1, \cdots, v_n; w_1, \cdots, w_n), \cdots, f_n(v_1, \cdots, v_n; w_1, \cdots, w_n)) = f_i(f_1(u_1, \cdots, u_n; v_1, \cdots, v_n), \cdots, f_n(u_1, \cdots, u_n; v_1, \cdots, v_n); w_1, \cdots, w_n)$.

由性质 a) 和 b) 得出形式幂级数组 $F_c = (f_1, \cdots, f_n)$ 是一个**形式群**(formal group). 特别，每一个级数 f_i 的 2 次齐次分量是 k^n 上一个**双线性型**(bilinear form)，就是说，它具有以下形式

$$\sum_{j, l} b_{jl}^i x_j y_l = b_i(x, y), x = (x_1, \cdots, x_n),$$

$$y=(y_1, \cdots, y_n),$$

这使得它可以根据以下规则在 k^n 上定义一个乘法[,]:

$$[x, y]=$$
$$=(b_1(x, y)-b_1(y, x), \cdots, b_n(x, y)-b_n(y, x)).$$

对于这个乘法，k^n 是一个 Lie 代数. 藉助于如上定义的坐标卡，这个 Lie 代数结构可以通过同构 $\mathfrak{g}\to k^n$ 转移到 G 在 e 的切空间 $\mathfrak{g}$ 上. 由不同的坐标卡所定义的形式群 F_c 和 $F_{c'}$ 是同构的，而且 $\mathfrak{g}$ 上的 Lie 代数结构并不依赖于坐标卡 c 的选取. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为一个局部 Lie 群的 Lie 代数 (Lie algebra of a local Lie group). 对于一个局部 Lie 群的任意局部同态来说，它在单位元的微分是 Lie 代数同态，这表明局部 Lie 群与它的 Lie 代数之间的对应关系是函子性的. 特别，等价的局部 Lie 群具有同构的 Lie 代数.

如果域 k 的特征为 0，则上述的构造，这种构造可以追溯到 Lie ([1])，就使得可以将局部 Lie 群性质的研究归结为它们的 Lie 代数相应性质的研究. 在这种情形下，确切到等价的范围内，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 唯一地确定局部 Lie 群 G. 这就是说，可以如此选取坐标卡 c，使得在局部 Lie 群 U 内乘积 xy 被表成由 x 和 y 通过换位运算[,]和乘以 k 的元素所得到的 k^n 的元素的一个收敛级数 (所谓的 Campbell-Hausdorff 级数，见 **Campbell-Hausdorff 公式** (Campbell-Hausdorff formula)). 反之，对于域 k 上任意一个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{h}$，Campbell-Hausdorff 级数在 $\mathfrak{h}$ 的原点的某个邻域内收敛，并且在这个邻域内定义了一个具有 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 的局部 Lie 群结构. 这样，对于任意给定的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 来说，有唯一的 (确切到等价范围内) 局部 Lie 群以 $\mathfrak{h}$ 为其 Lie 代数. 再者，每一个 Lie 代数同态都是由对应的局部 Lie 群的唯一的同态所诱导. 换句话说，局部 Lie 群与其 Lie 代数之间的对应定义了局部 Lie 群范畴与 k 上有限维 Lie 代数范畴的一个等价. 而且局部 Lie 群与相应的形式群之间的对应定义了局部 Lie 群范畴与 k 上形式群范畴的一个等价.

对于任意局部 Banach Lie 群也可以定义 Lie 代数；关于局部 Lie 群范畴与 Lie 代数范畴的等价的主要结果都可以推广到这个情形 (见[2]).

参考文献

[1] Lie, S. and Engel, F. Theorie der Transformationsgruppen, 1-3, Leipzig, 1888-1893.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[3] Понтрягин. Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，上册，1957. 下册，1958).

[4] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[5] Чеботарев, Н. Г., Теории групп Ли, М.-Л., 1940.

В. Л. Попов 撰

【补注】 域 k 上局部 Lie 群范畴，形式群范畴以及 Lie 代数范畴的等价性仅当域 k 是特征 0 时才成立. 特别，对于特征为 p 的域 k 来说，有至少可数个不同构的 k 上一维形式群，然而自然只有一个域 k 上一维 Lie 代数.

郝锅新 译

幂零 Lie 群 [Lie group, nilpotent; Ли нильпотентная группа]

一个 **Lie 群** (Lie group)，它作为抽象群是幂零的 (见**幂零群** (nilpotent group)). Abel Lie 群是幂零的. 如果 $F=\{V_i\}$ 是域 K 上有限维向量空间 V 内一个**旗** (flag)，则

$$N(F)=\{g\in \mathrm{GL}(V): gv\equiv v \bmod V_i,$$
$$\text{对一切 } v\in V_i, i\geqslant 1\}$$

是域 K 上一个幂零代数群；在一个与 F 相容的基内，它的元素都可以表示成主对角线上元素都是 1 的三角形矩阵. 如果 F 是一个完全旗 (即如果 $\dim V_k=k$)，则与 $N(F)$ 相对应的矩阵幂零 Lie 群 $N(n, K)$ 由一切具有上述形状的 $n=\dim V$ 阶矩阵组成.

如果 K 是一个完全赋范域，则 $N(F)$ 是 K 上一个幂零 Lie 群，它的 Lie 代数是 $\mathfrak{n}(F)$ (见**幂零 Lie 代数** (Lie algebra, nilpotent)). 更一般地，一个特征为 0 的域 K 上 Lie 群 G 的 Lie 代数是幂零的必要且只要 G 的单位元的连通分支 G_0 是幂零的. 这就使得可以将幂零 Lie 代数的性质转移到幂零 Lie 群上 (见[2], [4], [5]). Engel 定理的群的变形有以下的更强的形式 (Kolchin 定理 (Kolchin theorem)): 设 V 是任意域 K 上一个有限维向量空间，G 是 GL(V) 的一个子群. 如果每一个 $g\in G$ 都是幂幺的，那么在 V 内有一个完全旗 F 使得 $G\subset N(F)$ (因而 G 自然是幂零的) (见[3]).

幂零 Lie 群是可解的，因此可解 Lie 群的性质都可以转移到它们上来，并且常有更强的形式，这是因为每一个幂零 Lie 群都是三角形的. 一个连通 Lie 群 G 是幂零的必要且只要在典范坐标内 (见 **Lie 群** (Lie group)) G 中的群运算可以写成多项式 ([4]). 每一个单连通实幂零 Lie 群 G 都同构于一个代数群，更有甚者，同构于 $N(n, \mathbf{R})$ 的一个代数子群.

可以选取 G 在 $N(n, \mathbf{R})$ 内一个忠实表示使得自同构群 Aut G 能够作为 G 的像的正规化子被嵌入 GL$(n, \mathbf{R})$ (见[1]).

如果 G 是一个连通的矩阵实幂零 Lie 群，那么它分裂为一个紧 Abel Lie 群与一个单连通 Lie 群的直积. 特征为 0 的域上一个连通的线性代数群 G 可以

分裂为一个由半单元素组成的 Abel 正规子群与一个由幂幺元素组成的正规子群的直积([5]).

以前幂零 Lie 群称为特殊 Lie 群(special Lie groups)或零秩 Lie 群(Lie groups of rank 0). 在半单 Lie 群的表示论中, 当研究这种群的离散子群时, 具有重要应用的极限球面 Lie 群是幂零 Lie 群.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. of Math.*, (2), **38** (1937), 526 - 532.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[4] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[5] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 3, Hermann, 1955.

В. В. Горбацевич 撰

【补注】 幂零 Lie 群的酉表示理论已经了解得很清楚了, 这可以追溯到 A. A. Kirillov (A. A. Кирилов) 的基本论文[A1]. 这个理论, 通常称为"**轨道方法**"(orbit method), 已被推广到可解 Lie 群的情形, 虽然结果不像幂零情形那样完整. 亦见[A3].

参考文献

[A1] Kirillov, A. A., Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Russian Math. Surveys*, **17** (1962), 4, 53 - 104 (《Успехи матем. наук》, **17** (1962), 4, 57 - 110).

[A2] Raghunathan, M. S., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972.

[A3] Pukanszky, L., Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, 1967.

郝钢新 译

p 进 Lie 群 [Lie group, p-adic; Ли p-адическая группа]

p 进数域 $\mathbf{Q}_p$ 上(更一般地, 一个局部紧的非 Archimede 域 K 上)的**解析群**(analytic group). p 进 Lie 群自然的例子是域的某些无限扩张的 Galois 群. 例如, 设 $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\nu})$ 是对有理数域 $\mathbf{Q}$ 添加一个 p^ν 次本原单位根 ζ_{p^ν} 而得到的域, $k=\mathbf{Q}(\zeta_p)$, $K=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\mathbf{Q}(\zeta_{p^\nu})$. 则对 $p\neq 2$ 扩张 K/k 的 Galois 群同构于 p 进 Lie 群 $\mathbf{Z}_p$, 就是 p 进整数群.

通常 Lie 群论中许多结果(Lie 群与 Lie 代数的联系, 指数映射的构造和性质)在 p 进 Lie 群的情形有类比. 这些结果已被应用于代数数论和群论里.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[2] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[3] Lazard, M., Groupes analytiques p-adiques, *Publ. Math. IHES*, **26** (1965), 389 - 603.

А. А. Кириллов 撰

【补注】 关于约化 p 进群的表示论见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Harish-Chandra: Collected papers, I, IV, Springer, 1984.

[A2] Silberger, A. J., Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups, Princeton Univ. Press, 1979.

[A3] Burhat, F. and Tits, J., Groupes réductifs sur un corps local, *Publ. Math. IHES*, **41** (1972), 5 - 251.

郝钢新 译

半单 Lie 群 [Lie group, semi-simple; Ли полупростая группа]

一个连通的不含非平凡连通可解(或等价地, 连通 Abel)正规子群的 **Lie 群**(Lie group). 一个连通 Lie 群是半单的必要且只要它的 Lie 代数是半单的(见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)). 一个连通 Lie 群 G 称为单的(simple), 如果它的 Lie 代数是单的, 就是说, 如果 G 不含非平凡的异于 G 的连通正规子群. 一个连通 Lie 群是半单的, 必要且只要它局部地分裂为单的非 Abel 正规子群的直积.

半单 Lie 群的分类归结为局部分类, 即半单 Lie 代数的分类, 也归结为对应于一个给定的半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 群 G 的整体分类.

在复数域 $\mathbf{C}$ 上 Lie 群的情形, 局部分类的主要结果是每一个单连通的非 Abel 复单 Lie 群必同构于群 $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbf{C})$, $n\geqslant 1$, $\mathrm{Spin}_n(\mathbf{C})$, $n\geqslant 5$(群 $\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$ 的泛覆盖群), $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{C})$, $n\geqslant 3$, 中之一(见**典型群**(classical group)), 或例外复 Lie 群(见**例外 Lie 代数**(Lie algebra, exceptional))中之一. 对应于 $\mathbf{C}$ 上一个半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 群的整体分类是这样的. 令 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 **Cartan 子代数**(Cartan subalgebra), Σ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的**根系**(root system). 对于每一个具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的半单 Lie 群 G, 有一个格 $\Gamma(G)\subset\mathfrak{h}$ 与之对应, 它是**指数映射**(exponential mapping) $\exp:\mathfrak{h}\to G$ 的核. 特别, 如果 G 是单连通的, 则 $\Gamma(G)$ 就是由元素 $2\pi i H_\alpha(\alpha\in\Sigma)$ 所生成的格 $\Gamma_0=\Gamma_0(\mathfrak{g})$(见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)). 如果 G 是一个无中心群(一个伴随群), 则 $\Gamma(G)$ 就是格

$$\Gamma_1=\Gamma_1(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{h}:\alpha(X)\in 2\pi i Z \text{ 对一切 } \alpha\in\Sigma\}.$$

在一般情形下, $\Gamma_0\subset\Gamma(G)\subset\Gamma_1$. 对于任意满足条件 $\Gamma_0\subset M\subset\Gamma_1$ 的加法群 $M\subset\mathfrak{h}$ 来说, 有唯一的(确切到同构范围)连通 Lie 群 G, 具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 使得 $\Gamma(G)=M$. G 的中心同构于 $\Gamma_1/\Gamma(G)$, 而对于**基本群**(fundamental group)来说有

$$\pi_1(G) \cong \Gamma(G)/\Gamma_0.$$

商群 $Z_{\mathfrak{g}} = \Gamma_1/\Gamma_0$(具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的单连通 Lie 群的中心)是有限的,对于不同类型的单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 来说,它有以下形式:

$\mathfrak{g}$	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8 F_4 G_2
$Z_{\mathfrak{g}}$	$\mathbf{Z}_{n+1}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_4$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2$	0

群 Γ_1/Γ_0 的阶等于在 $\mathfrak{g}$ 的扩充的 **Дынкин 图形**(Dynkin diagram)中系数为 1 的顶点的个数;去掉其中一个顶点就得到 Дынкин 图形.对于紧实半单 Lie 群来说也有类似的分类,每一个这样的实 Lie 群都作为一个极大紧子群被嵌入唯一的一个复半单 Lie 群中(见**紧 Lie 群**(Lie group, compact)).

非紧的实半单 Lie 群的整体分类可以用类似的但比较复杂一些的方法得到.特别,对应于 $\mathbf{R}$ 上一个半单 Lie 代数的单连通 Lie 群的中心 $\mathbf{Z}_{\mathfrak{g}}$ 可以如下地计算.令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{p}$ 是 **Cartan 分解**(Cartan decomposition),这里 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极大紧子代数而 $\mathfrak{p}$ 是它关于 Killing 型的正交补.令 θ 是扩充到 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 上相应的对合自同构,$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 的一个 Cartan 子代数,它包含一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{t}$,$\theta_0$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 的一个自同构,它与 θ 在关于 $\mathfrak{h}$ 的根上是一致的,并且以适当的方式开拓到根向量上,而 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{p}_0$ 是实形式 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 对应于 θ_0 的 Cartan 分解,则 $Z_{\mathfrak{g}} \cong \Gamma_1(\mathfrak{t}_0)/\Gamma_0[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$(见[3],在那里对于 $\mathbf{R}$ 上一切类型的单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 来说,这个群都被计算出来).

每一个复半单 Lie 群 G 有唯一的与它所具备的解析结构相容的仿射代数群结构,并且 G 到一个代数群的任意解析同态都是有理的.对应的 G 上正则函数代数与全纯表示函数代数相重合.另一方面,一个非紧的实半单 Lie 群不一定容有一个忠实线性表示——最简单的例子就是对应于 Lie 代数 $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ 的单连通 Lie 群.如果 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{R}$ 上一个半单 Lie 代数,那么在与 $\mathfrak{g}$ 相对应的单连通群 G_0 的中心 $Z_{\mathfrak{g}}$ 内有一个最小子群 $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$,称为线性化子(linearizer),使得 $G_0/\mathscr{L}(\mathfrak{g})$同构于一个线性半单 Lie 群.如果 $\mathfrak{u} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 的紧实形式,那么

$$\mathscr{L}(\mathfrak{g}) \cong \Gamma_0(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{h}'/\Gamma_0([\mathfrak{t}, \mathfrak{t}])$$

(见[3],在那里对一切类型的单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 来说,这个群都被计算出来).

参考文献

[1] Adams, J. F., Lectures on Lie groups, Benjamin, 1969.

[2] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (Springer, 1992).

[3] Сирота, А. И., Солодовников, А. С.,《Успехи матам. наук》, **18** (1963), 3, 87 – 144.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 $\mathbf{R}$ 上半单 Lie 群的(无限维)表示论大部分已被 Harish-Chandra 建立起来.亦见 V. S. Varadarajan 在全集[A1]里对 Harish-Chandra 工作所做的出色的综述.

$\mathbf{Z}$ 上半单 Lie 群 mod p 的约化称为 **Chevalley 群**(Chevalley group).大多数有限单群都可以从其中得到(除**交错群**(alternating group)和 26 个**零散单群**(sporadic simple group)外).对于 Chevalley 群的结构和表示论所作的概述见[A2].

参考文献

[A1] Harish-Chandra, Collected works, Ⅰ – Ⅳ, Springer, 1984.

[A2] Carter, R. W., Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters, Wiley, 1985.

[A3] Wolf, J. A., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1974.

[A4] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

郝钢新 译

可解 Lie 群[**Lie group, solvable**; **Ли разрешимая группа**]

一个 **Lie 群**(Lie group),作为抽象群是可解的(见**可解群**(solvable group)).以下只考虑实或复可解 Lie 群.

幂零的,特别是 Abel 的,Lie 群是可解的.如果 $F = \{V_i\}$ 是($\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上)有限维向量空间 V 内的一个完全**旗**(flag),则

$$B(F) = \{g \in \mathrm{GL}(V): gV_i \subset V_i \quad 对一切\ i\}$$

是 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个可解代数子群.特别地,还是一个可解 Lie 群.如果在 V 内选取一个与旗 F 相容的基,则在这个基内,群 $B(F)$ 的元素都被表示成非奇异上三角形矩阵;所得到的矩阵 Lie 群记作 $T(n, K)$,这里 $K = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$.

群 G 的 **Lie 代数**(Lie algebra)$\mathfrak{g}$ 是可解的必要且只要 G 的单位元连通分支 $(G)_0$ 是可解的.群 $B(F)$ 和 $T(n, K)$ 的 Lie 代数分别是 $\mathfrak{t}(F)$ 和 $\mathfrak{t}(n, K)$(见**可解 Lie 代数**(Lie algebra, solvable)).藉助于 $\mathfrak{g}$ 的子代数与 G 的连通 Lie 子群之间的对应关系,可解 Lie 代数的一切性质都可以转移到可解 Lie 群上来(见[1],[3]).

关于可解 Lie 代数的 Lie 定理对于可解 Lie 群来说有类似的命题:如果 $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是可解 Lie 群 G 的一个有限维复表示,那么在 V 内有一个旗 F 使得 $\rho(G) \subset B(F)$.特别,在 V 内有一个关于所有 $\rho(g)$ $(g \in G)$ 的公共本征向量.

可解 Lie 群首先是被 S. Lie 考虑的，他猜想连续群可能会在微分方程用积分求积的理论中扮演着 Galois 群在代数方程论中同样的角色. 然而，一般说来，一个微分方程的自同构群是平凡的. 因此，沿着这个方向所得到的有意义的结果只限于线性的和某些其他的方程. 这就是，对于这些方程来说，解可以由积分和它们的指数来表示这样一个事实等价于对应的(矩阵) Galois 群是可解的这样一个事实(见[2]). 如果这个群是幂零的，则积分的指数不在解中出现.

由于任意单连通 Lie 群被分解成半直积的 Levi-Мальцев 定理(见 **Levi-Мальцев 分解** (Levi-Mal'tsev decomposition))，可解 Lie 群在任意 Lie 群的研究中起着重要的作用. 在任意连通 Lie 群 G 中也可以考虑极大可解子群. 如果 $K=\mathbf{C}$，则它们就是 **Borel 子群** (Borel subgroup)，并且在 G 中彼此共轭. 例如，$B(F)$ 就是 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个 Borel 子群.

一个单连通可解 Lie 群总有一个忠实的有限维表示. 然而对于非单连通的可解 Lie 群来说却不一定如此. 单连通可解 Lie 群的任意连通子群都是闭的并且是单连通的([6]). **指数映射** (exponential mapping) $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 不一定是单射也不一定是满射，即使对于单连通可解 Lie 群来说也是这样. 如果可解 Lie 群中 exp 是微分同胚，那么就称为**指数 Lie 群** (Lie group, exponential). 一个单连通可解 Lie 群微分同胚于 $\mathbf{R}^N$，而任意连通可解 Lie 群微分同胚于 $\mathbf{R}^n \times T^m$，这里 T^m 是一个 m 维环面.

$\mathbf{R}$ 上一个连通线性可解 Lie 群可以表示成半直积 $K \cdot S$，这里 K 是一个紧 Abel 子群而 S 是一个单连通正规子群. 任意特征为 0 的域上一个代数连通可解群分裂成由幂幺元组成的正规子群与由半单元组成的 Abel 子群的半直积([3]). 对于连通可解 Lie 群可以定义 Мальцев 分解的类似分解([4]).

如果一个连通 Lie 群 G 的 Lie 代数是三角形的(在 $\mathbf{R}$ 上)，则 G 称为三角形的 (triangular) (亦见**超可解 Lie 代数** (Lie algebra, supersolvable)). 关于可解 Lie 代数的 Lie 定理对三角形 Lie 群的类似命题也成立(见 **Lie 定理** (Lie theorem)). 任意一个连通 Lie 群的极大连通三角形子群都是共轭的([5]). 一个连通三角形 Lie 群同构于 $T(n, K)$ 的一个子群，而且当它是单连通时，还是一个指数群.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[2] Kaplansky, I., An introduction to differential algebra, Hermann, 1957.

[3] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 3, Hermann, 1955.

[4] Auslander, L., An exposition of the structure of solvmanifolds. I Algebraic theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 227 - 261.

[5] Винберг, Э. Г.,《Докл. АН СССР》, **141** (1961), 270 - 273.

[6] Мальцев, А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, 177 - 200.

В. В. Горбацевич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Olver, P. J., Applications of Lie groups to differential equations, Springer, 1986.

[A2] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras and their representations, Springer, 1984.

[A3] Springer, T. A., Linear algebraic groups, Birkhäuser, 1981.

郝钢新 译

超可解 Lie 群 [Lie group, supersolvable; Ли вполне разрешимая группа]，三角形 Lie 群 (triangular Lie group)

一个连通实 **Lie 群** (Lie group) G，对于其中任意元素 g 来说，伴随表示(见 **Lie 群的伴随表示** (adjoint representation of a Lie group)) 的算子 $\mathrm{Ad}\, g$ 的本征值都是实数.

一个连通 Lie 群 G 是超可解的必要且只要它的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是超可解的，因此超可解 Lie 群的许多性质都与**超可解 Lie 代数** (Lie algebra, supersolvable) 的性质平行.

以下的不动点定理对于超可解 Lie 群成立([2])：一个射影群的任意超可解 Lie 子群 G 在实射影空间的每一个 G 不变闭子集内都有一个不动点. 还有其他与复可解 Lie 群相类似的性质. 任意连通 Lie 群 G 都有极大连通超可解 Lie 子群 T，它们在 G 中是共轭的(见[2]). 对于研究实半单 Lie 群的结构来说，子群 T 常用来作为 **Borel 子群** (Borel subgroup) 的实类比.

一个单连通超可解 Lie 群可以同构地嵌入 $\mathbf{R}$ 上的对角线上元素均为正数的实上三角矩阵的群内(这个群本身是超可解的).

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, second enlarged edition, Springer, 1991.

[2] Винберг, Э. Б.,《Докл. АН СССР》, **141** (1961), 270 - 273.

В. В. Горбацевич 撰

【补注】 在[1]里，称超可解群为"可三角化 Lie 群" (trigonalizable Lie group). 按俄文版字面翻译是全可解 Lie 群 (fully-solvable Lie group).

郝钢新 译

Lie-Kolchin 定理 [Lie-Kolchin theorem; Ли-Колчина теорема]

群 $\mathrm{GL}(V)$ (V 是一个代数闭域上有限维向量空间)的一个可解子群 G 有一个指数至多为 ρ 的正规

子群．这里 ρ 只依赖于 $\dim V$，使得在 V 中有一个旗(flag) $F=\{V_i\}$，它关于 G_1 是不变的．换句话说，在 V 中有一个基，在这个基内，G_1 的元素都可以写成三角形矩阵．如果 G 是 $GL(V)$ 在 Zariski 拓扑内一个连通闭子群，则 $G_1=G$；这时 Lie-Kolchin 定理就是由 S. Lie 对复连通（在 Euclid 拓扑内）**可解 Lie 群**（Lie group，solvable）所证明的 **Lie 定理**（Lie theorem）的一般化．这个论断也可以看成 **Borel 不动点定理**（Borel fixed point theorem）的一个特殊情形．

Lie-Kolchin 定理对于一个任意域有如下类比的定理：一个可解的矩阵群含有一个具有有限指数的正规子群，它的换位子群是幂零的．

Lie-Kolchin 定理是由 E. R. Kolchin([1])（对连通群）和 А. И. Мальцев([2])（在一般形式下）证明的．有时也称为 Kolchin-Мальцев 定理（Kolchin-Mal'tsev theorem）．

参考文献

[1] Kolchin, E. R., Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 1－42.

[2] Мальцев, А. И., Избр. труды, т. 1, М. (1976), 294－313.

[3] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

В. В. Горбацевич 撰

【补注】 在西方文献里，Lie-Kolchin 定理常指的是关于 $GL(V)$ 的连通闭子群的那种较为狭义的形式．关于 Lie-Kolchin 定理在线性常微分方程的 Galois 理论中所起的作用见[A1]．

参考文献

[A1] Kaplansky, I., An introduction to differential algebra, Hermann, 1957.

[A2] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

[A3] Borel, A., Linear algebraic groups, second enlarged edition, Springer, 1991.

郝钢新 译

Lie p 代数 [**Lie p-algebra**; **Ли p-алгебра**]，限制 Lie 代数（restricted Lie algebra）

特征 $p>0$ 的域 k 上（或更一般地，素特征 $p>0$ 的环上）的一个 Lie 代数 L，具有满足下述条件的 p 映射 $x\to x^{[p]}$：

$$\mathrm{ad}(x^{[p]})=(\mathrm{ad}\,x)^p,$$

$$(\lambda x)^{[p]}=\lambda^p x^{[p]},$$

$$(x+y)^{[p]}=x^{[p]}+y^{[p]}+\Lambda_p(x,y).$$

其中 $\mathrm{ad}\,x: y\to[x,y]$ 是 L 的由元素 $x\in L$ 决定的内导子（伴随变换），而 $\Lambda_p(x,y)$ 是 L 的一个特定元素，即如下的 Lie 单项式的线性组合，

$$(\mathrm{ad}\,x_1\cdots\mathrm{ad}\,x_{p-1})\,x,$$

且对所有 $i=1,\cdots,p-1$，$x_i=x$ 或 y．

Lie p 代数的一个典型例子可按下述方法得到：将域 k 上任意一个结合代数 A（见**结合环与结合代数**（associative rings and algebras））看成是具有下面两种导子运算的**泛代数**（universal algebra）：

i) $(x,y)\to[x,y]=xy-yx$,

ii) $x\to x^p$.

特别地，性质 $\mathrm{ad}(x^p)=(\mathrm{ad}\,x)^p$ 是恒等式

$$(\mathrm{ad}\,x)^n y=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}x^{n-j}yx^j$$

的一个直接推论，若 $n=p$，对 $j=1,\cdots,p-1$，有 $\binom{n}{j}=0$．由于任意 **Lie 代数**（Lie algebra）均可嵌入一个适当选择的具有运算 i) 和 ii) 的结合代数 A 中（Poincaré-Birkhoff-Witt 定理（Poincaré-Birkhoff-Witt theorem）），常可用 x^p 代替 $x^{[p]}$，尽管有时可能出现混乱．

如同每种结构理论一样，保持结构映射是特别受到关注的．

对于任意 Lie p 代数 L 存在着一个 p 泛（限制泛）包络结合代数 $U_p(L)$（p-universal (restricted universal) enveloping associative algebra $U_p(L)$）．如果 $\dim_k L=n$，则 $\dim_k U_p(L)=p^n$．这点注记说明，对任意 Lie 代数，其最小 p 包络或 p 闭包是有意义的．

Lie 代数 L 的原来的 Lie 子代数 M (Lie 理想) 称为 p 子代数（p-subalgebra）（p 理想（p-ideal）），如果对所有 $x\in M$ 都有 $x^{[p]}\in M$．Lie p 代数间的同态映射 $\varphi: L\to K$ 称为 p 同态，如果

$$\varphi(x^{[p]})=(\varphi(x))^{[p]},\ x\in L.$$

若 K 是域 k 上的一个线性 Lie p 代数，也可称之为 L 的一个 p 表示 φ．

在一个有基底 $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 和零中心 $Z(L)$ 的 Lie 代数 L 上，p 结构 $x\to x^{[p]}$ 的表达式是由基元 e_i 的象 $e_i^{[p]}$ 的表达唯一确定的．另一方面，对于一个交换 Lie 代数 L，总有 $\Lambda_p(x,y)=0$，考虑对 (L,π)，其中 π 是一个任意的 p 半线性映射．

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y),\ \pi(\lambda x)=\lambda^p\pi(x),$$
$$\lambda\in k,$$

则 L 被赋与了一个 p 结构．在一个代数闭域 k 上，每个有限维交换 Lie p 代数均可分解成一个环面

$$L_0 = \langle e_1, \cdots, e_r : e_i^{[p]} = e_i \rangle$$

和一个幂零子代数(见**幂零代数**(nilpotent algebra)) L_1 的直和 $L = L_0 \oplus L_1$，其中恒等式

$$x^{[p^m]} = (x^{[p^{m-1}]})^{[p]} = 0,$$

对充分大的 m 成立(见[1])．

Lie p 代数的主要来源是代数群论、形式群论和不可分域论(见[2])．任意代数 A 的所有导子的 Lie 代数 $\mathrm{Der}_k(A)$ 是 $\mathrm{End}_k(A)$ 的一个 p 子代数．

有几个原因使单的 Lie p 代数(限制单 Lie 代数)类特别有趣．对于复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个有限维 Lie 代数 $\mathscr{L}$，设 $\mathscr{L}_{\mathbf{Z}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个 Chevalley 基的 $\mathbf{Z}$ 张成，并扩张标量到 k: $\mathscr{L}_k = \mathscr{L}_{\mathbf{Z}} \otimes k$．商代数 $L = \mathscr{L}_k / Z(\mathscr{L}_k)$ 是单的而且是限制的．用这种方法得到的单 Lie 代数是已知的**典型代数**(algebras of classical type): $A_n (n \geqslant 1)$, $B_n (n \geqslant 3)$, $C_n (n \geqslant 2)$, $D_n (n \geqslant 4)$, G_2、F_4, E_6, E_7, E_8．除典型代数外，还有另外四类单 Lie p 代数：一般代数 $W_n (n \geqslant 1)$ ($\dim W_n = n p^m$)；特殊代数 $S_n (n \geqslant 2)$ ($\dim S_n = n(p^{n+1} - 1)$)；Hamilton 代数 $H_n (n \geqslant 1)$ ($\dim H_n = p^{2n} - 2$)；切触代数 $K_n (n \geqslant 2)$ ($\dim K_n = p^{2n-1} - \varepsilon$，这里当 $n + 1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ 时，$\varepsilon = 0$，而当 $n + 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p)$ 时，$\varepsilon = 1$)．上述单 Lie p 代数称为 **Cartan 型代数**(algebras of Cartan type)．在 Lie-Cartan 结构(见 **Lie 代数**(Lie algebra, 3))中用 p 截多项式 $k[X_1, \cdots, X_m; X_1^p = 0, \cdots, X_m^p = 0]$ ($m = n, n+1, 2n$ 或 $2n - 1$)代替形式幂级数环 $\mathbf{C}[[X_1, \cdots, X_m]]$ 即可得到这些代数．在符号 W_n, S_n, $\cdots$ 中，指数 n 有不变的意义，即它是极大环面子代数的维数．重要的 Block-Wilson 分类定理(Block-Wilson classification theorem)([5])：设 L 是特征 $p > 7$ 的代数闭域 k 上的一个有限维单 Lie p 代数，则 L 是典型的或 Cartan 型的．这个结果首先由 А. И. Кострикин 和 И. Р. Шафаревич 猜测出来(见[3])．上面的叙述对于 $p = 7$ 的情形是否成立还不知道(推想可能如此)．但对于 $p = 2, 3, 5$，情况无疑更为复杂．例如，对于 $p = 3$，典型 Lie 代数 C_2 被包含在 10 维单 Lie p 代数 $C_2(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in k$) 的一个参数族中．

模 Lie 代数(modular Lie algebra)理论，即特征 $p > 0$ 的域上的 Lie 代数论是上半世纪提出的．简言之，它来源于 E. Witt (1937) 关于单的非典型 Lie 代数 W_1 的发现．在此要注意的是，远为更多的 Cartan 型单 Lie 代数结构并不是 p 代数．如果放弃对限制性的要求，在研究表示上同调、形变，以及模 Lie 代数理论的其他问题时会产生格外的困难．研究要求限制性条件和不要求限制性条件的二者构造的相互关系，成为该理论的重要组成部分(见[6])．

参考文献

[1] Jocobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964).

[2] Seligman, G. B., Modular Lie algebras, Springer, 1967.

[3] Кострикин, А. И., Шафаревич, И. Р., 《Докл. АН СССР》, **168** (1966), 740 – 742.

[4] Zassenhaus, H., Ueber Liesche Ringe mit Primzahlcharacteristik, *Abh. Math. Sem. Hansische Univ.*, **13** (1939), 1 – 100.

[5] Block, R. E. and Wilson, R. L., Classification of the restricted simple Lie algebras, *J. of Algebra*, **114** (1988), 115 – 259.

[6] Strade, H. and Farnsteiner, R., Modular Lie algebras and their representations, M. Dekker, 1988.

А. И. Кострикин 撰

【补注】 当特征为 2 或 3 时，分别有无穷多个 31 维的和 10 维的单 Lie p 代数(见[A1])．

参考文献

[A1] Kac, V. G. and Veĭsfeĭler, B. Yu., Exponentials in Lie algebras of characteristic p, *Math. USSR Izv.*, **5** (1971), 777 – 803.

[A2] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969 (Second enlarged edition, Springer, 1991).

牛凤文 译

Lie 二次曲面 [**Lie quadric**; **Ли квадрика**]

等仿射群或射影群几何中曲面的一种**密切二次曲面**(osculating quadric)．在双曲点 M_0 其定义如下．

设曲线 $L = u^i(t)$ 是渐近线(或在 M_0 与渐近线至少有二阶切触的曲线)并且沿 L 给定向量场 $v^i(t)$．包含过曲线 $u^i(t)$ 上三点的沿向量 $v^i(t) r_i(t) = c^i r_i + cN$ 方向的三条无限接近的直线的二次曲面称为 Lie 二次曲面，其中 r_1, r_2, N 是曲面在 M_0 的标架，N 是**仿射法线**(affine normal)．它的方程是

$$g_{ij} \xi^i \xi^j + H \xi \xi - 2 \xi = 0.$$

其中 $(\xi^1 : \xi^2 : \xi : 1)$ 及 $(c^1 : c^2 : c : 1)$ 是曲线的齐次坐标，g_{ij} 是渐近张量，H 是仿射平均曲率．

Lie 二次曲面(连同 Wilczynski 二次曲面(Wilczynski quadric)和 **Fubini 二次曲面**(Fubini quadric))属于 **Darboux 二次曲面**(Darboux quadric)束．Wilczynski 二次曲面具有方程

$$g_{ij} \xi^i \xi^j + \kappa \xi \xi - 2 \xi = 0,$$

并且 L 是它的第一类测地线，Fubini 二次曲面具有方程

$$g_{ij} \xi^i \xi^j + \frac{2}{3} (H + \kappa) \xi \xi - 2 \xi = 0,$$

并且 L 和它在 M_0 有三阶接触；这里 κ 是张量 g_{ij} 的 Gauss 曲率．

Lie 二次曲面的概念是 S. Lie 在 1878 年 12 月 18 日

给 F. Klein 的信中引入的(见[1]).

参考文献

[1] Lie, S., Gesammelte Abhandlungen. Anmerkungen zum 3-ten Band, Teubner, 1922, p. 718.

[2] Широков, П. А., Широков, А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959.

[3] Фиников, С. П., Проективно дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937.
М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Affine Differentialgeometrie, 2., Springer, 1923.

[A2] Bol, G., Projektive Differentialgeometrie, 2, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954.
沈一兵 译

Lie 环 [Lie ring; Ли кольцо]

满足条件

$$a^2=0$$

及 $(ab)c+(bc)a+(ca)b=0$ (Jacobi 恒等式(Jacobi identity)) 的环 A, 其中 a,b,c 是 A 的任意元素. 第一个条件意味着 A 是反变换的:

$$ba=-ab.$$

在一般非结合环中, Lie 环构成一个**环簇**(variety of rings). 它包含所有的零乘环.

亦见**非结合环与非结合代数**(non-associative rings and algebras).

О. А. Иванова 撰 牛凤文 译 邓邦明 校

Lie 三元系统 [Lie ternary system; Ли тройная система]

具有三线性合成

$$\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m},\ (X,Y,Z)\to[X,Y,Z]$$

的**向量空间**(vector space) $\mathfrak{m}$, 满足下列条件

$$[X,X,Y]=0,$$

$$[X,Y,Z]+[Y,Z,X]+[Z,X,Y]=0,$$

$$[X,Y,[Z,U,V]]=$$

$$=[[X,Y,Z],U,V]+[Z,[X,Y,U],V]+$$

$$+[Z,U,[X,Y,V]].$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是 **Lie 代数**(Lie algebra), 且 $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$ 是一个子空间, 使得对任何 $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$ 有 $[[X,Y],Z]\in\mathfrak{m}$, 那么运算

$$[X,Y,Z]=[[X,Y],Z]$$

将 $\mathfrak{m}$ 变成为 Lie 三元系统. 反之, 每一个 Lie 三元系统能用该方法从某个 Lie 代数得到.

域 **R** 上的有限维 Lie 三元系统的范畴等于单连通对称齐性空间(见**对称空间**(symmetric space))的范畴.

参考文献

[1] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[2] Loos, O., Symmetric spaces, 1, Benjamin, 1969.

А. С. Феденко 撰 徐森林 译

Lie 定理 [Lie theorem; Ли теорема]

1) Lie 定理是 Lie 群论中描述一个**局部 Lie 群**(Lie group, local)与它的 Lie 代数之间联系的三个经典定理之一. Lie 定理是在 19 世纪由 S. Lie 和他的学派所发展起来的理论的基础(见[1]).

令 G 是区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上一个 r 维实的有效局部 **Lie 变换群**(Lie transformation group), 令 e 是 G 的单位元并且假设在 $G\times\Omega$ 的子集 $\{e\}\times\Omega$ 的一个邻域内的局部坐标里, G 在 Ω 上的作用由一组解析函数

$$y_i=f_i(g_1,\cdots,g_r;x_1,\cdots,x_n),\ i=1,\cdots,n,\tag{1}$$

给出, 这里 $g=(g_1,\cdots,g_r)\in G$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$, 且 $g(x)=y=(y_1,\cdots,y_n)\in\Omega$. 这个作用在 Ω 上定义 r 个解析向量场,

$$X_i=\sum_{j=1}^n\xi_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\ i=1,\cdots,r.\tag{2}$$

这里 $\xi_{ij}(x)=\partial f_j/\partial g_i(e,x)$.

Lie 第一定理(Lie first theorem)确认定义 G 的作用的函数 $f_j(j=1,\cdots,n)$ 本身是由 G 上某一组辅助的解析函数 $\psi_{ki}(g)$ $(k,i=1,\cdots,r)$ 所定义的, 这些函数满足条件

$$\psi_{ki}(e)=\delta_{ki},\tag{3}$$

这里 δ_{ki} 是 **Kronecker 符号**(Kronecker symbol). 更确切地说, $(\psi_{ki}(g))$ 是 G 的由元素 g^{-1} 的右平移在 g 点的微分的矩阵. 而函数组(1)正是方程组

$$\frac{\partial f_j}{\partial g_i}(g,x)=\sum_{k=1}^r\xi_{kj}(f(g,x))\psi_{ki}(g),\tag{4}$$

$$i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,n,$$

的满足初始条件 $f_j(e,x)=x(j=1,\cdots,n)$ 的解.

Lie 第二定理(Lie second theorem)描述函数 $\xi_{ij}(x)$ 和 $\psi_{ki}(x)$ 的性质. 即 $\xi_{ij}(x)$ 满足方程组

$$\sum_{k=1}^n\left(\xi_{ik}\frac{\partial\xi_{jl}}{\partial x_k}-\xi_{jk}\frac{\partial\xi_{il}}{\partial x_k}\right)=\sum_{k=1}^r c_{ij}^k\xi_{kl},\tag{5}$$

$$1\leqslant i,j\leqslant r,\ 1\leqslant l\leqslant n$$

（这个组是方程组（4）的可积条件），而函数 $\psi_{kl}(g)$ 满足方程组

$$\frac{\partial \psi_{kl}}{\partial g_m} - \frac{\partial \psi_{km}}{\partial g_l} = \sum_{i,j=1}^{r} c_{ji}^{k} \psi_{im} \psi_{jl},\ 1 \leqslant k, l, m \leqslant r,$$

这里 c_{ij}^k 是一些常数．由关系（5）得出两个向量场 X_i 和 X_j 的换位子（**Lie 括号**（Lie bracket））$[X_i, X_j]$ 是向量场 $X_1, \cdots, X_r$ 的常系数线性组合

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \qquad (6)$$

这就是说，向量场 $X_1, \cdots, X_r$ 的线性包 $\mathfrak{g}$ 对于 Lie 括号来说是一个代数．

Lie 第一和第二定理的逆命题如下．如果函数 $f_1, \cdots, f_n$ 给出（4）的一个解，其中矩阵（ξ_{ij}）具有极大秩，并且（3）和（5）被满足，则（1）确定一个有效局部 Lie 变换群．这个局部群是由（2）所给出的单参数变换群生成的．

Lie 第三定理（Lie third theorem）断言，常数 c_{ij}^k 满足下列关系：

$$\left.\begin{array}{c} c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \\ \sum_{l=1}^{r} (c_{il}^m c_{jk}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l) = 0, \\ 1 \leqslant i, j, k, l, m \leqslant r, \end{array}\right\} \qquad (7)$$

这就是说，$\mathfrak{g}$ 是一个 Lie 代数．第三定理的逆命题是重要的：如果 c_{ij}^k 是满足（7）的任意常数，那么存在一组满足（6）的向量场 $X_1, \cdots, X_r$，这些向量场通过上述构造由某一个局部 Lie 变换群产生（换句话说，每一个有限维 Lie 代数都是某个局部 Lie 变换群的 Lie 代数）．Lie 第三定理有时（例如，[4]）被说成对于 **R** 或 **C** 上每一个有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 来说，以 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数的整体 Lie 群的存在定理（见**解析群的 Lie 代数**（Lie algebra of an analytic group））．

2）关于可解 Lie 代数的 Lie 定理：令 φ 是特征为 0 的代数闭域上一个有限维**可解 Lie 代数**（Lie algebra, solvable）$\mathfrak{b}$ 在一个向量空间 V 内的**线性表示**（linear representation）．那么有 V 的一个基使得 $\varphi(\mathfrak{b})$ 的一切算子 X 都可以写成上三角形矩阵．类似的论断对于一个连通拓扑可解群在一个有限维复向量空间内的线性连续表示来说也成立（Lie 定理在群论中的类比）；群是连通的假设是本质性的．Lie 定理在群论中类比的一个重要变形称为 **Lie-Kolchin 定理**（Lie-Kolchin theorem）．

参考文献

[1] Lie, S. and Engel, F., Theorie der Transformations-gruppen, 1－3, Teubner, 1888－1893.
[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975（译自法文）.
[3] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，上册，1957，下册，1958）.
[4] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965（Springer, 1992）.
[5] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 3, Hermann, 1955.
[6] Чеботарев, Н. Г., Теория групп Ли, М.-Л., 1940.

В. Л. Попов 撰

【补注】 上面正文中第 1）部分亦见 **Frobenius 定理（关于 Pfaff 方程组的）**（Frobenius theorem on Pfaffian systems）．

参考文献

[A1] Borel, A., Linear algebraic groups, second enlarged edition, Springer, 1991.
[A2] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras and their representations, Springer, 1984.
[A3] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

郝钢新 译

Lie 变换群［**Lie transformation group; Ли группа преобразований**］

一个连通 **Lie 群**（Lie group）G 在一个光滑**流形**（manifold）M 上的光滑作用，即满足下列条件的一个光滑映射（C^∞ 类的）$A: G \times M \to M$：

Ⅰ）$A(g'g'', m) = A(g', A(g'', m))$，对一切 $g', g'' \in G$, $m \in M$；

Ⅱ）$A(e, m) = m$，对一切 $m \in M$（e 是群 G 的单位元）．

如果作用 A 还满足条件

Ⅲ）若 $A(g, m) = m$ 对一切 $m \in M$，则 $g = e$，那么就称为有效的（effective）．

Lie 变换群的例．一个 Lie 群 G 在一个有限维向量空间 M 内的任意光滑线性表示；Lie 群 G 分别通过左或右平移作用在自身上，$A(g, m) = gm$ 或 $A(g, m) = mg^{-1}(g, m \in G)$；Lie 群 G 通过内自同构作用在自身上，$A(g, m) = gmg^{-1}(g, m \in G)$；以及**单参数变换群**（one-parameter transformation group），即群 **R** 在一个流形 M 上的光滑作用．

与上面所定义的整体 Lie 变换群一起，还考虑局部 Lie 变换群（local Lie transformation groups），它们是 Lie 群经典理论的主要论题．代替 G 考虑一个**局部 Lie 群**（Lie group, local），就是某个 Lie 群 G 内单位元的一个邻域 U，而代替 M 考虑一个开子集 $W \subset \mathbf{R}^n$．

如果 G 是 M 上一个 Lie 变换群，那么通过在 G 内选取一个适当的邻域 $U \ni e$ 和一个开子集 $W \subset M$，就得到一个局部 Lie 变换群．相反的步骤，由一个局部 Lie 变换群到一个整体 Lie 变换群（整体化（globali-

zation))，并非永远可能．然而如果 $\dim M \leqslant 4$ 且 W 足够小，那么整体化是可能的（见[2]）．

有时考虑 C^k 类，$1 \leqslant k \leqslant \infty$，或 C^a 类（解析）Lie 变换群，即假定 A 属于相应的类．如果 A 是连续的，那么要它属于 C^k 或 C^a，只需对于任意 $g \in G$，M 的变换 A_g: $m \to A(g, m)$ 也属于这个类（见[3]）．特别，对于作用在 M 上的 Lie 变换群 G 的讨论等价于对于 G 到 M 的带有自然拓扑的微分同胚群 $\mathrm{diff}\, M$ 内一个连续同态 $G \to \mathrm{diff}\, M$ 的讨论．

对于任意 Lie 变换群 G 来说，有一个 G 的 **Lie 代数**（Lie algebra）$\mathfrak{g}$ 到 M 上光滑向量场的 Lie 代数 $\Phi(M)$ 内的同态 A_*: $\mathfrak{g} \to \Phi(M)$ 与之对应，这在元素 $X \in \mathfrak{g}$ 与单参数变换群

$$(t, m) \to A(\exp tX, m)$$

的速度场之间建立了一个对应关系，这里 $t \in \mathbf{R}$，$m \in M$ 而 $\exp$: $\mathfrak{g} \to G$ 是**指数映射**（exponential mapping）（见[5]）．如果 G 是有效的，则 A_* 是单射．对于一个连通 Lie 群 G 来说，同态 A_* 完全确定了这个 Lie 变换群．反之，对于任意同态 β: $\mathfrak{g} \to \Phi(M)$，都有一个局部 Lie 变换群与之对应（[6]）．如果 $\beta(\mathfrak{g})$ 的所有向量场都是完全的（complete）（即它们的积分曲线 $x(t)$ 对一切 t 都被定义），那么有 M 上一个整体 Lie 变换群 G，使得 $\mathrm{Im}\, A_* = \mathfrak{g}$．只需要求 $\beta(\mathfrak{g})$ 作为一个 Lie 代数是由完全的向量场生成的；如果 M 是紧的，则完全性条件自然被满足（见[4]）．

如果 G 是流形 M 上一个 Lie 变换群，那么对于任意点 $m \in M$ 的稳定子群 $G_m = \{g \in G: A(g, m) = m\}$ 是 G 的一个闭子群；它也称为点 m 的稳定化子（stabilizer）或迷向子群（isotropy subgroup）．对应的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_m \subset \mathfrak{g}$ 由一切这样的 $X \in \mathfrak{g}$（$A_*(X)_m = 0$）组成．在 $\mathfrak{g}$ 的一切子代数所成的集合上自然拓扑内，子代数 $\mathfrak{g}_m$ 连续地依赖于 m（[7]）．点 m 的轨道 $G(m) = \{A(g, m): g \in G\}$ 是 M 的一个浸入子流形，它微分同胚于 G/G_m．如果 G 是紧的，则一切轨道都是紧嵌入子流形．群 $\mathbf{R}$ 在环面

$$T^2 = \{(z_1, z_2): z_i \in \mathbf{C}, |z_i| = 1, i = 1, 2\}$$

上由公式

$$A(t, (z_1, z_2)) = (e^{it} z_1, e^{i\alpha t} z_2),$$

$\alpha \in \mathbf{R}$ 是无理数，所给出的作用是非嵌入轨道的例子．

两个 Lie 变换群 A_i: $G \times M_i \to M_i$，$i = 1, 2$，称为相似的（similar），如果有一个微分同胚 f: $M_1 \to M_2$，使得 $A_1(g, m) = A_2(g, f(m))$，$g \in G$，$m \in M_1$．变换群理论中一个重要问题就是确切到相似范围内对 Lie 变换群进行分类．迄今为止（1997），只在某些特殊情形下得到解决．S．Lie（[1]）给出了在区域 $\mathbf{R}^1$ 和 $\mathbf{R}^2$ 内确切到局部相似范围内的局部 Lie 变换群的分类．三维流形上 Lie 变换群的部分分类已经完成．紧 Lie 变换群也已被充分研究．关于传递的 Lie 变换群见**齐性空间**（homogeneous space）．

参考文献

[1] Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, **16** (1880), 441 – 528.

[2] Mostow, G., The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 606 – 636.

[3] Bochner, S. and Montgomery, D., Groups of differentiable and real or complex analytic transformations, *Ann. of Math.* (2), **46** (1945), 685 – 694.

[4] Palais, R., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **22** (1957), 1 – 123.

[5] Sulanke, R. and Wintgen, P., Differentialgeometrie und Faserbüundel, Birkhäuser, 1972.

[6] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М. 1973（中译本：Л．С．邦德列雅金，连续群，科学出版社，上册，1957，下册，1958）．

[7] Richardson, R., On the variation of isotropy subalgebras, in Proc. Conf. Transformation Groups, New Orleans, 1967, Springer, 1968, 429 – 440.

[8] Чеботарев, Н. Г., Теория групп Ли, М.-Л., 1940.

В. В. Горбацевич 撰

【补注】 如果 G 是一个局部紧群，通过 C^k 变换连续且有效地作用在一个 C^k 流形 M 上，则 G 是一个 Lie 群，并且作用 $G \times M \to M$ 是 C^k 类的．

对于 $k \geqslant 2$，这个定理是属于 S．Bochner 和 D．Montgomery 的．对于 $k = 1$，是属于 M．Kuranishi 的．见[A1]，Chap．V．

参考文献

[A1] Montgomery, D. and Zippin, L., Topological transformation groups, Interscience, 1964.

郝钢新 译

Liénard-Chipart 准则［**Liénard-Chipart criterion; Льенара-Шипара критерий**］

Routh-Hurwitz 准则（Routh-Hurwitz criterion）的一个改进，它把其中的所有计算归结为 Hurwitz 矩阵的仅仅偶阶（或仅仅奇阶）的主子式的计算．

设给定了一个多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \ a_0 > 0; \qquad (*)$$

令 H 是它的 Hurwitz 矩阵（见 **Routh-Hurwitz 准则**（Routh-Hurwitz criterion））；又令 Δ_i 是它的 i 阶主子式，$i = 1, \cdots, n$．

Liénard-Chipart 准则．下述四个条件任意之一都是

实系数多项式（*）的所有根均有负的实部的必要充分条件:

1) $a_n>0$, $a_{n-2}>0,\cdots$, $\Delta_1>0$, $\Delta_3>0,\cdots$;

2) $a_n>0$, $a_{n-2}>0,\cdots$, $\Delta_2>0$, $\Delta_4>0,\cdots$;

3) $a_n>0$, $a_{n-1}>0$, $a_{n-3}>0,\cdots$, $\Delta_1>0$, $\Delta_3>0,\cdots$;

4) $a_n>0$, $a_{n-1}>0$, $a_{n-3}>0,\cdots$, $\Delta_2>0$, $\Delta_4>0,\cdots$.

这个准则是由 A. Liénard 和 H. Chipart 建立的（[1]）.

参考文献

[1] Liénard, A. and Chipart, H., Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, *J. Math. Pures Appl.*, **10**(1914), 291 – 346.

[2] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967（英译本: Gantmakher, F. R., The theory of matrices, Chelsea, reprint, 1977）.

И. В. Проскуряков 撰　赵春来 译

Liénard 方程 [Liénard equation; Льенара уравнение]

非线性二阶常微分方程

$$x''+f(x)x'+x=0. \qquad (*)$$

此方程描绘了存在线性回复力和非线性阻尼的单自由度系统的动力学．如果函数 f 具有性质:

$$f(x)<0,\ 对小的\ |x|,$$
$$f(x)>0,\ 对大的\ |x|;$$

即对于小的振幅、系统吸收能量，对于大的振幅，耗散出现、则系统可发生自激振动（出现**自振动**（auto-oscillation））. 系统（*）出现自振动的充分条件由 A. Liénard 首次证明（[1]）.

Liénard 方程与 **Rayleigh 方程**（Rayleigh equation）紧密相联．它的一种重要的特殊情形是 **van der Pol 方程**（van der Pol equation）．代替方程（*），考虑方程组

$$x'=v,\ v'=-x-f(x)v$$

（相平面 x, v 上的一个稳定极限环相应于系统（*）的一个自振动过程），或与之等价的方程

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-x-f(x)v}{v},$$

常是方便的．引进新变量 $y=x'+F(x)$, 其中 $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$, 则（*）转化为方程组

$$x'=y-F(x),\ y'=-x.$$

比 Liénard 方程更一般的方程是

$$x''+f(x)x'+g(x)=0,$$
$$x''+\varphi(x,x')x'+g(x)=0.$$

研究的主要兴趣在于确定使得这些方程具有唯一的稳定周期解的可能更加一般的充分条件．非线性 Liénard 方程

$$x''+f(x)x'+x=e(t)$$

及其推广也已得到详尽研究．

参考文献

[1] Liénard, A., *Rev. Gen. Electr.*, **23** (1928), 901 – 912; 946 – 954.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959（中译本: A. A. 安德罗诺夫, A. A. 维特, C. Э. 哈依金, 振动理论, 科学出版社, 上册, 1973; 下册, 1974）.

[3] Sansone, G., Equazioni differenziali nel campo reale I, II, Zanichelli, 1948 – 1949.

[4] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory, Interscience, 1957（中译本: S. 莱夫谢茨, 微分方程几何理论, 上海科学技术出版社, 1965）.

[5] Reissig, R., Sansone, G., Conti, R., Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, Cremonese, 1969.

Н. Х. Розов 撰　沈永欢 译

似然方程 [likelihood equation; правдоподобия уравнение]

用**最大似然法**（maximum-likelihood method）求未知参数的统计估计时得出的方程．设 X 是一随机向量，其概率密度 $p(x|\theta)$ 含未知参数 $\theta\in\Theta$, 则方程

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X|\theta)=0$$

称为似然方程，而其解 $\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的最大似然估计量（maximum-likelihood estimator）．似然方程在某些场合可以用初等方法求解．但是似然方程一般为代数方程或超越方程，利用逐步逼近法求解(见**序列逼近法**(sequential approximation, method of))．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cox, D. R. and Hinkley, D. V., Theoretical statistics, Chapman & Hall, 1974.

周概容 译

似然比检验 [likelihood-ratio test; отношения правдоподобия критерий]

一种统计检验，其统计量是对应于所检验假设和一切容许假设集的似然函数的最大值之比．设随机变量 X 取值于样本空间$\{\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathsf{P}_\theta\}(\theta\in\Theta)$, 而测度族 $\mathscr{P}=\{\mathsf{P}_\theta,\theta\in\Theta\}$ 关于某 σ 有限测度 μ 绝对连续，记 $p_\theta(x)=d\mathsf{P}_\theta(x)/d\mu(x)$．设根据随机变量 X 的实现需要检验复合假设 H_0: 参数 θ 的未知真值 θ_0 属于集合 $\Theta_0\subset\Theta$, 备选假设为 $H_1:\theta_0\in\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$．按照似然比检验，在显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1/2)$ 下否定假设 H_0, 如果由试

验结果得 $\lambda(x)\leqslant\lambda_\alpha$，其中 $\lambda(X)$ 为由

$$\lambda(X)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}p_\theta(X)}{\sup_{\theta\in\Theta}p_\theta(X)}$$

决定的似然比检验的统计量；λ_α 是临界水平，由检验容量(size of the test)

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\mathrm{P}_\theta\{\lambda(x)\leqslant\lambda_\alpha\}=$$

$$=\sup_{\theta\in\Theta_0}\int_{\{x:\lambda(x)\leqslant\lambda_\alpha\}}p_\theta(x)\mu(dx)$$

等于 α 的条件来求．特别地，假如集合 Θ 只含两个点：$\Theta=\{\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1\}$，而相互对立的两个假设(这里为简单假设)分别对应密度 $p_0(\cdot)$ 和 $p_1(\cdot)$，则似然比检验的统计量这时由下式给出：

$$\lambda(X)=\frac{p_0(X)}{\max\{p_0(X),p_1(X)\}}=\min\left\{1,\frac{p_0(X)}{p_1(X)}\right\}.$$

根据似然比检验，假设 H_0 在水平 α 下应该被拒绝，如果 $p_0(X)/p_1(X)\leqslant\lambda_\alpha$．其中数 $\lambda_\alpha(0<\lambda_\alpha<1)$ 决定于条件

$$\mathrm{P}\{\lambda(X)\leqslant\lambda_\alpha|H_0\}=$$

$$=\int_{\{x:\ p_0(x)\leqslant p_1(x)\lambda_\alpha\}}p_0(x)\mu(dx)=\alpha.$$

(广义)似然比检验是 J.Neyman 和 E.S.Person 1928 年提出的．他们(1933)还证明，在检验一个简单假设对另一简单假设的一切水平 α 的检验中，似然比检验是最大功效的(见 **Neyman-Pearson 引理** (Neyman-Pearson lemma))．

参考文献

[1] Neyman, J. and Pearson, E.S., Joint statistical papers, Cambridge Univ.Press, 1967.

[2] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

М.С.Никулин 撰

【补注】 此检验亦称为广义似然比检验(generalized likelihood test)和 Wald 检验(Wald test)． 周概容 译

极限 [limit; предел]

数学中基本概念之一，意指一个变量依赖于另一变量，当后一变量按一定方式改变时前者任意接近地趋向某一常数．在极限的定义中，所考虑对象的接近性起基本作用：只有定义了接近性后极限才有确切的意义．以下的数学分析的基本概念是与极限概念相联系的：连续性、导数、微分、积分．极限的最简单的情况之一是序列的极限．

序列的极限．设 X 是**拓扑空间** (topological space)．X 中点的序列 x_n，$n=1,2,\cdots$，称为收敛于一点 $x_0\in X$，或同样地，点 x_0 称为给定序列的极限(limit of a sequence)，如果对 x_0 的每一邻域 U 存在某自然数 N，使得对所有的 $n>N$，$x_n\in U$ 成立．在此情况下，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

当 X 是 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space) 的情形，序列 $x_n\in X$，$n=1,2,\cdots$ 的极限如果存在，必是唯一的．对**度量空间** (metric space) X，点 x_0 是序列 $\{x_n\}$ 的极限，当且仅当对每一个 $\varepsilon>0$ 存在自然数 N，使得对所有的指标 $n>N$，不等式 $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$ 满足，这里 $\rho(x_n,x_0)$ 是 x_n 与 x_0 之间的距离．如度量空间中一个点列收敛，则它是有界的．**完全度量空间** (complete metric space) 中的一点列收敛，当且仅当它是**基本序列** (fundamental sequence)．特别地，这对数列为真，由此历史上首先有了序列极限的概念．对这种数列以下公式成立：

$$\lim_{n\to\infty}c=c,\ \lim_{n\to\infty}cx_n=c\lim_{n\to\infty}x_n,$$

这里 c 是任一给定的数；

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}y_n;$$

又如果 $\lim_{n\to\infty}y_n\neq0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}x_n}{\lim_{n\to\infty}y_n}.$$

这些数列的性质能推广到更一般结构中序列的极限，例如，和的极限的性质能推广到线性拓扑空间中的点列，积的极限的性质能推广到拓扑群中的点列，等等．

如果两实数序列 $x_n\in\mathbf{R}$ 和 $y_n\in\mathbf{R}$ 收敛，又如果 $x_n\leqslant y_n$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim_{n\to\infty}y_n,$$

即过渡到极限时非严格不等式保持不变．如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a,$$

又如果 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，则序列 z_n，$n=1,2,\cdots$，收敛于同样的极限：$\lim_{n\to\infty}z_n=a$．这些性质能推广到序集中点列的极限．

每一个上(下)有界的增(减)实数序列 x_n，即满足 $x_n\leqslant x_{n+1}$ $(x_n\geqslant x_{n+1})$，$n=1,2,\cdots$，的序列是收敛的，且其极限是其成员集的上确界(下确界)．例如，如 $a>0$，k 是自然数，而 a_n 是 $a^{1/k}$ 的近似值，算到小数点后 n 位，则 a_n，$n=1,2,\cdots$，形成一增序列且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a^{1/k}$．另一上有界增序列的例子是内接于某圆的 n 边正多边形 $(n=3,4,$

…）的周长序列；此序列收敛于此圆周长．

在数列理论中起基本作用的是无穷小序列（infinitesimal sequences）或零序列（null sequences），即收敛于零的那些序列．数列的一般概念在以下意义下能归结为无穷小序列概念，一数列收敛于一给定数，当且仅当此序列的项与给定数之差成为无穷小序列．

数的无穷大序列（infinitely-large sequence）概念也是有用的．这些是以无穷大 $+\infty$，$-\infty$ 之一或以无符号的无穷大 ∞ 为极限的序列．为了定义无穷极限，符号 $+\infty$，$-\infty$ 或 ∞ 在实数集 $\mathbf{R}$ 中的 ε 邻域（$\varepsilon>0$）概念由以下公式引入

$$U(+\infty,\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}: x>\frac{1}{\varepsilon}\},$$

$$U(-\infty,\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}: x<-\frac{1}{\varepsilon}\},$$

$$U(\infty,\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}: |x|>\frac{1}{\varepsilon}\},$$

而 ∞ 在复数集 $\mathbf{C}$ 中的 ε 邻域概念由公式

$$U(\infty,\varepsilon)=\{z\in\mathbf{C}: |z|>\frac{1}{\varepsilon}\}$$

引入．如果对每一 $\varepsilon>0$ 存在某指标 N，使得对所有的指标 $n>N$，全体成员 $x_n\in U(\infty,\varepsilon)$（$x_n\in U(+\infty,\varepsilon)$ 或 $x_n\in U(-\infty,\varepsilon)$）成立，则记成 $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$（$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 或 $-\infty$）．复数序列的无穷极限类似地定义．

每个有界数列包含收敛子序列（见 **Bolzano-Weierstrass 定理**（Bolzano-Weierstrass theorem））．每一无界序列包含无穷大子序列．

一个给定序列的子序列的（有限或无穷）极限称为此序列的子序列极限（subsequential limit）．任一实数序列的子序列极限集合中，总有一个最大的和一个最小的（有限或无穷）．序列的最大的（最小的）子序列极限称为它的上（下）极限（upper（lower）limit）．一序列具有有限或无穷极限，当且仅当其上极限与下极限重合，且其公共值是此序列的极限．

其他的极限概念，如函数的极限和 Riemann 和的极限，能借助于序列极限来表示．序列极限的定义能推广到有向（偏序）集．

映射（函数）的极限．设 X 和 Y 是拓扑空间，$E\subset X$，x_0 是 E 的**聚点**（accumulation point 或 cluster point），且设 $f: E\to Y$ 是从 E 到 Y 中的映射（函数）．如果对 Y 中点 a 的任意邻域 $V=V(a)$，存在 x_0 在 X 中的邻域 $U=U(x_0)$，使得对任意点 $x\in E\cap U(x_0)\setminus\{x_0\}$，象 $f(x)$ 属于 V：$f(x)\in V$，或换言之，$f(E\cap U)\subset V$，则称点 $a\in Y$ 是映射（函数）f 在 x_0 处的极限（limit of a mapping（function））（或称为 x 趋于 x_0 时的极限），记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a, \text{ 当 } x\to x_0 \text{ 时}.$$

如果 Y 是 Hausdorff 空间，则映射 $f: E\to Y$ 在一给定点 $x_0\in X$ 至多能有一个极限．

当 $E^*\subset E$ 且 x_0 是 E^* 的聚点时 f 在 E^* 上的限制 $f|_{E^*}$ 的极限称为 f 在 E^* 上的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E^*}}f(x)=\lim_{x\to x_0}f|_{E^*}(x).$$

如果 $f: E\to Y$，$E^*\subset E\subset X$，x_0 是 E^* 的聚点，且 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则在 E^* 上 f 在 x_0 的极限也存在且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E^*}}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

如果 E_1、$E_2\subset X$，$f: E_1\cup E_2\to Y$ 且极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_2}}=a$$

存在，则极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a$$

也存在．

当考虑一个映射（函数）$f: E\to Y$，$E\subset X$、当 $x\to x_0\in X$ 的极限时，可以出现 $x_0\in E$、或者另一方面，$x_0\notin E$．$x_0\in E$ 的情形是特别值得注意的，因为它导致**连续函数**（continuous function）的概念：如果 $f: E\to Y$，Y 是 Hausdorff 空间且 $x_0\in E$，则为使映射 f 在 x_0 是连续的（continuous），必须且只须

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

如果 x_0 是 E 的一个**孤立点**（isolated point），则极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

对任一映射 $f: E\to Y$ 都存在，即任一映射在其定义域的所有孤立点上连续．所以映射的极限概念，特别是连续性概念，只是对被映射**集合的极限点**（limit point of a set）才是非平凡的．在函数 $f: E\to Y$ 的极限的经典情况，通常假定 $x_0\notin E$，即 x_0 不属于在其上取极限的集合．

如果空间 X 在点 x_0 满足**第一可数公理**（first axiom of countability）且空间 Y 是 Hausdorff 的，则为了映射 $f: E\to Y$，$E\subset X$ 的极限 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，必要充分条件是：对满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ 的任一序列 $x_n\in E$，$n=1,2,\cdots$，极限 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在．如果这条件成立，则极限 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选取，且这些极限的公共值是 f 在 x_0 的极限．

在拓扑空间 Y 中点列 y_n 的极限（limit of a se-

quence of points）是映射（函数）极限的特殊情形：在该情况 $E=\mathbf{N}$、带离散拓扑的自然数集，$x_0=+\infty$，$X=\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$，且 X 中 $+\infty$ 的邻域是形如 $U=\{n: n\geqslant n_0\}\cup\{+\infty\}$ 的任一子集 $U\subset X$，这里 n_0 是一自然数.

多重序列的极限（limit of a multiple sequence）概念，即其成员是用整多重指标作指标的序列极限，也是映射的极限的特殊情形.

当空间 $X\supset E$ 在 x_0 第一可数且 Y 是完全度量空间的情况，映射 $f: E\to Y$ 在给定点 x_0 极限存在的一个内在准则（称为 Cauchy 准则（Cauchy criterion））是：极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，当且仅当对每一 $\varepsilon>0$ 存在 x_0 在 X 中邻域 $U=U(x_0)$，使得对满足条件 x'，$x''\in E\cap U\setminus\{x_0\}$ 的所有点 x' 和 x''，不等式 $\rho(f(x''), f(x'))<\varepsilon$ 成立. 特别地，如果 Y 是实数或复数集，此准则成立.

极限的某些性质. 如果 Y 是度量空间，$f: E\to Y$, $E\subset X$，且极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a\in Y$ 存在，则存在 x_0 的某一邻域 $U=U(x_0)$，使得被映射集 E 与此邻域之交 $E\cap U$ 在映射 f 下的象是 Y 的有界子集.

如果 $E\subset X$, $\mathbf{R}$ 是实数集，函数 $f: E\to\mathbf{R}$ 在点 $x_0\in X$ 有有限的非零极限，则存在 x_0 的某一邻域 $U=U(x_0)$ 和一个数 $c>0$，使得对所有的点 $x\in E\cap U\setminus\{x_0\}$，不等式

$$f(x)>c, \text{ 如果 } \lim_{x\to x_0} f(x)>0,$$

$$f(x)<-c, \text{ 如果 } \lim_{x\to x_0} f(x)<0$$

满足.

如果 Y 是**拓扑群**（topological group）（特别是 **Abel 群**（Abelian group），带有用加法写出的群运算），$f: E\to Y$, $E\subset X$，且 $x_0\in X$，则极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 a，当且仅当函数 $\alpha(x)=f(x)a^{-1}$ 在 x_0 有极限且等于 Y 的单位元（分别地，函数 $\alpha(x)=f(x)-a$ 在 x_0 有极限且等于零——这样的函数称为无穷小函数（infinitesimal function））.

如果 Y 是域（field）P 上的**线性拓扑空间**（linear topological space），$f_1, f_2: E\to Y$，且 $E\subset X$，则 f_1 和 f_2 的线性组合在 x_0 的极限等于在同一点上它们的极限的同样的线性组合：

$$\lim_{x\to x_0}[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)]=$$

$$=\lambda_1\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lambda_2\lim f_2(x),$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2\in P.$$

如果 Y 是实数或复数集，$f_1, f_2: E\to Y$（这种函数称为数值函数）且 $E\subset X$，则

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)f_2(x)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\lim_{x\to x_0} f_2(x);$$

如果 $\lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim_{x\to x_0} f_2(x)},$$

在这种情形，极限 $\lim_{x\to x_0}(f_1(x)/f_2(x))$ 的意义是 f_1/f_2 在被映射集 E 和 x_0 的某邻域的交集上的限制的极限，而在此交集上商 f_1/f_2 是有定义的. 如果 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$, $x\in E$，且 $\lim_{x\to x_0} f_1(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0} f_2(x)$ 存在，则

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)\leqslant\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

如果 X 和 Y 是从实数集 $\mathbf{R}$ 或者补充一个无符号的无穷大 ∞ 或者补充两个带符号的无穷大 $+\infty$ 和 $-\infty$ 而得出，且 $E\subset\mathbf{R}$, $f(E)\subset\mathbf{R}$，且 $x_0\notin E$，则如上定义的函数极限的定义是单实变量实值函数的有限或无穷极限的经典定义. 类似地，如果空间 X 和 Y 由复数集 $\mathbf{C}$ 添加无穷大 ∞ 而得出，就得到单复变量函数的（有限或无穷）极限的定义. 另一方面，如果空间 X 由 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$, $n>1$，添加无穷 ∞ 得出，就得到多元函数当自变量趋于有限点或无穷时有限或无穷极限的定义.

对定义在实直线（或更一般地，在序集上）的子集的函数，可定义单侧极限（one-sided limit）的概念. 在其定义域的所有极限点至少有一个单侧极限的函数的例子是实值单调函数：如果函数 f 在实直线的子集 E 上是单调的且 x_0 是 E 的一个极限点，则它是两集合 $E_1=E\cap\{x\in\mathbf{R}: x<x_0\}$ 和 $E_2=E\cap\{x\in\mathbf{R}: x>x_0\}$ 中至少一个的极限点，如果 x_0 是 E_1 的极限点，则 f 在 x_0 有左极限，即在 E_1 上的极限. 另一方面，如果 x_0 是 E_2 的极限点，则 f 在 x_0 有右极限，即在 E_2 上的极限. 如果此外又假设 f 是递增的且上方有界，$E_1\neq\emptyset$ 且 x_0 是 E_1 的极限点，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 是有限的.

求函数极限的一个基本的通用方法是确定此函数在给定点某邻域中的主部，通常藉助于 **Taylor 公式**（Taylor formula）而得到. 为了求极限，**l'Hospital 法则**（l'Hospital rule）常常是有用的.

不论映射的极限概念有很大的普遍性，但是它不能包括在当代数学中出现的所有存在的极限概念. 例如，Riemann 和（见**积分和**（integral sum））的极限概念不包括在映射（函数）的极限概念中. 极限的一个充分普遍的概念，在一定意义下包括所有基本情况的是一映射关于滤子的极限概念.

滤子的极限. 设 X 是一拓扑空间，$X\neq\emptyset$，设 $\mathfrak{U}=\{U\}$ 是它的拓扑的一个**基**（base），且设 $\mathfrak{F}$ 是 X 上

一个**滤子**(filter)(即 X 的非空子集的一个非空族 $\mathfrak{F}$，使得对任意的 $A', A'' \in \mathfrak{F}$，存在 $A \in \mathfrak{F}$，使得 $A \subset A' \cap A''$，且每一个包含 $A \in \mathfrak{F}$ 的 X 的子集属于 $\mathfrak{F}$)．如果 $\mathfrak{F}$ 强于 x_0 点的拓扑的局部基组成的滤子 $\mathfrak{B}(x_0)$，即对任一 $U \in \mathfrak{B}(x_0)$，存在 $A \in \mathfrak{F}$ 使得 $A \subset U$，则点 x_0 称为滤子 $\mathfrak{F}$ 的极限(limit of a filter)．

设 $\mathbf{N}$ 是带离散拓扑的自然数集．由所有 $\mathbf{N}$ 的有限子集的补集组成的 $\mathbf{N}$ 上的滤子称为 $\mathbf{N}$ 上自然滤子(natural filter)，且表成 $\mathfrak{F}_{\mathbf{N}}$．它在 $\mathbf{N}$ 中无极限．同样的滤子在集合 $X = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ 上有 $+\infty$ 作为它的极限，如 X 中局部基 $\mathfrak{B}(+\infty)$ 由集合 $A_n = \{m: m \in \mathbf{N}, m > n \in \mathbf{N}\}$ 组成而对 $n \in \mathbf{N}$，$\mathfrak{B}(n)$ 由单点集 $\{n\}$ 组成．一拓扑空间上滤子极限的唯一性与能分离空间的点相联系；为了一拓扑空间上每一滤子最多有一个极限，充分必要条件是此空间是 Hausdorff 空间．

设 X 是一集合，Y 是一拓扑空间，φ 是从 X 到 Y 中的映射，且 $\mathfrak{F}$ 是 X 上滤子．点 $b \in Y$ 称为映射 φ 关于滤子 $\mathfrak{F}$ 的极限，记成

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x) = b,$$

如果由所有的集合 $\varphi(A)$，$A \in \mathfrak{F}$，组成的滤子 $\varphi(\mathfrak{F})$ 在 Y 中有 b 作为其极限．

如果 $X = \mathbf{N}$ 是自然数集合，φ 是从 $\mathbf{N}$ 到一拓扑空间 Y 中的映射，$\varphi(n) = y_n \in Y$，$n \in \mathbf{N}$，且 $\mathfrak{F}_{\mathbf{N}}$ 是自然滤子，则在 Y 中 φ 关于 $\mathfrak{F}_{\mathbf{N}}$ 的极限与 Y 中序列 $\{y_n\}$ 的通常极限重合．

如果在 $X = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 中，X 上滤子 $\mathfrak{F}$ 是两自然滤子的乘积，即它的所有的形如 $A \times B$ 的集合组成，这里 $A, B \in \mathfrak{F}_{\mathbf{N}}$，且如果 φ 是从 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 到一拓扑空间 Y 中的映射，$\varphi(n, m) = y_{nm} \in Y$，$n, m \in \mathbf{N}$，则 Y 中 φ 关于 $\mathfrak{F}$ 的极限与 Y 中**二重序列**(double sequence)的通常极限一致．

设集合 X 的元素是某区间 $[a, b]$ 的剖分 $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$，$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ 和一组点 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$，$i = 1, 2, \cdots$ 组成的集合 x，即

$$x = \{\tau; \xi_1, \cdots, \xi_n\}.$$

设 A_η(对任意的 $\eta > 0$)是 X 的子集，由在 x 中出现的剖分 $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ 的网格小于 η 的所有元素 $x \in X$ 组成，即

$$\max_{i=1,\cdots,n} (t_i - t_{i-1}) < \eta.$$

系统 $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ 是一滤子．每一定义在 $[a, b]$ 上的实值函数 f 由以下公式诱导出一个 X 到 $\mathbf{R}$ 中的映射 φ_f，

$$\varphi_f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

$$x = (\tau; \xi_1, \cdots, \xi_n), \tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}.$$

所以，$\varphi_f(x)$ 是 f 相应于 $x \in X$ 的 Riemann 和．

$\mathbf{R}$ 中 φ_f 关于 $\mathfrak{F}$ 的极限与 f 的 Riemann 和当剖分的网格趋于零时的通常极限重合．两者重合是指这两个极限同时存在或不存在，当极限存在时必相等且与 f 在 $[a, b]$ 上的 **Riemann 积分**(Riemann integral)一致．

拓扑空间的映射关于滤子的极限．设 X 和 Y 是拓扑空间，$E \subset X$，设 $\mathfrak{F}$ 是 E 上滤子，又设 φ 是从 E 到 Y 中的一个映射．点 $b \in Y$ 称为映射 φ 在 $a \in X$ 上关于滤子 $\mathfrak{F}$ 的极限，如果 a 是 $\mathfrak{F}$ 的极限而 b 是 $\varphi(\mathfrak{F})$ 的极限；记作

$$b = \lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x).$$

如果 $\mathfrak{B}(a)$ 是在 a 处的一邻域基，$E = X \setminus \{a\}$，且滤子 $\mathfrak{F}$ 由 a 的所有"去心"邻域 $U(a) \setminus \{a\}$，$U(a) \in \mathfrak{B}(a)$ 组成，则 $\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x)$ 与 φ 在 a 点的通常极限 $\lim_{x \to a} \varphi(x)$ 一致，这样推广了用邻域术语表达的映射极限的经典定义．序列极限概念的直接推广是拓扑空间中有向集的极限，有向集是一种**偏序集**(partially ordered set)，其中任两元素有公共的后继．从一拓扑空间到另一拓扑空间中的映射的极限概念能藉助于关于有向集的极限来表述．(见**广义序列**(generalized sequence)；**收敛性(的类型)**(convergence, types of).)

集合序列的极限．拓扑极限(topological limit)．设 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是一拓扑空间 X 的子集．序列 $\{A_n\}$ 的上拓扑极限(upper topological limit) $\overline{\mathrm{lt}}\, A_n$ 定义为其每一邻域与无穷多个集合 A_n 相交的那些点 $x \in X$ 的集合．下拓扑极限(lower topological limit) $\underline{\mathrm{lt}}\, A_n$ 是其每一邻域包含几乎所有集合 A_n 的点的那些点的集合，显然 $\underline{\mathrm{lt}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{lt}}\, A_n$．如果 $A = \underline{\mathrm{lt}}\, A_n = \overline{\mathrm{lt}}\, A_n$，则序列 $\{A_n\}$ 称为收敛的，而集合 A 称为集合序列 $\{A_n\}$ 的极限(limit of a sequence of sets)；记成 $A = \mathrm{lt}\, A_n$．一个序列的上、下拓扑极限是闭集．

集合论极限(set-theoretical limit)．有不涉及拓扑的集合序列的极限概念．一个集合序列 A_n，$n = 1, 2, \cdots$，称为收敛的(convergent)，如果有一集合 A，使得 A 的每个元素属于从某指标起的所有集合 A_n 且使得所有 A_n 的并集中不属于 A 的每一点仅包含在有限多集合 A_n 中．此集合 A 称为 $\{A_n\}$ 的极限，且表成

$$A = \lim A_n.$$

集合 A 是序列 $\{A_n\}$ 的极限，当且仅当此序列的**上极限和下极限**(upper and lower limits)重合且等于 A．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).

[2] Ильин, В. А., Садовничий, В. А., Сендов, Б. Х., Математический анализ, М., 1979.

[3] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1-2, М., 1981.

[4] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975 (中译本: С. М. 尼柯斯基, 数学分析教程, 第一卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1980 — 1981).

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).

[6] Zamansky, M., Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes, Dunod, 1958.

[7] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Functionen, Akademie-Verlag, 1960.

[8] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 对拓扑空间的一般理论，人们需要研究比点列收敛更一般的收敛概念. 需要考虑以有向偏序集(见**有向集** (directed set))为指标的点集的极限. 这样的集合称为网(nets)，而网的收敛有时称为 Moore-Smith 收敛(Moore-Smith convergence).

"极限"的基本(引入的)思想是某对象用其他对象序列任意接近地逼近. 这个思想也有各种代数的和范畴的工具来处理.

设 $\mathscr{C}$ 是一个**范畴** (category)且 A 是一偏序集. 对每一 $\alpha\in A$ 有一对象 $C_\alpha\in\mathscr{C}$，对 A 中任一对 $\alpha\leqslant\beta$ 有一态射 $f_{\alpha\beta}: C_\alpha\to C_\beta$，使得 $f_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}$，如果 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，则有 $f_{\beta\gamma}f_{\alpha\beta}=f_{\alpha\gamma}$，这种 C_α，$f_{\alpha\beta}$ 组成了以 A 为指标集的 $\mathscr{C}$ 中的**图式** (diagram).

$(C_\alpha, f_{\alpha\beta})$ 的投射极限(projective limit)或反极限(inverse limit) (P, f_α) 由一对象 $P\in\mathscr{C}$ 连同满足以下条件的态射族 $f_\alpha: P\to C_\alpha$ 组成，当 $\alpha\leqslant\beta$ 时有 $f_{\alpha\beta}f_\alpha=f_\beta$，且如果 D 和 $g_\alpha: D\to C_\alpha$ 对所有的 $\alpha\leqslant\beta$ 满足 $f_{\alpha\beta}g_\alpha=g_\beta$，则存在唯一态射 $g: D\to P$，使得 $f_\alpha g=g_\alpha$. 用记号: $P=\lim_{\leftarrow} C_\alpha$.

对偶地，$(C_\alpha, f_{\alpha\beta})$ 的归纳极限(inductive limit)或正极限(direct limit) (I, h_α) 由一对象 I 连同满足以下条件的态射族 $h_\alpha: C_\alpha\to I$ 组成，对所有 $\alpha\leqslant\beta$ 有 $h_\beta f_{\alpha\beta}=h_\alpha$，且如果 E 和 $k_\alpha: c_\alpha\to E$，对所有的 $\alpha\leqslant\beta$ 满足 $k_\beta f_{\alpha\beta}=k_\alpha$，则存在唯一态射 $k: I\to E$，使得 $kh_\alpha=k_\alpha$. 用记号: $I=\lim_{\rightarrow} C_\alpha$.

这些是很一般的概念且包括直积和直和(当 A 中每一对点不可比时). 在 A 是**有向集** (directed set)的情形，越来越好地逼近的思想又重新出现了; 例如见**拓扑向量空间** (topological vector space).

更一般地，人们也考虑在范畴中**图式** (diagram)的投射和归纳极限.

还有另外一个极限概念是**谱序列** (spectral sequence)的极限概念: 如果谱序列 (E^r_{pq}) 收敛于 (H_{p+q})，则 (H_{p+q}) 也称为 (E^r_{pq}) 的极限.

还有另外一些极限思想. 例如**极限圆** (limit cycle)概念; **极限元** (limit elements); **集合的极限点** (limit point of a set); **聚点** (accumulation point) 等等.

参考文献

[A1] Courant, R., Differential and integral calculus, 1-2, Blackie, 1948 (译自德文).

[A2] Stromberg, K. R., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A3] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

[A4] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

[A5] Adámek, J., Theory of mathematical structures, Reidel, 1983.

葛显良 译 鲁世杰 校

极限吸收原理 [limit-absorption principle; предельного поглощения принцип]

借助引入一个无穷小吸收来唯一地发现类似于 **Helmholtz 方程** (Helmholtz equation) 的方程的解的一种方式. 这个原理数学地叙述如下. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个无界区域，设 P 是 $L_2(\Omega)$ 上用微分表达式 $P(x, \partial/\partial x)$, $x\in\Omega$, 和 Ω 上的齐次边界条件给出的自伴算子，并且设 λ 是 P 的连续谱中的一个点. 那么对 $\varepsilon\neq 0$ 方程

$$Pu_\varepsilon=(\lambda+i\varepsilon)u_\varepsilon+f$$

在 $L_2(\Omega)$ 中是唯一地可解的，并且在一定的情形下借助极限过渡

$$u_\pm=\lim_{\varepsilon\to\pm 0}u_\varepsilon$$

可以发现方程

$$Pu=\lambda u+f$$

的解 $u=u_\pm$. 这里假设 f 有紧支集，并且当 $\varepsilon\to\pm 0$ 时，收敛 $u_\varepsilon\to u_\pm$ 是按 $L_2(\Omega')$ 的意义理解，其中 Ω' 是 Ω 中的任意有界集. 由于 λ 是 P 的连续谱中的一个点，一般这个极限在 $L_2(\Omega)$ 中不存在.

第一个极限吸收原理是对 $\mathbf{R}^2$ 中的 Helmholtz 方程(见[1]):

$$(\Delta+k^2)u=-f,\quad \Omega=\mathbf{R}^2,$$

$$P=-\Delta,\quad \lambda=-k^2<0$$

提出的. 用这个原理找到的解 $u_\pm$ 是发散或收敛波，并且在无穷远处满足**辐射条件** (radiation conditions). 这

些结果转移到了(见[2],[3])对算子

$$P\left[x,\frac{\partial}{\partial x}\right]=-\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]+q(x)\quad(*)$$

的，$\mathbf{R}^n$中有界区域外部的椭圆型边值问题，其中系数$a_{kj}(x)$当$|x|\to\infty$时充分快地趋于常数．为了极限吸收原理在这种情形下成立，λ必须不是P的本征值或者f与本征函数正交．加藤敏夫(见[3])的一个定理给出了算子$P=-\Delta+q(x)$的连续谱没有本征值的充分条件．对算子(*)也得到了这样的定理(见[3])．极限吸收原理对一定的带非紧边界的区域已被证实(见[3],[4])．

对高阶方程和方程组一个极限吸收原理和相应的辐射条件已经发现(见[5]－[7])；它们组成如下．设$P=(i\partial/\partial x)$是一个椭圆型(或超椭圆型)算子，满足：1)多项式$P(\sigma)$有实系数；2)曲面$P(\sigma)=0$，$\sigma\in\mathbf{R}^n$，分解为连通的光滑曲面$S_j(1\leqslant j\leqslant k)$，它们的曲率不为零；并且3)$\operatorname{grad}P(\sigma)\neq0$在$S_j$上．假设在$S_j$上给出了一个定向，即对每一个曲面独立地选择了一个法线方向ν．设$\omega=x/|x|$，设$\sigma_j=\sigma_j(\omega)$是$S_j$上的一个点，其上$\nu$和$\omega$有相同的方向，并且$\mu_j(\omega)=(\sigma_j(\omega),\omega)$．那么，函数$u(x)$确实满足辐射条件，如果它可以表示为

$$u=\sum_{j=1}^{k}u_j(x),\quad u_j=O(r^{(1-n)/2}),$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial r}-i\mu_j(\omega)u_j=o(r^{(1-n)/2}),\quad r\to\infty.$$

这些条件对有紧支集的任一函数f决定了方程

$$P\left[i\frac{\partial}{\partial x}\right]u=f,\quad x\in\mathbf{R}^n$$

的唯一的解．对这个方程的极限吸收原理就是这个解可以作为椭圆型方程

$$P\left[i\frac{\partial}{\partial x}\right]u_\varepsilon+i\varepsilon Q\left[i\frac{\partial}{\partial x}\right]u_\varepsilon=f$$

的唯一解$u_\varepsilon\in L_2(\mathbf{R}^n)$当$\varepsilon\to+0$时的极限得到，其中$Q(\sigma)$有实系数，并且在$S_j$上$Q(\sigma)\neq0$．依赖于$\operatorname{sign}_{\sigma\in S_j}Q(\sigma)(1\leqslant j\leqslant k)$的选择，取极限得到满足对应于$S_j$的某个定向的辐射条件的解．对在有界区域外部(见[5]－[7])，以及在非凸S_j的情形下具有变系数的高阶方程和方程组，这个原理已经证实．对这样的方程也有一个加藤型的唯一性定理．

参考文献

[1] Ignatowsky, W. [V.S. Ignatovskiĭ], Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Drahte, *Ann. der physik.*, **18** (1905), 13, 495－522.

[2] Повзнер, А.Я., 《Матем. сб.》, **32** (1953), 1, 109－156.

[3] Эйдус, Д. М., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 3, 91－156.

[4] Свешников, А. Г., 《Докл. АН СССР》, **80** (1951), 3, 345－347.

[5] Вайнберг, Б. Р., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 3, 115－194.

[6] Вайнберг, Б. Р., 《Матем. сб.》, **75** (1968), 3, 454－480.

[7] Vaĭnberg, B. R., Asymptotic methods in equations of mathematical physics, Gordon & Breach, 1988 (译自俄文).

Е. Р. Вайнберг 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

极限锥[limit cone; предельный конус]，凸曲面S的

曲面S上某点O出发的属于以S为边界的凸体的半直线形成的锥体的表面$P(S)$．在相差一个依赖于O的选取的平行移动的意义下，极限锥被唯一地定义．对于某些类型的非凸曲面，例如对于所谓的单叶球鞍面，也可定义极限锥的概念．

参考文献

[1] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М. 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1972).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in Tölke, J. and Wills, J. M. (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13－59.

[A2] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

成斌 译

极限环[limit cycle; предельный цикл]

常微分方程**自治系统**(autonomous system)相空间中的一条封闭轨道，它是该系统的至少一条其他轨道的α极限集或ω极限集(见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory))．极限环称为轨道稳定的(orbit stable)或稳定的(stable)，如果对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得在它的一个δ邻域内当$t=0$时出发的所有轨道，对$t>0$不离开它的ε邻域(见**轨道稳定性**(orbit stability))．一个极限环对应于系统的一个不为常数的周期解．为了使一个周期解对应一个稳定的极限环，充分条件是除一个乘子外它的所有乘子的模都小于1(见**特征指数**(characteristic exponent)；**Андронов-Witt定理**(Andronov-Witt theorem))．从物理观点来看，极限环对应于系统的周期特性或**自振**(autooscillation)(见[2])．

设定义在区域$U\subset V^n$内的自治系统

$$\dot{x}=f(x)\qquad(*)$$

有一闭轨道Γ，其中V^n是一微分流形，例如$V^n=\mathbf{R}^n$．在P点引与V^n相截的超平面π．那么，$t=0$

时从点 $c\in V\subset\pi$ 出发的系统的每一条轨道，当 t 增加时在点 $T(c)$ 再次与 π 相交，V 是 p 的一个充分小的邻域．微分同胚 $T: V\to T(V)$ 有不动点 p，并称为 **Poincaré 返回映射**（Poincaré return map）．它的特性决定了在 Γ 的一个邻域内系统轨道的性质．一个极限环和任一闭轨道的差别在于它总是决定一个不是恒等的 Poincaré 返回映射．如果 p 是微分同胚 T 的一个鞍点，那么极限环 Γ 称为鞍型的（of saddle type）．具有一个鞍型极限环的系统可有同宿曲线，即可有这样的轨道，对于它们极限环既是 α 极限集又是 ω 极限集．

在二维系统（*）（$V^n=\mathbf{R}^2$）的情形下，将 π 取为直线，且考虑函数 ρ，$\rho(c)=T(c)-c$，称为 Poincaré 返回函数（Poincaré return function）．ρ 的零点 $c=p$ 的重数称为极限环的重数（multiplicity of the limit cycle）．偶重数的极限环称为半稳定的（semi-stable）．极限环与静止点和**分界线**（separatrix）共同决定其他轨道性质的定性图形（见 **Poincaré-Bendixson 理论**（Poincaré-Bendixson theory）以及[3]，[4]）．在解析函数 f 的情形下，极限环属于下列三种类型之一：1）稳定的；2）不稳定的，即对 t 的反方向是稳定的；3）半稳定的．例如，系统

$$\dot{x}_1=-\omega x_2+\mu x_1(x_1^2+x_2^2-1)^k,$$
$$\dot{x}_2=\omega x_1+\mu x_2(x_1^2+x_2^2-1)^k,$$

（其中 $\omega\neq 0$，$\mu=$ 常数，$k\in\mathbf{N}$）对 $\mu<0$（$\mu>0$）和奇数 k 有一个稳定的（不稳定的）k 重极限环，对偶数 k 有一个半稳定的 k 重极限环．在所有的情况下，极限环是圆 $x_1^2+x_2^2=1$，即解

$$x_1=\cos(\omega t+\varphi_0),\ x_2=\sin(\omega t+\varphi_0)$$

的轨道．如果系统（*）给定在单连通区域 $U\subset\mathbf{R}^2$ 上，那么极限环至少包围系统的一个静止点．

为了寻求二阶系统的极限环，采用基于下面事实的方法：如果向量场 f 是向内（向外）指向一个环形区域 G，而且如果 G 不包含静止点，那么在 G 中至少有一个稳定的（不稳定的）极限环．G 的选择是基于物理的考虑，或者解析和数值计算的结果．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974（中译本：Л. С. 庞特里雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959（中译本：А. А. 安德罗诺夫，А. А. 维特，С. Э. 哈依金，振动理论，科学出版社，上册 1973；下册 1974）.

[3] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966（英译本：Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973）.

[4] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967（英译本：Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane, Israel Progr. Sci. Transl., 1971）.

[5] Плисс, В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.-Л., 1964（英译本：Pliss, V. A., Nonlocal problems of the theory of oscillations, Acad. Press, 1966）.

[6] Моисеев, Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, 2 изд., М., 1981.

Л. А. Черкас 撰

【补注】 以上给出的所有定义可对任意的动力系统来表述，并不一定要用常微分方程自治系统来定义．大部分结果在那种情况下仍有意义．对于 Poincaré-Bendixson 理论，亦见例如[A1]，Sect. Ⅷ. 1．[A2] 是另一个很好的全面的参考文献．

参考文献

[A1] Hajek, O., Dynamical systems in the plane, Acad. Press, 1968.

[A2] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

【译注】

参考文献

[B1] 叶彦谦等，极限环论（第二版），上海科学技术出版社，1984.

周芝英 译

极限元[**limit elements**; **граничные элементы**]，边界元（boundary elements），素端（prime ends），一个区域的

如下定义的复平面内区域 B 的元素．设 B 是扩充复平面里的一个单连通区域，又设 ∂B 是 B 的边界．B 的一个截线（section）c 定义为任意的以 a 和 b 为端点（包括 $a=b$ 和 $b=\infty$ 情形），关于球面度量是闭的简单 Jordan 弧 $c=\overline{ab}$，它的端点 a，b 属于 ∂B，并且它把 B 细分成两个这样的子区域，其中每一个的边界都包含属于 ∂B 而异于 a 和 b 的点．区域 B 的截线 c_n 的序列 K 称为一个链（chain），如果：1）当 $n\to\infty$ 时，c_n 的直径趋向于零；2）对于每个 n，交集 $\overline{c}_n\cap\overline{c}_{n+1}$ 都是空的；3）任意一条在 B 内连接给定点 $O\in B$ 和截线 $c_n(n>1)$ 的路径都和 c_{n-1} 相交．B 内的两个链 $K=\{c_n\}$ 和 $K'=\{c_n'\}$ 是等价的，如果任一截线 c_n 在 B 内把点 O 和所有截线 c_n' 分隔开，除去其中的有限个例外．B 的链的一个等价类称为 B 的一个极限元或素端．

设 P 是 B 的由链 $K=\{c_n\}$ 所确定的素端，又设 B_n 是 B 被 c_n 所细分成的两个子区域中的一个，它不包含 0．集合 $I(P)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n$ 称为这个素端的印记(impression)或支集(support)．一个素端的印记由边界点组成，并且不依赖于链 K 在等价类里的选取．一个素端的主点是它的一个这样的点：确定这个素端的诸链中至少有一个链的截线收敛到它．一个素端的邻近点(neighbouring point)或辅助点(subsidiary point)是它的除主点外的任何点．任一素端至少包含一个主点．素端的主点组成闭集．以下是素端的 Carathéodory([1])分类：第一类元素包含单个主点并且没有邻近点；第二类元素包含一个主点和无穷多个邻近点；第三类元素包含一个主点连续统但是没有邻近点；第四类元素包含一个主点连续统和无穷多个邻近点．

另外一个等价的定义由 P. Koebe 给出([2])．它基于路径的等价类．素端理论中最主要的定理是 Carathéodory 定理(Carathéodory theorem)：在区域 B 到单位圆盘 $|\zeta|\leqslant 1$ 上的一个单叶**共形映射**(conformal mapping)下，单位圆周的点和 B 的素端之间存在一个一对一的对应，并且 B 内每个收敛到素端 P 的点列变成单位圆内收敛到点 ζ_0 ($|\zeta_0|=1$)的点列，这个点就是 P 的象．

参考文献

[1] Carathéodory, C., Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, *Math. Ann.*, **73** (1913), 323－370.

[2] Koebe, P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I, *J. Reine Angew. Math.*, **145** (1915), 177－223.

[3] Суворов, Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965.

[4] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (英译本：Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 2, Chelsea, 1977).

[5] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966, Chapt. 9.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】代替"截线"，也可使用词横截(cross cut)或截割(cut)．

一个第一类素端所确定的(唯一的)点是可以趋近的边界点(见**可达边界点**(attainable boundary point))．亦见**共形映射的边界性质**(conformal mapping, boundary properties of a)．

在文献中，也会看到 Carathéodory 端(Carathéodory end)，用以代替素端．

第二个与素端多少有点相似的概念在文献中以"端"(end)的名称出现．这涉及拓扑空间的端；见第10卷的补充资料部分的条目端(end)．

参考文献

[A1] Ohtsuka, M., Dirichlet problem, extremal length and prime ends, v. Nostrand, 1967.

陈怀惠 译

星形性极限 [**limit of star-likeness; звездообразности граница**]，星形性精确半径(exact radius of star-likeness)，星形性界(bound of star-likeness)

一类圆盘 $|z|\leqslant r$ 的半径的最小上界 R_U，其中 U 是某类在 $|z|<1$ 内正则单叶函数 $w=f(z)=z+\cdots$，而在圆盘 $|z|<1$ 内的圆盘 $|z|\leqslant r$ 被 U 中诸函数映射成关于点 $w=0$ 的**星形区域**(star-like domain)．区间 $0<r<R_U$ 内任何一个数 r 称为类 U 的星形性半径(radius of star-likeness)．

星形性极限通常用下述星形性准则(criterion of star-likeness)求出：圆盘 $|z|<r$ 被 $w=f(z)$ 映射成星形区域，当且仅当在 $|z|=r$ 上

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \varphi}=\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0,\ z=re^{i\varphi},$$

或与之等价的

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

所有在圆盘 $|z|<1$ 内正则单叶函数 $f(z)=z+\cdots$ 组成的类 S 的星形性极限 R_S 等于 $\tanh(\pi/4)=0.65\cdots$．

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本：Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

Е. Г. Голузина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

集合的极限点 [**limit point of a set; предельная точка множества**]，拓扑空间中的

拓扑空间(topological space)的一点，其每个邻域至少含有该集合中与之相异的一点．一个集合如果含有它所有的极限点，就称为闭的(closed)．集合 M 的所有极限点的集合称为 M 的导集，记为 M'．若拓扑空间 X 满足第一**分离公理**(separation axiom)(对于其中任何两点 x 和 y，存在 x 的一个邻域 $U(x)$，不含有 y)，则集合 $M\subset X$ 的极限点的任何邻域均含有集合 M 的无限多个点，而导集 M' 是闭集．集 M 的任何**邻近点**(proximate point)或者是它的一个极限点，或者是它的一个**孤立点**(isolated point)．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914(中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 集合的极限点通常称为该集合的**聚点**(accumulation point). 亦见**凝聚点**(condensation point)(的补注).

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

胡师度、白苏华 译

轨道的极限点[**limit point of a trajectory**; **предельная точка траектории**]

动力系统 f^t 的轨道 $\{f^t x\}$ 的极限点是点

$$x_\alpha = \lim_{k\to\infty} f^{t_k} x \tag{1}$$

(α 极限点(α-limit point))或

$$x_\omega = \lim_{k\to\infty} f^{t_k} x \tag{2}$$

(ω 极限点(ω-limit point)), 这里序列 $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 满足: (1)中当 $k\to\infty$ 时 $t_k\to-\infty$, 或(2)中当 $k\to\infty$ 时 $t_k\to+\infty$, 并且(1)或(2)中的极限存在.

对于**动力系统**(dynamical system) f^t(或者换句话说, 对于 $f(t, x)$, 见[1])的轨道 $\{f^t x\}$, α 极限点(ω 极限点)与动力系统 f^{-t}(逆向时间系统)的轨道 $\{f^{-t}x\}$ 的 ω 极限点(α 极限点)相同. 轨道 $\{f^t x\}$ 的所有 ω 极限点(α 极限点)的集合 $\Omega_x(A_x)$ 称为这个轨道的 ω 极限集(ω-limit set)(α 极限集(α-limit set))(见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory)).

参考文献

[1] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949(中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 科学出版社, 上册 1956, 下册 1959).

В. М. Миллионщиков 撰

唐 云 译

极限集[**limit set**; **предельное множество**]

有时用来指**聚值集**(cluster set).

【补注】 "极限集"一词也用于其他方面. 例如, 用于 **Klein 群**(Kleinian group)理论和动力系统理论(例如见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory)).

轨道的极限集[**limit set of a trajectory**; **предельное множество**], 动力系统 f^t 的轨道 $\{f^t x\}$ 的极限集是 $\{f^t x\}$ 的所有 α 极限点的集合 A_x(α 极限集(α-limit set))或所有 ω 极限点的集合 Ω_x(ω 极限集(ω-limit set))(见**轨道的极限点**(limit point of a trajectory)). 系统的轨道 $\{f^t x\}$(或用另一种记号, $f(t, x)$, 见[1])的 α 极限集(ω 极限集)与**动力系统**(dynamical system) f^{-t}(逆时间系统)的轨道 $\{f^{-t}x\}$ 的 ω 极限集(相应地, α 极限集)相同. 因此, α 极限集与 ω 极限集的性质相类似.

集合 Ω_x 是闭的不变集. 如果 $\Omega_x=\phi$, 则轨道 $\{f^t x\}$ 称为正向发散的(divergent in the positive direction); 如果 $A_x=\phi$, 则称为负向发散的(divergent in the negative direction); 如果 $\Omega_x=Ax=\phi$, 则该轨道称为发散的(divergent). 如果 $x\in\Omega_x$, 则 x 称为正 Poisson 稳定的(positive Poisson stable); 如果 $x\in A_x$, 则 x 称为负 Poisson 稳定的(negative Poisson stable); 如果 $x\in A_x\cap\Omega_x$, 则 x 称为 Poisson 稳定的(Poisson stable). 如果 $x\notin\Omega_x$ 且 $\Omega_x\neq\phi$, 则 x 称为正渐近的(positively asymptotic); 如果 $x\notin Ax$ 且 $Ax\neq\phi$, 则点 x 称为负渐近的(negatively asymptotic).

如果 x 是正 Lagrange 稳定点(见 **Lagrange 稳定性**(Lagrange stability)), 则 Ω_x 是非空连通集,

$$\lim_{t\to+\infty} d(f^t x, \Omega_x)=0$$

(这里 $d(z, Y)$ 是点 z 到集合 Y 的距离)并且 Ω_x 中存在**回复点**(recurrent point)(轨道). 如果 x 是不动点, 则 $\Omega_x=\{x\}$. 如果 x 是周期点, 则

$$\Omega_x=\{f^t x\}_{t\in\mathbf{R}}=\{f^t x\}_{t\in[0,T)},$$

这里 T 是周期. 如果点 x 是正 Poisson 稳定的, 则它既非不动点又非周期点, 且若所考虑的动力系统是在完全的度量空间中, 则 Ω_x 中不在轨道 $\{f^t x\}$ 上的点在 Ω_x 中处处稠密.

如果平面动力系统由自治微分方程组(见**自治系统**(autonomous system))

$$\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbf{R}^2,\ f\in C'$$

给出(具有光滑向量场 f), x 正 Lagrange 稳定但非周期点, 并且 f 在 Ω_x 上不为零(即 Ω_x 中不含不动点), 则 Ω_x 是一个闭路, 即一条闭曲线(周期点的轨道), 而当 $t\to\infty$ 时, 轨道 $\{f^t x\}$ 围绕这个闭路螺旋缠绕. 对于在 $\mathbf{R}^n$ $(n>2)$ 中, 或在二维曲面如环面上的动力系统, ω 极限集可能有着不同的结构. 例如, 环面上的无理缠绕(系统 $\dot\varphi=1$, $\dot\psi=\mu$, 这里 (φ, ψ) (mod 1)是环面 T^2 上的循环坐标系, 而 μ 是无理数), 对每一个 $x=(\varphi, \psi)$, 集合 Ω_x 与环面重合.

参考文献

[1] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949(中译本：В. В. 涅梅茨基，В. В. 斯捷巴诺夫，微分方程定性理论，科学出版社，上册 1956，下册 1959).

[2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974(中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962). В. М. Миллионщиков 撰

【补注】“正向发散的”，“负向发散的”和“发散的”也可换用正后退的(positively receding)，负后退的(negatively receding)和后退的(receding)的术语.

上面关于平面动力系统某些极限集的圈结构的论断是所谓 Poincaré-Bendixson 定理(Poincaré-Bendixson theorem)的一部分(见 **Poincaré-Bendixson 理论**(Poincaré-Bendixson theory)，亦见**极限圈**(limit cycle))．它适用于平面上的任意动力系统(不必由微分方程给出)．见[A3]，Ⅷ．1 节，或一种避开局部截面的方法，见[A1]第二章，也可由[A2]得．

参考文献

[A1] Beck, A., Continuous flows in the plane, Springer, 1974.

[A2] Gutierrez, C., Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences, *Ergodic Theory and Dynam. Syst.*, **6** (1986), 17－44.

[A3] Hajek, O., Dynamical systems in the plane, Acad. Press, 1968. 唐 云 译

极限定理[**limit theorems**; **предельные теоремы**]，概率论中的

概率论中一类定理的通称，这些定理为大量随机源共同作用的结果呈现某种规则性给出条件．由 J. Bernoulli (1713) 和 P. Laplace (1812) 建立的最初的极限定理，论述了某一事件 E 在 n 次独立试验中出现的频率 μ_n/n 偏离其概率 $p(0<p<1)$ 的分布(其准确叙述见 **Bernoulli 定理**(Bernoulli theorem)；**Laplace 定理**(Laplace theorem))．S. Poisson (1837) 把这些定理推广到 E 在第 k 次试验中出现的概率 p_k 依赖于 k 的情形．表述了当 $n\to\infty$ 时 μ_n/n 偏离诸概率 $p_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的算术平均值 $\bar{p}_n=(\sum_{k=1}^n p_k)/n$ 的分布的极限性态(见 **Poisson 定理**(Poisson theorem))．如果 X_k 表示如下随机变量：若 E 在第 k 次试验中出现则取值 1，若对立事件出现则取值 0，那么 μ_n 就可表示为和

$$\mu_n=X_1+\cdots+X_n.$$

这样就可以把上面陈述的定理当作有关独立随机变量和的两个较一般命题——**大数律**(law of large numbers)与**中心极限定理**(central limit theorem)的特殊情形(下面给出的是这两个命题的古典形式)．

大数律．设

$$X_1,\ X_2,\ \cdots, \tag{1}$$

是一独立随机变量序列，令 s_n 表示此序列的头 n 个元之和

$$s_n=X_1+\cdots+X_n, \tag{2}$$

A_n 与 B_n^2 分别表示 s_n 的**数学期望**(mathematical expectation)

$$A_n=\mathrm{E}s_n=\mathrm{E}X_1+\cdots+\mathrm{E}X_n$$

与方差(见**方差**(dispersion))．

$$B_n^2=\mathrm{D}s_n=\mathrm{D}X_1+\cdots+\mathrm{D}X_n,$$

称序列(1)是服从大数律的，如果对任意 $\varepsilon>0$，不等式

$$\left|\frac{s_n}{n}-\frac{A_n}{n}\right|>\varepsilon$$

成立的概率当 $n\to\infty$ 时趋于零．

关于可应用大数律的很一般的条件首先由 П. Л. Чебышев (1867) 求出，随后又由 А. А. Марков (1906) 加以推广．关于可应用大数律的必要与充分条件的问题，由 А. Н. Колмогоров (1928) 彻底解决．如果所有随机变量有共同的分布函数，那么这些条件就简化为一个：X_n 有有限的数学期望(这由 А. Я. Хинчин 在 1929 年证明)．

中心极限定理．称中心极限定理对序列(1)成立，如果对任意的 z_1 和 z_2，不等式

$$z_1B_n<s_n-A_n<z_2B_n$$

成立的概率当 $n\to\infty$ 时有极限值

$$\Phi(z_2)-\Phi(z_1),$$

其中

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-x^2/2}dx$$

(见**正态分布**(normal distribution))．中心极限定理成立的相当一般的充分条件由 Чебышев (1887) 指出，但他的证明有漏洞，稍后才由 Марков (1898) 补正．此问题的一个近于最后的解答，由 А. М. Ляпунов (1901) 得到．Ляпунов 定理的精确陈述是：假设

$$c_k=\mathrm{E}|X_k-\mathrm{E}X_k|^{2+\delta},\ \delta>0,$$

$$C_n=c_1+\cdots+c_n,$$

如果当 $n \to \infty$ 时 $L_n = C_n / B_n^{2+\delta}$ 趋于零，那么中心极限定理对 (1) 成立. 中心极限定理可应用的条件问题的最终解答，就一般轮廓而言，是由 С. Н. Бернштейн (1926) 得到，并由 W. Feller (1935) 完成的. 在中心极限定理的条件下，当 z_n 随 n 趋于无穷而无界地增长时，形如 $s_n - A_n > z_n B_n$ 不等式成立的概率用 $1 - \Phi(z_n)$ 逼近的相对精度可以是很低的. 为增加此精度而必须的修正因子，由关于大偏差概率的极限定理表出 (见**大偏差的概率** (probability of large deviations); **Cramér 定理** (Cramér theorem)). 先是 H. Cramér 及 W. Feller，后又有 Ю. В. Линник 与其他人研究了此问题. 有关这一学科分支的典型结果，最方便的是用独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 的和 (2) 为例来解释，其中 $\mathrm{E}X_j = 0$ 且 $\mathrm{D}X_j = 1$，因此有 $A_n = 0$，$B_n = \sqrt{n}$.

例如，考虑不等式

$$s_n \geq z_n \sqrt{n}$$

的概率，它等于 $1 - F_n(z_n)$，其中 $F_n(z_n)$ 是随机变量 $s_n / \sqrt{n}$ 的分布函数，而对固定的 $z_n = z$，当 $n \to \infty$ 时有

$$1 - F_n(z) \to 1 - \Phi(z). \tag{3}$$

如果 z_n 依赖于 n 且当 $n \to \infty$ 时有 $z_n \to \infty$，那么就有

$$1 - F_n(z_n) \to 0 \quad 及 \quad 1 - \Phi(z_n) \to 0,$$

而公式 (3) 是无用的. 这时有必要获得逼近的相对精度即 $1 - F_n(z_n)$ 与 $1 - \Phi(z_n)$ 之比的界. 特别地，自然产生的问题是，在什么条件下，当 $z_n \to \infty$ 时，

$$\frac{1 - F_n(z_n)}{1 - \Phi(z_n)} \to 1. \tag{4}$$

要关系式 (4) 对任意增长的 z_n (事实上只要对其阶大于 $\sqrt{n}$ 的 z_n) 成立，只能是被加项有正态分布. 如果被加项不是正态的，那么关系式 (4) 可能在阶不超过 $\sqrt{n}$ 的某些带形 (zones) 内成立. 在某定阶矩为有穷的条件下，可获得 "较窄" 的 (对数阶的) 带. 此时在被加项的密度满足一定的 "正则性" 条件下，可以彻底研究 "正态" 渐近的程度. 例如，如果被加项的密度为

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{(1 + z^2)^2},$$

那么当 $n \to \infty$ 时，对 z 一致地有

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{s_n}{\sqrt{n}} \geq z \right\} \sim 1 - \Phi(z) + \frac{2}{3\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{z^3},$$

再考虑到当 $z \to \infty$ 时，

$$1 - \Phi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, z} e^{-z^2/2},$$

由此即易确认什么样的 z_n 使 (4) 成立. 要想把带宽扩充为乘幂阶 (形如 n^α、$\alpha < 1/2$)，则要求条件

$$\mathrm{E}\, e^{|X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}} < \infty \tag{5}$$

成立，同时要求 X_j 的某些确定阶数 (依赖于 α) 的矩与正态分布对应的矩符合. 如果后一 (关于矩的符合性) 条件不满足，那么 (4) 式左边的比可以用 Cramér 级数 (在所谓的 Cramér 条件下，见 **Cramér 定理** (Cramér theorem)) 或它的起始部分和来刻画 (在形如 (5) 式的条件下).

大偏差概率的估计用于数理统计、统计物理等学科.

极限定理领域中可能还有下面一些其他研究方向是值得特别提出的.

1) 由 Марков 发端并由 Бернстейн 与其他人继续的，研究在何种条件下，大数律与中心极限定理对相依随机变量和成立.

2) 即使是相同分布随机变量序列的情形，也可以举出简单的例子，其 "正规化" 和 $(s_n - a_n)/b_n$，其中 a_n，$b_n > 0$ 为常数，有不同于正态分布的极限分布 (指非退化分布，即不是集中于一点的分布) (见**稳定分布** (stable distribution)). 在 А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, P. Lévy, W. Doeblin 及其他人的工作中，独立随机变量和的可能的分布类以及和的分布收敛于某一极限分布的条件 (考虑随机变量的**三角阵列** (triangular array)，并限定被加项满足**渐近可忽略性** (asymptotic negligibility) 条件)，已被完全地进行了研究 (见**无穷可分分布** (infinitely-divisible distribution); **独立增量随机过程** (stochastic process with independent increments)).

3) **局部极限定理** (local limit theorems) 也是被注重的. 例如，设随机变量 X_n 仅取整数值. 那么和 s_n 也仅取整数值，且自然提出的问题是，$s_n = m$ 时概率 $P_n(m)$ 的极限性态，其中 m 为整数. 局部极限定理的最简单例子是局部 Laplace 定理，另一种类型的局部极限定理则是讨论和的分布密度的极限分布.

4) 极限定理的古典命题是讨论当 n 增长时单个和 s_n 的性态. 关于同时依赖于多个和的事件概率的足够一般的极限定理首先由 Колмогоров (1931) 获得. 例如，他的结果包含了，在相当一般的条件下，不等式

$$\max_{1 \leq k \leq n} |s_k| < z B_n$$

的概率以如下的量为其极限:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}e^{-(2k+1)^2z^2/8\pi^2},\ z>0$$

证明这类极限定理的最一般方法乃是从离散向连续过程的极限转移.

5) 以上给出的极限定理都是与随机变量之和关联的. 其他类型极限定理的一个例子是关于顺序统计量的极限定理. 这类定理已经由 Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов 及其他人作了详细的研究.

6) 最后, 建立随机变量序列以概率 1 发生的性质的定理称为强极限定理 (见**强大数律** (strong law of large numbers); **重对数律** (law of the iterated logarithm)).

关于证明极限定理的方法见**特征函数** (characteristic function); **分布的收敛** (distributions, convergence of).

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (英译本: Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N., Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, 1954).

[2] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本: Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971).

[3] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

[4] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】 大数律通常又称为弱大数律 (weak law of large numbers). 它是随机变量序列依概率收敛于 0 的特殊例子 (见**依概率收敛** (convergence in probability)). 中心极限定理则是关于随机变量序列或随机过程序列**依分布收敛** (convergence in distribution) 这很广一类定理的特例. 等价地说, 这些定理处理刻画所论变量或过程分布的概率测度的弱收敛问题 (见**测度的收敛** (convergence of measures); **概率测度的弱收敛** (weak convergence of probability measures)).

参考文献

[A1] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

[A2] Pollard, D., Convergence of stochastic processes, Springer, 1984.

[A3] Jacod, J., Shiryaev, A. N., Limit theorems for stochastic processes, Springer, 1987 (译自俄文).

[A4] Loève, M., Probability theory, 1, Springer, 1977.

[A5] Paulauskas, V., Rackauskas, A., Approximation theory in the central limit theorem. Exact results in Banach spaces, Kluwer, 1989.

潘一民 译

极限振幅原理 [**limiting-amplitude principle**; **предельной амплитуды принцип**]

借助对应的带零初始数据和关于 t 是周期的形如 $f(x)e^{\pm i\omega t}$ 的右端的非稳定方程解的振幅当 $t\to\infty$ 时的极限过渡, 唯一地重构稳定方程解的一个方法. 如果极限振幅原理成立, 那么所描述的非稳定问题的解 $v(x,t)$, 当 $t\to\infty$ 时, 有形式

$$v(x,t)=u_{\pm}(x)e^{\pm i\omega t}+o(1), \qquad (*)$$

其中 $u_{\pm}$ 是稳定方程的解, 它描述稳定的振动.

这个原理是首先([1])对 $\mathbf{R}^n$ 中的 Helmholtz 方程

$$(\Delta+k^2)u=f$$

提出的, 并且它作为**辐射条件** (radiation conditions) 和**极限吸收原理** (limit-absorption principle) 决定这个方程的相同的解. 对在一个有界区域的外部有变系数的二阶方程(见 [2],[3]), 带非紧边界的一定的区域中的 Helmholtz 方程 (见 [3],[4]), 对带上的 Cauchy-Poisson 问题 (见 [5]), 对一定的高阶方程 (见 [3],[6]), 对有界区域外部的混合问题, 对任意阶和变系数的方程和方程组(见 [7]), 极限振幅原理的实现都已经研究过. 在后面的情形下辐射和极限吸收原理决定稳定方程的 $2^{\kappa}(1<\kappa<\infty)$ 个解, 而极限振幅原理只决定它们中的 2 个. 在 [8] 中给出了一个允许决定所有 2^{κ} 个解的极限振幅原理的一个陈述([8]).

为使极限振幅原理成立, 必须 f 与稳定方程的所有本征函数正交. 所以这个原理在有界区域不成立. 设 P_{λ} 是从对非稳定方程的混合问题在方程和边界条件中用 λ 代替微分算子 $i\partial/\partial x$ 得到的, 多项式地依赖于谱参数 λ 的, 对应于稳定问题的算子. 极限振幅原理对 P_{λ} (λ= 常数) 的实现与预解式 $R_{\lambda}\equiv P_{\lambda}^{-1}$ 的核到连续谱上的解析延拓的可能性和这个延拓(关于 λ)的光滑性有关(见 [3],[7]). 如果核 R_{λ} 有穿过连续谱的解析延拓, 并且当 $\lambda\to\infty$ 时有适当的估计, 那么可以描述(*)中的剩余 $o(1)$ 当 $t\to\infty$ 时的渐近过程, 并且可以得到其他非稳定问题的解当 $t\to\infty$ 时的渐近展开(见 [2],[7]). 在 [7] 中对有界区域外部的混合问题对任意阶的方程和方程组得到了上面提到的 R_{λ} 的性质.

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., 《Ж. экспер. и теорет. физ.》, **18**(1948), 2, 243–248.

[2] Ладыженская, О. А., 《Успехи матем. наук》, **12** (1957), 3, 161–164.

[3] Эйдус, Д. М.,《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 3, 91–156.
[4] Свешников, А. Г.,《Докл. АН СССР》, **73** (1950), 5, 917–920.
[5] Исакова, Е. К.,《Дифференциальные уравнения》, **6** (1970), 1, 56–71.
[6] Михайлов, В. П.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **91** (1967), 100–112.
[7] Вайнберг, Б. Р.,《Успехи матем. наук》, **30** (1975), 2, 3–55.
[8] Вайнберг, Б. Р.,《Изв. ВУЗов Матем.》, **2** (1974), 12–23. Б. Р. Вайнберг 撰 鲁世杰 译 葛显良 校

Lindeberg-Feller 定理 [Lindeberg-Feller theorem; Линдеберга-Феллера теорема]

对于有有限方差的独立随机变量和的分布函数，建立其渐近正态性的必要充分条件的一个定理．设 X_1, X_2, … 是一列独立的随机变量，有均值 a_1, a_2, … 与有限方差 σ_1^2, σ_2^2, …，且非全部为零．令

$$B_n^2=\sum_{j=1}^n\sigma_j^2,\ V_j(x)=\mathrm{P}\{X_j<x\}.$$

为使当 $n\to\infty$ 时，

$$B_n^{-2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j^2\to 0,$$

且

$$\mathrm{P}\left\{B_n^{-1}\sum_{j=1}^n(X_j-a_j)<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$$

对任意 x 成立，必要且充分地是下列条件（Lindeberg 条件（Lindeberg condition））被满足：当 $n\to\infty$ 时，对任意 $\varepsilon>0$,

$$B_n^{-2}\sum_{j=1}^n\int_{|x-a_j|\geqslant\varepsilon B_n}(x-a_j)^2dV_j(x)\to 0.$$

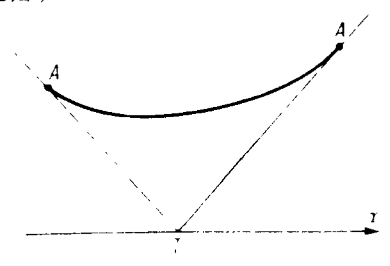
其充分性是由 J. W. Lindeberg ([1]) 证明的，必要性则由 W. Feller ([2]) 证明．

参考文献

[1] Lindeberg, J. W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Z.*, **15** (1922), 211–225.
[2] Feller, W., Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Z.*, **40** (1935), 521–559.
[3] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977.
[4] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).
В. В. Петров 撰 潘一民 译

Lindelöf 作图法 [Lindelöf construction; Линделёфа конструкция]

求旋转最小曲面问题中找出共轭点的一个几何作图法（见图）．



Lindelof 作图法仍然适用于其 **Euler 方程**（Euler equation）的通积分能用公式

$$\frac{y}{c_1}=f\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right)$$

表示的 (x, y) 平面上任何最简型的变分问题．极值曲线在共轭点 A 和 A' 的切线在 x 轴上某点 T 相交，而且沿弧 AA' 的可变积分的值等于它在折线 ATA' 上的值（见[2]）．一个例子是有母曲线

$$\frac{y}{c_1}=\cosh\frac{x-c_2}{c_1}$$

的**悬链面**（catenoid）．

参考文献

[1] Lindelöf, E., Leçons de calcul des variations, Paris, 1861.
[2] Bolza, O., *Bull. Math. Soc.*, **18** (1911), 3, 107–110.
[3] Carathéodory, C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnug, Teubner, 1956.
В. В. Охрименко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Blaisdell, 1969. 葛显良 译 鲁世杰 校

Lindelöf 假设 [Lindelöf hypothesis; Линделёфа гипотеза]，Lindelöf 猜想（Lindelöf conjecture），关于 Riemann ζ 函数性态的

对任意 $\varepsilon>0$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1/2+it)|}{t^\varepsilon}=0.$$

这是由 E. Lindelöf([1]) 宣布的．Lindelöf 猜想等价于下述论断：对于固定的 $\sigma\in(\frac{1}{2},1)$, $\zeta(s)$ 在区域 $\mathrm{Re}\,s>\sigma$, $T<\mathrm{Im}\,s<T+1$ 内的零点个数为 $o(\ln T)$．因此 Lindelöf 猜想是关于 $\zeta(s)$ 零点的 Riemann 猜想的一个推论（见 **Riemann 假设**（Riemann hypotheses））．已知（1982）

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1/2+it)|}{t^c}=0,$$

此处 c 是满足 $0<c<6/37$ 的常数.

对于 Dirichlet L 函数有 Lindelöf 猜想的下列推广: 对任意 $\varepsilon>0$,

$$L(\frac{1}{2}+t,\chi)=O((k|t|+1)^{\varepsilon}),$$

这里 k 是特征 χ 的模.

参考文献

[1] Lindelöf, E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1905.

[2] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Oxford Univ. Press, 1951, Chapt. 13.

C. M. Воронин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ivic, A., The Riemann zeta-function, Wiley, 1985.

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

Lindelöf 原理 [Lindelöf principle; Линделёфа принцип]

共形映射 (conformal mapping) 理论中的一个基本的定性变分原理 (见**变分原理 (复变函数论中的)** (variational principle (in complex function theory))), 是 E. Lindelöf([1]) 发现的. 假设 D 和 $\widetilde{D}$ 是复数 z 平面内这样两个单连通区域, 它们的边界 Γ 和 $\widetilde{\Gamma}$ 分别由有限条 Jordan 弧组成, $\widetilde{D}$ 包含在 D 内, 并设点 $z_0\in\widetilde{D}\subset D$. 再设函数 $w=f(z)$ 和 $w=\widetilde{f}(z)$ 是分别实现 D 和 $\widetilde{D}$ 到单位圆盘 $\Delta=\{w:|w|<1\}$ 的共形映射, 并且 $f(z_0)=0$, $\widetilde{f}(z_0)=0$. Lindelöf 原理指出, 在这些条件下: 1) 区域 $|w|<\rho$, $0<\rho<1$, 在映射 $w=\widetilde{f}(z)$ 下的原象 $\widetilde{D}_\rho$ 位于同一区域 $|w|<\rho$ 在映射 $w=f(z)$ 下的原象 D_ρ 内, 而且仅当 $\widetilde{D}=D$ 时它们的边界 $\widetilde{\Gamma}_\rho$ 与 Γ_ρ 才可能接触; 2) $|\widetilde{f}'(z_0)|\geqslant|f'(z_0)|$, 仅当 $\widetilde{D}=D$ 时才可能是等式; 3) 若存在 $\widetilde{\Gamma}$ 与 Γ 的一个公共点 z_1, 则

$$|\widetilde{f}'(z_1)|\leqslant|f'(z_1)|,$$

仅当 $\widetilde{D}=D$ 时才可能是等式. 换言之, 若 D 的边界 Γ 向内推移, 则: a) 所有水平阶层曲线 (level curve) Γ_ρ 即圆周 $|w|=\rho$ 的原象都收缩; b) 在点 z_0 处的伸展扩大; c) 在边界上的不动点 z_1 处的伸展缩小.

从 Lindelöf 原理中所给出的信息亦可推出: 边界 Γ 的弧线 γ 在沿 $\widetilde{\gamma}$ 向内凹的条件下其象的长度不超过 $\widetilde{\gamma}$ 的象的长度 (length $f(\gamma)\leqslant$ length $\widetilde{f}(\widetilde{\gamma})$), 且等式仅当 $\widetilde{\Gamma}=\Gamma$ 时成立. Lindelöf 原理的这一推论亦称为 Montel 原理 (Montel principle).

对于当 $\widetilde{D}$ 和 D 分别是由 z 平面和 w 平面中有限条 Jordan 曲线围成的有限连通区域并且 $w=f(z)$ 是值在 D 中的 $\widetilde{D}$ 内亚纯函数的更一般情形, Lindelöf 原理由下述构成: 若 w_0 是 $\widetilde{D}$ 的象 $f(\widetilde{D})$ 中一点, $\{z_\nu\}$, $\nu=0,1,\cdots$, 是 $\widetilde{D}$ 中适合 $f(z_\nu)=w_0$ 的点集, m_ν 是函数 $f(z)-w_0$ 的零点 z_ν 的重数, $\widetilde{g}(z,z_\nu)$ 是 $\widetilde{D}$ 的以 z_ν 为极点的 **Green 函数** (Green function), $g(w,w_0)$ 是 D 的以 w_0 为极点的 Green 函数, 则不等式

$$g(w,w_0)\geqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}m_\nu\widetilde{g}(z,z_\nu) \qquad (1)$$

对所有的 $z\in\widetilde{D}$, $w=f(z)$ 成立. 若在 (1) 中等式至少对一点 $z\in\widetilde{D}$ 成立, 则在 $\widetilde{D}$ 内等式处处成立. 特别地, 从 (1) 推出的不等式

$$g(w,w_0)\geqslant\widetilde{g}(z,z_0) \qquad (2)$$

曾由 Lindelöf 在 [1] 中得到. 这意味着区域 $\{z:\widetilde{g}(z,z_0)>\lambda\}$ 总是位于区域 $\{w:g(w,w_0)>\lambda\}$ 内.

一般形式 (1) 的 Lindelöf 原理可应用于任意区域 $\widetilde{D}$ 和 D, 但关于等号的结论在此处通常是不正确的. Lindelöf 原理能够得出在区域变形下共形映射变分的许多定量估计 (见 [3]). 它同**从属原理** (subordination principle) 有密切的联系, 而且亦可看作 **Schwarz 引理** (Schwarz lemma) 的一种推广.

参考文献

[1] Lindelöf, E., Mémoire sur certaines inequalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, *Acta Soc. Sci. Fennica*, 35(1909), 7, 1-35.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Метод теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965.

[4] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962.

[5] Лаврентьев, М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962 (英译本: Lavrent'ev, M. A., Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations, Noordhoff, 1963).

Е. Д. Соломенцев 撰 杨维奇 译

Lindelöf 空间 [Lindelöf space; Линделёфа пространство], 终紧空间 (finally-compact space)

拓扑空间 X, 它的每个开覆盖 (见**覆盖 (集合的)** (covering (of a set))) 都含有一个可数子覆盖. 例如, 具有可数基的空间是 Lindelöf 空间; 每个**拟紧空间** (quasi-compact space) 都是 Lindelöf 空间. Lindelöf 空间的每个闭子空间是 Lindelöf 空间. 如果 f 是把 Lindelöf 空间 X 映入一个拓扑空间中的连续映射, 则

后一空间的子空间 $f(X)$ 是 Lindelöf 空间. 任何 Hausdorff 空间, 如果是可数多个紧集之并, 就是一个 Lindelöf 空间. 任何正则 Lindelöf 空间都是仿紧的(见**仿紧空间**(paracompact space)). Lindelöf 空间与紧(Hausdorff)空间之积是 Lindelöf 空间.

М. И. Войцеховский 撰 胡师度、白苏华 译

Lindelöf 求和法[Lindelöf summation method; Линделёфа метод суммирования]

由函数系

$$g_0(\delta)=1, \ g_k(\delta)=\exp(-\delta k\ln k), \ \delta>0,$$

$$k=1,2,\cdots$$

定义的对于数项级数与函数项级数求和的一种半连续方法(见**求和法**(summation methods)). 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

按 Lindelöf 求和法(Lindelöf summation method)可求和, 其和为 s, 如果

$$\lim_{\delta\to 0}\left[u_0+\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-\delta k\ln k)u_k\right]=s$$

且上式极限号后的级数收敛. 此方法为 E. Lindelöf 为求幂级数之和而引进([1]).

Lindelöf 求和法是正则的(见**正则求和法**(regular summation methods))且可用作函数**解析延拓**(analytic continuation)的工具. 如果 $f(z)$ 是一个解析函数的主支, 在原点处正则且当 $|z|$ 小时可表为幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

则此级数在函数 $f(z)$ 的整个星形(见**函数元的星形**(star of a function element))内按 Lindelöf 求和法是可求和的, 且在包含于该星形内部的每个有界闭域上是一致可求和的.

在由形如

$$a_k(\omega)=\frac{c_{k+1}\omega^{k+1}}{E(\omega)}$$

(其中 $E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\omega^k$ 是一个**整函数**(entire function))的半连续矩阵把一个序列变换为另一序列所确定的求和法中, Lindelöf 考虑了

$$E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\omega}{\ln(k+\beta)}\right]^k, \ \beta>1$$

的情形. 由这类整函数构成的矩阵 $(a_k(\omega))$ 称为 Lindelöf 矩阵(Lindelöf matrix).

参考文献

[1] Lindelöf, E., *J. Math.*, **9** (1903), 213 - 221.

[2] Lindelöf, E., Le calcul des résidues et ses applications à la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1905.

[3] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon Press, 1949.

[4] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

И. И. Волков 撰 沈永欢 译

Lindelöf 定理[Lindelöf theorem; Линделёфа теорема], 关于渐近值的

1) 设 $w=f(z)$ 是单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的一个有界正则解析函数, 又设 α 是沿着位于 D 内以点 $e^{i\theta_0}$ 为终点的一条 Jordan 弧 L 的**渐近值**(asymptotic value), 即当沿着 L, $z\to e^{i\theta_0}$ 时, $f(z)\to\alpha$. 那么 α 是 $f(z)$ 在 $e^{i\theta_0}$ 的**角边界值**(angular boundary value)(非切向边界值), 即当在以 $e^{i\theta_0}$ 为顶点和由圆盘 D 的两条弦构成的一个角内, $z\to e^{i\theta_0}$ 时, $f(z)$ 一致地趋向 α.

Lindelöf 定理在其他类型的区域 D 内也是正确的, 并且关于 $f(z)$ 的条件已大大地减弱. 例如, 只需要求 $f(z)$ 是 D 内的不取三个不同的值的亚纯函数就够了. Lindelöf 定理也可推广到多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的函数 $f(z)$. 例如, 若 $f(z)$ 是球 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的有界全纯函数, 它沿着一条在点 $\zeta\in\partial D$ 处非切向路径 L 有渐近值 α, 则 α 是 $f(z)$ 在 ζ 的非切向边界值(见[4]).

2) 设 $w=f(z)$ 是圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的有界正则解析函数, 它沿着终止于点 $e^{i\theta_0}$ 的两条不同的路径 L_1 和 L_2 有渐近值 α 和 β. 那么, $\alpha=\beta$, 并且在路径 L_1 和 L_2 之间的角内一致地有 $f(z)\to\alpha$. 这个定理对于其他类型的区域 D 也是正确的, 对于无界函数, 一般说来它是不正确的.

这些定理是 E. Lindelöf 发现的([1]).

参考文献

[1] Lindelöf, E., Sur un principle génerale de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, *Acta Soc. Sci. Fennica*, **46** (1915), 4, 1 - 35.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд. М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[3] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[4] Хенкин, Г. М., Чирка, Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 13 - 142.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 对于 Lindelöf 定理到多变量函数的推广、路径 L 是不相切的条件可以减弱, 见[A1], Chapt. 8.

参考文献

[A1] Rudin, W., Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

陈怀惠 译

Lindemann 定理[Lindemann theorem; Линдемана теорема]

指数函数(exponential function) e^z 在代数点 $z \neq 0$ (见**代数数**(algebraic number))上取超越值(见**超越数**(transcendental number)),这是 Lindemann 在1882年证明的.下面由 Lindemann 提出但未加证明的更一般的论断是 K. Weierstrass 在1885年证明的,称做 Lindemann-Weierstrass 定理.

设 $a_1, \cdots, a_m$ 是非零代数数,而 α_1、$\cdots$、α_m 是两两互异的代数数,则

$$a_1 e^{\alpha_1} + \cdots + a_m e^{\alpha_m} \neq 0.$$

这个论断等价于下列命题:若 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是在有理数域上线性无关的代数数,则数 $e^{\beta_1}, \cdots, e^{\beta_n}$ 代数无关.

Lindemann 定理的证明方法称为 Hermite-Lindemann 法(Hermite-Lindemann method).它是Hermite 1873年证明 e 的超越性的方法的发展,并且以 **Hermite 恒等式**(Hermite identity)对某些特殊构造的多项式的应用为基础.

由 Lindemann 定理可以推出 π 是超越数,化圆为方的问题无解,以及函数 $\sin z, \cos z$ 和 $\tan z$ 当代数数 $z \neq 0$ 时取超越值,还有 $\ln z$ 当代数数 $z \neq 0, 1$ 时取超越值.

参考文献

[1] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952 (英译本: Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, reprint, 1960).

[2] Фельдман, Н. И., Шидловский, А. Б., 《Успехи матем. наук》, 22(1967), 3, 3 – 81.

А. И. Галочкин 撰

【补注】D. Hilbert 给出这个定理的一个简化证明,其后它又被许多数学家改进,见[A1].1988年 F. Beukers, J. P. Bézivin 和 Ph. Robba 给出一个新的初等证明,见[A2].

参考文献

[A1] Baker, A., Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, reprinted with additional material, 1979.

[A2] Beukers, F., Bézivin, J. P. and Robba, Ph., An alternative proof of the Lindemann-Weierstrass theorem, *Amer. Math. Monthly*, 97(1990), 183 – 197.

朱尧辰 译

线(曲线)[line(curve); линия]

一个几何概念,其精确而同时又相当一般的定义甚难作出,在不同的几何学分支有不同定义.

初等几何学中曲线的概念没有清楚地定义,有时定义为"有长无宽"或"一曲面的界限".初等几何学中曲线的研究实质上归结为个别特例(直线、线段、多边形、圆等等)的讨论.因为没有一般的处理方法,初等几何学对特殊曲线(圆锥曲线、某些高阶代数曲线和超越曲线)的性质逐一运用特别的方法进行了相当深入的研究.解析几何学中平面上一曲线定义为坐标满足方程 $F(x, y) = 0$ 的点的集合.函数 F 须予以限制以使一方面此方程的解的集合无穷,另一方面解的集合不至填满"一块平面".

一类重要的曲线包括其函数 $F(x, y)$ 是两个变元的多项式的曲线;这种由多项式方程 $F(x, y) = 0$ 定义的曲线叫做代数(algebraic)曲线.一次方程所确定的即是直线(straight lines).具有无穷多个解的二次方程定义一个**椭圆**(ellipse)、**双曲线**(hyperbola)、**抛物线**(parabola)、或者一个分裂为两条(可能重合的)直线的曲线.高次方程所定义的曲线在代数几何中研究.若在复射影平面上进行讨论则可建立非常整齐的理论.此时**代数曲线**(algebraic curve)由如下形式的方程所定义:

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

其中 F 是一个三变元即点的射影坐标的齐次多项式.

对于其中函数理论十分重要的数学分支(例如分析、微分几何学等),参数方程(parametric equations)给出曲线的一个自然定义.即,在平面情况,由参数方程

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \tag{1}$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续函数,所确定的曲线是对应于参数 t 的所有可能的值的点 (x, y) 的集合,这些点并具有下述的确定次序:设点 M_1 对应于 t_1 而 M_2 对应于 t_2,如果 $t_1 < t_2$,则 M_1 看作在 M_2 之前;不同的参数值对应的点当作不同的点.如果存在区间 $[a_1, b_1]$ 到区间 $[a, b]$ 的同胚 $\lambda(t_1) = t$: $\lambda(a_1) = a$, $\lambda(b_1) = b$ 满足 $\varphi(\lambda(t_1)) = \varphi_1(t_1)$ 及 $\psi(\lambda(t_1)) = \psi_1(t_1)$,则方程 $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$, $t \in [a_1, b_1]$ 确定的曲线与方程(1)的相同.类似地,任意拓扑空间 X 的一个曲线由一个形如 $x = \varphi(t)$ 的**参数方程**(parametric equation)定义,其中 φ 是实变元 t 的函数,在 $[a, b]$ 上连续,取值为 X 的点 x.

此外,关于以参数方程定义曲线有另一观点(C. Jordan, 1882):一曲线是平面上其坐标为参数 t 在一区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 的点的集合;这时坐标相同但其对应的参数值不同点不再当作不同的点,曲线上的点集也不再按 t 的值排序.这一对应可以推广到任意拓扑空间:拓扑空间的一个点集若是区间的某一连续象,即称之为 Jordan 意义下的曲线(curve in the sense of Jordan).

不过,可以构造连续函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$,使得其坐标由此二函数决定的点的集合填满正方形 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$(见 **Peano 曲线**(Peano curve)).更一般地有,任一局部连通连续统(即每一点有一任意小之连

通邻域的连续统)是区间的一个连续象(Mazurkiewicz定理(Mazurkiewicz theorem)). 因此, 不但正方形, 而且任意维数的超立方体甚至无穷维的 **Hilbert 立方体**(Hilbert cube)都是一区间的连续象.

以上所述说明了如果对映射不作附加限制, 则区间的连续象不能作为曲线的定义. 在微分几何学中, 这些限制即是曲线之参数定义中函数的各阶导数的存在性这一条件. 另一方面, 存在这样的连续统, 它们可以自然地看成曲线, 但因其非局部连通而不是区间的连续象. 这种例子之一是如下定义的连续统: $y=\sin(1/x)$, $0<x\leqslant 1$; $x=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ (图 1).

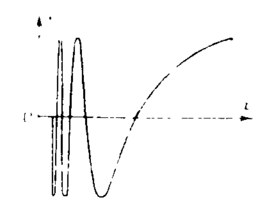
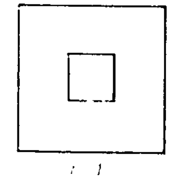
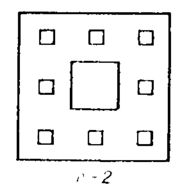


图 1

在平面情况下, 曲线的一个更一般定义是由 G. Cantor 在 1870 年因创立点集理论而提出的. 一个平面连续统如果在其每一点的任意邻域存在平面上的点不属于此连续统, 则称为 Cantor 曲线(Cantor curve). Cantor 曲线的一个重要例子是 Sierpiński 地毯(Sierpiński carpet), 构造如下. 一个边长为 1 的正方形 Q 由平行于其边的直线分成九个相同的正方形, 去掉中间正方形的所有内点(图 2, $n=1$). 对所剩之八个第一级正方形作相同处理, 获得 64 个第二级正方形(图 2, $n=2$). 对所有自然数 n 连续进行上述过程, 在第 n 步得到 8^n 个边长为 $1/3^n$ 的第 n 级正方形. 此法所得之所有集合的交即是 Sierpiński 地毯(图 2).





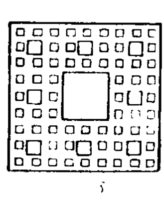


图 2

任何 Cantor 曲线 L 均可拓扑嵌入于 Sierpiński 地毯 S, 即在 S 中存在连续统 L' 同胚于 L. Sierpiński 地毯是一局部连通的连续统也是区间的一个连续象.

拓扑学中使用由 П. С. Урысон 在 1921 年引入的更为一般(但不过分)的曲线概念. 曲线的定义陈述如下: 一条曲线是一个一维连续统, 即一个连通、紧度量空间(metric space) C, 其每一点有边界为 0 维的任意小邻域. 换句话说, 对任意 $\varepsilon>0$, 空间 C 可以表示为有限个半径小于 ε 的闭集的和, 而且任何三个这样的闭集没有公共点. Sierpiński 地毯满足曲线的这一定义, 所以任何一条 Cantor 曲线也是一个 Урысон 意义下的曲线. 反过来, 如果一个平面连续统是 Урысон 意义下的曲线, 则它也是一条 Cantor 曲线. Урысон 所给出的曲线定义是内在的: 它仅由空间 C 本身的性质所刻画, 而不依赖于该空间是在其自身还是作为其他拓扑空间的子集来考虑的.

有些曲线不同胚于平面的任何子集. 例子之一是位于三维空间的一个曲线, 由一个四面体的六个边以及连接不在该四面体任何一面的一个点和其四个顶点的线段所构成(图 3).

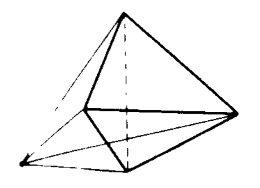


图 3

不过任意一个(Урысон 意义的)曲线同胚于三维 Euclid 空间的一个子集(Menger 定理(Menger theorem)). 具有对任何曲线 C 存在 M 的一个同胚于 C 的子连续统 C' 这一性质的一个连续统构造如下. 一个边长为 1 的立方体 K 由平行于它的面的平面分成 27 个合同的立方体. 从 K 中去掉此剖分中位于中心的立方体和与之沿二维面邻接的所有立方体. 则得到一个由剩下的 20 个第一级闭立方体构成的集合 K_1. 对每一个第一级立方体作完全相同的处理, 获得含有 400 个第二级立方体的集合 K_2 (图 4). 连续进行上述过程直至无穷, 即得一个连续统序列 $K_1\supset K_2\supset\cdots$, 其交是一个一维连续统 M, 叫做 Menger 万有曲线(Menger universal curve).

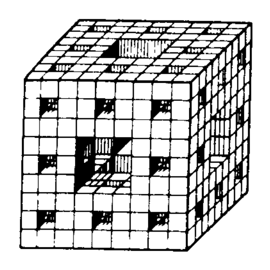


图 4

分歧指数(ramification index)的概念在曲线的研究中具有重要作用. 曲线 C 在点 x 处有分歧指数 m, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在一个含有 x 且直径小于 ε 的开集 U, 其边界是一基数最多为 m 的集合; 但对于任意充分小的 $\varepsilon'>0$, 任一含有 x 且直径小于 ε' 的开集 U 的边界的基数不小于 m. 曲线上的点可按其分歧指数分类如下:

1)分歧指数为 n 的点，其中 n 为一自然数.

2)具有无界分歧指数 ω 的点.(曲线 C 上一点 x 有分歧指数 ω，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在一个含有 x 且直径小于 ε 的开集 U，其边界是一有限点集；同时对于任意自然数 n 存在一个数 $\varepsilon_n>0$ 使得任一含有 x 且直径小于 ε_n 的开集 U 的边界包含至少 n 个点.)

3)具有可数分歧指数 $\aleph_0$ 的点.

4)具有连续分歧指数 c 的点.

曲线上分歧指数大于 2 的点叫做分歧点(ramification point)；分歧指数为 1 的点叫做端点(end point).

例 a)一个线段在其所有内点有分歧指数 2；线段每一端点的分歧指数为 1. b)圆在其每一点有分歧指数 2. c)由从一点 O 出发的 n 条直线段所构成的曲线在点 O 的分歧指数为 n. d)由从原点 O 出发的长度分别为 $1/2, \cdots, 1/2^n, \cdots$ 且与 x 轴夹角分别为 $\pi/2, \cdots, \pi/2^n, \cdots$ 的线段 $Oa_1, \cdots, Oa_n, \cdots$ 所构成的曲线在点 O 有无界递增分歧指数 ω(图 5).

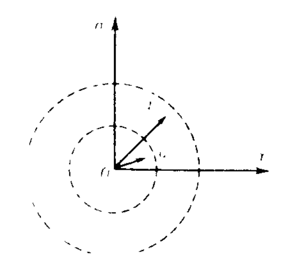


图 5

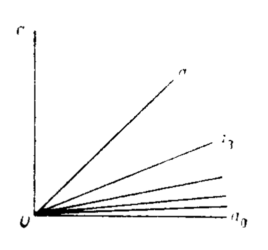


图 6

e)由长度为 1 的线段 Oa_0 和从 O 出发，长度为 1 且与 Oa_0 的夹角分别为 $\pi/2, \cdots, \pi/2^n, \cdots$ 的线段 $Oa_1, \cdots, Oa_n$ 所构成的曲线在 Oa_0 的每一点有可数分歧指数 $\aleph_0$(图 6). f) 由连接一点 O 和位于区间 $0 \leqslant x \leqslant 1, y=0$ 的 **Cantor 集**(Cantor set)的每一点的所有线段所构成的曲线在其每一点有连续分歧指数 c(图7). g) Sierpinski 地毯在其每一点有连续分歧指数.

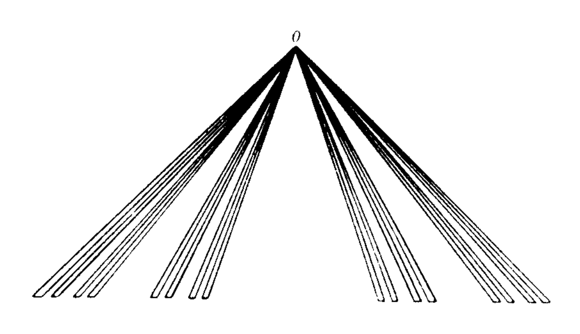


图 7

如果一条曲线没有分歧点，即曲线上任何一点的分歧指数等于 1 或 2，则此曲线或者是一简单弧(simple arc)(一个区间的拓扑象)，或者是一简单闭曲线(simple closed curve)(圆的一个拓扑象). 当曲线上所有的点的分歧指数都为 2 时，则此曲线是一简单闭曲线；当一曲线没有分歧点但具有端点时(可证明此时恒有两个端点)，则它是一个简单弧. 如果一曲线只有有限多个分歧点，而且其中每一点的分歧指数都是有限时，则此种曲线可以分裂为有限多个简单弧，这些弧除去端点以外没有公共点.

圆是唯一的在其所有的点分歧指数为 2 的曲线；没有其他任何曲线在其所有的点具有相同的有限分歧指数，并且如果一曲线 L 的所有点的分歧指数大于或等于 n，则在该曲线上有一点其分歧指数大于或等于 $2n-2$；对任一自然数 n 存在一曲线使其只含有分歧指数为 n 和 $2n-2$ 的点(Урысон 定理(Urysohn theorem)). 一个只含有分歧指数为 3 或 4 的点的曲线构造如下.

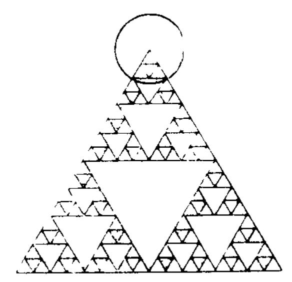


图 8

在一边长为 1 的等边三角形中作三条线段连接其三边的中点，除去此三条线段所构成的三角形的内点. 对所剩之三个第一级三角形进行类似处理，结果得到九个第二级三角形. 对它们进行同一处理，即得 27 个第三级三角形，等等，不停地作下去. 以上过程所得集合的交是一曲线 C(图 8). 一个只含有分歧指数为 3 或 4 的点的曲线由两个连续统 C_1 和 C_2 构成，其中每一个都同胚于 C，而且除开与连续统 C 的底三角形的顶点对应的点外，二者没有其他公共点.

同样也存在每一点都具有无界分歧指数，可数分歧指数，以及连续分歧指数的曲线.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.

[2] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968(译自法文).

[3] Menger, K., Kurventheorie, Teubner, 1932.

[4] Пархоменко, А. С., Что такое линия, М., 1954.

[5] Урысон, П. С., Труты по топологии и другим областям математики, т. 2, М.-Л., 1951.

[6] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978).

А. С. Пархоменко 撰

【补注】 一个“Jordan 意义下的曲线”(即单位区间 I

的一个连续象)又称为 Peano 连续统(Peano continuum). 不可将其与 **Jordan 曲线** (Jordan curve)(同胚于圆的空间, 又称为简单闭曲线)之概念混淆.

前述 Mazurkiewicz 定理一般称为 Hahn-Mazurkiewicz 定理 (Hahn-Mazurkiewicz theorem) [A1], 6.3.14.

Sierpiński 地毯又称为 Sierpiński 万有曲线 (Sierpiński universal curve).

图 8 中的曲线是由 W. Sierpiński([A3]) 构造的.

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978.

[A3] Sierpiński, W., Sur un courbe dont tout point est un point de ramification, *C. R. Hebdomaires Acad. Sci. Paris*, 160 (1915), 302 – 305.

[A4] Blumenthal, L. and Menger, K., Studies in geometry, Freeman, 1970(译自德文).

[A5] Coolidge, J., A treatise on algebraic plane curves, Clarendon Press, 1931.

[A6] Alexandrov, A. D. [A. D. Aleksandrov] and Reshetnyak, Yu. G., General theory of irregular curves, Kluwer, 1989 (译自俄文).

杨 路、曾振柄 译

线性代数 [linear algebra; линейная алгебра]

算子环 (operator ring) 的一种特殊情形, 此时算子的定义域是有单位的交换结合环.

【补注】 这个名词在西方文献中不用来表示这里指定的意义. 线性代数是(有限维)向量空间及其间的线性算子的理论. 见下面的**线性代数** (linear algebra) 条目.

葛显良 译

线性代数 [linear algebra; линейная алгебра]

研究向量(线性)空间, 向量空间上线性算子(线性映射), 线性、双线性与二次函数(泛函与二次型)的一个代数分支.

历史上线性代数的第一个分支是线性代数方程组理论(见**线性方程** (linear equation)). 与求解线性方程组相关, 产生**行列式** (determinant) 概念. 在 1750 年, 得到求解线性方程组的 **Cramer 法则** (Cramer rule), 其中, 方程的个数等于未知量的个数, 且未知量系数的行列式非零. 在 1849 年, 用于求解含数值系数的线性方程组的 **Gauss 法** (Gauss method)被提出. 此法就所用的运算量而言是最经济的, 并且, 做某些不同的更改, 它也用于系数是近似给出的代数方程组的近似求解.

矩阵 (matrix)概念的出现与线性方程组及其行列式的研究有关. 由 G. Frobenius 在 1877 年提出的矩阵的秩的概念使得用方程组的系数明显地表达线性方程组的相容性与确定性条件成为可能(见 **Kronecker-Capelli 定理** (Kronecker-Capelli theorem)). 因此, 线性方程组一般理论的构造完成于 19 世纪末叶.

如果在 18 与 19 世纪线性代数的主要内容由线性方程组与行列式理论组成, 那么在 20 世纪占据中心位置的是向量空间概念以及与其相关联的向量空间上的线性变换, 线性、双线性与多重线性函数诸概念.

域 K 上一个向量空间 (vector space) 或线性空间 (linear space) 是元素(称为向量)的集合 V, 在此集合内, 向量的加法与向量用 K 的元素相乘的运算被指定, 并满足若干公理(见**向量空间** (vector space)). 在除环上的向量空间也被考虑. 向量空间理论中最重要概念之一是线性映射, 亦即在同一域上向量空间的**同态** (homomorphism). 一个线性算子 (linear operator) 或线性变换 (linear transformation) 是空间到自身中的一个线性映射(即向量空间的一个自同态). 如果空间 V 是有限维的, 则选择 V 内一个基 $e_1, \cdots, e_n$, 且令

$$\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,\ j=1,\cdots,n,$$

便得到一个 n 阶方阵 $A=\|a_{ij}\|$, 称为关于给定基的线性变换 φ 的矩阵 (matrix of the linear transformation).

赋有另外的满足某些公理的向量乘法运算的域 K 上的向量空间 V 称为 K 上的代数 (algebra) (见**环与代数** (rings and algebras); **算子环** (operator ring)).

空间 V 的所有线性变换关于自然定义的加法、乘法以及线性变换用 K 的元素相乘的运算组成 K 上一个代数. 元素取自 K 的有固定阶的所有方阵亦组成 K 上一个代数. 空间 V 的线性变换与它们在给定基下的矩阵之间的上述对应是这两个代数的一个同构, 此事实使得用矩阵语言表达关于线性变换的定理以及在证明这些定理中使用矩阵理论变为可能.

在线性变换理论中具有重要意义的是基的选择, 在这个基下变换的矩阵在某种意义下取它的最简单的形式. 例如, 在代数闭域情况下, 这个形式就是矩阵的 **Jordan 正规形式** (Jordan normal form).

线性映射的一种重要情形是线性函数(线性泛函)——自 V 到 K 中的线性映射. V 上所有线性函数关于自然定义的加法与被 K 的元素相乘的运算组成 K 上一个向量空间 V^*, 称为 V 的对偶空间 (dual space). V 的向量通过赋予 $x(f)=f(x)$ 对所有 $x\in V$, $f\in V^*$, 又可以视为对偶空间 V^* 上的线性函数. 如果 V 是有限维的, 那么这建立 V 与 V^{**} 之间的一个自然的同构.

线性函数概念的一种推广是多重线性函数, 亦即值取在 K 中依赖于几个自变量(其中某些属于 V, 其余的属于 V^*)的函数, 它关于每个自变量是线性的. 这些函数也称为张量. **多重线性代数** (multilinear algebra) 致力于张量的研究. 多重线性函数的一种特殊情形是双线性函数(见**双线性映射** (bilinear mapping)). 斜对称多重线性函数亦称**外形式** (exterior form).

基于向量空间的概念、几何学中研究的各种典型

空间业已被定义，如仿射空间，射影空间，等等．

向量空间理论与群论有重要的联系．域 K 上 n 维向量空间 V 的所有自同构关于乘法组成一个群，它同构于元素取自 K 的 n 阶非奇异方阵的群．自某个群 G 到这个自同构群的同态映射称为群 G 在 V 中的线性表示(linear representation of the group)．这些表示性质的研究是群的**线性表示**(linear representation)理论的主题．

线性方程组与行列式的古典理论业已推广到下面情形，这时代替数或某域的元素，考虑任意除环的元素．

域 K 上向量空间概念的一种自然推广是任意环上的**模**(module)．如果用模代替向量空间，线性代数的某些基本定理不再是正确的．对模也有效的推广的可能性的研究导致**代数 K 理论**(algebraic K theory)的创立．

参考文献

[1] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977.

[2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975(中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1953).

[3] Гельфанд, И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971(中译本：И. М. 盖尔冯德，线性代数学，高等教育出版社，1957).

[4] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975(中译本：А. И. 马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社，1957).

[5] Ефимов, Н. В., Розендорн, Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2 изд., М., 1974.

[6] Шилов, Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, 2 изд., М., 1956 (英译本：Shilov, G.E., An introduction to the theory of linear spaces, Prentice - Hall, 1961).

[7] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966 (中译本：Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵论(上、下册)，高等教育出版社，1955).

[8] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[9] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, I, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2(译自法文).

[10] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

И. В. Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Halmos, P. R., Finite -dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

[A2] Lang, S., Linear algebra, Addison - Wesley, 1966.

陈公宁 译

线性代数中的数值方法[linear algebra, numerical methods in; линейная алгебра; численные методы]

与求解线性代数中数值问题过程的数学描述和研究有关的数值数学的分支．

在线性代数问题之中，有两个最重要的问题：求解线性代数方程组与确定矩阵的本征值和本征向量．其他常遇到的问题是：矩阵求逆，计算行列式以及确定代数多项式的根．这些在线性代数中一般没有独立的意义，且在它的主要问题求解中带有辅助的特征．

线性代数的任意数值方法可视为在输入数据的元素上进行的一系列算术运算．如果对任意输入数据，一个数值方法能够在有限多算术运算内求出问题的解，那么这样的方法称为直接的(direct)，否则，称为迭代的(iterative)．

求解线性代数方程组的直接法．假设给定带有矩阵 A 与右侧向量 b 的方程组

$$Ax=b. \tag{1}$$

如果 A 非奇异，则其解由公式 $x=A^{-1}b$ 给出，其中 A^{-1} 为 A 的逆矩阵．直接法的主要思想在于变换(1)到一个等价方程组，对后者其矩阵容易求逆，因而容易找出原方程组的解．假设(1)的两侧左乘以非奇异矩阵 $L_1, \cdots, L_k$，这时新方程组

$$L_k \cdots L_1 Ax = L_k \cdots L_1 b \tag{2}$$

等价于(1)．总可选择矩阵 L_i 使得(2)左侧的矩阵充分简单，例如，三角的，对角的或酉的．在这种情况下，易于计算 A^{-1} 与 $|A|$．

一个首要的直接法是 **Gauss 法**(Gauss method)．它用下**三角矩阵**(triangular matrix) L_i，并能将原方程组化简到一个带有上三角矩阵的方程组．这种方法易于在计算机上实现；它的带选主元的格式能够求解带有任意矩阵的方程组，并且一种紧凑格式能够通过累计标量积得到增加精确度的结果．在实用的直接方法之中，Gauss 法要求最少的计算工作量．

与 Gauss 法直接相关的是 Jordan 法(Jordan method)及其一种改进，最优消元法(见[2])．这些方法用下三角与上三角矩阵 L_i，并能化简原方程组到一个具有对角矩阵的方程组．这两种方法按其特征与 Gauss 法区别很小，但第二种方法能够用等量的计算机存储求解具有双倍阶数的方程组．

所述诸法均属于所谓的消元法的一类．这个称谓可用如下事实解释：每乘一个矩阵 L_i，至少一个元素在方程组的矩阵中被消去．消元法不仅可通过三角矩阵也可通过酉矩阵来实现．消元法的各种改进实质上都与方程组(1)的矩阵分解成两个三角矩阵的乘积或一个三角矩阵与一个酉矩阵的乘积有关．

某些方法，诸如**加边法**(bordering method)与**完全化方法**(completion method)，不是消元法，虽然它们均接近于 Gauss 法．

基于构造辅助的向量组、按某种方式联系着原方程组的矩阵且在某种度量下正交的方法业已广泛地传播．此类中一种首要的方法就是正交行法．该法的矩阵 L_i 都是下三角的且方程组（2）的矩阵为酉矩阵．基于正交化的方法有许多优点，但对舍入误差的影响敏感．在正交化型方法发展基础上，（对求解某些有稀疏矩阵的方程组）非常有效的共轭方向法已被建立（见[9],[10]）．

确定矩阵的本征值与本征向量的直接法．假定对矩阵 A 要求确定任一本征值 λ 与本征向量 x，即要求解方程

$$Ax=\lambda x. \tag{3}$$

在变量变换 $x=Cy$ 下，这里 C 是非奇异矩阵，方程（3）转变为方程 $By=\lambda y$，其中 $B=C^{-1}AC$．求解给定问题的直接法在于通过有限多步相似变换将原矩阵 A 归化到具有简单形式的矩阵 B，使得它易于求出特征多项式的系数与它的本征向量．诸本征值从特征方程通过某个熟知的方法求得．从 A 到 B 的转换的数值方法本质上与（1）变换到（2）的方法区别极少．已经知道有许多相似型的方法（Крылов 法，Данилевский 法，Hessenberg 法，等等，见[1]）．但是，由于它们的相当大的数值不稳定性，在实践中并不被广泛采用（见[3]）．

要区分完全本征值问题（这时要找出所有的本征值）与部分本征值问题（这时寻求某些本征值）；后者在用差分方法逼近微分和积分方程中出现的线性代数问题的情况更为典型．

求解线性代数方程组的迭代法．这些方法按某些向量序列极限的形式给出方程组（1）的解；它们的构造由一个一致的过程来实现，此过程称为迭代过程（iterative process）．对求解（1）的主要迭代过程可用如下一般格式来描述．从递归公式

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}+H^{(k)}(b-Ax^{(k-1)}),$$

（式中 $H^{(1)}$，$H^{(2)}$，… 是矩阵序列，而 $x^{(0)}$ 是初始近似，一般来讲是任意的）构造向量序列 $x^{(1)},\cdots,x^{(k)},\cdots$．矩阵序列 $H^{(k)}$ 的不同选择导致不同的迭代过程．

最简单的迭代过程均为平稳过程，其中矩阵 $H^{(k)}$ 不依赖于步数 k；它们亦称为简单迭代法（simple-iteration method）（见[5]）．如果序列 $H^{(k)}$ 是周期的，过程称为循环的（cyclic）．每个循环过程均能变换到平稳过程，但通常这样的变换使方法复杂化．非平稳过程，特别是循环过程，被用以加速迭代过程的收敛（见[5],[6]）．在加速收敛的诸方法中，应用 Чебышев 多项式（见[5],[6]）和共轭方向（见[10]）的那些方法占有特殊的地位．

对平稳过程的矩阵 H 与对非平稳过程诸矩阵 $H^{(k)}$ 的选取可按各种方法进行．能够按这样的方式来构造矩阵 $H^{(k)}$，使得迭代过程对很广一类方程组尽可能快地收敛于解（见[5]）．也能用相反的步骤，这时在构造诸矩阵 $H^{(k)}$ 中，充分利用给定的方程组的特性以得到有尽快收敛速度的迭代过程（见[6]）．构造矩阵 $H^{(k)}$ 的上述第二种方法更盛行．

构造迭代过程的一个最流行的原则是松弛原则（见**松弛法**（relaxation methods））．在这种情况下，诸矩阵 $H^{(k)}$ 选自前面描述过的矩阵类，使得在过程的每一步中某个表征方程组解的准确度的量减小．松弛方法之中发展最快的方法是坐标法与梯度法．在坐标法中，选取诸矩阵 $H^{(k)}$ 使得在每一步至少一个逐次近似的分量改变．对近似解 x 的准确度，最常用的是误差向量 $r=Ax-b$ 的值．

在平稳迭代方法情况下，主要误差项还可以用 δ^2 过程来估计（见[5]）．

在其他迭代方法中，可提到**简单迭代法**（simple-iteration method），**可变方向法**（variable-directions method），完全与不完全松弛方法，等等（见[1],[6],[10]）．通常，迭代法便于在计算机上实现，但与直接方法形成鲜明对比，它们经常有受很大限制的应用范围．在它们的应用范围内，迭代方法在计算量方面很少真超过直接方法．因而直接与非直接方法的比较问题只能通过对实际方程组性质的细致研究来解决．求解微分方程的差分逼近中产生的方程组的最盛行方法均为迭代方法（见[5],[6]）．

求解完全本征值问题的迭代法．在迭代方法中事先不确定特征多项式系数，本征值作为某些数值序列的极限来计算．通常，同时求本征向量或者与简单本征关系相联系的某些其他向量．多数迭代方法对舍入误差的灵敏度小于直接方法，但工作量明显增大．这些方法的发展与在实际计算中引用它们仅在使用计算机后才成为可能．

在迭代方法中求解实对称矩阵的完全本征值问题的旋转法（rotation method）（**Jacobi 法**（Jacobi method））占有特殊的地位．它基于正交相似于原矩阵 A 的一系列矩阵的构造，使得不在主对角线上所有元素的平方和单调地减小到零．

Jacobi 法（Jacobi method）非常简单，易于在计算机上实现，且它总是收敛的．与本征值的位置无关，它有渐近平方收敛性．多重与相近本征值的出现不仅不减慢方法的收敛速度，而且相反地却提高了速度．Jacobi 法在中间计算结果中关于舍入误差的影响是稳定的．这个方法的诸性质是它在解决一般形式矩阵的完全本征值问题中得以流行的缘由．不用本质上的改变，Jacobi 法可用于 Hermite 矩阵与斜 Hermite 矩阵．对它的一个无关紧要的改变，便能够成功地同时求解

矩阵 A^*A 与 AA^* 的完全本征值问题，而不必计算该矩阵乘积自身．用广义的 Jacobi 法可实现这个方法对具有简单结构的任意矩阵的有效的扩展．

在求解完全本征值问题的迭代方法中，幂法组成一个重要的类．它们的多数算法按如下格式安排：

$$\begin{array}{ccc} AG=G_1S_1 & & A=L_1R_1 \\ \cdots\cdots & \text{或者} & \cdots\cdots \\ AG_{k-1}=G_kS_k & & R_{k-1}L_{k-1}=L_kR_k \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{array}$$

这里，在每一步中位于等号左边的矩阵分裂成两个矩阵之积．假设它们之一是三角的，另一个是酉阵或不同类型的三角阵．这时在某些附加假定下，矩阵 $G_k^{-1}AG_k$ 与 R_kL_k 收敛于与 A 相似的一个拟三角矩阵．通常，此拟三角矩阵的对角方块的阶数不大，因而对极限矩阵的完全本征值问题很易于求解．

已经知道这种类型的少数几种方法，它们的一种最好的方法就是 QR 算法 (QR-algorithm) (见 [7])．

数值方法的研究与分类．线性代数的大量的数值方法提出一个实际问题，主要的不是产生新的方法，而是对现有方法的研究与分类 (从数学结构观点来看，一种最完整的方法分类包含在 [1] 内；专著 [2], [3], [7] 从计算机实现观点致力于方法的描述)．

关于线性代数中求解问题的数值方法中稳定性与舍入误差分析的最初论文在 1947 — 1948 年才出现，且致力于矩阵求逆以及用 Gauss 型方法求解方程组的研究．这些结果的实际价值甚小．这个问题研究中一个重要的进展出现在 20 世纪 60 年代中期 (见 [3])，这时在等价扰动的分析与估计中采纳了一个决定性的步骤．一个确定问题的实际计算解被解释成同一问题但对应着初始数据的扰动的精确解 (所谓的向后分析 (backward analysis))．称为等价扰动的这个扰动完全表征舍入的影响．从给出等价扰动的范数的强估计观点出发，许多方法得以研究 (见 [3], [7])．

对一个固定的算法与舍入方法，舍入误差的整体是一个单值向量函数 $\varphi_t(A)$，它依赖于用于进行计算的字位长 t 与原始数据 A．当 $t\to\infty$ 时，函数 $\varphi_t(A)$ 的主项没有任何有用的显式表达．然而，在随机地指定的初始数据类中对 $\varphi_t(A)$ 的研究其结果是很有效的．已经证明：由舍入误差引起的计算解与精确解的偏差最可能的值充分地小于最大可能值 (见 [7])．

舍入误差影响的分析表明从稳定性观点出发，也就是关于舍入误差，在最好的几种方法之间不存在很大的基本差别．这个结论迫使人们按新的方式去考察在实际计算工作中选择某个计算方法的问题．大型计算机的出现本质上削弱了方法之间在所需计算机存贮的大小与算术运算次数这类特征方面的差别的意义，并导致了对保证解的准确度的增长的需求．在这些条件中，最可取的方法是那些当速度和在计算机上实现的方便性与最好方法没有很大差别，而能够求解一大类问题，包括良态与病态问题，并给出计算解准确度估计的方法．

上面提到的数值方法的分类与比较主要指的是整个初始数据被完全存贮在计算机的操作内存中的情况．但是，对两种极端情形有着特殊的兴趣——在小型与在巨型计算机上线性代数问题的求解．在这样计算机上问题的求解有它自身的专有的特征．

参考文献

[1] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М. – Л., 1963 (中译本：Д. К. 法捷耶夫与 В. Н. 法捷耶娃，线代数的计算方法，上海科学技术出版社，1965)．

[2] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966.

[3] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969.

[4] Воеводин, В. В., 《Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.》, 2 (1970), 69 – 82.

[5] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[6] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

[7] Воеводин, В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

[8] Фаддеева, В. Н. [и др.], Вычислительные методы линейной алгебры. Библиографический указатель, 1828 – 1974 гг., Новосиб., 1976.

[9] Воеводин, В. В., Линейная алгебра, 2 изд., М., 1980.

[10] Марчук, Г. И., Кузнецов, Ю. А., Итерационные методы и квадратичные функционалы, Новосиб., 1972.

В. В. Воеводин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Westlake, J. R., A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations, Wiley, 1968.

[A2] Householder, A. S., Lectures on numerical algebra. Math. Assoc. Amer., 1972.

[A3] Kiebasiňski, A. and Schwetlick, H., Numerische lineare Algebra, H. Deutsch, 1988.

[A4] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, North Oxford Acad., 1983.

陈公宁 译

线性代数方程 [linear algebraic equation; линейное алгебраическое уравнение]

关于所有未知量的一次代数方程 (algebraic equation)，亦即具有形式

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$$

的方程．每一个线性代数方程组可写为如下形式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

其中 m 与 n 是自然数，诸 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 称为未知量的系数(coefficient)，且事先给定；诸 $b_i(i=1,\cdots,n)$ 称为自由项(free term)，且也给定；诸 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 称为未知量(unknown)，需要寻求．线性代数方程组(1)的解(solution)是值 $c_1,\cdots,c_n$ 的一个集合，使得当用诸 c_i 代替对应的未知量时，方程组的每一个方程变为恒等式．对于应用，最重要情形是未知量的系数，自由项以及未知量的值均为数(复数，实数或整数)，但也可考虑它们是属于任意**域**(field) P 的情形．

按照解的个数，线性代数方程组分为如下类型：

相容方程组(compatible system)——至少有一解的线性方程组；

不相容方程组(incompatible system)(或矛盾方程组)——没有解的方程组；

确定方程组(determinate system)——有唯一解的方程组；

不定方程组(indeterminate system)——有多于一解的方程组．

如果考虑其未知量的值在某给定数域(或在任意无限域)内的方程组的解，则每一个不定线性方程组有无穷多个解．与次数超过1的方程组成鲜明对比，线性代数方程组的类型当给定域 P 扩张时不变．因此，在域扩张下，不相容方程组不能变为相容的，确定方程组不能变为不定的．然而，不定方程组的解集在域扩张下增大．

决定方程组(1)的类型与计算它的解的最简单的方法由消去未知量的 **Gauss 法**(Gauss method)给出．在 $n=m$ 情况下，方程(1)是确定的，当且仅当由未知量系数组成的行列式非零．在这种情况下，方程组的唯一解可按 **Cramer 法则**(Cramer rule)求出．

为了求解系数含有参数的线性方程组，代替Gauss法，更方便地可应用与矩阵的**秩**(rank)有关的线性方程组一般理论．一个矩阵的秩(rank of a matrix)可定义为线性无关行或列的最大个数．根据关于矩阵秩的定理，一个矩阵行系的秩等于列系的秩，且也等于该矩阵非零**子式**(minor)的最高阶数．与线性方程组(1)相关联的有两个矩阵：由未知量系数组成的矩阵

$$A=\|a_{ij}\|,$$

以及由 A 加入自由项的列得到的增广矩阵

$$B=\|a_{ij},b_i\|.$$

方程组(1)为相容的一种准则由 Kronecker-Capelli 定理(Kronecker-Capelli theorem)给出：线性方程组(1)是相容的，当且仅当 A 的秩等于 B 的秩．

线性方程组(1)有唯一解，当且仅当 A 的秩等于 B 的秩，且等于 n．

相容线性方程组的诸未知量可分为主(principal)未知量与自由(free)未知量．对自由未知量的任一组值，存在唯一确定的主未知量的值，它们一起给出已知方程组的一个解．主未知量与自由未知量的分法通常不是唯一的，也就是说，如果 A 的秩等于 B 的秩，且等于 r，则其系数可以组成一个行列式 $D\neq0$ 的任意 r 个未知量可视为主未知量，其他的为自由的．在这种情况下，行列式 D 称为方程组的主子式(principal minor)(或基本子式(basic minor))．它可用从最小阶数的子式开始的**加边法**(bordering method)找出．它也不总是唯一确定的．在计算解中只需要取含主子式 D 的 r 个方程，并按一般形式(如用 Cramer 公式)用自由未知量表达主未知量．这些表达式称为通解(general solution)．自由未知量在其中起着自由参数的作用．给定它们的任意一组值，可求出主未知量的值，它们连同自由未知量的已选定值给出方程组的一个解．相容方程组的任意一个解可以按这种方式由自由未知量的适当的一组值得到．如果未知量的所有系数与自由项属于域 P，则从同一域 P 选取自由未知量的值便得到其所有未知量取自同一域 P 的一个解．对于 $r=n$ 的情况，所有未知量均为主未知量，且不存在通解．

从(1)用零代替自由项得出的线性方程组

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

称为对应于(1)的齐次线性方程组(homogeneous system of linear equations)．方程组(2)总是相容的(因为零解满足它)．它有非零解的必要充分条件是它的矩阵 A 的秩应该小于未知量的个数 n．特殊地，对 $m=n$ 的情况，方的齐次线性代数方程组有非零解，当且仅当它的行列式等于零．

相容的线性代数方程组(1)的解与对应的齐次方程组(2)的解联系如下：(1)的解与(2)的解之和为(1)的解；(1)的两个解之差为(2)的解．(1)的所有解可由(1)的同一个特解加上(2)的每一个解得到．

线性方程组解的几何解释．域 P 的 n 个元素组成的任意行可视为 P 上 n 维向量空间 V 的一个向量 x 按某固定基的坐标组成的行．为简洁起见，该向量 x 与它的坐标组成的行看成一致的．齐次方程组(2)的所有解组成 V 的一个子空间 U，其维数等于 $n-r$，这里，n 是未知量的个数，而 r 是方程组矩阵 A 的秩．如果

$r<n$，那么子空间 U 是非零的，且它的基亦称为线性方程组(2)的**基本解组**(fundamental system of solutions)．反之，对 V 的每一个子空间 U，存在一个齐次线性方程组，其解组成 U．由同一个向量 x_0 加上 U 的每一个向量所得到的向量的集合 $Z=U+x_0$ 称为 V 的**线性簇**(linear variety)(或**线性流形**(linear manifold))．在 $\dim U=n-1$ 的情况下，也采用术语**超平面**(hyperplane)．一个相容的线性方程组(1)的所有解组成一个线性簇 Z；反之，对任意的线性簇 Z，存在一个相容的方程组，其解组成那给定的线性簇(见[3])．

线性方程组在整数集内的解．假定给出所有 a_{ij} 与 b_i 均为整数的方程组(1)．令 $d_k(k=1,\cdots,\min(m,n))$ 表示由未知量系数组成的矩阵 A 的所有 k 阶子式的最大公因数，且令 $d_k'(k=1,\cdots,\min(m,n+1))$ 表示对增广矩阵 B 的类似的数．如果 A(或 B)内所有 k 阶子式均为零，则置 $d_k=0$(对应地，$d_k'=0$)．对一个在整数集内的线性方程组(1)有整数解的必要充分条件是 d_k 整除 $d_k'(k=1,\cdots,\min(m,n))$，且对 $m>n$，$d_{n+1}'=0$．

为了陈述计算线性方程组所有整数解的方法，引入所谓的整数矩阵的初等变换：1)用整数 c 乘以第 j 行再加到第 i 行($i\neq j$)；2)用 -1 乘以第 i 行；3)交换第 i 与第 j 行；并且，对列也有类似的变换．在行的初等变换下，方程组(1)变换为一个等价方程组，因而其整数解集不变．在由未知量系数组成的矩阵 A 的列初等变换之间，产生如下的未知量的变换：如果 $y_1,\cdots,y_n$ 为新的未知量，则在变换1)下，

$$x_k=y_k(k\neq j),\quad x_j=y_j+cy_i;$$

在变换2)下，

$$x_k=y_k(k\neq i),\quad x_i=-y_i;$$

在变换3)下，

$$x_k=y_k(k\neq i,j),\quad x_i=y_j,\quad x_j=y_i.$$

在未知量的这样变换下，整数解对应于整数解．

矩阵 A 的秩等于 B 的秩且等于 r 的方程组(1)用 B 的行与 A 的列的初等变换，并去掉零方程可归结到典范形式

$$e_1y_1=b_1',\cdots,e_ry_r=b_r'. \qquad (3)$$

诸数 e_i 满足下列附加条件：

$$e_i>0,\quad i=1,\cdots,r,$$

与

$$e_i \text{ 整除 } e_{i+1}, i=1,\cdots,r-1.$$

这些附加条件对在整数集中求解方程组的问题不是基本的．

方程组(3)存在整数解的必要与充分条件是诸数

$$c_i=\frac{b_i'}{e_i},\quad i=1,\cdots,r,$$

均为整数．未知量 $y_1,\cdots,y_r$ 是唯一确定的，且对 $r<n$ 的情形，未知量 $y_{r+1},\cdots,y_n$ 可取任意整数值．

为了计算原方程组(1)的解，需要将 A 的列的所有变换按相同次序应用到 n 阶单位矩阵 E．最终所得的整数矩阵 Q 给出旧与新的未知量之间的关系：

$$X=QY,$$

其中，

$$X=\left\|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\right\|,\qquad Y=\left\|\begin{matrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{matrix}\right\|.$$

这时要置 $y_i=c_i$，$i=1,\cdots,r$，且对 $r<n$ 的情况可对未知量 $y_{r+1},\cdots,y_n$ 指定任意整数值，它们起着参数作用．

在整数环上这种求解(1)的方法可以推广到任意 **Euclid 环**(Euclidean ring)或**主理想环**(principal ideal ring)．

在一般情况下整数解与方程组的研究属于 **Diophantus 方程**(Diophantine equation)理论的课题．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975(中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1953)．

[2] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977.

[3] Мишина, А. П., Проскуряков, И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965.

И. В. Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2(译自法文)．

[A2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

[A3] Lang, S., Linear algebra, Addison-Wesley, 1966.

[A4] Lang, S., Introduction to linear algebra, Addison-Wesley, 1970.

陈公宁 译

线性代数群 [linear algebraic group; линейная алгебраическая группа]

同构于**一般线性群**(general linear group)的某个代数子群的**代数群**(algebraic group)．代数群 G 是线性的，当且仅当 G 的**代数簇**(algebraic variety)是仿射的，即同构于一个仿射空间的 Zariski 闭子簇(亦见 **Zariski 拓扑**(Zariski topology))．

线性代数群的理论起源于19世纪末用求积法解线性微分方程的 Galois 理论(S. Lie, E. Picard, L. Maurer)，而对于复数域上的线性代数群的研究最初是类比用 Lie 代数的方法对 Lie 群的研究．复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个线性代数群 G 可视为(可逆($n\times n$)复矩阵)群 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的一个解析子群(见**解析群**(analy-

tic group)). 故以通常方式定义的 G 的 **Lie 代数**(Lie algebra)成为 GL(n, **C**)的 Lie 代数的一个子代数. 由此而产生的问题: "哪些 Lie 子代数对应于 GL(n, **C**)的代数的(而不仅是解析的)子群"(见**代数的 Lie 代数**(Lie algebra, algebraic)), 已经有了彻底的答案.

20 世纪中叶, C. Chevalley 完成并推广了 Lie 群和 Lie 代数理论的方法. 随后他将这些方法用于研究特征 0 的任意域上的线性代数群(见[6]). 对于非零特征的域, Lie 代数的方法效果不大, 于是自然产生了用代数几何方法对于线性代数群做整体研究的需要. A. Borel 为对线性代数群进行整体研究奠定了基础(见[2]), 此后线性代数群的理论获得了一种严谨有序的形式(见[8]). 线性代数群的主要问题之一是线性代数群的同构分类问题. 因为任一线性代数群都有一个极大连通可解正规子群 H, 使得商群 G/H 是一个半单的线性代数群, 所以在某种程度上分类问题可以简化成两种类型的线性代数群的分类: 半单的和可解的. 线性代数群理论的主要结果之一是 Chevalley 对于任意特征的代数封闭域上的连通半单线性代数群的分类(见[7], [17]). 这个分类类似于复半单 Lie 代数的 Cartan-Killing 分类(见**半单 Lie 代数**, (Lie algebra, semi-simple)). Chevalley 的分类基于如下事实: 在一个半单代数群中可以构造出 Cartan-Killing 理论中各要素的类似物, 即 **Cartan 子群**(Cartan subgroup)、根等等. **Borel 子群**(Borel subgroup)和极大环面(见**代数环面**(algebraic torus))起了重要的作用.

设 G 是一个半单线性代数群(见**半单代数群**(semi-simple algebraic group)), T 是一个极大环面, $N_G(T)$ 是 T 在 G 中的正规化子(见**子集的正规化子**(normalizer of a subset)), 而 $N_G(T)/T$ 是 G 的 **Weyl 群**(Weyl group). 环面 T 仅包含在 G 的有限多个 Borel 子群中, 而 $N_G(T)$ 的元素通过共轭作用传递地置换这些子群. 可以构造一个从域的加法群到(包含 T 的)Borel 子群的单同态, 使之起根的作用. 利用 **Bruhat 分解**(Bruhat decomposition)技术、证明了上述结构要素系统可对群 G 进行完全分类, 将其确定到同构(见[1], [7], [17]). 半单群的最终分类并不依赖于基域的特征, 从而与复半单代数群的分类相一致.

对于定义在一个非代数封闭域 k 上的半单线性代数群作 k 同构分类要复杂得多; 它本质上要依赖于域 k, 且化为对于代数群的 k 形式的分类(见**代数群的形式**(form of an algebraic group)). 定义在 k 的一个代数闭包 K 上的代数群 G, 其 k 形式的集合与一维 **Galois 上同调**(Galois cohomology)的集合 $H^1(k, \mathrm{Aut}(G))$ 成一一对应, 其中 Aut(G)为 G 的自同构群. 在扩张 K/k 的 **Galois 群**(Galois group)已知(例如 k 为实数域或有限域)的情况下, 这个对应给出了关于 G 的形式的有意义的信息. 但是目前(1989)这个深刻的问题还远未得到解决, 主要的困难在于研究半单线性代数群的 k 结构.

在任意域 k 的情况下, 极大 k 分裂环面起了类似于代数封闭域上的群 G 中极大代数环面的作用. k 分裂环面(k-split torus)是这样一个环面, 它 k 同构于一个定义在 k 上的一维群 GL(1)的直积. G 中极大 k 分裂环面在 k 有理点群 G_k 的元素作用下互相共轭, 它们的维数称为 G 的 k 秩(k-rank)(记做 $\mathrm{rank}_k G$). 如果 $\mathrm{rank}_k G>0$, 则 G 称为是 k 迷向的(k-isotropic), 否则称为是 k 非迷向的(k-anisotropic). 半单群 G 是 k 迷向的, 当且仅当 G_k 包含异于单位元的幂幺元. 对于一个单的单连通群 G 有 **Kneser-Tits 假设**(Kneser-Tits hypothesis): 如果 $\mathrm{rank}_k G>0$, 则 G_k 由幂幺元生成(见[13]). 一般地这已被证明不成立(见[16]). 在 k 为任意域时, 代替 Borel 子群起作用的是极小抛物 k 子群, 这是一个定义在 k 上的 G 的包含 Borel 子群的极小子群. 可以在 G 中定义关于一个极大 k 分裂环面的根系以及相应的 Weyl 群(见[3]). 如果 G 有一个 k 分裂的极大环面, 则这些结构要素不依赖于域 k 并且确定群到 k 同构. 具有 k 分裂极大环面的群称为 k 分裂的(k-split)或者称为 **Chevalley 群**(Chevalley group). Chevalley 关于代数封闭域上半单群的分类可推广至 k 分裂群. Chevalley 证明了任意半单群都有一个分裂的 k 形式(甚至有一个"**Z** 上的形式", 见[7], [14]).

在一般的情形, Borel 和 Tits([3])证明了存在群 G_k 的 Bruhat 分解的类似物, 其中 Borel 子群的作用被极小抛物 k 子群的 k 有理点群所代替. 这使得有可能将具有正 k 秩的半单线性代数群的分类在很大程度上化成对 k 秩 0 的半单群的分类, 即化为对 k 非迷向群的分类. 换言之, 在 k 同构意义下, 半单群 G 由其在 k 上的代数闭包上的同构类、它的 k 指数以及半单 k **非迷向核**(anisotropic kernel)所确定(见[9]). 在有些情形已经有可能获得 k 非迷向半单群的分类. 例如在一个有限域上, 不存在非迷向的半单群, 而对于一大类局部域 k 已经证明(见[15]): 每个 k 非迷向单线性代数群 G 都是 A_n 型的一个内形式, 即在单连通情况时 G_k 同构于 SL(1, D), 其中 D 为 k 上有限次的体. 这些结论的基础是 **Tits 系**(Tits system)的概念, 它是经典情况时 Bruhat 分解的深刻的公理化推广(见[13]).

在其他一般性的结论中值得一提的是 Grothendieck 的结果: 定义在 k 上的线性代数群具有定义在 k 上的极大环面, k 上的连通可约线性代数群作为一个代数簇在 k 上是单有理的(见[1], [10], [12]).

如果 G 定义在一个代数数域或者一个一元代数函

数域上，则产生关于 G 的算术性质的问题，对于它的研究是线性代数群算术理论的课题（见**线性代数群的算术理论**（linear algebraic groups, arithmetic theory of），[12]）.

线性代数群的思想和技巧已经被用于研究任意线性群，导出了线性群理论中的基本方法之一（见[11]）.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Borel, A., Groupes linéaires algébriques, *Ann. of Math.* (2), 64 (1956), 20 – 28.

[3] Borel, A., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, **27** (1965), 55 – 150.

[4] Serre, J.-P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.

[5] Serre, J.-P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[6] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2, Hermann, 1951.

[7] Chevalley, C., Classification des groupes de Lie algébriques, 1 – 2, Ecole Normale Sup., 1956 – 1958.

[8] Chevalley, C., La théorie des groupes algébriques, in Internat. Congress Mathematicians Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 53 – 68.

[9] Tits, J., Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 33 – 62.

[10] Demazure, M. and Grothendieck, A., Schémas en groupes I – III, Lecture notes in math., 151 – 153, Springer, 1970.

[11] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **30** (1966) 3, 573 – 620.

[12] Платонов, В. П., Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, **11** (1974), 5 – 36.

[13] Tits, J., Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.* (2), **80** (1964), 313 – 329.

[14] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1968.

[15A] Bruhat, F. and Tits, J., *BN* paires de type affine et données radicielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), 598 – 601.

[15B] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes simples résiduellement déployés sur un corps locale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), 766 – 768.

[15C] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes algébriques simples déployés sur un corps locale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), 822 – 825.

[15D] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes algébriques simples déployés sur un corps locale: Cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **263** (1966), 867 – 869.

[16] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **40** (1976), 2, 227 – 261.

[17] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1981.

В. П. Платонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chevalley, C., Certains schémas de groupes semi-simples, in Sem. Bourbaki, Exp. 219, 1960 – 1961.

[A2] Borel, A. and Springer, T. A., Rationality properties of linear algebraic groups II, *Tohoku Math. J.*, **20** (1968), 443 – 497.

[A3] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes réductif sur un corps locale I, *Publ. Math. IHES*, **41**(1972), 5–251.

[A4] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes réductif sur un corps locale II, *Publ. Math. IHES*, **60** (1984), 5 – 184.

[A5] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes réductif sur un corps locale III, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.*, **34** (1987), 671 – 698.

王 杰 译 石生明 校

线性代数群的算术理论 [**linear algebraic groups, arithmetic theory of; линейных алгебраических групп арифметическая теория**]

研究**线性代数群**（linear algebraic group）的算术性质的理论．这些群通常是定义在**整体域**（global field）上的．

线性代数群的算术理论中最主要的研究课题之一是一个代数群 G 的算术子群（见**算术群**（arithmetic group）），而主要的技术手段之一是**阿代尔**（adèle）群 G_A．在 G_A 上可以自然地定义一个测度，称作**玉河测度**（Tamagawa measure）．这里出现的首要问题之一是：G_A 关于主阿代尔子群 G_k 的商空间的体积在什么时候是有限的？这个问题的完整的答案是由 A. Borel 得到的．由此即知对于半单群而言 G_A/G_k 的体积总是有限的．在这个问题解决之前已有算术群的约化理论(见[5],[6])．

应用关于主阿代尔子群的约化理论可以在许多情形下计算 G_A/G_k 的体积．此体积称为群 G 的玉河数（Tamagawa number）．例如，对于正交群 G，其玉河数 $\tau(G)=2$，这实际上等价于二次型的解析理论中的基本结果（见[1]）．对于算术代数群的结构的研究（始于[6]）后来在许多不同的方向上发展．首先应该提及的是关于**同余问题**（congruence problem）、算术子群的极大性的问题以及算术群的亏格问题的研究．

在线性代数群的算术理论的所有基本问题中，逼近定理起着基本的作用．它把定义在整体域上的代数群的算术性质的研究简化为定义在局部域上的代数群的算术性质的研究．代数群中的强逼近问题（problem of strong approximation）具有极其重要的意义．这个问题的内容如下：设 $V=\{v\}$ 是域 k 的所有不等价的范的集合，k_v 是 k 关于 v 的完全化，O_v 是 k_v 中的整元素环，又令 $\mathfrak{P}_v$ 是 O_v 的极大理想．对于任一有限子集 $S\subset V$，以 G_S 表示 G_A 中对于所有 $v\notin S$ 其 v 分量都等于恒等元的元素构成的子群．问题是：什么时候有 $\overline{G_S G_k}$

$=G_A$(这里的横杠表示在 G_A 的拓扑下的闭包)? 如果 $S=\infty$(∞ 是 k 的所有 Archimedes 范的集合), 则此问题可以等价地表述如下: 对任一 $v_i \notin S(i=1,\cdots,n)$, 任一 $a_{v_i} \in G_{k_{v_i}}$ 以及正整数 m_{v_i}, 什么时候同余式组

$$x \equiv a_{v_i} (\bmod \mathfrak{P}_{v_i}^{m_{v_i}})$$

在 G_k 中有满足下面条件的解 x: 对于 $v \in \bigcup\{v_1,\cdots,v_n\}$, $x \in G_{O_v}$.

M. Eichler([13])解决了关于群 $SL(n, D)$ 的强逼近问题, 这里的 D 是有限 k 秩的**除环**(skew-field). 此后, M. Kneser, G. Shimura 和 A. Weil (见[4]) 研究了这个问题的若干特殊情形. 关于数域上的典型群的强逼近问题已经解决, 还发现了一般情形下这个问题有肯定答案的必要条件, 即: a) G 作为代数群必须是单连通的; 和 b)如果 F 是 G 的半单部分的任一单分支, 则 F_S 必须是非紧的. 对于函数域这些条件的必要性已被证明([14]). 最后, 条件 a) 和 b) 在数域和函数域上的充分性亦被证明([7], 亦见[16]), 这给出了强逼近问题的完全的解答. 该证明方法的基础是把这个问题归结为证明关于局部域上的单连通群的结构的 **Kneser-Tits 假设**(Kneser-Tits hypothesis): 如果 G 是 k_v 单的单连通群的 k_v 迷向群, 则 G_{k_v} 由幂单元生成, 或等价地, G_{k_v} 关于它的中心的商群是抽象意义下的单群. 作为强逼近定理的最简单的应用, 人们得到了下述事实: 设 G 关于 $S=\infty$ 具有强逼近性质, 令 O 是 k 的整元素环, 则

$$\bar{G}_O = \prod_{v \notin S} G_{O_v};$$

这说明 G_O 的算术在很大程度上被它的局部分量 G_{O_v} 的算术所决定.

在线性代数群的算术理论中和强逼近同样起着重要作用的是一个代数群 G 关于 S 的弱逼近(weak approximation)性质, 它的内容是: 在典范投射 $G_k \to G_S$ 下 G_k 的像在 G_S 中稠密. 所有单连通群具有弱逼近性质. 另一方面, 存在不具有弱逼近性质的半单群和代数环面的例子(见[11],[2]). 然而, 对于广泛的一类非单连通的半单群, 特别对于伴随群, 弱逼近性质是满足的([12]). 如果 G 是一个**代数环面**(algebraic torus), 并且对于每个 $v \in S$, G 在域 k_v 的某个循环扩张下分裂, 则 G 关于 S 具有弱逼近性质. 在某些情形下, 对于任意域上的代数群, 此性质是成立的(见[11]). 有一个猜想(见[11]): 群 $SL(n, D)$ 满足弱逼近性质, 其中 D 是任一无限域 k 上的有限 k 秩的体. 但是, 约化 K 理论的发展已导致否定的答案(见[15]): 群 $SL(n, D)$ 与弱逼近的偏差可以任意大.

在线性代数群的算术理论中, 上同调方法、特别是 **Hasse 原理**(Hasse principle)起着重要的作用(见 **Galois 上同调**(Galois cohomology)).

参考文献

[1] Borel, A. and Mostow, G.D.(eds.), Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., 9, Amer. Math. Soc., 1966.

[2] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A.(eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[3] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

[4] Weil, A., Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *Acta Math.*, **113** (1965), 1 - 87.

[5] Borel, A., Arithmetic properties of linear algebraic groups, in *Proc. Internat. Congress Mathematicians Uppsala*, 1962, Mittag-Leffler Inst., 1963, 10 - 22.

[6] Borel, A. and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.*, **75**(1962), 485-535.

[7A] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **33** (1969), 6, 1211 - 1219.

[7B] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **34** (1970), 4, 775 - 777.

[8] Платонов, В. П., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **132** (1973), 162 - 168.

[9] Kneser, M., Starke Approximation in algebraischen Gruppen I, *J. Reine Angew. Math.*, **218** (1965), 190-203.

[10] Kneser, M., Strong approximation, in G.D. Mostow and A. Borel (eds.), *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 187 - 196.

[11] Kneser, M., Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, in *Colloq. Groupes Algébriques Bruxelles*, Gauthier-Villars, 1962, 41 - 52.

[12] Harder, G., Halbeinfache Gruppenschemeta über Dedekindringen, *Invent. Math.*, **4** (1967), 3, 165 - 191.

[13] Eichler, M., Algemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraische Zahlkörpern und ihre *L*-Reihen, *J. Reine Angew. Math.*, **179** (1938), 227 - 251.

[14] Behr, H., Zur starken Approximation in algebraischen Gruppen über globalen Körpern, *J. Reine Angew. Math.*, **229** (1968), 107 - 116.

[15] Платонов, В. П., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **142** (1976), 198 - 207.

[16] Prasad, G., Strong approximation for semi-simple groups over function fields, *Ann. of Math.*, (2) **105** (1977), 553-572.

В. П. Платонов 撰

【补注】 对于所有的单群 G 都已计算了 **Tamagawa 数**(Tamagawa number). 特别地, Weil 猜想的: 如果 G 是单连通的, 则 $\tau(G)=1$, 已被证明是正确的.

赵春来 译 冯绪宁 校

二面角的直线角[linear angle of a dihedral angle; линейный угол]

从**二面角**(dihedral angle)的棱上一点出发、处于两平面上的棱的垂线之间的夹角.

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

张鸿林 译

线性边值问题 [**linear boundary value problem; линейная краевая задача**]

下述问题：在变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的区域 D 中确定线性微分方程

$$(Lu)(x)=f(x),\ x\in D$$

在此区域的边界 S（或其一部分上）满足线性边界条件

$$(Bu)(y)=\varphi(y),\ y\in S$$

的解.

亦见**边值问题，常微分方程**（boundary value problem, ordinary differential equations）；**边值问题，偏微分方程**（boundary value problem, partial differential equations）.

А. П. Солдатов 撰 张鸿林 译

线性边值问题，数值方法 [**linear boundary value problem, numerical methods; линейная краевая задача, численные методы решения**]

能够获得**线性边值问题**（linear boundary value problem）在网格点上列表形式的近似解之值的方法，这种方法并不使用关于解的表达式所提供的信息. 在这些方法的有关理论中，一般假设原来问题的解总是存在而且有充分多次导数. 因为省略另外一些假定会导致数值方法在普遍性方面存在差异.

由网格近似替代原来的方程组对求解线性边值问题的数值方法来讲是最基本的. 在积分 - 微分方程情况下，这种逼近一般都是使用差分格式和求积公式. 于是产生了如下问题：

1. 在网格加密条件下，如何使网格问题的准确解很快地收敛到原来问题的解？

2. 网格问题的解对于初始数据的改变敏感性如何？

3. 至少是在近似的意义下如何求解网格问题？

为了解决第一和第二个问题需要下面的准备知识. 假定在闭区域 D 上给出了方程

$$Lu=f, \tag{1}$$

而区域的边界 Γ 由 Γ_i 组成，在 Γ 上给出了边界条件

$$l_iu=\varphi_i,\ 在\ \Gamma_i\ 上,\ i=1,\cdots,s. \tag{2}$$

这里已知的连续函数 f 和 φ_i 分别属于赋范线性空间 F 和 Φ_i，线性算子 L 和 l_i 将 D 中连续函数的赋范线性空间 U 的某线性子集 W 分别变换到 F 和 Φ_i.

假设为了逼近（1）选取网格 D_h 和 $D_h^0\subset D$，它们依赖于一个正参数 h，由函数 u_h 和 f_h 组成的赋范线性空间 U_h 和 F_h 分别定义在网格 D_h 和 D_h^0 的网格点上，而且线性算子 L_h 将 U_h 变换到 F_h. 为了逼近边界条件（2），选取网格 $\Gamma_{ih}\subset\Gamma$，由定义在网格 Γ_{ih} 上点的函数 φ_{ih} 形成一个线性赋范空间 Φ_{ih}，和把 U_h 变换到 Φ_{ih} 的线性算子 l_{ih}. 进一步，选取线性算子 P_h 和 p_{ih}，分别把 F 和 Φ_i 变换到 F_h 和 Φ_{ih}. 结果得到了原来问题（1），（2）的**网格逼近**（grid approximation）

$$L_hu_h=P_hf, \tag{3}$$

$$l_{ih}u_h=p_{ih}\varphi_i,\ 在\ \Gamma_{ih}\ 上,\ i=1,\cdots,s, \tag{4}$$

设 $[u]_h$，$\{f\}_h$，$\{\varphi_i\}_{ih}$ 分别表示网格 D_h，D_h^0，Γ_{ih} 上属于 U，F，Φ_i 的函数 u,f,φ_i 的迹（限制）. 这样便可研究网格近似 u_h 对原来问题的解 u 当 $h\to0$ 时的收敛性问题，网格范数取成与在 U，F，Φ_i 中相容的范数，即，对任何函数 u,f,φ_i，下列极限关系式成立：

$$\|[u]_h\|_{U_h}\to\|u\|_U,\ \|\{f\}_h\|_{F_h}\to\|f\|_F,$$
$$\|\{\varphi_i\}_{ih}\|_{\Phi_{ih}}\to\|\varphi_i\|_{\Phi_i}.$$

如果 $u\in W$，$f\in F$，$\varphi_i\in\Phi_i$，则量

$$z(h)=\|L_h[u]_h-\{Lu\}_h\|_{F_h}+\|P_hf-\{f\}_h\|_{F_h}+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\|l_{ih}[u]_h-\{l_iu\}_{ih}\|_{\Phi_{ih}}+$$
$$+\|p_{ih}\varphi_i-\{\varphi_i\}_{ih}\|_{\Phi_{ih}}$$

称为问题（3），（4）对问题（1），（2）的**逼近误差**（error of approximation）. 如果 u 是问题（1），（2）的解，则量

$$\rho(h)=\|L_h[u]_h-P_hf\|_{F_h}+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\|l_{ih}[u]_h-p_{ih}\varphi_i\|_{\Phi_{ih}}$$

称为解的逼近误差. 如果当 $h\to0$ 时 $Z(h)\to0$（或 $\rho(h)\to0$），则称问题（3），（4）逼近问题（1），（2）（或者关于解 u 逼近）. $Z(h)$（或 $\rho(h)$）的最低阶数称为**逼近阶**（order of approximation）（或关于解 u 的逼近阶）.

例如，考虑**热传导方程**（heat equation）的逼近. 在区域 $D(x\geqslant0,\ t\geqslant0)$ 来解方程（1），其中

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2},$$

在半线 $\Gamma_1(t=0,\ x\geqslant0)$ 上给出了初始条件 $l_1u=\varphi_1(x)$，在半线 $\Gamma_2(x=0,\ t\geqslant0)$ 上给出了边界条件 $l_2u=\varphi_2(t)$，其中 $l_1u=u$，$l_2u=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 且 $\varphi_1'(0)=\varphi_2(0)$. 取 F 为连续函数 $f(t,x)$ 的空间，范数定义

为

$$\|f\|_F=\sup_D|f(t,x)|.$$

取 Φ_1 和 Φ_2 为连续函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的空间，其范数分别由下式定义

$$\|\varphi_1\|_{\Phi_1}=\sup_{\Gamma_1}|\varphi_1(x)| \text{ 和 } \|\varphi_2\|_{\Phi_2}=\sup_{\Gamma_2}|\varphi_2(t)|.$$

可取 U 与 F 重合，取 W 为函数 $u\in U$ 的具有 D 内连续偏导数 $\partial u/\partial t$、$\partial u/\partial x$、$\partial^2 u/\partial x^2$ 的子集．令 D_h 为点集 $(n\tau, mh)$，$n=0, 1, \cdots$，$m=-1, 0, 1, \cdots$，其中网格步长满足一定函数关系 $\tau=\tau(h)$ 使当 $h\to 0$ 时 $\tau\to 0$. 集合 D_h^0 包含点 $((n+1/2)\tau, mh)$, $n=0, 1, \cdots$; $m=0, 1, \cdots$. 取 F_h 和 U_h 为具有以下相容范数的网格函数 $f_h(t, x)$ 和 $u_h(t, x)$ 的空间

$$\|f_h\|_{F_h}=\sup_{D_h}|f_h(t,x)| \text{ 且 } \|u_h\|_{U_h}=\sup_{D_h}|u_h(t,x)|.$$

算子 L_h 由下面关系定义

$$L_h u_h(t,x)=\frac{1}{\tau}\left[u_h[t+\frac{\tau}{2}, x]+\right.$$

$$\left.-u_h[t-\frac{\tau}{2}, x]\right]-\frac{1}{2h^2}\left[u_h[t+\frac{\tau}{2}, x+h]+\right.$$

$$\left.-2u_h[t+\frac{\tau}{2}, x]+u_h[t+\frac{\tau}{2}, x-h]\right]+$$

$$-\frac{1}{2h^2}\left[u_h[t-\frac{\tau}{2}, x+h]-2u_h[t-\frac{\tau}{2}, x]+\right.$$

$$\left.+u_h[t-\frac{\tau}{2}, x-h]\right];$$

令

$$P_h f=\{f\}_h\left[\text{或 } P_h f(t,x)=\int_{x-h}^{x+h} f(t,\xi)d\xi\right].$$

对于初始条件的逼近，取网格 Γ_{1h} 由点 $(0, mh)$ 组成，$m=0, 1, \cdots$，网格函数 $\varphi_{1h}(x)$ 组成的空间 Φ_{1h} 具有相容范数

$$\|\varphi_{1h}\|_{\Phi_{1h}}=\sup_{\Gamma_{1h}}|\varphi_{1h}(x)|$$

且

$$l_{1h}u_h(x)=u_h(0,x),\ p_{1h}\varphi_1=\{\varphi_1\}_{1h}.$$

对于边界条件的逼近，取网格 Γ_{2h} 由点 $(n\tau, 0)$ 组成，$n=1, 2, \cdots$; 网格函数 $\varphi_{2h}(t)$ 组成的空间 Φ_{2h} 具有相容范数

$$\|\varphi_{2h}\|_{\Phi_{2h}}=\sup_{\Gamma_{2h}}|\varphi_{2h}(t)|;$$

算子 l_{2h} 定义为

$$l_{2h}u_h(t)=\frac{1}{2}[u_h(t,h)-u_h(t,-h)];$$

而算子 $p_{2h}\varphi_2=\{\varphi_2\}_{2h}$. 于是

$$z(h)=\|L_h[u]_h-\{Lu\}_h\|_{F_h}+$$
$$+\|l_{2h}[u]_h-\{l_2u\}_{2h}\|_{\Phi_{2h}},$$

且当 $h\to 0$ 时 $z(h)\to 0$. 假如对 W 取为限制更多一些的函数 $u\in U$ 的集合，除以上提到的，若在 D 内的偏导数 $\partial^2 u/\partial t^2$ 和 $\partial^4 u/\partial x^4$ 有界，则对于 $\tau=h$ 可得到二阶精度的逼近.

网格问题

$$L_h u_h=f_h, \tag{3'}$$

$$l_{ih}u_h=\varphi_{ih}, \text{ 在 } \Gamma_{ih} \text{ 上} \tag{4'}$$

称为适定的 (well-posed)，如果对于充分小的 h 下列条件能够满足：对于任意给定的函数 $f_h\in F_h$，$\varphi_{ih}\in\Phi_{ih}$ 问题是可解的，而且存在 $\psi(\lambda)$，它与 h 无关，随 λ 一起趋向于零，并对任何函数 $u_h\in U_h$ 使得

$$\|u_h\|_{U_h}\leqslant\psi\left[\|L_h u_h\|_{F_h}+\sum_{i=1}^{s}\|l_{ih}u_h\|_{\Phi_{ih}}\right]. \tag{5}$$

一个适定的网格问题的解连续地关于 h 一致地依赖于给定函数. 网格问题的适定是其解对计算过程中舍入误差的引入不怎么敏感的一个必要条件. 如果 u 是 (1)，(2) 的解，而且问题 (3′)，(4′) 是适定的，那么

$$\|u_h-[u]_h\|_{U_h}\leqslant\psi(\rho(h)). \tag{6}$$

而且，如果问题 (3)，(4) 的解逼近 (1)，(2) 的解，则有

$$\|u_h-[u]_h\|_{U_h}\to 0, \text{ 当 } h\to 0.$$

若范数相容性条件，$z(h)\to 0$ 和条件 (5) 满足，则当取 $u_h=[u]_h$ 并在 (5) 中令 $h\to 0$ 而取极限，可得不等式

$$\|u\|_U\leqslant\psi\left[\|Lu\|_F+\sum_{i=1}^{s}\|l_iu\|_{\Phi_i}\right], \tag{7}$$

它对任意函数 $u\in W$ 都成立. 这样，为了研究形为 (1)，(2) 的边值问题是否适定，可按下面作法进行：首先得到估计式 (5)，然后从它估计 (7). 应用 (5) 式这种类型的估计，常常能够证明，作为 $h\to 0$ 时网格逼近的极限，问题 (1)，(2) 的解 u 存在.

为使求解问题 (1)，(2) 的近似解问题有一个彻底的解决，需要构造具有舍入稳定性的求解 (3)，(4) 的一个准确或近似的解法. 研究稳定性使用**算法的闭包** (closure of a computational algorithm) 的概念是有益的. 在上面的例子里可使用关于变量 λ 的追赶法来求解方程.

估计网格方法误差的(6)式有一个缺点，在函数 $\psi(\lambda)$ 的表达式里准确解 u 的各阶导数一般都存在．在一些情况下可对这些导数作先验估计(即，在给出问题的解之前作估计)，但这类估计一般都很粗糙．还有一些或许更为精确的估计，其中导数被近似解 u_h 的差商替代．网格方法误差的实用估计方法主要采用下述办法实施：对各不相同的 h 重复地求解问题(3)，(4)，并且继而分离出形为 $h^\gamma[z]_h$ 的误差的主要部分，其中 γ 为误差的已知最小阶数．于是，若得到了渐近关系式

$$\|[u]_h - u_h - h^\gamma[z]_h\|_{U_h} = o(h^\gamma),$$

则

$$[z]_h \sim \frac{u_h - u_H}{H^\gamma - h^\gamma}.$$

有时可以得出关于包含准确解 u 的导数的 z 的方程．这样就能在解完原来的问题之后可在一个较粗的网格上再来数值求解 z 的方程，获得主要误差项并加到近似解 u_h 上，以此实现精密化．

在某些情形下，在求解问题(1)，(2)的变分或投影方法中应用坐标函数的特殊选取作法，可以得到形为(3)，(4)的方程，它们既保证了古典解也包括广义解的收敛性．这种构造近似的方法有时称为有限元法(finite-element method)．它对网格的选取有很大灵活性．通过对于节点的适当安排，只用少量网格节点就能获得所需的计算精度．

参考文献

[1] Babushka, I., Prâger, M. and Vitásek, E., Numerical processes in differential equations, SNTL, 1966.

[2] Бахвалов, Н. С., Конспекты по курсу《Основы вычислительной математики》, ч. 4., М., 1968.

[3] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975(英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[4] Varga, R. S., Functional analysis and approximation theory in numerical analysis, SIAM, 1971.

[5] Гавурин, М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971.

[6] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977(英译本：Godunov, S. K. and Ryaben'kiĭ, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964).

[7] Дьяконов, Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1-2, М., 1971 – 1972.

[8] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977(英译本：Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P., Functional analysis, Pergamon, 1982).

[9] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980(英译本：Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1975).

[10] Михлин, С. Г., Смолицкий, Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965(英译本：Mikhlin, S. G. and Smolitskiĭ, Kh. I., Approximate methods for solution of differential and integral equations, Amer. Elsevier, 1967).

[11] Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., Difference methods for initial-value problems, Interscience, 1967(中译本：R. D. Richtmyer, K. W. Morton 著，初值问题的差分方法(第二版)，中山大学出版社，1992).

[12] Рябенький, В. С., Филиппов, А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

[13] Самарский, А. А., Теория разностнений, М., 1956.

[14] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ascher, U. M., Matthey, R. M. M. and Russell, R. D., Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice-Hall, 1988.

[A2] Keller, H. B., Numerical solution of two point boundary value problems, SIAM, 1976.

张宝琳、袁国兴 译

线性典型群 [linear classical group; линейная классическая группа]

体 K 上有限维**向量空间**(vector space) E 的非奇异线性变换构成的群，且其本身是一个**典型群**(classical group)(亦见**线性群**(linear group))．线性典型群中最重要的几种类型如下：**一般线性群**(general linear group) $GL_n(K)$，**特殊线性群**(special linear group) $SL_n(K)$ 和**酉群**(unitary group) $U_n(K, f)$(其中 $n = \dim E$，f 是 E 上一个关于 K 的对合的 Hermite 或者斜 Hermite 形式)．当 K 还是交换的时候，特别重要的情况有：**辛群**(symplectic group) $Sp_n(K)$ 和**正交群**(orthogonal group) $O_n(K, f)$(其中 f 为 E 上的一个二次型，K 的特征不等于 2)．　　В. Л. Попов 撰

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963.

[B2] Z. Wan, Geometry of classical groups over finite fields, Studentlitteratur, Lund, 1992.

王 杰 译　石生明 校

线性闭包 [**linear closure**; **линейное замыкание**]

线性包 (linear hull) 的闭包.

线性联络 [**linear connection**; **линейная связность**]

1) 微分流形 M 上的线性联络是 M 上与**仿射联络** (affine connection) 相关联的微分几何结构. 对于每个仿射联络, 可定义向量的**平行移动** (parallel displacement), 从而对 M 上每条曲线 $L(x_0, x_1)$ 能够定义切空间的线性映射 $T_{x_1}(M) \to T_{x_0}(M)$. 在这种意义下, M 上一个仿射联络确定一个线性联络, 从而所有仅依赖于向量 (或更一般的张量) 的平移的概念和结构都可转移到线性联络上去. M 上一个线性联络是切空间 $T_x(M)(x \in M)$ 的标架主丛 $B(M)$ 上的联络, 且由下列三种等价方式之一来定义:

(1) 由联络对象 Γ^i_{jk} 定义, 它们在局部坐标域的交上满足下列变换规律:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^k} \Gamma^r_{st} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r};$$

(2) 由主标架丛 $B(M)$ 上的 1 形式矩阵 ω^i_j 定义, 使得在每个局部坐标系下, 2 形式

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j$$

可表达为如下形状:

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl}\, dx^k \wedge dx^l;$$

(3) 由**共变微分** (covariant differentiation) 的双线性算子 ∇ 定义, 它使 M 上任两向量场 X, Y 对应于第三个向量场 $\nabla_Y X$, 并且具有如下性质:

$$\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X,$$
$$\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X,$$

其中 f 是 M 上光滑函数.

M 上每个线性联络唯一地确定一个与它典范关联的 M 上的仿射联络. 这可由 M 上任何曲线 $L(x_0, x_1)$ 的展开来确定. 为了得到这个展开, 首先必须确定 $n = \dim M$ 个线性独立的沿 L 的平行向量场 $X_1, \cdots, X_n$, 然后用它们来表示 L 的切向量场

$$\dot{x}(t) = \mu^i(t) X_i(t),$$

最后在 $T_{x_0}(M)$ 中求微分方程

$$\dot{x}(t) = \mu^i(t) X_i(0)$$

满足初始条件 $x(0) = 0$ 的解 $x(t)$. 在 L 的任一点 x_t, 切仿射空间的仿射映射

$$(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$$

就由标架映射

$$\{x_t, X_i(t)\} \to \{y_t, X_i(0)\}$$

所确定, 其中 $\overrightarrow{x_0 y_t} = x(t)$.

利用它们之间的一一对应, 一个线性联络常恒同于与它典范关联的仿射联络.

2) 向量丛上的线性联络是可微分向量丛 $\pi: X \to B$ 上的微分几何结构, 它使 B 中每条从 x_0 到 x_1 的逐段光滑曲线 L 伴随一个作为向量空间的纤维 $\pi^{-1}(x_0)$ 到纤维 $\pi^{-1}(x_0)$ 的线性同构, 称之为沿 L 的**平行移动** (parallel displacement). 线性联络被给定向量丛之纤维的标架主丛 P 上的**水平分布** (horizontal distribution) 所确定. 在分析上, 线性联络可由 P 上的 1 形式矩阵 ω^β_α 表示, 其中 $\alpha, \beta = 1, \cdots, k$ (k 是纤维的维数), 使得 2 形式

$$d\omega^\beta_\alpha + \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma = \Omega^\beta_\alpha$$

是半基的 (semi-basic), 即在 B 的每个局部坐标系 (x^i) 下它们可表达为如下形状:

$$\Omega^\beta_\alpha = \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha ij}\, dx^i \wedge dx^j.$$

而且, 水平分布被 P 上的微分方程组 $\omega^\beta_\alpha = 0$ 所确定. 2 形式 Ω^β_α 称为曲率形式 (curvature forms). 根据和乐定理, 它们确定了线性联络的**和乐群** (holonomy group).

3) 纤维丛 E 上的线性联络是一种联络, 它使从 E 的一给定点 y 出发的水平曲线的切向量作成一个 $T_y(E)$ 的向量子空间 Δ_y; 线性联络就被**水平分布** (horizontal distribution) $\Delta: y \mapsto \Delta_y$ 所确定.

参考文献

[1] Lichnerowicz, A.. Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976.

[2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Intenscience, 1963.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

沈一兵 译

线性相关 [**linear dependence**; **линейная зависимость**]

见**线性无关** (linear independence).

Banach 空间中的线性微分方程 [**linear differential equation in a Banach space**; **линейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве**]

形如

$$A_0(t)\dot{u} = A_1(t)u + g(t) \tag{1}$$

的方程, 其中对每个 t, $A_0(t)$ 和 $A_1(t)$ 是 **Banach 空间** (Banach space) E 中的线性算子, 而 $g(t)$ 是给定的函数, $u(t)$ 是未知函数, 它们都取值于 E; 导数 $\dot{u}$ 理解成差商关于 E 的模的极限.

1．具有有界算子的线性微分方程．假定对每个 t，$A_0(t)$ 和 $A_1(t)$ 是作用于 E 的有界算子．若对每个 t、$A_0(t)$ 具有有界逆，则（1）可以解出导数，且取形式

$$\dot{u}=A(t)u+f(t), \tag{2}$$

其中 $A(t)$ 是 E 中的有界算子，$f(t)$ 和 $u(t)$ 是取值于 E 的函数．若函数 $A(t)$ 和 $f(t)$ 是连续的（或更一般地，在每个有限区间上是可测的和可积的），则对任意 $u_0\in E$，**Cauchy 问题**（Cauchy problem）

$$\dot{u}=A(t)u、u(s)=u_0 \tag{3}$$

的解存在，且由公式

$$u(t)=U(t,s)u_0$$

给出，其中

$$U(t,s)=I+\int_s^t A(t_1)dt_1+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_s^t\int_s^{t_n}\cdots\int_s^{t_2}A(t_n)\cdots A(t_1)dt_1\cdots dt_n \tag{4}$$

为方程 $\dot{u}=A(t)u$ 的**发展算子**（evolution operator）．方程（2）的 Cauchy 问题的解由公式

$$u(t)=U(t,s)u_0+\int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

确定．由（4）得到估计

$$\|U(t,s)\|\leqslant\exp\{\int_s^t\|A(\tau)\|d\tau\}; \tag{5}$$

它的加细是

$$\|U(t,s)\|\leqslant\exp\{\int_s^t r_A(\tau)d\tau\}, \tag{5'}$$

其中 $r_A(\tau)$ 是算子 $A(\tau)$ 的**谱半径**（spectral radius）．发展算子具有性质

$$U(s,s)=I,\ U(t,\tau)U(\tau,s)=U(t,s),$$
$$U(t,\tau)=[U(\tau,t)]^{-1}.$$

在（2）的研究中已把主要力量集中在它的解在无穷远处的性态，这依赖于 $A(t)$ 和 $f(t)$ 的性态．该方程的一个重要特征是一般指数（general exponent）（或奇异指数（singular exponent））

$$\kappa=\varlimsup_{\tau,s\to\infty}\frac{1}{\tau}\ln\|U(\tau+s,s)\|.$$

对于周期和概周期系数的方程已有详细研究（见 **Banach 空间中微分方程的定性理论**（qualitative theory of differential equations in Banach spaces））．

方程（2）也可在复平面上来考虑．若函数 $A(t)$ 和 $f(t)$ 在一含点 s 的单连通区域中是全纯的，则在把积分看成是在连接 s 和 t 的可求长的弧上的积分时，公式（3），（4），（5），（5′）仍成立．

另外有些方程出现在最初的线性方程不能解出导数的情形．如果除去一点，譬如 $t=0$，算子 $A_0(t)$ 是处处有界可逆的，则在空间 E 中该方程就化为形式

$$a(t)\dot{u}=A(t)u+f(t), \tag{6}$$

其中 $a(t)$ 是一标量函数且 $a(0)=0$．这里主要集中于研究解在原点的一个邻域中的性态，分别考虑两种情形：解析和非解析情形．

解析情形．对于含常值算子 A 的最简方程

$$t\dot{u}=Au,$$

发展算子 $U(t)=U(t,0)$ 具有形式

$$U(t)=e^{A\ln t},$$

且解不是单值的：当沿正向绕原点旋转时，这些解乘以算子 $e^{2\pi iA}$．

考虑具有正则奇点的方程

$$t\dot{u}=\left[\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}t^k\right]u, \tag{7}$$

其中右边的级数在原点的一个邻域内收敛．如果所寻求的算子 $U(t)$ 具有级数形式

$$U(t)=\left[\sum_{k=0}^{\infty}U^{(k)}t^k\right]e^{A^{(0)}\ln t},$$

则为了确定系数 $U^{(k)}$，得到方程组

$$A^{(0)}U^{(0)}-U^{(0)}A^{(0)}=0,$$

$$(A^{(0)}-kI)U^{(k)}-U^{(k)}A^{(0)}=-\sum_{j=1}^{k}A^{(j)}u^{(k-j)},$$
$$k=1,2,\cdots$$

为使此方程组可解，即为使（7）形式上可解，只需算子 $A^{(0)}$ 和 $A^{(0)}-kI$ 的谱不相交（见**算子谱**（spectrum of an operator）），或等价地，在 $A^{(0)}$ 的谱中不存在相差整数的点．在此条件下级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}U^{(k)}t^k$$

作为 $A(t)$ 的级数在零点的同一邻域中收敛．现在，若有有限个整数，它们能表示成 $A^{(0)}$ 的谱点之差，且每一点是变换

$$\mathfrak{A}X=A^{(0)}X-XA^{(0)}$$

的谱的孤立点，则有下列形式的解：

$$U(t)=\left[I+\sum_{k=1}^{\infty}U_k(\ln t)t^k\right]e^{A^{(0)}\ln t},\ 0<|t|<\rho,$$

其中 U_k 是幅角 $\ln t$ 的整函数，对每个 $\varepsilon>0$，它满足条件

$$\| U_k(\ln t) \| \leqslant C_\epsilon e^{\epsilon|\ln t|}.$$

如果变换 $\mathfrak{A}$ 的谱的整数点为其预解式的极点，则函数 U_k 是多项式．

在非正则奇点的情形，微分方程

$$t^m \dot{u} = \left[\sum_{k=0}^{m-1} A^{(k)} t^k \right] u$$

已在 Banach 代数 $\mathfrak{B}$（例如，在 Banach 空间 E 上的有界算子代数）中讨论过．对 $A^{(0)}$ 作某些限制，在元素取自 $\mathfrak{B}$ 的矩阵代数中通过 Laplace 积分可把这个方程化成具有正则奇点（$m=1$）的方程．

非解析情形．假定在方程

$$t^n \dot{u} = A(t)u + f(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

中函数 $A(t)$ 和 $f(t)$ 是无穷次可微的．在有限维情形已有完整结果：如果该方程有幂级数型的形式解，则在 $[0, T]$ 上存在无穷次可微的解，使该形式级数为在点 $t=0$ 处的 Taylor 级数．在无限维情形，仅有一些充分条件保证存在无穷次可微的解．

假定 $m>1$．如果算子 $A(0)$ 的谱不与虚轴相交，则存在一族无穷次可微的解，它依赖于由 $A(0)$ 在左半平面的部分谱所确定的 $A(0)$ 的不变子空间中的任意元素 g^-．在该族中的任一解在 $[0, T]$ 上连续．如果 $A(0)$ 的谱整个位于左半平面，则仅有一个无穷次可微解．

假定 $m=1$．如果在 $A(0)$ 的谱中不存在负整数，则有唯一的无穷次可微解．在对算子 $A(0)$ 的类似假定下，已考虑过形如（6）的方程．其中 $a(t)$ 和 $f(t)$ 有限次光滑性，解也有同样的光滑性．

在微分方程不能对所有 t 解出导数的情形，例如当 A 是不可逆的常数算子时，情况大为不同．假定在方程

$$A\dot{u} = Bu \tag{8}$$

中算子 A 和 B 在空间 E 中是有界的，且 A 为不可逆的 **Fredholm 算子**（Fredholm operator）．假定算子 $A+\varepsilon B$ 对充分小的 ε 连续可逆，那么存在直和分解 $E = N^{(1)} + M^{(1)}$ 和 $E = N^{(2)} + M^{(2)}$，使得 A 和 B 将 $N^{(1)}$ 映射到 $N^{(2)}$ 中，将 $M^{(1)}$ 映射到 $M^{(2)}$ 中．算子 A 在 $M^{(1)}$ 上可逆且映射到 $M^{(2)}$ 上．子空间 $N^{(1)}$ 是有限维的．（8）的所有解都在子空间 $M^{(1)}$ 中且具有形式 $\exp(\widetilde{A}^{-1}Bt)u_0$，其中 $\widetilde{A}$ 是 A 在 $M^{(1)}$ 上的限制，且 $u_0 \in M^{(1)}$．对于非齐次方程 $A\dot{u} = Bu + f(t)$，仅当 $f(t)$ 有一定的光滑性且 $f(t)$ 及其导数的值与初值满足某种相容性条件时有解．$f(t)$ 的某些分量需具有的导数个数和相容性条件的个数等于算子 A 的 B 相伴链的最大长度．若满足这些条件，则 Cauchy 问题的解是唯一的．

如果算子 $A+\varepsilon B$ 对所有 ε 是不可逆的，则（8）的所有解，一般说来，位于一个具有无穷亏量的子空间中（又见**亏子空间**（deficiency subspace））．它的 Cauchy 问题的解不唯一．非齐次方程中的函数 $f(t)$ 要求满足无穷次可微性的条件和相容性条件．

2．具有无界算子的线性微分方程．假定 $A_0(t)$ 对每个 t 可逆，使（1）可解出导数且取形式

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{9}$$

假定这里的 $A(t)$ 是空间 E 中的无界算子，具有在 E 中稠密的定义域 $D(A(t))$ 及非空**预解集**（resolvent set），还假定 $f(t)$ 是给定的函数，且 $u(t)$ 是未知函数，它们都取值于 $E(t)$．

既使对于具有无界算子的最简方程 $\dot{u} = Au$，Cauchy 问题 $u(0) = u_0$ 的解也不一定存在，解可以不唯一，及不可扩张到整个半轴，因而主要的研究归结为解的存在性和唯一性问题．方程 $\dot{u} = Au$ 在区间 $[0, T]$ 上的解看成是取值于 $D(A)$ 的函数，它在 $[0, T)$ 上可微且满足方程．有时这个定义太严，而引进弱解（weak solution）概念，这是在 $(0, T]$ 上有相同性质，而仅在 0 处连续的函数．

假定算子 A 对所有充分大的正数 λ 有预解式

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

且

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \lambda^{-1} \ln \| R(\lambda, A) \| = h < T.$$

则问题

$$\dot{u} = Au,\ u(0) = u_0 \tag{10}$$

的弱解在 $[0, T-h]$ 上是唯一的，且可在 $t = T-h$ 处出现分支．若 $h=0$，则解在整个半轴上是唯一的．而就 $\lambda \to \infty$ 时 $R(\lambda, A)$ 的性态来讲，这个断语是正确的．

如果对每个 $u_0 \in D(A)$，问题（10）在 $[0, T]$ 上有连续可微的唯一解，则该解可扩充到整个半轴，且可表示成 $u(t) = U(t)u_0$ 的形式，这里 $U(t)$ 为 $[0, \infty)$ 上有界算子的**强连续半群**（strongly-continuous semi-group），$U(0) = I$，且估计式 $\| U(t) \| \leqslant Me^{\omega t}$ 成立．该方程具有这种性质，当且仅当对所有的 $\lambda > \omega$ 和 $m = 1, 2, \cdots$，有

$$\| (\lambda - \omega)^m R^m(\lambda, A) \| \leqslant M, \tag{11}$$

其中 M 与 λ 和 m 无关．要验证这些条件是困难的．它们在 $\| (\lambda - \omega) R(\lambda, A) \| \leqslant 1$ 时满足，从而 $\| U(t) \| \leqslant e^{\omega t}$．若 $\omega = 0$，则 $U(t)$ 是**压缩半群**

(contraction semi-group). 当且仅当 A 为最大**耗散算子**(dissipative operator)时即如此. 若 $u_0 \notin D(A)$, 则函数 $U(t)u_0$ 不可微(对 $t=0$ 总如此); 它常称为(10)的广义解(generalized solution). 方程 $\dot{u} = Au$ 的解可通过具有有界算子的方程 $\dot{u} = A_n u$ 满足相同初始条件的解当 $n \to \infty$ 时取极限来构造. 为此只须算子 A_n 交换, 在 $D(A)$ 上强收敛到 A, 且

$$\| e^{tA_n} \| \leqslant M e^{\omega t}.$$

若条件(11)满足, 则算子 $A_n = -nI - n^2 R(\lambda, A)$ (吉田算子(Yosida operator))具有这些性质.

构造方程 $\dot{u} = Au$ 的解的另一个方法是基于 Laplace 变换. 若 A 的预解式定义在某个围道 Γ 上, 则函数

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) u_0 d\lambda \qquad (12)$$

形式上满足方程

$$\dot{u} = Au + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} d\lambda u_0.$$

如果该积分的收敛性, 积分号下微分的有效性及最后的积分为零都能保证, 则 $u(t)$ 满足该方程. 困难在于预解式的范数在无穷远处不能比 $|\lambda|^{-1}$ 衰减得更快. 但在某些因素下它衰减得快些. 例如当 $R(\lambda, A)$ 对 $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \alpha$ 有定义, 且对充分大的 $|\lambda|$, 有

$$\| R(\lambda, A) \| \leqslant M |\lambda|^k, \ k \geqslant -1,$$

则对 $\Gamma = (-i\infty, i\infty)$, 公式(12)对任意 $u_0 \in D(A^{[k]+3})$ 给出解. 在"不太好"情形即上述不等式仅在区域

$$\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \alpha |\mathrm{Im}\,\lambda|^\alpha, \ 0 < \alpha < 1$$

中满足(弱双曲型方程)且 Γ 为该区域的边界的情形, 仅当 u_0 属于 A 的所有幂的定义域之交时有解, 这里当 $n \to \infty$ 时 $\| A^n u_0 \|$ 有确定性态.

当 Γ 位于左半平面且可利用函数 $|e^{\lambda t}|$ 在这里的衰减时, 可得到很重要的弱解. 该解在 $t > 0$ 时的光滑程度通常在增加. 如果该预解式在围道 Γ: $\mathrm{Re}\,\lambda = -\psi(|\mathrm{Im}\,\lambda|)$ 上有界, 这里的 $\psi(\tau)$ 为光滑的不减凹函数且在 ∞ 处像 $\ln\tau$ 那样增加, 则对任意 $u_0 \in E$, 函数(12)可微, 且从某个 t_0 开始满足方程; 当 t 进一步增加时, 它的光滑性也增加. 如果 $\psi(\tau)$ 像指数小于 1 时的 τ 的幂那样增加, 则函数(12)对 $t > 0$ 无穷次可微; 如果 $\psi(\tau)$ 像 $\tau / \ln\tau$ 那样增加, 则 $u(t)$ 属于**拟解析类**(quasi-analytic class)函数; 如果它像线性函数那样增加, 则 $u(t)$ 是解析的. 在所有这些情形它满足方程 $\dot{u} = Au$.

预解式在位于左半平面的围道上的存在性可利用级数展式从铅直线上的相应估计得到. 若对 $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \gamma$,

$$\| R(\lambda, A) \| \leqslant M(1 + |\mathrm{Im}\,\lambda|)^{-\beta}, \ 0 < \beta < 1. \qquad (13)$$

则对每个 $u_0 \in D(A)$, 问题(10)有解. 所有这些解对 $t > 0$ 无穷次可微. 它们可表成 $u(t) = U(t)u_0$ 的形式, 其中 $U(t)$ 对 $t > 0$ 是无穷可微半群, 且一般地说, 在 $t = 0$ 处有奇点. 对于它的导数有估计式

$$\| U(k)(t) \| \leqslant M_k t^{1-(k+1)/\beta} e^{\omega t}.$$

若估计式(13)对 $\beta = 1$ 满足, 则方程 $\dot{u} = Au$ 的所有广义解在含正半轴的某个扇形中解析.

方程 $\dot{u} = Au$ 称为**抽象抛物型方程**(abstract parabolic equation), 如果在 $[0, \infty]$ 上存在着对任意 $u_0 \in E$ 满足初始条件 $u(0) = u_0$ 的弱解. 如果

$$\| R(\lambda, A) \| \leqslant M |\lambda - \omega|^{-1}, \ \text{对}\,\mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \qquad (14)$$

则该方程为抽象的抛物型方程. 它的所有广义解在含正半轴的某个扇形中解析, 且

$$\| \dot{u}(t) \| \leqslant t^{-1} C e^{\omega t} \| u_0 \|,$$

其中 C 与 u_0 无关. 反之, 如果方程具有上述性质, 则算子 A 满足(14).

若问题(10)对任意 $u_0 \in D(A)$ 有唯一弱解, 使其导数在每个有限区间上可积, 则这些解可表成 $u(t) = U(t)u_0$ 形式, 其中 $U(t)$ 为 $(0, \infty)$ 上的强连续半群, 且非齐次方程 $\dot{v} = Av + f(t)$ 具有初始条件 $v(0) = 0$ 的每个弱解可表示成下列形式:

$$v(t) = \int_0^t U(t-s) f(s) ds. \qquad (15)$$

解 $v(t)$ 对任意连续的 $f(t)$ 有定义, 因而称为非齐次方程的广义解. 为保证它可微, 对 $f(t)$ 加上光滑性条件, 且算子 $U(t)$"越坏", 光滑性就应"越高". 因而, 在上述条件下, 当 $f(t)$ 二次连续可微时(15)为非齐次方程的弱解; 如果(11)满足, 则当 $f(t)$ 连续可微时(15)为解; 如果(13)满足且 $\beta > 2/3$, 则当 $f(t)$ 满足具有指数 $\gamma > 2(1 - 1/\beta)$ 的 Hölder 条件时, $v(t)$ 为弱解. 代替 $f(t)$ 关于 t 的光滑性, 可要求 $f(t)$ 的值属于 A 的相应幂的定义域.

对于含变量算子的方程

$$\dot{u} = A(t)u, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (16)$$

有一些关于在区间 $s \leqslant t \leqslant T$ 上 Cauchy 问题 $u(s) = u_0$ 解(弱解)的基本的存在性和唯一性定理. 如果 A 的定义域与 t 无关,

$$D((A)) \equiv D(A).$$

如果算子 $A(t)$ 在 $D(A)$ 上关于 t 强连续，且对 $\lambda>0$，

$$\|\lambda R(\lambda, A(t))\|\leqslant 1,$$

则 Cauchy 问题的解唯一．而且，如果 $A(t)$ 在 $D(A)$ 上强连续可微，则对每个 $u_0\in D(A)$，解存在且可表成

$$u(t)=U(t, s)u_0$$

的形式，其中 $U(t, s)$ 为具有下列性质的**发展算子**（evolution operator）：

1) $U(t, s)$ 在三角形 T_Δ: $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 中强连续；

2) $U(t, s)=U(t, \tau)U(\tau, s)$, $0\leqslant s\leqslant \tau\leqslant t\leqslant T$, $U(s, s)=I$;

3) $U(t, s)$ 将 $D(A)$ 映射到自身，且算子

$$A(t)U(t, s)A^{-1}(s)$$

在 T_Δ 中有界且强连续；

4) 在 $D(A)$ 上算子 $U(t, s)$ 对 t 和 s 强可微，且

$$\frac{\partial U}{\partial t}=A(t)U,\ \frac{\partial U}{\partial s}=-UA(s).$$

算子 $U(t, s)$ 的构造可通过用有界算子 $A_n(t)$ 逼近 $A(t)$ 并用分段常数算子替代 $A_n(t)$ 来实现．

在许多重要问题中上述关于算子 $A(t)$ 的条件并不满足．假定对算子 $A(t)$，存在常数 M 和 ω 使得对所有 $\lambda>\omega$, $0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$, $k=1, 2, \cdots$，有

$$\|R(\lambda, A(t_k))\cdots R(\lambda, A(t_1))\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-k}$$

假定在 E 中存在含于所有 $D(A)$ 中的稠嵌入的 Banach 空间 F，同时具有下列性质：a) 在 F 到 E 的有界算子范数中，算子 $A(t)$ 从 F 到 E 的作用有界，关于 t 连续；而且 b) 存在 F 到 E 上的同构使

$$SA(t)S^{-1}=A(t)+B(t),$$

其中 $B(t)$ 为在 E 中有界且强可测的算子函数，同时 $\|B(t)\|$ 在 $[0, T]$ 上可积．那末存在发展算子 $U(t, s)$ 具有性质：1); 2); 3′) $U(t, s)F\subset F$ 且 $U(t, s)$ 在 T_Δ 上 F 中强连续；及 4′) F 上算子 $U(t, s)$ 在 E 的范数意义下强可微且 $\partial U/\partial t=A(t)U, \partial U/\partial s=-UA(s)$．这个断语能得到关于双曲型数学物理的基本拟线性方程的存在性定理．

冻结系数法（method of frozen coefficients）用于**抛物型方程理论**．假定对每个 $t_0\in[0, T]$，方程 $\dot{u}=A(t_0)u$ 对应于算子半群 $U_{A(t_0)}(t)$．未知的发展算子形式上满足积分方程

$$U(t, s)=U_{A(t)}(t-s)+$$
$$+\int_s^t U_{A(t)}(t-s)[A(\tau)-A(t)]U(\tau, s)d\tau,$$
$$U(t, s)=U_{A(t)}(t-s)+$$
$$+\int_s^t U(t, \tau)[A(\tau)-A(s)]U_{A(s)}(\tau-s)d\tau.$$

当这些方程的核具有弱奇性时，可以证明方程有解且 $U(t, s)$ 也是发展算子．下面的结论最有用：如果

$$D(A(t))\equiv D(A),\ \|R(\lambda, A(t))\|<$$
$$<M(1+|\lambda|)^{-1}$$

对 $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$ 及

$$\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(0)\|\leqslant C|t-s|^\rho$$

（Hölder 条件），则存在发展算子 $U(t, s)$，它对每个 $u_0\in E$ 给出 Cauchy 问题的弱解 $U(t, s)u_0$．在算子 $A(t)A^{-1}(0)$（在 Hilbert 空间中）连续这个条件解的唯一性成立．类似于上述的存在性定理对于具有（13）型条件的算子 $A(t)$ 及 β 和 ρ 间的某种关系成立．

对于考虑具有依赖于 t 的边界条件的边值问题来说，$D(A(t))$ 为常数的假定还不能应用．假定在扇形 $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varphi$, $\varphi<\pi/2$ 中

$$\|R(\lambda, A(t))\|\leqslant M(1+|\lambda|)^{-1},\ \mathrm{Re}\,\lambda>0;$$

$$\left\|\frac{dA^{-1}(t)}{dt}-\frac{dA^{-1}(s)}{ds}\right\|\leqslant K|t-s|^\alpha,$$

$$0<\alpha<1;$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}R(\lambda, A(t))\right\|\leqslant N|\lambda|^{\rho-1},\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,$$

则存在发展算子 $U(t, s)$．这里并没有假定 $D(A(t))$ 是常数．后一个断言有一种说法适于考虑非柱形域中的抛物型问题，其中 $D(A(t))$ 对每个 t 位于 E 的某个子空间 $E(t)$ 中．

方程（16）的算子 $U(t, s)$ 形式上满足积分方程

$$U(t, s)=I+\int_s^t A(\tau)U(\tau, s)d\tau, \qquad (17)$$

因 $A(t)$ 无界，这个方程不能用逐次逼近法求解（见**逐次逼近法**（sequential approximation, method of））．设 Banach 空间 E_α 族，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，具有性质 $E_\beta\subset E_\alpha$ 和 $\|x\|_\alpha\leqslant\|x\|_\beta$ 对 $\alpha<\beta$．设 $A(t)$ 作为 E_β 到 E_α 中的算子有界：

$$\| A(t) \|_{E_\beta \to E_\alpha} \leqslant C(\beta - \alpha)^{-1},$$

且 $A(t)$ 至于 E_β 到 E_α 的有界算子空间的范数对 t 连续．则在该空间中方程（17）的逐次逼近法对于 $|t-s| \leqslant (\beta-\alpha)(Ce)^{-1}$ 收敛．这样，可以把算子 $U(t, s)$ 局部地构造成 E_β 到 E_α 的有界算子．在应用中这个方法给出 Cauchy - Кавалевская 型定理（见 **Cauchy - Ковалевская 定理**（Cauchy - Kovalevckaya theorem））．

对于非齐次方程（9），在已知方程 $\dot{u} = A(t)u$ 的发展算子时，Cauchy 问题的解形式上写成形如

$$u(t) = U(t, s)u_0 + \int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

这个公式能在 $f(t)$ 的某些光滑性条件下对各种情形进行判断．

参考文献

[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981）．

[2] Крейн, С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967（英译本：Krein, S. G., Linear differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1971）．

[3] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957.

[4] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972.

[5] Глушко, В. П., Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж, 1972.

[6] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970（英译本：Daletskiĭ, Yu. L. and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974）．

[7] Зубова, С. П., Чернышов, К. И., в кн.:《Дифференциальные уравнения и их применения》, в. 14, Вильнюс, 1976, 21 - 39.

[8] Кузнецов, А. Н.,《Функциональный анализ и его прилож.》, 6 (1972), 2, 41 - 51.

[9] Крейн, С. Г., Лаптев, Г. И.,《Дифференциальные уравнения》, 5 (1969), 8, 1458 - 1469.

[10] Любич, Ю. И.,《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 3, 3 - 51.

[11] Овсянников, Л. В.,《Докл. АН СССР》, 163 (1965), 4, 819 - 822.

[12] Соболевский, П. Е.,《Тр. Моск. матем. об-ва》, 10 (1961), 297 - 350.

[13] Beals, R., Laplace transform methods for evolution equations, in H. G. Garnir (ed.), Boundary value problems for linear evolution equations: partial differential equations. Proc. NATO Adv. Study Inst. Liège, 1976, Reidel, 1977, 1 - 26.

[14] Friedman, A., Uniqueness of solutions of ordinary differential inequalities in Hilbert space, *Arch Rat. Mech. Anal.*, **17** (1964), 5, 353 - 357.

[15] Kato, T., Linear evolution equations of hyperbolic type Ⅱ, *J. Math. Assoc. Japan*, **25** (1973), 4, 648 - 666.

[16] Treves, F., Basic linear partial differential equations, Acad. Press, 1975（中译本：F. Treves，基本线性偏微分方程，上海科学技术出版社，1981）．

[17] Miller, J., Solution in Banach algebras of differential equations with irregular singular point, *Acta Math.*, **110** (1963), 3 - 4, 209 - 231.

С. Г. Крейн 撰 唐 云 译

线性微分算子 [**linear differential operator**; **линейный дифференциальный оператор**]，狭义的

按照公式

$$Au = v \equiv \sum_{i_1+\cdots+i_n \leqslant m} a_{i_1 \cdots i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} \qquad (1)$$

作用于定义在一个开集 $U \subset \mathbf{R}^n$ 上的 k 值函数（$k=\mathbf{R}$ 或 $k=\mathbf{C}$）上的算子 A．这里 $a_{i_1 \cdots i_n}$ 是在同一域中取值的函数，称为 A 的系数（coefficients）．如果系数在 k 上 $(t \times s)$ 维矩阵的集合中取值，那么线性微分算子 A 定义在向量值函数 $u=(u_1, \cdots, u_s)$ 上并且把它们变到向量值函数 $v=(v_1, \cdots, v_t)$．在 $n=1$ 的情形下称为线性常微分算子（linear ordinary differential operator），在 $n>1$ 的情形下称为线性偏微分算子（linear partial differential operator）．

设 X 是一个微分流形（differentiable manifold），并且设 E 和 F 是 X 上的有限维向量丛（都是 C^∞ 类，见**向量丛**（vector bundle））．设 $\widetilde{E} \to \widetilde{F}$ 是对应的光滑性类的这些丛的截面的芽的层（sheaf）．一个广义线性微分算子（linear differential operator in the wide sense）A：$E \to F$ 是满足下面条件的层映射 $\widetilde{E} \to \widetilde{F}$：每一点 $x \in X$ 有一个其中丛是平凡的坐标邻域 U，而映射

$$A: \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F),$$

其中 $\Gamma(U, E)$ 是 E 在 U 上的截面的空间，按（1）作用，其中使用了局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 和平凡化

$$E|_U \cong U \times k^s, \quad F|_U \cong U \times k^t .$$

使（1）对所有的点 $x \in X$ 适合的最小的数 m 称为线性微分算子 A 的阶（order）．例如，E 上的每一个非零联络是一个一阶线性微分算子 $d: E \to E \otimes \Omega^1(X)$．下面是线性微分算子 A：$E \to F$ 的另一个等价的定义：满足条件 $\operatorname{supp} Au \subset \operatorname{supp} u$ 的一个线性算子 $A: \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, F)$，其中 $\operatorname{supp} u$ 是 u 的支集．

线性微分算子可以定义在更广泛的函数空间上．例如，如果 X 上定义了一个正度量，并且丛 E 和 F 上

定义了一个标量积，那么这些丛的平方可积截面的空间也定义了．由局部表达式(1)定义的线性微分算子定义了一个线性无界算子 $A:L_2(E)\to L_2(F)$．在一定的弱的假设下，后者作为 Hilbert 空间上的一个算子可以是闭的．这个闭包也称为线性微分算子．用类似的方法可以构造 Соболев 空间或更一般的标量的空间上的算子．

C^∞ 类线性微分算子可以扩张为广义截面空间上的算子．这样的扩张可以用形式伴随算子的方法构造．设 E' 是对偶于 E 的丛(即 $E'=\mathrm{Hom}(E,I)$，其中 I 是平凡一维丛)并且 Ω 是 X 上最大阶的微分形式的丛．那里定义了一个涉及 X 上积分的双线性映射

$$(\cdot,\cdot)_E:\Gamma(X,E)\times\Gamma_0(X,E'\otimes\Omega)\to k\ .$$

这里 $\Gamma_0(\cdot)$ 是带紧支集的截面的空间．公式

$$({}^tAv,u)_E=(v,Au)_F$$

唯一地定义了一个线性算子

$${}^tA:\Gamma_0(X,F'\otimes\Omega)\to\Gamma_0(X,E'\otimes\Omega).$$

这个算子是由线性微分算子 ${}^tA:F'\otimes\Omega\to E'\otimes\Omega$ 诱导的，它在坐标邻域 U 的内部有表达式

$${}^tAu=\sum(-1)^{i_1+\cdots+i_n}\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}({}^ta_{i_1\cdots i_n}u)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}\ ,$$

如果丛 Ω 通过截面 $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ 的选择平凡化．线性微分算子 ${}^tA$ 称为关于 A 的**形式伴随的**(formally adjoint)．

在空间 $\Gamma_0(X,E'\otimes\Omega)$ 中收敛按下面的规则定义：$f_k\to f$，如果截面 f_k 的支集的并包含在一个紧集中，并且如果在任何其上存在 E 的平凡化的坐标邻域 $U\subset X$ 中，向量值函数 f_k 一致收敛到 f 且它对局部坐标的所有偏导数都一致收敛．所有线性泛函的空间称为 E 的**广义截面空间**(space of generalized sections)并且记为 $D'(E)$．算子 ${}^tA$ 把收敛序列映到收敛序列，所以生成一个伴随算子 $D'(E)\to D'(F)$．后者在子空间 $\Gamma(X,E)$ 上与 A 一致，并且称为给定的线性微分算子到广义截面空间的**扩张**(extension)．也考虑线性微分算子到无穷阶广义截面空间、超函数空间等等的扩张．

无穷阶的线性微分算子理解为作用在解析函数(截面)的某个空间上的算子，并且用(1)定义，其中的和取遍指标的一个无限集 $i_1,\cdots,i_n,\cdots$．

下面的性质刻画了线性微分算子．序列 $\{f_k\}\subset\Gamma(X,E)$ 称为收敛到截面 f，如果 f_k 和它所有的偏导数在有紧闭包的任一坐标邻域中一致趋向于 f 及其相应偏导数．把收敛序列映到收敛序列的线性算子 $A:\Gamma_0(X,E)\to\Gamma(X,F)$ 是一个至多 m 阶的线性微分算子，当且仅当对任何 $f,g\in C^\infty(X)$ 函数

$$\exp(-i\lambda g)A(f\exp(i\lambda g))\qquad(2)$$

是参数 λ 的至多 m 次的多项式．如果这个条件用(2)表为一个**渐近幂级数**(asymptotic power series)的假设代替，那么得到线性**伪微分算子**(pseudo-differential operator)的定义．

假设流形 X 以及丛 E 和 F 赋予 **G 结构**(G-structure)，其中 G 是一个群．那么这个群在任何线性微分算子 $A:E\to F$ 上的作用用公式

$$g^*(A)(u)=g(A(g^{-1}(u)))$$

定义．线性微分算子 A 称为关于 G **不变的**(invarint)，如果 $g^*(A)=A$ 对所有的 $g\in G$．

射流的丛是一个与一个线性微分算子的空间对偶的对象．再设 E 是 C^∞ 类流形 X 上的一个向量丛．E 的截面的 m **射流的丛**(bundle of m-jets)是 X 上一个在点 x 的纤维等于 $\widetilde{E}_x/\widetilde{E}_x(m)$ 的向量丛 $J_m(E)$，其中 $\widetilde{E}_x$ 是 E 的截面的芽的丛 $\widetilde{E}$ 的一个纤维，$\widetilde{E}_x(m)$ 是这个纤维的由直到 m 阶在内的所有导数都在 x 为零的截面的芽组成的子空间．按照下述规则作用的线性微分算子 $d_m:E\to J_m(E)$ 称为**万有的**(universal)，这个规则是：截面 $d_m(u)$ 在点 x 的值等于截面 u 在商空间 $\widetilde{E}_x/\widetilde{E}_x(m)$ 中的象．其次，设 F 是 X 上的一个丛，$A:J_m(E)\to F$ 是一个丛同态，即一个零阶线性微分算子．复合

$$E\xrightarrow{d_m}J_m(E)\xrightarrow{a}F\qquad(3)$$

是一个至多 m 阶的线性微分算子．反过来，每一个至多 m 阶的线性微分算子可以唯一地表示为复合(3)．

线性微分算子 $A:E\to F$ 的**象征**(主系)(symbol)(principal system)是依赖于余切丛 $T^*(X)$ 的点 (x,ξ) 的线性映射的族

$$\sigma_A(x,\xi):E_x\to F_x\ .$$

它们按照公式 $e\to a(\xi^m e)/m!$ 作用，其中 a 是(3)中涉及的同态，$e\in\widetilde{E}_x$，并且 $\xi^m e$ 是 $J_m(E)_x$ 中等于 $f^m e$ 的象的元素，其中 f 是一个 C^∞ 类函数的芽，使得 $f(x)=0$，$df(x)=\xi$．如果 A 具有形式(1)，那么

$$\sigma_A(x,\xi)=\sum_{i_1+\cdots+i_n=m}a_{i_1\cdots i_n}(x)\xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n},$$

其中 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是从 $T^*(U)\cong U\times k^n$ 的一个纤维中的坐标；这样，象征是一个关于 ξ 齐次的 m 次形式．对应于象征的这个构造引入特征的概念．线性微分算子 A 的**特征**(characteristic)是一个点 $(x,\xi)\in T^*(X)$，在那里

象征 σ_A 有非零核．

线性微分算子理论中采用的分类主要涉及作用在相同维数的丛中的线性微分算子，实际上涉及形如(1)式而其系数是方阵的算子．一个线性微分算子称为椭圆型的(elliptic)，如果它没有 $\xi\neq0$ 的实特征 (x,ξ)（亦见**椭圆型偏微分方程**(elliptic partial differential equation)）．这个类由方程 $Au=w$ 的解的最好的局部性质所刻画，并且还由有界域中的边值问题是适定的事实所刻画．双曲型线性微分算子(hyperbolic linear differential operators)类也由一个仅仅加在特征上的条件来区别（见**双曲型偏微分方程**(hyperbolic partial differential equation)）．"是双曲型的"这个性质与带非解析数据的 Cauchy 问题的适定性紧密相关．主型线性微分算子类由仅仅加在象征上的一个条件所界定（见**主型偏微分算子**(principal type, partial differential operator of)）．对这样的算子已经发展了局部可解性和解的光滑性的理论，抛物型线性微分算子(parabolic linear differential operators)类用一个不仅与象征而且与一些低阶项有关的条件来区别（见**抛物型偏微分方程**(parabolic partial differential equation)）．对抛物型线性微分算子而言，**混合问题**(mixed problem)和带在无穷远的条件的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)是典型的．亚椭圆型(hypo-elliptic)线性微分算子用下面的非形式的条件界定：带属于 C^∞ 的右端的方程 $Au=w$ 的每一个先验广义解本身属于 C^∞．已知一些加在表达式(1)上保证算子是超椭圆型的形式条件．

除了这些基本型的线性微分算子外，有时讲到混合或可变型线性微分算子（亦见**混合型微分方程**(mixed-type differential equation)），复合型线性微分算子，等等．也考虑无界域中带在无穷远的条件的问题，带自由边界的边值问题，谱理论问题，最佳控制问题，等等．

线性微分算子的复形(complex)是线性微分算子的一个序列

$$E^\bullet:\cdots\to E_k\overset{A_k}{\to}E_{k+1}\overset{A_{k+1}}{\to}E_{k+2}\to\cdots,$$

其中 $A_{k+1}A_k=0$，对所有的 k 成立．线性微分算子的复形 $E^\bullet$ 的上同调是向量空间 $\Gamma(X,E^\bullet)$ 的复形的上同调．设 H^k 是这个复形在第 k 项的上同调．和 $\sum(-1)^k\dim H^k$ 称为这个线性微分算子复形的指标(index of the complex)．这样，一个线性微分算子的椭圆型（即只有有限多个 E_k 不为零，并且由这个线性微分算子的符号 A_k 组成的复形在所有的点 $(x,\xi)\in T^*(X)(\xi\neq0)$ 是正合的）复形的指标在紧 X 的情形下是有限的，并且寻找把这样一个复形的指标用它的象征来表达的公式，就是一些把线性微分算子理论与代数几何学和代数拓扑学结合起来的研究的内容（见**指标公式**(index formulas)）．

上面描述的象征（和特征）的定义对作用在维数大于1的丛中的线性微分算子不是完全满意的．对此的理由之一是等式 $\sigma_{AB}=\sigma_A\circ\sigma_B$ 可能不成立．下面的代替象征概念的复杂结构是更适当的．对 C^∞ 类流形 X 上的每一个丛 E 考虑线性微分算子 $E\to I$ 的芽的层 $D(E)$，其中 I 是一维平凡丛．根据定义，这个层在开集 $U\subset X$ 上的值是所有线性微分算子 $E|_U\to I|_U$ 的总数．设 $D_k(E)$ 是它的由至多 k 阶算子组成的子层．在 $D\equiv D(I)$ 上有一个（非交换）代数的层的结构，并且 $D(E)$ 有一个 D 上左模的结构，其中 $a\in D$ 在 $b\in D(E)$ 上的作用等于复合 ab：一个给定的线性微分算子 A：$E\to F$．按照复合的规律 $a\to aA$ 决定一个左 D 模态射 $A':D(F)\to D(E)$．设 $M(A)$ 是这个态射的余核．存在一个左 D 模正合序列

$$D(F)\overset{A'}{\to}D(E)\overset{P}{\to}M(A)\to0,\qquad(4)$$

并且 $O(X)$ 子模 $M_k\equiv p(D_k(E))$ $(k=0,1,\cdots)$，在 $M(A)$ 中组成一个增加的滤子．分次 $O(X)$ 模

$$\operatorname{gr}M(A)=\bigoplus_0^\infty M_k|M_{k-1},\quad M_{-1}=0,$$

称为这个线性微分算子 A 的象征模(symbol module)．由于对任意的 k 和 l，D_k 在 $M(A)$ 上的作用是把 M_l 映到 M_{l+k} 中，在 $\operatorname{gr}M(A)$ 中存在一个在分次代数 $\operatorname{gr}D\equiv\oplus_0^\infty D_k/D_{k-1}$ 上的**分次模**(graded module)的结构．这个模的零化子是 $\operatorname{gr}D$ 中的一个齐次理想．算子 A 的特征流形(characteristic manifold)是这个理想零点的集合．由于代数 $\operatorname{gr}D$ 与正切丛 $T(X)$ 的对称代数同构，特征流形典范地嵌入 $T^*(X)$ 中，并且它与每一个纤维的交是一个代数锥．

如果流形 X 和给定的丛有实或复的解析结构，那么特征流形与理想 $\operatorname{gr}(\operatorname{ann}M(A))$ 的根的集合一致．在这种情形下，它是 $T^*(X)$ 的一个闭的解析子集，并且如果它不是空的，它的维数至少是 $\dim X$．在这个维数等于 $\dim X$ 的情形下，线性微分算子 A 称为极大超定的(maximally overdetermined)、或者完整的(holonomic)．

一般线性微分算子形式理论涉及形式可积性和预解式的概念．用射流的对偶术语定义的形式可积性(formal integrability)性质等价于 $O(X)$ 模 $\operatorname{gr}M(A)$ 是局部自由的条件．线性微分算子 A 的预解式(resolvent)理解为扩展了(4)的序列

$$\cdots\to D(F_1)\overset{A_1'}{\to}D(F)\overset{A'}{\to}D(E)\to M(A),$$

其中所有的 A_k $(k=1,2,\cdots)$ 是线性微分算子．特别地，A_1 称为 A 的相容算子(compatibility operator)．形式可积性保证了预解式的局部存在性．

在文献中对微分方程组使用了术语"超定"和"欠定"；然而没有满意的一般定义．下面的说法可以

作为这样一个定义的近似：存在非零线性微分算子 B，使得 $BA=0$ (超定性 (overdetermination))，$AB=0$ (欠定性 (underdetermination))．例如，等于外微分算子在 n 维流形 X 上的 k 次形式上的限制的线性微分算子 d 对 $k>0$ 是欠定的，对 $k<n$ 是超定的和对 $k=0$ 是完整的．

对一般线性微分算子研究的主要问题如下：带右端的方程 $Au=w$ 的可解性，如果满足一个相容性条件 $A_1u=0$; 方程 $Au=0$ 的解延拓到一个更大的区域的可能性 (与超定相联系的一个结果)；以及一般解用一个特殊形式的解来表现．对不变算子最后的问题可以叙述得更加明确，例如对 $\mathbf{R}^n$ 中带常数和周期系数的线性微分算子：描述一个群 G 在解空间中作为在所有不可分解子表示上的一个积分 (按某种意义) 的表示．为了确定带常系数的算子，这样的表示是由关于指数的积分规定的 (指数型表示)，对带周期系数的算子用关于 Floquet 广义解的积分．

线性微分算子也定义在任意的代数结构上．设 R 是一个交换环，并且设 E 和 F 是 R 模．集合的映射 A: $E\to F$ 称为至多 m 阶的线性微分算子，如果它是可加的，并且对任意元素 $a\in R$ 映射 $aA-Aa$ 是一个至多 $m-1$ 阶的线性微分算子．至多 -1 阶的线性微分算子是指零映射．特别地，零阶线性微分算子是一个 R 模同态，并且反过来也对．每一个导子 (见**环中的导子** (derivation in a ring)) v: $R\to F$ 是一个一阶线性微分算子 (或等于零)．如果 R 是域 k 上的一个代数，那么 R 上的线性微分算子是环 R 上的线性微分算子，它是一个 k 线性映射．这样一个线性微分算子有一些常线性微分算子的形式性质．如果 R 是 k 上所有形式幂级数的代数或者 k 上收敛幂级数的代数，并且如果 E 和 F 是有限型自由 R 模，那么每一个至多 m 阶的线性微分算子 $A:E\to F$ 可以唯一地写成 (1) 的形式．

设 $(X,\mathcal{O})$ 是一个**戴环空间** (ringed space)，并且设 E 和 F 是 $\mathcal{O}$ 模．线性微分算子 $A:E\to F$ 是像环 (代数) $\mathcal{O}_x$ 上的线性微分算子那样作用在每一个点 $x\in X$ 上的纤维中的任一层态射．作用在模或模的层中的线性微分算子已经应用在代数几何学的一些问题中．

参考文献

[1] Peetre, J., Uniqueness in the Cauchy problem for elliptic equations with double characteristics, *Math. Scand.*, **8** (1960), 116－120.

[2] Hörmander, L., Pseudo-differential operators, Moscow, 1967, 63－87; 166－296; 297－367 (俄文；译自英文).

[3] Бернштейн, И.Н., «Функц. анализ и его прилож.», **6** (1972), 4, 26－40.

[4] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文)(中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法Ⅱ，科学出版社，1977).

[5] Тихонов, А.Н., Самарский, А.А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (中译本：A. H. 吉洪诺夫，A. A. 萨马尔斯基，数学物理方程，人民教育出版社，1961).

[6] Hörmander, L.V., The analysis of linear partial differential operators, 1－4, Springer, 1983－1985.

[7] Паламодов, В.П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967 (英译本: Palamodov, V.P., Linear differential operators with constant coefficients, Springer, 1970).

[8] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[9] Palais, R., Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[10] Парамодов, В.П., в кн., Итоги науки, Математический анализ, 1968, М., 1969, 5－37.

[11] Björk, J.E., Rings of differential operators, North-Holland, 1979.

[12] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudodifferential equations, in H. Komatsu (ed.), Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lecture notes in math., Vol. 287, Springer, 1973, 265－529.

В.П. Паламодов 撰

【补注】 亦见**微分算子** (differential operator)；**模上的微分算子** (differential operator on a module)；**D 模** (D-module)；**超函数** (hyperfunction)；**微局部分析** (microlocal analysis)．

鲁世杰 译　葛显良 校

线性椭圆型偏微分方程和方程组 [linear elliptic partial differential equation and system; линейное эллиптическое уравнение и система]

一个形如

$$Lu=f$$

的偏微分方程（组），其中 L 是线性椭圆型算子

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)D^\alpha u(x). \tag{1}$$

具实系数 $a_\alpha(x)$ 的算子 (1) 被称为在 x 点是椭圆型的 (elliptic)，若特征形式

$$\omega(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

在该点是确定的．此处 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是一个多重指标（非负整数的集合），$|\alpha|=\sum\alpha_i$，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ 且 $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$．特别地，算子 L 的阶数必须是偶的，$m=2m'$．直到可能相差一个符号，该形式的定性的条件可写为

$$(-1)^{m'}\omega(x,\xi)\geqslant\delta|\xi|^m,\ \delta=\delta(x)>0. \tag{2}$$

若在区域 D 中每点 x 处，算子 L 是椭圆型的，则称它在区域 D 内是椭圆型的．又若存在（2）中一个不依赖于 x 的 $\delta>0$，则称它在此区域内是一致椭圆型的（uniformly elliptic）.

对二阶方程

$$\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+$$

$$+a(x)u=f(x), \tag{3}$$

此定义可重述如下．若在区域 D 的每点，用一自变量的变换可将此方程化为典范型

$$\Delta u+\sum_{i=1}^{u} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u=f(x),$$

其中以 **Laplace 算子**（Laplace operator）

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

为其主部，则方程（3）在区域 D 内是椭圆型的．在平面内的椭圆型偏微分方程情形下，关于系数 a_{ij} 作非常一般的假定后就可存在这样一个变换，使得它不仅对一点而且在整个区域内均成立（见[1]）.

最简单的椭圆型偏微分方程是 **Laplac 方程**（Laplace equation），且它的解称为**调和函数**（harmonic function）．线性椭圆型偏微分方程的解由这样的事实表征，那就是它们有许多与调和函数共同的性质．在平面情形下，每一个调和函数是一个解析函数的实部；它是一个具两个自变量的实解析函数．一般线性椭圆型偏微分方程 $Lu=f$ 的解有类似的性质．若系数 $a_\alpha(x)$ $(|\alpha|\leqslant m)$ 和右端项 $f(x)$ 在区域 D 内关于 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是解析的，则此方程的任一解同样也是解析的．

存在另外一些类似的断言．例如，若 $Lu=f$ 的系数及右端项的直到 k 阶（包括 k 阶）的导数均是连续的，且第 k 阶导数满足带有指数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 **Hölder 条件**（Hölder condition），则任一解有直到 $k+m$ 阶的导数，这些导数满足同样指数 α 的 Hölder 条件．在此，属于 Holdër 类这一事实是本质的．若系数和右端项仅是连续的，则解不需有与方程阶数相等的那些阶连续导数．这一点甚至对最简单的线性椭圆型偏微分方程，**Poisson 方程**（Poisson equation）

$$\Delta u=f,$$

也是正确的．

上述指的是古典解，那就是解有直到方程阶数的连续导数．关于解的概念存在各种推广．

例如，若系数 $a_\alpha(x)$ 充分光滑，则对算子（1）能定义 Lagrange 伴随算子

$$L^* u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha u).$$

一个局部可积函数 $u(x)$，若关于所有 $\varphi\in C_0^\infty$（带有紧支集的无限次可微函数）有

$$\int f(x)\varphi(x)dx=\int u(x)L^*\varphi(x)dx,$$

则称 $u(x)$ 是方程 $Lu=f$ 的弱解（weak solution）．于是，若方程 $Lu=f$ 的系数及右端项是 Hölder 连续的，则每一个弱解同样也是古典解．

对 Laplace 方程，最简单的适定问题是 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）．在具算子（1）的方程的一般情形下，边值问题是要在区域 D 内找方程 $Lu=f$ 的解 $u(x)$，使其满足 $m'=m/2$ 个形如

$$(B_j u)(x)=\sum_{|\alpha|<m} b_{\alpha_j}(x)D^\alpha u(x)=\varphi_j(x),$$

$$x\in\partial D,\ 1\leqslant j\leqslant m',$$

的边界条件．**Neumann 问题**（Neumann problem）对应于边界算子 $b_j=(\partial/\partial\nu)^j$，此处 $\partial/\partial\nu$ 表示在外法向的微分．

对于是 Noether 的边值问题，见 **Noether 算子**（Noetherian operator），边界算子 B_j 必须满足 Шапиро-Лопатинский 互补条件（Shapiro-Lopatinskiĭ complementation condition）（见[2]）——一个在边界点 $x\in\partial D$ 处关于多项式

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{\alpha_j}(x)\xi^\alpha,\ 1\leqslant j\leqslant m',\ \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

的代数条件．Dirichlet 问题的边界算子对任一椭圆型算子 L 而言满足此条件．

若在复函数类内考虑微分算子的系数和解，则由条件 $\omega(x,\xi)\neq 0$ $(\xi\neq 0)$ 确定了（1）中算子 L 是椭圆型的．这个定义允许奇阶的椭圆型算子，如像 Cauchy-Riemann 算子（Cauchy-Riemann operator）：$\partial/\partial x_1+i\partial/\partial x_2$ 就是例子．另外，偶阶算子的性质却可能够变化．例如，对 **Бицадзе 方程**（Bitsadze equation）（见[3]）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

它的 Dirichlet 问题不是适定的：若 D 是单位圆盘，则函数 $u(z)=f(z)(1-|z|^2)$ 是圆盘内齐次 Dirichlet 问题的解，其中 $f(z)$ 是任意解析函数．

这个例子导致按其 Dirichlet 问题是 Noether 的性质是否保持去区分椭圆型算子类的必要性．在这方面引入了强椭圆型算子的概念（见[4]）．所谓算子（1）是强椭圆型的（strongly elliptic），是指若对某复函数 $\gamma(x)\neq 0$，条件

$$\operatorname{Re}\gamma(x)\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\geqslant\delta|\xi|^m,\ \delta>0$$

成立．特别地，阶数 m 必须是偶的．

其次一个更广泛的概念是真（正则）椭圆性．若

算子（1）的阶数是偶的，且对任意一对线性无关向量 ξ 和 ξ'，多项式（关于 τ）

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\xi+\tau\xi')^\alpha$$

恰有 $m'=m/2$ 个带负虚部的根及带有同样数目的正虚部的根，则称算子（1）是真椭圆型的（properly elliptic）．当 $n\geqslant 3$ 时，任一椭圆型算子均是真椭圆型的，因此这个定义本质上仅对 $n=2$ 时提出的．

在线性椭圆型偏微分方程理论中，利用方程右端项及边界条件的范数得到解的范数的先验估计方法起着重要的作用．C．H．Бернштейн（见[6]）开始系统地使用这些估计，较近的发展要归之于 J．Schauder（见[7]）．Schauder 估计关注于区域 D 内具有 Hölder 连续系数的二阶线性椭圆型偏微分方程的解，且有两种形式．第一形式的估计（"内"估计）是在任何紧集 $K\subset D$ 上利用 $\sup|u|$ 及方程右端项的 Hölder 常数和模得到所含的直到二阶的导数和它们的 Hölder 常数的估计．而第二形式的估计（"直到边界"的估计）关注于边值问题．在此，同样一些量被估计了，但是在问题中的区域的闭包内进行，并且在估计中出现边界条件右端项的范数．

Schauder 估计已进一步推广到一般线性椭圆型偏微分方程和边值问题（见[7]）．这些估计的导出是基于位势理论．借助于单位分解，对它们可给出其局部特性，并且事情就化为这样一些奇异积分算子范数的估计，在内估计中此奇异积分算子表示为和基本解相联系的函数的一个卷积，而在直到边界的估计中则是与在某标准区域内相应边值问题的 Green 函数相联系的函数的卷积．这些估计最早是在 Hölder 空间 C^α 的度量下得到的，它们已推广到 Соболев 空间 W_p^l（L_p 估计），并且是对广义解．

对于强椭圆型算子存在称为 **Gårding 不等式**（Gårding inequality）的先验估计，这个不等式是用另外方法得到的．它处于对研究边值问题的一个基本处理方法的中心（Hilbert 空间方法）．

在线性椭圆型偏微分方程理论中，基本解处于一个重要的地位．对具充分光滑系数的算子（1），其基本解（fundamental solution）定义为满足条件

$$\int L^*\varphi(x)J(x,y)dx=\varphi(y),\ \text{对所有}\ \varphi\in C_0^\infty$$

的函数 $J(x,y)=J_y(x)$．从广义函数理论的观点来讲，这意味着

$$J_y=\delta_y,$$

其中右端是 Dirac 的 δ 函数．

线性椭圆型偏微分方程的基本解对这样一些方程是存在的：带有解析系数的方程（于是它们本身是解析的），具无穷次可微的系数的方程（于是它们属于 C^∞ 类的）以及许多另外一些方程，这些方程的系数具有较弱的限制．对于由最高阶 $m=2m'$ 项组成的常系数椭圆型算子 L_0，其基本解仅依赖于变量之间的差别，且有形式（$y=0$）：

$$J(x)=|x|^{m-n}\psi\left[\frac{x}{|x|}\right]+q(x)\ln|x|,$$

其中 ψ 在球面 $|x|=1$ 上解析；在 n 为偶数且 $m-n\geqslant 0$ 时，q 是 $m-n$ 次多项式，而在其他情况下 $q=0$（见[8]）．

特别地，对 Laplace 方程（$m=2$），当 $n>2$ 时，$q=0$，$\psi=$ 常数，而当 $u=2$ 时，$q=$ 常数，$\psi=0$．

基本解使有可能构造线性椭圆型偏微分方程的解的各种显式表示式．它们是用积分方程去研究边值问题时的必要的工具．对于二阶方程，这个方法是经典的，并且给出了最精确的结果（见[9]）．

最大值原理（maximum principle）在二阶线性椭圆型偏微分方程理论中已有大量的应用．假定函数 a_{ij}，a_i，a 是连续的，且设算子（3）在某区域 D 内是一致椭圆型的．函数 u 被取为在闭包 $\bar{D}$ 内连续且属于 $C^2(D)$ 类．

在强形式下的最大值原理是：令 M 是（3）中算子 L 当 $a\equiv 0$ 的情形．

a）若 $Mu\geqslant 0$ 且 u 在一内部点处达最大值，则 u 是常数．

b）若 $Mu\geqslant 0$ 且 u 在这样的边界点 x_0 处达最大值，此点 x_0 也在某球面上，而此球完全包含在 $\bar{D}$ 内，则或者 u 是常数，或者在 x_0 点处的外法向导数 $\partial u/\partial\nu$ 是正的．

类似的断言对具 $a\leqslant 0$ 的算子 L 也成立，只要在 a）和 b）中所述的最大值理解为正最大值就可以了．最大值原理在证明大量边值问题的解的唯一性定理中是一个本质的要素．对高阶方程也同样有某些类似的结论．

参考文献

[1] Векуа，И．Н．，Обобщенные аналитические функции，М．，1959（中译本：依・涅・维库阿，广义解析函数，上、下册，人民教育出版社，1960）．

[2] Бицадзе，А．В．，Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка，М．，1966（英译本：Bitsadze，A．V．，Boundary value problems for second-order elliptic equations，North-Holland，1968）．

[3] Agmon，S．，Douglis，A．，Nirenberg，L．，Estimates close to the boundary of solutions of elliptic partial differential equations under general boundary conditions，*Comm．Pure Appl．Math．*，**12**（1959），623－727．

[4] John，F．，Plane waves and spherical means：applied to

partial differential equations, Interscience, 1955.
[5] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文).
[6] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., т.3, М., 1960.
[7] Schauder, J., Ueber lineare elliptische Differential gleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **38** (1934), 257 - 282.
[8] Лопатинский, Я. Б., 《Укр. матем. ж.》, **5** (1953), 2, 123 - 151.
[9] Вишик, М. М., 《Матем. сб.》, **29** (1951), 3, 615 - 676.
А. П. Солдатов 撰

【补注】 关于将方程(3)化简为典范形式, [A1]是基本的.

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Conformality with respect to Riemannian metrics, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* 1, **206** (1955), 1 - 22.
[A2] Ladyzhenskaya, O. A., Ural'tseva, N. N., Equations aux derivées partielle du type elliptique, Dunod, 1969(译自俄文)(中译本: O. A. 拉迪任斯卡娅等, 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 1987).
[A3] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977 (中译本: D. 吉耳巴格, N. S. 塔丁格, 二阶椭圆型偏微分方程, 上海科学技术出版社, 1981).
[A4] Protter, M. H., Weinberger, H. F., Maximum principles in differential equations, Prentice-Hall, 1967 (中译本: M. H. 普若特, H. F. 温伯格, 微分方程的最大值原理, 科学出版社, 1985).
[A5] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.
仇庆久 译

线性方程 [linear equation; линейное уравнение]

形如

$$Ax = b \tag{1}$$

的方程, 其中 A 是从**向量空间** (vector space) X 作用到向量空间 B 的**线性算子** (linear operator), x 是 X 的未知元素, b 是 B 的已知元素(自由项). 若 $b=0$, 线性方程就称为齐次的 (homogeneous). 线性方程的解 (solution of the linear equation) 是一个元素 x_0, 使得(1)为恒等式:

$$Ax_0 \equiv b.$$

最简单的例子是线性算子 $A: x \to ax$(**线性函数** (linear function))和由它确定的**线性代数方程** (linear algebraic equation)

$$ax = b, \tag{2}$$

$a, b \in \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$(或任意域 k); 它的解存在, 当且仅当或 $a \neq 0$ (则 $x_0 = b/a$) 或 $a = b = 0$ (这时 x_0 是任意的). 方程(2)的一个推广是形如

$$Ax \equiv f(x) = b \tag{3}$$

的线性方程, 其中 $f(x)$ 是定义在域 $k(b \in k)$ 上的向量空间 X 上的**线性泛函** (linear functional). 特别地, 若 X 的维数是有限的且等于 n(因此 X 同构于 k^n), 则 f 是 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性型, 且(3)可写为

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \ a_i, b \in k. \tag{4}$$

若 a_i 不全同时为零, 则(4)的解集构成 X 中的 $(n-1)$ 维线性簇(在齐次的情况下, 为线性子空间). 若 X 是无限维的, 则(3)的解集是余维数 1 的线性簇.

形如(4)的 m 个方程组成了线性方程组 (system of linear equations)

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \ j = 1, \cdots, m. \tag{5}$$

方程组(5)可以解释为形如(1)的线性方程, 如果对于 X, 取空间 k^n, 对于 B, 取空间 k^m, 并由**矩阵** (matrix) $\| a_{ij} \|$ $(i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m)$ 确定算子 A. 关于线性方程组(5)的相容性问题, 即线性方程组的解的存在问题, 通过比较矩阵 $\| a_{ij} \|$ 和 $\| a_{ij}, b \|$ 的秩来解决: 有解存在, 当且仅当两秩相等.

当 X 和 B 是无限维向量空间时, 情况比较复杂. 空间 X 和 B 的拓扑以及由此而产生的算子 A 的各种性质, 诸如有界、连续等等, 起着重要作用. 在一般情况下, 线性方程的解的存在性和唯一性由 A 的可逆性确定(见**逆映射** (inverse mapping)). 然而, 有效地求 A 的逆往往很不容易, 所以在线性方程的研究中, 定性方法起着重要作用, 用这种方法有可能不解线性方程而阐明解族(假定它们存在)的在某些方面是有用的性质, 例如唯一性、先验估计, 等等. 另一方面, 算子 A 不一定定义在整个空间 X 上, 而方程(1)对某些 b 不一定有解. 在这时, (1)的可解性(在许多实际上重要的情形)通过合适选择 A 的扩张来确定(见**算子的扩张** (extension of an operator)).

对于一些特殊类型的线性方程, 例如对于线性常微分方程、线性偏微分方程, 以及线性积分方程, 已发展了一些求解和研究的特殊方法, 包括数值方法. 最后, 在许多情况下(例如在线性回归问题中), 在某种意义上最适合作为线性方程的解的那些 x_0 的值, 看来是有用的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1. Addison-Wesley, 1974.

[A2] Lang, S., Linear algebra, Addison-Wesley, 1966.

[A3] Halmos, P. R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, 1951.

[A4] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1 – 2, Interscience, 1958 – 1959.

杜小杨 译

线性估计量 [linear estimator; линейная оценка]

被观测变量的线性函数(将被观测变量的具体值代入其中后)用来做所研究随机模型中未知参数的近似值(估计值)(见**统计估计量**(statistical estimator)). 之所以特别划分出一类线性估计量，是因为对于线性估计量容易进行统计分析，包括研究相合性、无偏性、有效性、相应置信区间的建立等. 同时，在相当广泛的情形下，寻求(在一定意义下)"最优的"估计量也越不出线性估计类的界限. 例如，考虑形如

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\theta+\varepsilon$$

的**线性回归**(linear regression)模型. 由对该模型的统计分析，知参数 θ 的最小二乘估计量

$$\hat{\theta}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

是最优线性无偏估计量(它关于对所研究随机变量的观测值 $\mathbf{Y}$ 是线性的). 这里，$\mathbf{Y}$ 是对所研究目标特征(随机变量)的观测值 $y_i(i=1,\cdots,n)$ 构成的 n 维列向量; $\mathbf{X}$ 是秩为 p 的 $n\times p$ 矩阵，其元素 $x_{(k)}^i(i=1,\cdots,n,k=1,\cdots,p)$ 是目标特征 Y 所依赖的 p 个非随机因子-自变量的观测值; θ 是未知参数 $Q_k(k=1,\cdots,p)$ 构成的 p 维列向量; ε 是剩余分量构成的 n 维随机列向量，满足条件 $\mathrm{E}\varepsilon=0$，$\mathrm{E}(\varepsilon\varepsilon')=\sigma_2 I$ (I 是单位矩阵).

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[2] Rao, C.R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965 (中译本: C.R.劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1985).

[3] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971.

[4] Scheffé, H., Analysis of variance, Wiley, 1959.

С. А. Айвазян 撰

【补注】 如果 ε 服从多元正态分布，则最小二乘估计量事实上在更广的一类估计量中是最优的: 它是最小方差**无偏估计量**(unbiased estimator). 去掉正态性假设，当 $n\to\infty$ 时，它在一切估计量中是渐近有效的(见**渐近效率**(efficinecy, asymptotic)). 周概容 译

线性型 [linear form; линейная форма]

1) 一次齐次多项式(见**齐次函数**(homogeneous function)).

2) 域 k 上的**向量空间**(vector space) V 上的、在 k 中取值的(齐次)**线性函数**(linear function)，见**线性代数**(linear algebra).

张鸿林 译

对数线性型 [linear form in logarithms; линейная форма от логарифмов]，代数数的

形如

$$L=\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n$$

的表达式. 当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是有理数或代数数，$\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$ 是对数的固定分支并在域 $\mathbf{Q}$ 上线性无关时，$|L|$ 的有效性下界估计在数论中起着重要作用.

当 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是有理数时，不等式 $|L|>e^{-c_1B}$ 成立，其中 $B=\max|\beta_i|$，而 $c_1>0$ 仅与数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 有关. 求 $|L|$ 的非平凡下界的方法属于超越数论. 在 $n=2$ 的情形下，А.О.Гельфонд 于 1935－1949 年期间得到一系列不等式，它们当 B 大于某个可有效计算的界值时成立，其中最好的一个有形式 $|L|>e^{-\ln^{2+\epsilon}B}$.

1948 年他证明了对任何 n 及所有足够大的 B 有 $|L|>e^{-\varepsilon B}$. 但这个结果只是一个存在性定理，而且使此不等式成立的 B 的界值不能由证明过程确定. 对任意 n，$|L|$ 的有效性估值是 A. Baker 基于 Гельфонд 方法于 1966 年得到的(见[2]).

设 $n\geqslant 2,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是代数数，其高和次数分别不超过 A 和 d，此处 $A\geqslant 4,d\geqslant 4$ (见**代数数**(algebraic number)). 再设 $0<\varepsilon<1$，且 $\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$ 是对数主值. 如果存在有理整数 $b_1,\cdots,b_n,|b_i|\leqslant B$，适合

$$0<|b_1\log\alpha_1+\cdots+b_n\log\alpha_n|<e^{-\varepsilon B},$$

那么

$$B<(4^{n^2}\varepsilon^{-1}d^{2n}\log A)^{(2n+1)^2}.$$

与各种不同问题相联系，我们得到多种对数线性型的有效性估值. 通过 B 的幂给出的 $|L|$ 的界值是 Н. И. Фельдман ([3]) 于 1968 年首次得到的.

设 $n\geqslant 2,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是代数数，$\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$ 是对数的固定分支并且在 $\mathbf{Q}$ 上线性无关，则存在有效性常数 $c_2>0,\kappa_1>0$，使对任何高不超过 B 的代数数 $\beta_0,\cdots,\beta_n$，不等式

$$|\beta_0+\beta_1\log\alpha_1+\cdots+\beta_n\log\alpha_n|>c_2B^{-\kappa_1}$$

成立，其中常数 c_2 和 κ_1 可以通过数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_0,\cdots,\beta_n$ 的幂明确地表出.

应用代数数的对数线性型的界值，可以得到不同类型的 **Diophantus 方程**(Diophantine equations) (Thue 方程，超椭圆方程，由亏数为 1 的曲线给出的方程，等等) 的解数的估值. 对数线性型的估计还使我们能够确定类数为 1 和 2 的虚二次域的判别式的界值. 代

数数的对数线性型下界估计定理的 p 进类似在数论中也很有用.

参考文献

[1] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М. 1952 (英译本: Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, reprint, 1960).

[2] Baker, A., Effective methods in the theory of numbers, in Actès Congr. Internat. Mathématiciens Nice, 1970, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 19 – 26.

[3] Фельдман, Н. И., 《Матем. сб.》, 77 (1968), 3, 423 – 436.

[4] Фельдман, Н. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 35 (1971), 5, 973 – 990.

[5] Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974. Ю. В. Нестеренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baker, A., Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, reprinted with additional material, 1979.

[A2] Shorey, T. N. and Tijdeman, R., Exponential Diophantine equations, Cambridge Univ. Press, 1986.

【译注】

参考文献

[1] Baker, A. and Masser, D. W. (eds.), Transcendence theory: advances and applications, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1977.

[2] Baker, A. (ed.), New advances in transcendence theory, Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] Waldschmidt, M., Linear independence of logarithms of algebraic numbers, Matscience Lecture Notes, Madras, 1992. 朱尧辰 译

线性函数 [linear function; линейная функция]

形如 $y = kx + b$ 的函数. 线性函数的主要性质是: 函数的增量与自变量的增量成比例. 在图上, 线性函数由一条直线来表示.

n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性函数是下列形式的函数:

$$f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a,$$

其中 $a_1, \cdots, a_n$ 和 a 是某些固定的数. 线性函数的定义域是实或复变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的整个 n 维空间. 如果 $a = 0$, 则线性函数称为齐次形式 (homogeneous form) 或线性型 (linear form).

如果一切变量 $x_1, \cdots, x_n$ 和系数 $a_1, \cdots, a_n, a$ 都是实 (复) 数, 则变量 $x_1, \cdots, x_n, y$ 的 $(n+1)$ 维 (复) 空间中的线性函数的图形是 (复) n 维超平面 $y = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, 特别是当 $n = 1$ 时, 它是平面 (相应地、二维复空间中的复平面) 上的一条直线.

"线性函数", 或者更确切地说, 齐次线性函数这一术语, 常常用来表示域 K 上的向量空间 X 到这个域的线性映射, 即映射 $f: X \to K$, 使得对任何元素 $x', x'' \in X$ 和任何 $\alpha', \alpha'' \in K$, 有

$$f(\alpha' x' + \alpha'' x'') = \alpha' f(x') + \alpha'' f(x''),$$

在这种情况下, 往往不用 "线性函数" 一词, 而称为线性泛函 (linear functional) 或线性型 (linear form).

Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

线性泛函 [linear functional; линейный функционал], 线性型 (linear form), 域 k 上的向量空间 L 上的映射 $f: L \to k$, 使得对所有的 $x, y \in L, \lambda \in k$, 有

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

线性泛函这概念, 作为**线性算子** (linear operator) 概念的重要特殊情况, 是线性代数中主要概念之一且在分析中起重要作用.

在 L 上线性泛函的集合 $L^{\#}$ 上, 加法和乘以标量的运算按以下的公式定义

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$
$$f, g \in L^{\#}, \ x \in L, \ \lambda \in k.$$

它们在 $L^{\#}$ 中确定了一个 k 上的向量空间结构.

线性泛函的核 (kernel of a linear functional) 是子空间 $\operatorname{Ker} f = \{x \in L: f(x) = 0\}$. 如果 $f \neq 0 \in L^{\#}$ (即 $f(x) \not\equiv 0 \in k$), 则 $\operatorname{Ker} f$ 是 L 中一个超平面. 具有同样核的线性泛函是成比例的.

如果 $\{e_\nu: \nu \in \Lambda\}$ 是 L 的一组基, 则对

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} e_{\nu_i}, \ \lambda_{\nu_i} \in k, \ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} f(e_{\nu_i}).$$

对应 $f \to \{f(x_\nu): \nu \in \Lambda\}$ 是 $L^{\#}$ 到 k^{Λ} 上的一个同构. 推论: L 同构于 $L^{\#}$ 当且仅当它是有限维的. 当转移到 L 中的一组新基时, 元素 $f(e_\nu) \in k$ 用与基向量同样的公式变换.

由公式 $Q_L x(f) = f(x)$ 定义的算子 $Q_L: L \to (L^{\#})^{\#}$ 是一个单射. 它是一个同构, 当且仅当 L 是有限维的. 这个同构, 与 L 和 $L^{\#}$ 之间的同构不同, 是自然的 (见**函子态射** (functorial morphism)).

局部凸空间 (locally convex space) 上, 特别是赋范空间上的线性泛函是泛函分析中的重要研究对象. 局部凸空间 E 上每一个连续的 (作为拓扑空间上的映射) 线性泛函是有界的 (见**有界算子** (bounded operator)), 即对所有有界的 $M \subset E$,

$$\sup_{x \in M} |f(x)| < \infty.$$

如果 E 是一个**赋范空间**(normed space),则其逆也是对的;这两个性质等价于数

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|: \|x\| \leqslant 1\}$$

的有限性.

局部凸空间 E 上的连续线性泛函形成 $E^{\#}$ 的子空间 E^*,称为 E 的对偶(dual)空间.在 E^* 中,人们考虑不同的拓扑,包括弱的和强的拓扑,它们分别对应于逐点收敛和在有界集上一致收敛.如果 E 是赋范空间,则 E^* 关于范数 $\|f\|$ 是 **Banach 空间**(Banach space),且相应的拓扑与强拓扑一致.单位球 $\{f: \|f\| \leqslant 1\}$ 按弱拓扑是紧的.

Hahn-Banach 定理(Hahn-Banach theorem)在分析中有重要应用;它的一种表示形式如下:如果 $\|\cdot\|$ 是向量空间 E 上的一个**准范数**(pre-norm),且设 f_0 是定义在 E 的子空间 E_0 上的线性泛函使得对所有的 $x \in E_0$, $\|f_0(x)\| \leqslant \|x\|$,则 f_0 能够延拓到整个 E 上,保持线性和给定的界.推论:定义在局部凸空间 E 的子空间 E_0 上的任何连续线性泛函能延拓成 E 上的连续线性泛函、而且如果 E 是赋范空间,则保持范数.因此,对每一个 $x \in E$, $x \neq 0$,存在一个 $f \in E^*$,使得 $f(x) \neq 0$.

设 E 是赋范空间且设 E^* 和然后的 $(E^*)^*$ 取相应的范数,则算子

$$R_E: E \to (E^*)^*, \ R_E x(f) = f(x)$$

是等距嵌入.如果在此嵌入下 E 与 $(E^*)^*$ 重合,则 E 必须是完全的,称为自反的(见**自反空间**(reflexive space)).例如, $L_p[a, b]$ 和 $l_p (1 \leqslant p < \infty)$ 是自反的,当且仅当 $p > 1$.对一般的局部凸空间,有类似的自反性概念.

对很多局部凸空间,所有连续线性泛函都有了描述.例如, Hilbert 空间 H 的伴随空间是 $\{f: f(x) = (x, x_0)$,对一固定的 $x_0 \in H\}$. $C[a, b]$ 的伴随空间是 $\{f: f(x) = \int_a^b x(t) d\mu(t)$,对一固定的有界变差函数 $\mu(t)\}$.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6(译自法文).

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981(中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明,函数论与泛函分析初步,上、下册,高等教育出版社, 1992).

А. Я. Хелемский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

葛显良 译

线性群[**linear group**; **линейная группа**]

某个**除环**(skew-field) K 上有限 n 维**向量空间**(vector space) V 的线性变换构成的群.在 V 中选取一组基可将一个线性群实现为一个 K 上非奇异的 $(n \times n)$ 方阵的群.由此方法建立起了线性群与矩阵群之间的同构.

一个自由 K 模 V 的全体自同构构成的群亦称为**一般线性群**(general linear group)(或全线性群),记作 $GL(V)$, K 上所有可逆的 $(n \times n)$ 矩阵构成的群(亦称为一般线性群)记作 $GL(n, K)$ 或 $GL_n(K)$. $GL(V)$ 的子群称为 $(n \times n)$ 矩阵的线性群(linear group)或者 n 阶线性群(linear group of order n).当 K 为交换,即当 K 为**域**(field)时,线性群理论的研究最为充分.因此(除非另有声明)以下只考虑域上的线性群.

线性群的理论出现于 19 世纪中叶,其发展与 Lie 群理论和 Galois 理论紧密相连.开始对线性群作系统研究的是 C. Jordan 的著作(见[1]).与 Galois 理论的联系首先导致了研究某个素域上的可解的和典型的线性群(见**典型群**(classical group)).建立了关于线性群 G 的可约性或不可约性,即有关 G 模 V 的性质的某些一般性事实.对于每个线性群 G,存在一个 G 子模的合成列

$$\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V,$$

使得所有的商模 V_{i+1}/V_i 都是不可约的.换言之,每个矩阵群在 $GL_n(K)$ 中共轭于一个对角线上是不可约块的拟三角阵构成的群.令 G_0 为 G 中由所有在商模 $V_{i+1}/V_i (i = 0, \cdots, m-1)$ 上作用平凡的元素构成的子群,则 G_0 是一个正规幂零子群,其元素(在 V 的全体线性变换构成的 K 代数 $\mathrm{End}(V)$ 中)满足方程 $(x-1)^n = 0$;这样的线性群称为是幂幺的(unipotent).每个幂幺群视为矩阵群,在 $GL(n, K)$ 中都共轭于某个由对角线上为单位元的上三角阵构成的子群.商群 G/G_0 的结构在很大程度上由 G 在商模 V_{i+1}/V_i 上诱导出的不可约线性群 G_{i+1} 的结构所决定.如果线性群 G 在代数封闭域 K 上不可约,那么 G 包含 K 代数 $\mathrm{End}(V)$ 中 n^2 个(在 K 上)线性无关的元素,即 G 的 K 线性包等于 $\mathrm{End}(V)$(Burnside 定理(Burnside theorem)).完全可约的线性群中每个正规子群都是完全可约的.

无限线性群.尽管线性群的理论有很长的历史,但一般方法的创立却是相当晚的.只有可解的和典型的线性群是例外. 1870 年, Jordan 研究了有限域上的可解线性群的结构,得出了关于这些群的若干分类结果.这些研究获得了进一步的发展(见[13]):对于结构作了详尽的研究,代数封闭域 K 上 $GL(n, K)$ 的

极大可解的和局部幂零的子群被分类．关于可解线性群的主要结构定理由 А. И. Мальцев 于 1951 年得到（见[8]，294 − 313）：代数封闭域上由（$n \times n$）矩阵构成的可解线性群 Γ 有一个有限指数的正规子群 H，它共轭于三角群的一个子群，而其指数 $|\Gamma : H|$ 被 n 的一个显函数界定（亦见 **Lie-Kolchin 定理**（Lie-Kolchin theorem））；特别地，H 的换位子群是一个幂幺群，且从抽象观点看，Γ 是 H 被幂零换位子群的有限扩张．

线性群理论中一个重要并且被研究得很多的分支是典型群的理论（例如见[4]，[7]）．

线性群理论发展的一个新阶段开始于 20 世纪 60 年代，当时创建了基于代数群技术的一般研究方法（见**线性代数群**（linear algebraic group），亦见[9]，[18]）．这一方法使得有可能解决线性群理论中的一些问题．例如，用这种方法证明了线性群的自由子群定理（theorem on free subgroups of a linear group）（见[14]）：特征 0 的域上的每个线性群，或者包含一个非交换的自由子群，或者包含一个有限指数的可解子群．周期线性群的理论建立了起来（见[9]）（其结果是，有限群理论（见**有限群**（finite group））中的主要结构结果在周期群这一更为一般的情况下被保持）．

线性群中的另一个重要方法，即所谓的逼近方法，为 Мальцев 在 1940 年首次采用（见[8]）．它适合于研究有限型整环上的线性群，特别是具有有限多个生成元的线性群．该方法的要点如下：设 $\mathrm{GL}(n, F)$ 为域 K 的一个有限生成子环 F 上的一般线性群；则 F 模掉极大理想被有限域 F_i 逼近，这蕴涵着群 $\mathrm{GL}(n, F)$ 可被有限矩阵群 $\mathrm{GL}(n, F_i)$ 逼近．对于每个子群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(n, F)$ 就得到通过有限线性群 Γ_i 的一个诱导逼近．结果在很多情况下群 Γ 的性质在很大程度上被群 Γ_i 的性质所确定．这一方法后来被加以完善（见[18]），导致证明了一个一般的逼近定理，由此可得出关于有限多个生成元的无限线性群的大多数结论．

有限线性群．迄今为止关于有限线性群结构的最好结果是 Jordan 定理（Jordan theorem）（1878）：存在一个整数值函数 $f(n)$，使得对于特征 0 的域上每个（$n \times n$）矩阵的有限线性群都有一个正规 Abel 子群，其指数小于 $f(n)$．对于正特征的域，对取定的 n 存在有限单线性群的无限序列，故 Jordan 定理不能直接用于这种情况．然而，利用有限群的模表示已经证明，存在一个整数值函数 $f(m, n)$，使得对于特征 $p > 0$ 域上的一个（$n \times n$）矩阵的有限线性群，只要其 **Sylow 子群**（Sylow subgroup）的阶不超过 p^m，就包含一个指数小于 $f(m, n)$ 的正规 Abel 子群（见[16]）．

有限线性群理论的主要问题之一是分类单线性群．自从 L. Dickson 于 1901 年在[2]中给出了有关典型单有限线性群的主要事实以来，许多新的结论业已获得．其中 C. Chevalley 的结果占据了中心地位（见[15]）．他使用 Lie 代数理论的方法构造单的有限线性群，这导致了发现新类型的单有限线性群，并且使得有可能以一种统一的方法来获得几乎所有已知的单有限线性群（详见[11]，[12]）．

除环和环上的线性群．对于非交换除环 K 上的线性群的系统研究开始于 J. Dieudonné 1943 年的工作之后（见[5]），其中他描述了除环上的行列式的构造（见**行列式**（determinant））．$\mathrm{GL}(n, K)$ 中由行列式为 1 的变换构成的子群称为特殊线性群，记作 $\mathrm{SL}(n, K)$．它是由平延（transvections）（即这样的变换 t，满足 $\dim(1-t)V = 1$，而对 $v \in (1-t)V$ 有 $tv = v$）生成的，且 $\mathrm{GL}(n, K)$ 的每个不变子群或者是标量群，或者包含 $\mathrm{SL}(n, K)$，除了 $n = 2$，$|K| = 2, 3$ 的情况，这时 $\mathrm{GL}(2, K)$ 是可解的．如果 K 在其中心 Z 上的维数有限，那么存在唯一的一个值在 Z 中的行列式，称为简化范数（见[5]），而 $\mathrm{SL}(n, K)$ 包含在由简化范数为 1 的元素构成的群 $\mathrm{UL}(n, K)$ 中．1943 年提出了这些群是否一致的问题（淡中-Artin 问题（Tannaka-Artin problem），见 **Kneser-Tits 假设**（Kneser-Tits hypothesis））．在[10]中被否定地解决了．群 $\mathrm{UL}(n, K)$ 和商群 $\mathrm{SK}_1 = \mathrm{UL}(n, K)/\mathrm{SL}(n, K)$，称为简化 Whitehead 群（reduced Whitehead group），在线性代数群和代数 K 理论中起了重要的作用（见[5]）．

环上线性群理论的主要问题是与一般线性群和其他典型群的正规子群的描述相联系的．这一领域的进展与代数 K 理论的发展有非常密切的关系（见[5]）．例如对于整数环 $\mathbf{Z}$，描述 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ 的正规子群的问题当 $n > 2$ 时实际上等价于群 $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ 的**同余问题**（congruence problem）．即 $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$（$n > 2$）的每个非标量的正规子群具有有限指数且为一同余子群，而 $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ 是自由群的一个有限扩张，因而有若干无限指数的正规子群．

对于域和环上的典型线性群的自同构亦有研究（见[19]）．

参考文献

[1] Jordan, C., Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, 1870.
[2] Dickson, L. E., Linear groups, Leipzig, 1901.
[3] Dixon, J. D., The structure of linear groups, v. Nostrand Reinhold, 1971.
[4] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
[5] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.
[6] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.
[7] Dieudonné, J. A., La géométrie des groups classiques, Springer, 1955.
[8] Мальцев, А. И., Избранные труды, I − Классическая алгебра, М., 1976, 58 − 73, 294 − 313.

[9] Платонов, В. П.,《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **30** (1966), 3, 573 – 620.

[10] Платонов, В. П.,《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **40** (1976), 2, 227 – 261.

[11] Borel, A., et al. (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in math., Springer, 1970.

[12] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1968.

[13] Супруненко, Д. А., Группы матриц, М., 1972.

[14] Tits, J., Free subgroups in linear groups, *J. of Algebra*, **20** (1972), 250 – 270.

[15] Chevalley, C., Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.*, **7** (1955), 14 – 66.

[16] Brauer, R. and Feit, W., An analogue of Jordan's theorem in characteristic p, *Ann. of Math.* (2), **84** (1966), 1, 119 – 131.

[17] Draxl, P. and Kneser, M., $\mathbf{SK}_1$ von Schiefkörpen, Springer, 1980.

[18] Wehrfritz, B., Infinite linear groups, Springer, 1973.

[19] Мерзляков, Ю. И., Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1970, М., 1971, 75 – 110.

В. П. Платонов 撰

【补注】 关于 Chevalley 群（特别是 Chevalley 有限群）的处理见[A1].

参考文献

[A1] Carter, R. W., Simple groups of Lie type, Wiley, 1972.

[A2] O'Meara, O. T., A survey of the isomorphism theory of the classical groups, in Ring theory and algebra, Vol. 3, M. Dekker, 1980, 225 – 242.

【译注】

参考文献

[B1] Carter, R. W., Finite groups of Lie type, Wiley, 1985.

[B2] 华罗庚，万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963.

王 杰 译 石生明 校

线性包 [**linear hull**; **линейная оболочка**]，向量空间E中集合A的

包含向量空间E内集合A的所有子空间的交M．该集合M亦称为由A生成的子空间(subspace)．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这也称为线性包络(linear envelope)．集合A的线性包的闭包称为该集的**线性闭包**(linear closure)，

陈公宁 译

线性双曲型偏微分方程和方程组 [**linear hyperbolic partial differential equation and system**; **линейное гиперболическое уравнение и ситстема**]

一个形如

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f \tag{1}$$

的偏微分方程（或方程组），它具有如下特性：在其定义域Ω内的任一点$x=(x_0,\cdots,x_n)$处，从实变量$y_0,\cdots,y_n$中人们能将一个变量，例如$y_0=\lambda$，用下面的方法区别出来（若有必要的话，可经过一个适当的自变量的仿射变换），那就是对n维 Euclid 空间$\mathbf{R}^n$中的所有点$Y=(y_1,\cdots,y_n)$，特征方程（关于λ的）

$$\det \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)y^\alpha|_{y_0=\lambda},\ y^\alpha=(y_0^{\alpha_0},\cdots,y_n^{\alpha_n}) \tag{2}$$

恰有Nm个实根．此处$\alpha=(\alpha_0,\cdots,\alpha_n)$是带有非负整数坐标的向量；$|\alpha|=\sum_{j=0}^n\alpha_j$是微分算子$D^\alpha=D_0^{\alpha_0}\cdots D_n^{\alpha_n}$的阶数，$D_j=\partial/\partial x_j\ (j=0,\cdots,n)$；$m$是组(1)的阶数；$a_\alpha(x)$是确定在$\Omega$内的$N$阶实方阵；$u(x)=\|u_j(x)\|\ (j=1,\cdots,N)$是一个未知的列向量；且$f(x)$是定义在$\Omega$内的带有$N$个分量的向量．

一个典型的例子是**波动方程**(wave equation)

$$u_{x_0x_0}=\sum_{j=1}^n u_{x_jx_j}. \tag{3}$$

在数学物理中有许多问题可归结为线性双曲型偏微分方程或方程组．

子集S: $\varphi(x)=0$，若有$\operatorname{grad}\varphi\neq 0$及$Q(x,\operatorname{grad}\varphi)=0$，则称为在点$x$处的特征(characteristic)，此处

$$Q(x,y)\equiv Q(x,y_0,Y)=\det\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)y^\alpha$$

是组(1)的特征形式．若$Q(x,y)=0$，则称向量y定义了x点处的一个特征方向(characteristic direction)或特征法向(characteristic normal)．若

$$Q(x,\operatorname{grad}\varphi)=0,\ 对所有\ x\in S,$$

则称曲面S为组(1)的一个特征曲面(characteristic surface)（或简称特征(characteristic)）．对于一个在其上任一点处无特征法向的曲面，人们称它为自由曲面(free surface)．在自由曲面上，特征矩阵(characteristic matrix)

$$A(x,y)\equiv A(x,y_0,Y)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)y^\alpha,\ y=\operatorname{grad}\varphi$$

的秩为N，而在特征曲面S上它却小于N．设S是特征曲面，若对某j及所有$x\in S$有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\right]A(x,\operatorname{grad}\varphi)\neq 0,$$

则称S是简单的(simple)．否则就称特征是多重的(multiple)．有时对矩阵$A(x,\operatorname{grad}\varphi)$之秩是$N-1$的特征就称为简单的．

对超平面 $S_0: x_0=0$，及点 x，若矩阵 $A(x, 1, Y)=a_{m,0,\cdots,0}$ 是非奇异的（那就是，曲面 S_0 是自由的），且特征方程 $Q(x, \lambda, Y)=0$ 的所有根 $\lambda=\lambda_k(k=1, \cdots, mN)$ 对所有 $Y\in\mathbf{R}^n$ 而言均是实的，则称组（1）在 x 点关于超平面 S_0 是双曲型的．若在 Ω 内每点 x 处关于 S_0 是双曲型的，则称组（1）在区域 Ω 内关于 S_0 是双曲型的．

一类重要的双曲型方程和方程组是严格双曲型方程和方程组，它们有时称为全双曲型方程组（fully hyperbolic systems）或狭义下双曲型的（hyperbolic in the narrow sense）．所谓组（1）是严格双曲型方程组（strictly hyperbolic system），是指若特征方程的所有根 $\lambda=\lambda_k$ 对任一非零向量 $Y\in\mathbf{R}^n$ 而言均为不同的．严格双曲型方程（组）的特征是简单的．下面的事实使得严格双曲型组（关于 S_0）成为值得注意的，那就是对此方程组的 Cauchy 问题

$$D_0^k u|_{x_0=0}=\psi_k(x),\ k=0, \cdots, m-1 \qquad (4)$$

在组（1）的系数 $a_\alpha(x)$，$f(x)$ 以及初始数据（初始函数）$\psi_k(x)$ $(x=(x_0, \cdots, x_n))$ 均为充分光滑的单一假定下是适定的．存在一些形如（1）的双曲型方程的例子，它们不是严格双曲型的（甚至在 m 阶导数前为常系数），且其 Cauchy 问题是不适定的．

关于波动方程（3）的 Cauchy 问题（4），其解能明显地写出，并且当 $m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2)$ 且仅当此时，$u(x)$ 在特征锥（characteristic cone）$|X-X^*|=x_0^*-x_0$，$X=(x_1, \cdots, x_n)$ 的顶点 X^* 之值仅依赖于这个锥的底部 $|X-X^*|=x_0^*\ (x_0=0)$ 上初始数据 $\psi_0(x)$，$\psi_1(x)$ 及其导数之值（此称为 **Huygens 原理**（Huygens principle））．

对于严格双曲型（关于 S_0）方程和方程组，波的扩散问题以及间隙的相关问题业已讨论，见空隙（Lacuna）．对形如

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u=0,\ a_\alpha=\text{常数}$$

的常系数方程已给出了详尽的回答．

对于具常系数，$a_\alpha(x)=a_\alpha=$ 常数的一个方程（标量方程）的情形，严格双曲性的定义可推广如下．方程（1）称为关于一非零向量 $y\in\mathbf{R}^{n+1}$ 是双曲型的，如果

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha y^\alpha\neq 0,$$

且若存在实数 λ_0 使对 $\xi=(\xi_0, \cdots, \xi_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 及 $\lambda>\lambda_0$ 有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(\lambda y+i\xi)^\alpha\neq 0.$$

在所有常系数的线性方程中，仅仅对在下述意义下为双曲型的方程，即其 Cauchy 问题关于确定在超平面

$$\sum_{j=0}^{n} x_j y_j=0$$

上的任意的充分光滑的初始条件是适定的．特别地，波动方程（3）关于满足条件

$$y_0^2>\sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

的任一向量是在上述意义下为双曲型的．

关于方程及方程组的严格双曲性的定义存在着各种推广．这主要是这样一些方程和方程组，它们由下列事实完全表征，即对它们在自由曲面上给定数据后，若初始函数充分光滑但在无穷处无任何增长性的限制，则相应的 Cauchy 问题是唯一可解的．

另一类重要的一阶线性双曲型组是对称双曲型组．对于组

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)u_{x_j}+b(x)u=f(x), \qquad (5)$$

此中 $a_j(x)$，$b(x)$ 是定义在 Ω 内的 N 阶方阵，$u(x)$ 是带有 N 个分量的未知向量，若矩阵 $a_j(x)$ 是对称的（或者用同一变换使之同时为可对称化的），且若在每点存在一个空向超平面（spatially-oriented hyperplane）（或类空超平面（space-like hyperplane）），那就是此超平面的法向 $y=(y_0, \cdots, y_n)$ 使矩阵 $\sum_{j=0}^{n} y_j a_j(x)$ 是正定的，则此时我们称方程组（5）是 Ω 内的对称双曲型方程组（symmetric hyperbolic system）．对于具充分光滑系数的对称双曲组（5），若给定的初始函数以及方程组右端项有平方可积的 p 阶广义偏导数，则相应的 Cauchy 问题存在唯一的广义解，且有同样阶数的平方可积的偏导数．任一个二阶严格双曲型偏微分方程可化为一对称双曲组．

在区域 Ω 内正则的解类中，二阶方程（1）可写成如下形式

$$\sum_{k,j=0}^{n} a_{kj}(x)u_{x_k x_j}+\sum_{j=0}^{n} b_j(x)u_{x_j}+c(x)u=f(x), \qquad (6)$$

此中 $a_{kj}(x)=a_{jk}(x)$、$b_j(x)$、$c(x)$ 及 $f(x)$ 是定义在 Ω 内的函数．若在 Ω 内每一点处，方程（6）中首项系数的矩阵 $a(x)=\|a_{jk}(x)\|$ $(k, j=0, \cdots, n)$ 的所有本征值非零，且这些本征值中有一个本征值的符号不同于其他所有的本征值的符号，则方程（6）在 Ω 内是双曲型的．关于（6），沿着特征曲面人们能区别二类光滑曲面：空向曲面（spatially-oriented surfaces）和时向曲面（time-oriented surfaces）（或称类空曲面（space-like surfaces）和类时曲面（time-like surfaces））．若曲面由形如 $\varphi(x)=0$ 的方程给出，则在第一类曲面上 $Q(x, \mathrm{grad}\,\varphi)>0$，而在第二类曲面

上 $Q(x, \mathrm{grad}\,\varphi) < 0$，此中

$$Q(x, y) = \sum_{k,j=0}^{n} a_{kj}(x) y_k y_j .$$

在类时曲面上给定初始数据的双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题一般是不适定的．

对于双曲型偏微分方程

$$u_{x_0x_0} - \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) u_{x_kx_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(u) u_{x_j} + c(x)u = = f(x),$$

若存在正数 ε 使得对 $\bar{\Omega}$ 内所有 x 及任一非零向量 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ 有

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) \xi_k \xi_j > \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 ,$$

则称此方程在区域 Ω 内是一致（或正则）双曲型的 (uniformly (regularly) hyperbolic)．当 $n = 1$ 时，不等式

$$a_{01}^2 - a_{00} a_{11} < 0, \text{ 对所有 } x \in \bar{\Omega}$$

是 (6) 在 Ω 内为一致双曲型的充分必要条件．弦振动方程

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} = 0$$

是具两自变量的二阶线性一致双曲型偏微分方程的一个典型代表．此方程在平面 $\mathbf{R}^2$ 的任一凸域 Ω 内的通解由 **d'Alembert 公式** (d'Alembert formula) 给出:

$$u(x) = f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1),$$

其中 f 和 g 是任意函数．

在 $n = 1$ 时，经过一个自变量 x_0 和 x_1 的非奇异实变换，双曲型偏微分方程 (6) 可化为正规（典范）形式 (normal (canonical) form)

$$u_{y_0y_0} - u_{y_1y_1} + A(y) u_{y_0} + B(y) u_{y_1} + C(y) u = F(y), \quad y = (y_0, y_1). \tag{7}$$

考虑形如 (7) 的双曲型组，此中 $A(y)$, $B(y)$ 和 $C(y)$ 是 N 阶实方阵，$F(y)$ 是一个给定的向量且 u 是未知向量，这两个向量均带有 N 个分量，对于初始数据在一非特征（自由）曲线上的 Cauchy 问题和数据给定在两相交特征上的 **Goursat 问题** (Goursat problem) 的适定性问题已用 **Riemann 法** (Riemann method) 进行了完全的讨论．

关于双曲型方程的一些主要的问题是：**Cauchy 问题** (Cauchy problem)，**Cauchy 特征问题** (Cauchy characteristic problem) 以及**混合问题**（亦见**双曲型方程和方程组的混合和边值问题** (mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems)．

在主要的问题的讨论中，基本解起着重要的作用，它可能用以得到正则和广义解的显式（积分）表示式，并且还可建立它们的结构性和定性的性质，特别地用以研究波前及间断性的传播问题．

对于方程 (6)，若在 Ω 内每一点 x 处矩阵 $a(x)$ 的所有本征值非零，且至少有二个在符号上不同于其他各个，而其他本征值至少有二个，则称 (6) 在区域 Ω 内是超双曲型方程 (ultra-hyperbolic equation)．形式为

$$\sum_{j=0}^{n} (u_{x_jx_j} - u_{y_jy_j}) = 0, \ n \geq 1 \tag{8}$$

的方程是超双曲型方程的一个例子．此方程有如下性质：在变量为 $x = (x_0, \cdots, x_n)$, $y = (y_0, \cdots, y_n)$ 的 Euclid 空间的区域 Ω 内，若 $u(x, y)$ 是 (8) 的一个正则解，且若 (x^*, y^*) 是 Ω 内任意一点，则函数 $u(x, y^*)$ 在球面 $\sum_{j=0}^{n}(x_j - x_j^*)^2 = r^2$ 上的平均值等于函数 $u(x^*, y)$ 在球面 $\sum_{j=0}^{n}(y_j - y_j^*)^2 = r^2$ 上的平均值，此中 $\sum_{j=0}^{n}(x_j - x_j^*)^2 = r^2$ 和 $\sum_{j=0}^{n}(y_j - y_j^*)^2 = r^2$ 分别以 $x^* = (x_0^*, \cdots, x_n^*)$ 和 $y^* = (y_0^*, \cdots, y_n^*)$ 为中心且以同一个 r 为半径的球面．此定理被广泛地用于常系数二阶线性双曲型偏微分方程的理论中．

参考文献

[1] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952.

[2] Bers, L., John, F., Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

[3] Бицадзе, А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959 (中译本：А. В. 比察捷，混合型微分方程，科学出版社，1955).

[4] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976 (英译本：Bitsadze, A. V., Equations of mathematical physics, Mir, 1980).

[5] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971 (英译本：Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[6] Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959 (中译本：И. М. 盖尔芳特，Г. Е. 希洛夫，广义函数，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，科学出版社，1965 – 1985).

[7] Gårding, L., Cauchy's problem for hyperbolic equations', in Third Congress Scand. Math. Helsinki, 1957, Mercators Tryckeri, 1958, 104 – 109.

[8] Дезин, А. А., 《Матем. сб.》, **49** (1959), 4, 459 – 484.

[9] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，2，科学出版社，1977).

[10] Ладыженская, О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953.

[11] Leray, J., Gårding, L., Kotake, T., Uniformisation

et developpement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 236 – 361.

[12] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 高等教育出版社, 1956).

[13] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 20 изд., т. 2, М., 1967 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第二卷, 人民教育出版社, 1956 – 1958).

[14] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972 (中译本: А. Н. 吉洪诺夫, А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程(上、下册), 高等教育出版社, 1956, 1957).

[15] Hörmander, L., Linear partial differential operators, Springer, 1976 (中译本: L. 霍曼德尔, 线性偏微分算子, 科学出版社, 1980). А. М. Нахушев 撰

【补注】

全双曲型方程组或狭义双曲型方程组同样也分别称为全双曲型方程组(totally hyperbolic system)或Петровский意义下的双曲型方程组(system hyperbolic in the sense of Petrovskiĭ).

关于常系数标量方程的双曲性的定义可见[A1], Vol. Ⅱ, Chapt. 12.

关于基本解和奇性传播, 同样可见[A1], Vol. Ⅲ, Chapt. 13, 14.

本条目正文最后几行所述定理称为 Asgeirsson 定理(Asgeirsson theorem), 见[9], Chapt. 6.

参考文献

[A1] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, Ⅰ – Ⅳ, Springer, 1983 – 1985.

[A2] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

[A3] John, F., Partial differential equations, Springer, 1974 (中译本: F. 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986).

仇庆久 译

线性假设 [linear hypothsis; линейная гипотеза]

关于 n 维正态分布律 $N(a,\sigma^2 I)$ 的"数学期望 a 属于 $r\,(r<s)$ 维线性子空间 $\Pi^r\subset\Pi^s$"的统计假设, 其中已知 a 在 $s\,(s<n)$ 维线性子空间 $\Pi^s\subset\mathbf{R}^n$ 中取值, 而 I 是单位矩阵.

许多数理统计问题可以归结为线性假设的检验问题, 而线性假设常表述为如下标准形式, 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是服从正态分布的向量, 其分量相互独立, 且

$$\mathrm{E}X_i=a_i\,(i=1,\cdots,s),\ \mathrm{E}X_i=0\,(i=s+1,\cdots,n),$$

$$\mathrm{D}X_i=\sigma^2\,(i=1,\cdots,n),$$

其中常数 $a_1,\cdots,a_s,\sigma^2$ 未知. 那么, 假设 H_0:

$$a_1=\cdots=a_r=0,\quad r<s<n,$$

是典范线性假设(canonical liear hypothesis).

例. 设 $Y_1,\cdots,Y_n$ 和 $Z_1,\cdots,Z_m$ 是 $n+m$ 个独立随机变量, 分别服从正态分布 $N_1(a,\sigma^2)$ 和 $N_2(b,\sigma^2)$, 其中参数 a,b,σ^2 未知. 那么, 假设 H_0: $a=b=0$ 是线性假设, 然而对于 $a_0\neq b_0$, 假设 $a=a_0$, $b=b_0$ 不是线性的.

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypothesis, Wiley, 1986.

М. С. Никулин 撰

【补注】 不过, $a=a_0$, $b=b_0\,(a_0\neq b_0)$ 这样的假设相当于关于变换后变量 $Y_i'=Y_i-a_0$, $Z_i'=Z_i-b_0$ 之均值的线性假设.

周概容 译

线性无关 [linear independence; линейная независимость]

线性代数(linear algebra)的主要概念之一. 设 V 是域 K 上的**向量空间**(vector space); 向量 $a_1,\cdots,a_n$ 称为线性无关的(linearly independent), 如果对任何集合 $k_i\in K\,(k_1=\cdots=k_n=0$ 除外)有

$$k_1a_1+\cdots+k_na_n\neq 0.$$

否则, 向量 $a_1,\cdots,a_n\,(n>1)$ 称为线性相关的(linearly dependent). 向量 $a_1,\cdots,a_n$ 是线性相关的, 当且仅当其中至少有一个向量是其余向量的线性组合. V 的向量的一个无限子集称为线性相关的, 如果它的某个有限子集是线性相关的; 称为线性无关的, 如果它的任何有限子集都是线性无关的. 一个空间的最大线性无关子集的元素个数(基数)与这个子集的选择无关, 被称为这个空间的秩(rank)或维数(dimension), 而这个子集本身称为基(basis).

在特殊的情形下, 当向量 $a_1,\cdots,a_n$ 是某个数域 K 的元素而 k 是 K 的子域时, 就出现了数的线性无关性(linear independence of numbers)的概念. 有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的数的线性无关性可看作为无理性概念的推广(见**无理数**(irrational number)). 从而, 两个数 α 和 1 是线性无关的, 当且仅当 α 是无理数.

对 Abel 群和模还引入了元素的线性相关性和线性无关性的概念.

线性相关性是集合上的抽象相关关系这一更广泛概念的特殊情形.

О. А. Иванова 撰

【补注】 抽象相关关系也称为**拟阵**(matroid), 见[A1].

参考文献

[A1] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.

杜小杨 译

线性无关度量 [**linear independence**、**measure of**; **линейной независимости мера**], 数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的函数

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n|H)=L(H)=\min|a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n|,$$

其中极小取在所有可能的满足条件

$$|a_i|\leqslant H,\ |a_1|+\cdots+|a_n|>0$$

的整数组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 之上. 已知有

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n|H)<(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|)H^{-\tau(n-1)},$$

其中当所有的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为实数时 $\tau=1$, 在其他情形下 $\tau=1/2$. 对某些特殊的数集 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 求出 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n|H)$ 关于参数 H 的下界, 是 Diophantus 逼近 (Diophantine approximations) 论的问题之一.

Ю. В. Нестеренко 撰 朱尧辰 译

线性不等式 [**linear inequality**; **линейное неравенство**]

形如

$$l(x)-a\equiv a_1x_1+\cdots+a_nx_n-a\leqslant 0 \quad (1)$$

或形如

$$l(x)-a\equiv a_1x_1+\cdots+a_nx_n-a<0 \quad (2)$$

的不等式, 其中 $a_1,\cdots,a_n,a$ 为任意实数, 而 $x=(x_1,\cdots,x_n)$.

按一种较广的意义, 线性不等式是形如

$$f(x)-a\leqslant 0 \quad (3)$$

或形如

$$f(x)-a<0 \quad (4)$$

的不等式, 其中, $f(x)$ 是实**向量空间** (vector space) $L(\mathbf{R})$ 上其值取自实数域 $\mathbf{R}$ 的线性 (亦即可加与齐次的) 函数, 且 $a\in\mathbf{R}$. 可以得到线性不等式概念的进一步推广、如果代替 $\mathbf{R}$ 取任意的**序域** (ordered field) P. 基于这种推广的线性不等式的现代理论业已创立 (见 [1]).

在解析力学, 数的几何学以及函数逼近中许多重要问题归结到线性不等式组的研究. 与线性不等式组有关的一些结果在经济学研究中找到非常重要的应用. 特别地, 在这些应用中, **线性规划** (linear programming) 应运兴起. 在技术经济学与经济计划中许多实际问题归结到特定的线性不等式组的求解; 这业已有效地确定线性不等式领域内的现代研究方向.

依此特别地产生线性不等式理论的主要原理, 边界解原理, 它首先对按模的形式的有限线性不等式组, 即对形如

$$|l_j(x)-a_j|\equiv|a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n-a_j|\leqslant d_j, \quad (5)$$

$j=1,\cdots,m$, 的不等式组建立、其中, 所有 $a_{j1},\cdots,a_{jn}$, a_j 在最一般情况下均为复数域的元素, 而所有 d_j 均为非负实数, $j=1,\cdots,m$ (见 [4]).

边界解原理 (principle of boundary solutions) 所含的内容如下. 在具有秩 $r>0$ 的形如 (5) 的任意相容线性不等式组里, 可选取秩为 r 的由 r 个不等式组成的子系统, 使得后者至少有一个解, 它让所有子系统中的不等式成为等式, 并满足 (5) 的所有不等式, 换言之, 它是 (5) 的一个解.

边界解原理已被扩展到域 $\mathbf{R}$ 上的线性不等式组 (system of linear inequalities) (见 [5]):

$$l_j(x)-a_j\equiv a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n-a_j\leqslant 0, \quad (6)$$

$j=1,\cdots,m$ (亦即含实数 $a_{j1},\cdots,a_{jn},a_j$ 的不等式组, $j=1,\cdots,m$), 且具有下面较强结论的形式: 在秩为 $r>0$ 的**完全系统** (complete system) (6) 里, 可选取秩为 r 的由 r 个不等式组成的子系统, 使得让其所有不等式成为等式的此子系统的任意解满足 (6) 的所有不等式 (对形如 (6) 的不等式组, 这个结论原来是等价于前一个结论). 线性不等式组的秩 (rank of a system of linear inequalities) 是出现在该组中的线性无关式 $l_j(x)$ 的最大个数.

边界解原理也已扩展到任意序域 P 上的形如 (6) 的不等式组, 甚至推广到 P 上由有限多个形如 (3) 的线性不等式组成的更一般的不等式组 (见 [6]). 这个原理蕴涵以下的对任意序域上形如 (6) 的不等式组的相容性条件. 秩为 $r>0$ 的不等式组 (6) 是相容的, 当且仅当在它的系数矩阵中存在一个 r 阶非零**子式** (minor) Δ, 使得对于用此矩阵的第 j 行与元素 a_j 组成的列加边到 Δ 所得到的行列式 Δ_j, $j=1,\cdots,m$, 所有的比值 Δ_j/Δ 均为非负的. 在相容的线性方程组 (见**线性方程** (linear equation)) $a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n-a_j=0\,(j=1,\cdots,m)$ 情况下, 对它的系数矩阵的任意非零 r 阶子式 Δ, 这些比值均为零.

线性不等式理论的发展始于 19 世纪末. 具有一般特征的创立在 [3], [9] 中的头一批命题之一便是 Minkowski - Farkas 定理 (Minkowski-Farkas theorem), 它现在是线性不等式理论中关键定理之一: 如果 $\mathbf{R}$ 上相容不等式组 (6) 的所有解满足不等式

$$l(x)-b=b_1x_1+\cdots+b_nx_n-b\leqslant 0,$$

$b,b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,\cdots,n$, 那么存在非负数 $p_0,\cdots,p_m$, 使得对 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 恒等式

$$l(x)-b=\sum_{j=1}^m p_j(l_j(x)-a_j)-p_0$$

成立.

20 世纪初在致力于整数变量的二次型的 Г. Ф. Вороной 的研究中, 引发出线性不等式理论的主要问题之

一，即研究空间 $\mathbf{R}^n$ 内由非零秩的相容的有限不等式组诸解定义的**凸多面体**(convex polyhedron)的性质的问题．Вороной 的主要定理(见[1])表达出使得上述多面体为非退化的条件，换言之，即对于形如(2)的不等式构成的有限不等式组的相容性条件．在很长一段时间里，研究形如(6)的不等式组解的多面体的问题以及 H.Minkowski([3])与 J.Farkas([9])的结果曾决定着关于线性不等式研究的主要趋向(见[10])．

后来下面的事实变得清楚，即有关形如(6)的有限不等式组的线性不等式理论的结果，特别是前面提及的 Minkowski，Farkas 以及 Вороной 的结果如何可从边界解原理用离散的方法，也就是说，不用实数域 $\mathbf{R}$ 的拓扑性质(或这些性质的任何推论)推导出来，并且，边界解原理本身也用离散方法证出(见[1]与[6])．因此，最终证明用任意序域 P 代替在有限线性不等式组理论的结构中的基域 $\mathbf{R}$ 是可能的．这样一来，只用离散方法这种手段为线性不等式的纯代数理论的建造做好准备．

线性不等式理论长期以来不包含寻求有限线性不等式组解的有效方法．由直接应用边界解原理构成的方法不是十分有效的．对寻找有限线性不等式组的个别解的有效方法(特别是**单纯形法**(simplex method))随着线性规划的兴起才出现．

在 1960 — 1965年，一种称为线性不等式组的对合方法(convolution method)得以发展，它有可能从一般由形如(3)与(4)的不等式，特别由形如(1)与(2)的不等式组成的有限不等式组，并从与它有联系的空间的某给定的子空间去寻找一个新的有限线性不等式组，其解集重合于前述不等式组的解集在所选取子空间上的某个投影(见[1])．基于此法发展的基本对合算法(fundamental convolution algorithm)(在不等式组(6)中逐步消去未知量的一种特殊算法)有可能得到确定形如(6)的相容不等式组的整个解集的一般公式．对合方法可用于线性规划问题中以减少未知量的个数，且得出确定整个最优解集的一般公式(见[1])．同时也证明(见[7])用对合方法能够辨别出不相容有限线性不等式组(它一般由形如(3)与(4)，特别由形如(1)与(2)的不等式组成)内的极大相容子组．这使得有可能在关于**模式辨认**(pattern recognition)问题的一种解法中(见[8])应用它．

在无限线性不等式组中，一种特殊类，即多面封闭组已被区分出来，并加以研究(见[1])．在实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 情况下，多面封闭组定义为形如 $a_{\alpha 1}x_1+\cdots+a_{\alpha n}x_n-a_\alpha\leqslant 0\,(\alpha\in M)$ 的无限不等式组，它带有 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内一个拓扑闭共轭锥，也就是说由元素

$$(a_{\alpha 1},\cdots,a_{\alpha n},-a_\alpha),\ \alpha\in M,\ 与(\theta,-1)$$

生成的锥，这里 θ 为 $\mathbf{R}^n$ 的零元．对线性不等式的无限多面封闭组，有限线性不等式组的许多性质得以保持；特别地，对这样的不等式组，Minkowski-Farkas 定理成立．线性不等式的多面封闭组被用于函数逼近论，**凸规划**(convex programming)以及控制论中(见[8])．

参考文献

[1] Черников, С. Н., Линейные неравенства, М., 1968.
[2] Kuhu, H.W. and Tucker, A.W.(eds.), Linear inequalities and related systems, Princeton Univ. Press, 1956.
[3] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.
[4] Черников, С. Н., 《Матем. сб.》, **15** (1944), 3, 437-448.
[5] Черников, С. Н., 《Успехи матем. наук》, **8** (1953), 2, 7-73.
[6] Черников, С. Н., 《Укр. матем. ж.》, **19** (1967), 1, 36-80.
[7] Черников, С. Н., 《Доповiдi АН УРСР. Сер. А》, **1** (1969), 32-35.
[8] Красовский, Н.Н., Еремин, И.И., 《Укр. матем. ж.》, **25** (1973), 4, 465-478.
[9] Farkas, J., Ueber die Theorie der einfachen Ungleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, **124** (1901), 1-24.
[10] Dines, L.L. and McCoy, N.H., On linear inequalities, Trans. Roy. Soc. Canada Sect. 3, **27** (1933), 37-70.

С. Н. Черников 撰

【补注】 对线性不等式在凸几何学与组合几何学中的应用见[A1],[A2]；对在**数的几何**(geometry of numbers)中的应用亦见[A3]；对在最优化中的应用见[A4]．亦见**线性规划**(linear programming)．

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Interscience, 1967.
[A2] McMullen, P. and Stephard, G. C., Convex polytopes and the upper bound conjecture, Cambridge Univ. Press, 1971.
[A3] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.
[A4] Grötschel, M., Lovasz, L. and Schrijver, A., Geometric algorithms and combinatorial optimization, Springer, 1988.

陈公宁 译

线性积分方程 [**linear integral equation**; **линейное интегральное уравнение**]

一类积分方程，其中未知函数 $\varphi(s)$ 以线性形式出现:

$$A(x)\varphi(x)+\int_D K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\ x\in D.$$

这里 A, K, f 是已知函数，D 是 Euclid 空间中的一个区域，k 和 s 是该空间中的点，ds 是体积元素．详见**积分方程**(integral equation)．

А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

线性插值法 [linear interpolation; линейная интерполяция]

近似计算函数 $f(x)$ 的值的一种方法，基于用线性函数

$$L(x)=a(x-x_1)+b$$

代替 $f(x)$；参数 a 和 b 这样选取：在给定的点 x_1，x_2 处，$L(x)$ 的值与 $f(x)$ 的值相等，即

$$L(x_1)=f(x_1),\ L(x_2)=f(x_2).$$

这些条件为唯一的函数

$$L(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$$

所满足，它在区间 $[x_1, x_2]$ 上以误差

$$f(x)-L(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)(x-x_2),$$
$$\xi\in[x_1, x_2]$$

逼近给定的函数 $f(x)$. 线性插值法所必须的计算易于用笔算完成，因此这一方法广泛用于列表数据的插值中.

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966(英译本: Berezin, I. S., Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

М. К. Самарин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.

[A2] Steffensen, J. F., Interpolation, Chelsea, reprint, 1950.

沈永欢 译

线性算子 [linear operator; линейный оператор]，线性变换(linear transformation)

两个**向量空间**(vector space)之间与它们的线性结构一致的一个映射．更精确地，一个映射 $A:E\to F$，其中 E 和 F 是域 k 上的向量空间，称为从 E 到 F 的一个线性算子，如果对所有的 $x,y\in E$，$\lambda\in k$，

$$A(x+y)=Ax+Ay,\quad A(\lambda x)=\lambda Ax\ .$$

最简单的例子是零线性算子(zero linear operator) $\mathbf{0}$，它把所有的向量映到 $0\in F$，和(在 $E=F$ 的情形下)恒等线性算子(identity linear operator) $\mathbf{1}$，它使所有的向量不变．

线性算子的概念和向量空间的概念一起在线性代数中是基本的，在数学和物理各种各样的分支中，首先是在分析及其应用中起作用．

线性算子的现代定义由 G. Peano 首先给出([1])(对 $k=\mathbf{R}$)．然而，它植根于已经积累了(从线性函数 $y=ax$ 开始)大量例子的数学先前的发展．在代数学中，它们的一个不完全的表包括了线性方程组的线性代换，以及四元数和 Grassmann 代数元素的乘法；在解析几何学中，它包括了坐标变换；在分析中，它包括了微分和积分变换以及 Fourier 积分．

直到20世纪初已经系统研究过的线性算子仅仅是域 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 上有限维空间间的那些算子．第一个“无穷维”的报告，也是涉及一般域的由 O. Toeplitz([3])作出．通常，无穷维空间 E 和 F 间的线性算子是在它们对于一定的拓扑是连续的假设下研究的．作用在各类拓扑向量空间，首先是 Banach 和 Hilbert 空间上的连续线性算子是线性泛函分析研究的主要对象(亦见 **Banach 空间**(Banach space)；**Hilbert 空间**(Hilbert space)；**拓扑向量空间**(topological vector space))．

在线性算子的理论中，$F=k$ 和 $F=E$ 这两个特殊情形是最重要的．在第一种情形下，一个线性算子称为一个泛函(functional)(见**线性泛函**(linear functional))，在第二种情形下称为作用在 E 上的线性算子，或者自同态(endomorphism)．

从 E 到 F 的线性算子组成 k 上的一个向量空间 $\mathscr{L}(E,F)$(对 $\mathscr{L}(E,E)$ 写为 $\mathscr{L}(E)$)，加法和数乘由公式

$$(A+B)x=Ax+Bx \text{ 和 } (\lambda A)x=A(\lambda x),\ A,B\in\mathscr{L}(E,F),$$

$x\in E$，$\lambda\in k$ 给出；零是 $\mathbf{0}$．线性算子 $A:E_1\to F_1$ 和 $B:E_2\to F_2$ 的乘法(复合) AB 仅当 $F_2=E_1$ 时定义为 B 和 A 的逐次运用．关于这三个运算 $\mathscr{L}(E)$ 是域 k 上带单位元 $\mathbf{1}$ 的结合代数的一个例子(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))．这“不仅是一个例子”：k 上每一个结合代数都可以嵌入到一个对某个 E 的 $\mathscr{L}(E)$ 中．

一个固定域上的向量空间(对象)和线性算子(态射)与合成律一起组成一个**范畴**(category) $\mathscr{L}in$ 下面的概念是一般范畴概念的特殊情形(与 $\mathscr{L}in$ 有关)．对线性算子 $A:E\to F$，它的核(kernel)是子空间 $\mathrm{Ker}A=\{x\in E: Ax=0\}$，它的象(image)是子空间 $\mathrm{Im}A=\{y\in F: y=Ax$ 对某个 $x\in E\}$，它的余核(cokernel)是商空间 $\mathrm{Coker}A=F/\mathrm{Im}A$．线性算子 A 称为一个单态射(monomorphism)，如果 $\mathrm{Ker}A=\{0\}$；一个满态射(epimorphism)，如果 $\mathrm{Im}A=F$．线性算子 $B:F\to E$ 称为 A 的左(left)(分别地，右(right))逆(inverse)，如果 BA 是 E 中的恒等算子(分别地，AB 是 F 中的恒等算子)．同时是 A 的左和右逆的线性算子 A^{-1} 称为 A 的逆(inverse)．有逆的线性算子(分别地，自同态)称为同构(isomorphism)(分别地，自同构(automorphism))．

范畴 $\mathscr{L}in$ 关于线性算子的加法是一个 **Abel 范畴**

(Abelian category)；特别地，$\mathscr{L}in$ 为单态射，又为满态射的线性算子是一个同构．而且，在 $\mathscr{L}in$ 中每一个单态射有一个左逆，每一个满态射有一个右逆．类似于 $\mathscr{L}in$ 引入范畴 $\mathscr{B}an$ 和 $\mathscr{H}il$；第一个的对象是 Banach 空间，第二个的对象是 Hilbert 空间；在这两种情形下，态射都是连续线性算子．两个范畴都是加性的(见**加性范畴**(additive category))，但不是 Abel 的．其中的同构称为拓扑同构(topological isomorphisms)；他们是具有连续逆的线性算子．

线性算子内蕴理论最重要的典型问题之一，是按某一种等价对自同态(或者至少它们的某些类)进行分类的问题(problem of classfying emdomorphisms)．对纯代数中的线性算子，通常考虑 $\mathscr{L}in$ 中自同态的一般范畴等价；这称为相似性(similarity)．换言之，分别作用在 E 和 F 上的线性算子 A 和 B 是相似的，如果对某个同构 U 图式

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & E \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ F & \xrightarrow[B]{} & F \end{array} \qquad (1)$$

交换．(一般)Banach 空间中连续线性算子的等价称为拓扑等价(topological equivalence)，并且在一般的范畴，这时是在 $\mathscr{B}an$ 的意义下理解；这蕴涵图式(1)对某个拓扑同构 U 交换．对 Hilbert 空间中的线性算子，这对应于图式(1)对某个酉(见下)算子 U 交换的要求(选择 A 与 B 的酉等价(unitary equivalence)作为基础)．

除此之外，在带拓扑的空间间的线性算子的理论中，有重要的用结构相对简单的算子对各类线性算子的逼近问题(problems of approximating)．关于寻找具体空间，最经常的是函数空间上线性算子的一般形式的问题起了重要的作用．

在相似不变量中，最重要的是谱和给定维数的不变子空间的个数．设 A 是 E 上的线性算子．它的谱(spectrum)是 k 中这样的 λ 组成的子集 $\sigma(A)$，对它 $\lambda 1-A$ 没有逆．E 的一个子空间 E_0 称为关于 A 不变(invariant)，如果 $x\in E_0$ 蕴涵 $Ax\in E_0$．除了一个线性算子的核和象以外，包含这个算子的所谓本征向量(eigen vectors)的一维子空间也是例子，即这些 $x\in E(x\neq 0)$，对它 $Ax=\lambda x(\lambda\in k)$．数 λ，称为 A 的本征值(eigen value)，自动地属于 A 的谱．

线性算子的概念是用任意的环代替域得到的模的态射的概念的一个特殊情形．在许多方面模的态射在它们的性质上不像线性算子，但是关于后者的结果形成一个研究它们的促进因素．

有限维空间上的线性算子(没有附加结构)．对这种线性算子的主要解析工具是矩阵记号(matrix notation)．设 E 和 F 是有固定基 $e_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 和 $f_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的空间，设 $A:E\to F$ 是一个线性算子，并且设 $a_{ij}\in k$ 是 Ae_j 关于第二个基的展开式的第 i 个系数．那么 $(m\times n)$ 维矩阵 $M_A=\|a_{ij}\|$ 称为线性算子 A 关于基 e_j 和 f_i 的矩阵(matrix)．如果 $E=F$ 矩阵记号通常取重合的基(亦即，$e_i=f_i$，$1\leqslant i\leqslant m=n$)．在转移到其他的基时，线性算子的矩阵按简单的公式改变．

对线性算子的各种特征，通常它们矩阵的可有效计算的特征与之对应．例如，$\dim \operatorname{Im} A=r(M_A)$ 和 $\dim \operatorname{Ker} A=\dim E-r(M_A)$，其中 r 是这个矩阵的秩(rank)；特别地，A 是一个同构，当且仅当 $\dim E=\dim F=r(M_A)$；这个条件等价于 M_A 的**行列式**(determinant)不为零．对线性算子的代数运算，它们取固定基的矩阵的同名运算与之对应．

线性算子是相似的，当且仅当它们能用同一个矩阵描述(每一个取它“自己的”基)．一个线性算子的本征值是它的矩阵的**特征多项式**(characteristic polynomial)的根．这蕴涵在代数闭域(例如，$\mathbf{C}$)上的有限维空间上的每一个线性算子至少有一个本征向量．任意域上有限维空间上的一个线性算子的谱是它的本征值的集合．

代数闭域上有限维空间的自同态分类问题已经完全解决，并且相似性类已用不变子空间的术语描述．这里主要的步骤是由 C. Jordan(他考虑域 $\mathbf{C}$)发现的下面的分类定理．在主对角线上为固定的 $\lambda\in k$，在上次对角线上为 1 并且在其他地方为零的矩阵称为一个 Jordan 块(Jordan block)，一个在主对角线上为(不同维数和带不同 λ 的)Jordan 块在其他地方为零的分块矩阵称为 Jordan 矩阵(Jordan matrix)．那么每一个自同态可以按某个基写成一个 Jordan 矩阵．寻求这样一个基称为一个线性算子向 Jordan 形式(Jordan form)的约化(reduction)．由于用 Jordan 矩阵描述的算子是相似的，当且仅当它们的矩阵在 Jordan 块的一个置换后一致，这个定理意味着 Jordan 矩阵在适当的等同后提供了相似不变量的一个完全集．

Banach 空间上的连续线性算子．这个理论的基础由 S. Banach 奠定(见[4])．

例．1) 在 l_p(从现在起，$1\leqslant p<\infty$)：乘一个有界数列的乘法线性算子；左(分别地，右)移位线性算子，它映 $\xi=\{\xi_i\}\in l_p$ 到 $\{\eta_i=\xi_{i+1}\}$(分别地，到 $\eta=\{\eta_i:\eta_0=0,\ \eta_i=\xi_{i-1},\ i>0\}$)．

2) 在 $L_p[a,b]$ 或 $C[a,b]$：乘以 $[a,b]$ 上一个连续函数 φ 的乘法线性算子；映 f 到 g，

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

的不定积分线性算子．

3) 在 $L_p(\mathbf{R})$：平移 $t\in\mathbf{R}$ 的线性算子，它映 f 到

g，$g(x)=f(x+t)$．

4) 从 $L_1(\mathbf{R})$ 到 $C_0(\mathbf{R})$ 中：经典的 Fourier 算子，它映 f 到 g，

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt \ .$$

Banach 空间间的一个线性算子 $A:E\to F$ 是连续的 (continuous)，当且仅当它是有界的 (bounded)，亦即 E 中每一个有界集的象在 F 中是有界的，或等价地，如果有一个称为算子范数 (operator norm) 的 (有限) 数 $\|A\|=\sup\{\|Ax\|:\|x\|\leqslant 1\}$(一个类似的论断对任意的赋范空间也成立)．从 E 到 F 中的连续线性算子组成 $\mathscr{L}(E,F)$ 的一个子空间 $B(E,F)$，它关于 $\|A\|$ 是一个 Banach 空间．子空间 $B(E,E)$，常记为 $B(E)$，甚至是一个关于算子乘法的 Banach 代数．这些代数的类在每一个 Banach 代数都对某个 E 拓扑同构于 $B(E)$ 的一个子代数的意义下是万有的．$B(E,F)$ 中由拓扑同构组成的子集是开的，并且对 $E=F$ 包含一个心为 $\mathbf{1}$ 半径为 1 的开球．

线性算子的 Banach 理论中有两个定理起着重要作用，它们与 **Hahn-Banach 定理** (Hahn-Banach theorem)(亦见**线性泛函** (linear functional))一起称为线性分析的三个基本原理．“一致有界原理”最简单的形式是 Banach-Steinhaus 定理 (Banach-Steinhaus theorem)：如果连续线性算子 $A_n:E\to F(n=1,2,\cdots)$ 使得对每一个 $x\in E$ 有 $\sup_n\|A_nx\|<\infty$，那么 $\sup_n\|A_n\|<\infty$．“开映射原理”最简单的形式是 Banach 定理 (Banach theorem)：如果一个连续线性算子有一个逆，那么这个逆自动地是连续的．在这两个定理中，空间是 Banach (完全的) 空间的要求是必不可少的．

一个连续线性算子 $A:E\to F$ 的谱，通常对复空间考虑，是 $\mathbf{C}$ 中一个非空紧集．在无穷维空间的情形下，一个线性算子本征值的集合称为点谱 (point spectrum)，通常仅组成 $\sigma(A)$ 的一部分．对剩下的 $\lambda\in\sigma(A)$ 总有 $\mathrm{Im}(\lambda\mathbf{1}-A)\neq E$；这些数按照 $\mathrm{Im}(\lambda\mathbf{1}-A)$ 在 E 中稠或不稠分为两个集合，连续谱 (continuous spectrum) 和剩余谱 (residual spectrum)．例如，乘以 $\varphi(x)=x$ 的乘法线性算子的谱是区间 $[a,b]$，但是在 $L_p[a,b]$ 空间的情形下它所有的点属于连续谱，在 $C[a,b]$ 的情形下它们属于剩余谱．

定义在 $\mathbf{C}\setminus\sigma(A)$ 上的算子值函数 $R(\lambda)=(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}$ 称为线性算子 A 的预解式 (resolvent)．这是有用的，特别是因为对每一个在谱的某个邻域 U 上全纯的函数 w，使得可以考虑线性算子 (记为 $w(A)$)

$$\int_\Gamma w(\lambda)R(\lambda)d\lambda,$$

其中 Γ 是 U 中包围了谱的光滑围道．用这种方法可以构造“全纯算子演算”；至于“全纯多个算子演算”，即不严格地讲，给多个“算子”变元的全纯函数的概念一个合理的意义，它的构造问题原来要困难得多．那些在一定的意义下接近完全的结果已用同调代数的方法得到 ([5])．

Banach 空间间的线性算子理论中的一个重要运算是从 $A:E\to F$ 到它的所谓伴随线性算子 (adjoint linear operator) $A^*:F^*\to E^*$ (亦见**伴随算子** (adjoint operator))，它由公式

$$A^*f(x)=f(Ax)$$

定义．这个运算有性质

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\ (\lambda A)^*=\lambda A^*,\ (AB)^*=B^*A^*,$$
$$\|A^*\|=\|A\|$$

(在等式的左边有意义的假设下)．如果 E 和 F 是自反的 (见**自反空间** (reflexive space))，那么 $(A^*)^*=A$．

下面是 Banach 空间中最重要的一些线性算子类．

1) $A:E\to F$ 称为一个**紧算子** (compact operator)，或者一个**完全连续算子** (completely-continuous operator)，如果它把 E 上任一有界集映成 F 中一个全有界 (即准紧) 集．能用有限维 (有有限维象) 线性算子按算子范数逼近的每一个线性算子是紧的．对于绝大多数经典 Banach 空间 F，其逆也是真的：从任何 E 到 F 的每一个紧线性算子可以用有限维算子逼近．所谓的逼近问题 (approximation problem) (这是否对所有的 F 成立?) 已经被否定地回答了 ([6])．

E 中的恒等线性算子是紧的，当且仅当 E 是有限维的 (Riesz 定理 (Riesz theorem))．紧线性算子的谱是一个含有 0，至多可数的集合．如果谱是无限的，那么 0 是它的唯一极限点．每一个 $\lambda\in\sigma(A)(\lambda\neq 0)$ 是一个本征值，并且对应于它的本征向量组成一个有限维空间．

2) $A:E\to F$ 称为**核型算子** (nuclear operator)，如果它可以表示为一维线性算子组成的在 $B(E,F)$ 中绝对收敛的级数；这样的算子一定是紧的．利用核型线性算子可以定义分析中重要的称为核型空间的一类拓扑向量空间 (见**核型空间** (nuclear space))．

3) $A:E\to F$ 称为 **Fredholm 算子** (Fredholm operator)，如果它的核和余核是有限维的，这样一个线性算子的象一定是闭的．线性 Fredholm 算子的主要特征是它的指标 $\dim\mathrm{Ker}A-\dim\mathrm{Coker}A$．线性 Fredholm 算子的集合在 $B(E,F)$ 中是开的，并且其上的指标 (与分别取的核和余核的维数形成对照的) 是一个局部常数函数．线性 Fredholm 算子理论的先驱是积分方程理论．通过实质性地证明 E. Fredholm 确立了 (并且 D. Hilbert

抉择出这个“几何”背景)形如 $1+A$(这里 A 是紧的)的线性算子是 Fredholm 算子并且有指标零(见 **Fredholm 抉择定理**(Fredholm alternative)).考虑流形上的椭圆型微分表达式时产生重要的特殊线性 Fredholm 算子类.计算它们的指标的问题需要代数拓扑学的工具([8])(亦见**指标定理**(index theorems)).

Banach 空间自同态的分类问题,从对它的解给出一个有限维模型的 Jordan 的定理的观点来看,可以当作构造线性算子的 Jordan 形式适当的无穷维类似的问题的“最初的逼近”.然而远没有被解决:不用说对不变子空间的一个“充分的”集合一无所知,到现在为止(1989)就连作用在 Hilbert 空间上的每一个算子是否至少有一个非平凡(不同于(0)和 H)的不变子空间也不知道.如果作用在任意 Banach 空间上的一个线性算子 A 不与 $\mathbf{1}$ 成比例,并且和某个紧线性算子交换,那么与 A 交换的所有线性算子的集合有一个非平凡不变子空间(见[9]).

除了赋范空间的拓扑以外,在 $B(E,F)$ 中还有规定其中一个**局部凸空间**(locally convex space)结构的拓扑.最重要的是强和弱算子拓扑(strong and weak operator topologies),分别用半范数(semi-norms)的系

$$\{p_x: p_x(A)=\|Ax\|,\ x\in E\}$$

和

$$\{p_{x,f}: p_{x,f}(A)=|f(Ax)|: x\in E, f\in F^*\}$$

规定.

拓扑向量空间上连续线性算子的理论(这样的线性算子的例子是广义函数上的 Fourier 变换)是在 Banach 理论的基础上发展的.其中推广 Banach 的经典定理和其他定理可能性的研究占有十分重要的位置;它导致许多重要类型空间的引入.例如,关于连续性和有界性等价的定理、Banach-Steinhaus 定理和 Banach 关于逆算子的定理对任意的,即使对局部凸,分离的和完全的空间是不成立的.同时,这些定理的第一个是真的,如果 E 是一个囿型空间;第二个是真的,如果 E 是一个**桶型空间**(barrelled space);第三个是真的,如果 E 是绝对完全的,并且 F 是桶型空间.

Hilbert 空间上的连续线性算子(有限维和无限维的).这个理论是在 Hilbert([10])关于积分方程和无限二次型的工作中首次定形的.

例.1)上面考虑的当 $p=2$ 时 l_p, $L_p[a,b]$, $L_P(\mathbf{R})$ 中的线性算子的所有例子.

2)$L_2[a,b]$ 中映 f 到 g,

$$g(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$$

的积分算子,其中 K 是集合 $a\leqslant x, y\leqslant b$ 上的平方可积函数.这样的线性算子总是紧的.

3)$L_2(\mathbf{R})$ 中的 Fourier 算子是由在 $L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$ 上与经典 Fourier 算子(见上)一致这一事实唯一确定的.

下面以对 $\mathbf{C}$ 上的空间具有的形式给出一些概念和事实:也就是说,在复空间中,这个理论已经显示出是最重要的和最有意义的.

在 Banach 理论背景下线性算子的 Hilbert 理论的特殊位置,是由**伴随算子**(adjoint operator)概念显著增加的作用决定的.由于一个 Hilbert 空间 H 和它的伴随 H^* 是反同构的,线性算子 $A^*: H_2^*\to H_1^*$ 自然地等同于由 $(Ax,y)=(x,A^*y)$, $x\in H_1, y\in H_2$ 唯一决定的从 H_2 到 H_1 的线性算子;在这种等同下,与 H 中一个自同态伴随的线性算子还是作用在 H 中.$B(H)$ 中产生一个重要的附加结构——从 A 转移到 A^* 的运算,它有对合的性质,并且 $B(H)$ 关于它是一个 **C^* 代数**(C^*-algebra).事实上,每一个 C^* 代数对某个 H 等距 * 同构于 $B(H)$ 的一个 C^* 子代数(Гельфанд-Наймарк 定理(Gel'fand-Naĭmark theorem)).

下面的线性算子类是 Hilbert 空间的特色.

线性算子 $A: H\to H$ 称为**自伴算子**(self-adjoint operator)或者 **Hermite 算子**(Hermitian operator),如果 $A^*=A$.与其平方相等的自伴线性算子称为一个投影算子(projector、projection operator);这样一个线性算子,可以实现为到 H 的一个闭子空间上的正交投影算子.线性算子 $A: H_1\to H_2$ 称为一个**酉算子**(unitary operator)(在域 $\mathbf{R}$ 的情形下,一个正交算子(orthogonal operator)),如果 $A^*=A^{-1}$,或者,等价地,如果 $(Ax,Ay)=(x,y), x,y\in H_1$ 并且 $\operatorname{Im}A=H_2$.一个线性算子是酉的,当且仅当它是一个保持范数的同构.自伴和酉自同态是**正规算子**(normal operator)的特殊情形:一个线性算子 $A: H\to H$ 使得 $A^*A=AA^*$.

l_2(分别地,$L_2[a,b]$)中乘以一个序列(分别地,一个函数)的乘法线性算子是自伴的,当且仅当这个序列(函数)是实值的.一个线性积分算子是自伴的,当且仅当几乎处处有 $K(x,y)=\overline{K(y,x)}$.在 $L_2(\mathbf{R})$ 中移位算子和 Fourier 算子是酉的.在 l_2 中左和右移位线性算子是互为伴随的,并且不是正规的.自伴算子的谱位于 $\mathbf{R}$ 中,酉算子的谱位于 $\mathbf{C}$ 中的单位圆周上.投射 $P\neq\mathbf{1},\mathbf{0}$ 的谱由点 0 和 1 组成.正规线性算子的谱可以是 $\mathbf{C}$ 中任意紧集.一个自伴线性算子对应于不同本征值的本征向量是正交的.

上面描述的线性算子类应用在数学和物理的许多分支中,包括量子力学(那里自伴算子理解为可观察量),表示理论和调和分析,微分方程理论和动力系统理论.

有关作用在有限维 Hilbert 空间上的一个线性算子

的所有信息，都由它的关于一个正交基的矩阵记号所提供．按照这个记号，转移到伴随线性算子对应于取这个矩阵转置的复共轭；作为一个推论，对一个自伴线性算子的矩阵 $\|a_{ij}\|$ 有 $a_{ji}=\overline{a_{ij}}$．“关于约化到对角形”的经典定理断言，每一个正规(在域 **R** 的情形下，每一个自伴)线性算子可以按某个标准正交基写成一个对角矩阵．与线性算子是酉等价(当且仅当它们可以用同样的矩阵描述(每一个用它自己的正交基))的事实一起，这个定理蕴涵本征值(按它们的重数计)的集合组成正规线性算子酉等价不变量一个完全系．

约化到对角型的定理在这一点上比 Jordan 的定理“更巧妙”，找到了它的一个无穷维类似，1912 年发现的，正规算子的谱定理(spectral theorem)：一个正规线性算子可以唯一地表示为一个算子值 Stieltjes 积分 $A=\int_{\sigma(A)}\lambda P(d\lambda)$，这里 $P(d\lambda)$ 是 $\sigma(A)$ 的 Borel 子集上的一个可数可加正则(例如在强算子拓扑的意义下)函数，它在投射中取值并且使得 $P(\sigma(A))=1$(见**谱测度**(spectral measure))．一个推论是每一个正规线性算子可以用投射的线性组合逼近．

在 Hilbert 的定理的基础上(任意维空间中的)正规线性算子直到酉等价的一个完全分类已经得到([11])；特别地，每一个正规线性算子原来都酉等价于 $L_2(\sigma)$ 中乘以有界可测函数的乘法算子，这里 σ 是有有限测度的可测空间．对可分空间中的紧正规线性算子描述就简化了，这样的线性算子以它自己的本征向量作为规范正交基，并且因此与作用在 l_2 中乘以一个序列(这个序列必须收敛到零)的乘法算子酉等价．

在一个正规的 A 的情形下，谱定理有可能对比谱上的全纯函数更广泛的函数类给函数表达式 $f(A)$ 一个意义，例如，对一个连续的 f，线性算子 $f(A)$ 定义为 $\int_{\sigma(A)}f(\lambda)P(d\lambda)$．如果 A 是自伴的．那么线性算子 $\exp(iA)$ 是酉的．

主要的努力已经集中在各类非正规线性算子的研究上，首先是抽象 Volterra 算子，凝聚算子和谱算子(见 [11]－[13]，和 **Volterra 算子**(Volterra operator)；**谱算子**(spectral operator)；**凝聚算子**(condensing operator))，虽然与谱定理中的正则性可比的正则性仍然没有发现，然而在这方面已经得到深刻的结果．

分析的发展和它的应用，首先是微分方程和量子力学，促使我们超出有界(即，连续)线性算子的范围．严格地讲，H 中的一个**无界算子**(unbounded operator) 按这里采用的意义不是一个线性算子，由于它不是定义在整个 H 上，通常，仅定义在一个稠密子空间上．典型的例子是 $L_1(\mathbf{R})$ 中乘以 x 的乘法算子和微分算子．对无界线性算子已经定义了谱的类似物，伴随线性算子和上面考虑的线性算子类．虽然它们的理论比有界线性算子的理论复杂得多，但是后者的许多深刻的结果已经作了有意义的推广．其中最重要的是 J. von Neumann 对无界自伴算子发现的谱定理的一个类似结果．

参考文献

[1] Peano, G., Calcolo geometrico secondo L'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Bocca, 1888.

[2] Гельфанд, И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971 (中译本：И. М. 盖尔冯德，线性代数学，高等教育出版社，1957)．

[3] Toeplitz, O., Ueber die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, **28** (1909), 88－96.

[4] Banach, S. S., A course of functional analysis, Kiev, 1948 (乌克兰文)．

[5] Taylor, J. L., A general framework for a multi－operator functional calculus, *Advances in Math.*, **9** (1972), 2, 183－252.

[6] Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Math.*, **130** (1973), 309－317.

[7] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[8] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972 (Справоч. матем. б-ка).

[9] Ломоносов, В. И., 《Функц. анализ и его прилож.》, **7**(1973), 3, 55－56.

[10] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953.

[11] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[12] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[13] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, spectral operators, 3, Interscience, 1971.

[14] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967 (英译本：Gokhberg, I. Ts. and Kreĭn, M. G., Theory and applications of volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1970).

[15] Szökevalfi-Nagy, B. and Foias, C., Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, 1970 (译自法文)．

[16] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra; Modules, Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6 (译自法文)．

А. Я. Хелемский 撰

【补注】 作为相当近代的关于多维函数演算的教材见 [A6]．

参考文献

[A1] Gohberg, I. and Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhauser, 1977.

[A2] Gohberg, I. C. and Kreĭn, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math.

Soc., 1969 (译自俄文).

[A3] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand 1958.

[A4] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.

[A5] Pearcy, C. (ed.), Topics in operator theory, Amer. Math. Soc., 1974.

[A6] Vasilescu, F. H., Analytic functional calculus, Reidel, 1982.

鲁世杰 译 葛显良 校

线性常微分方程 [**linear ordinary differential equation**; **линейное дифференциальное уравнение обыкновенное**]

一种**常微分方程** (differential equation, ordinary), 它对未知函数 (含一个自变量) 及其各阶导数都是线性的, 即下列形式的方程:

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t), \qquad (1)$$

其中 $x(t)$ 是未知函数, $a_i(t)$, $f(t)$ 是已知函数; 数 n 称为方程 (1) 的阶 (order) (下面叙述线性常微分方程的一般理论; 对于二阶方程亦见**二阶线性常微分方程** (linear ordinary differential equation of the second order)).

1) 如果在 (1) 中函数 $a_1, \cdots, a_n, f$ 在区间 (a, b) 上是连续的, 则对任何数 $x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}$ 和 $t_0\in(a, b)$, 存在方程 (1) 的在整个区间 (a, b) 上定义的唯一解, 它满足初始条件 (initial conditions)

$$x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x_0',\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}.$$

方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (2)$$

称为对应于非齐次方程 (inhomogeneous equation) (1) 的齐次方程 (homogeneous equation). 如果 $x(t)$ 是 (2) 的一个解, 且

$$x(t_0)=x'(t_0)=\cdots=x^{(n-1)}(t_0)=0,$$

则 $x(t)\equiv 0$. 如果 $x_1(t), \cdots, x_m(t)$ 都是 (2) 的解, 则任何线性组合

$$C_1x_1(t)+\cdots+C_mx_m(t)$$

是 (2) 的一个解. 如果 n 个函数

$$x_1(t), \cdots, x_n(x) \qquad (3)$$

是 (2) 的线性无关的解, 则对 (2) 的每个解 $x(t)$, 存在常数 $C_1, \cdots, C_n$, 使得

$$x(t)=C_1x_1(t)+\cdots+C_nx_n(t). \qquad (4)$$

于是, 如果 (3) 是 (2) 的**基本解组** (fundamental system of solutions) (即 (2) 的一组 n 个线性无关的解), 则 (2) 的**通解** (general solution) 由 (4) 给出, 其中 $C_1, \cdots, C_n$ 是一些任意常数. 对于每个非奇异的 $n\times n$ 矩阵 $B=\|b_{ij}\|$ 和每个 $t_0\in(a, b)$, 存在方程 (2) 的基本解组 (3), 使得

$$x_i^{(n-j)}(t_0)=b_{ij},\ i,\ j=1, \cdots, n.$$

对于 n 个函数 (3), 行列式

$$W(t)=\det\left\|\begin{matrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t)\\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t)\end{matrix}\right\|$$

称为 **Wronski 行列式** (Wronskian 或 Wronski determinant). 如果 (3) 是 (2) 的一个基本解组, 则对于一切 $t\in(a,b)$, $W(t)\neq 0$. 如果至少对于一点 t_0, $W(t_0)=0$, 则 $W(t)\equiv 0$, 且在这种情况下, 方程 (2) 的 n 个解 (3) 是线性相关的. 对于方程 (2) 的解 (3) 的 Wronski 行列式, **Liouville - Остроградский 公式** (Liouville-Ostrogradski formula) 成立:

$$W(t)=W(t_0)\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a_1(\tau)d\tau\right].$$

非齐次方程 (1) 的通解是齐次方程 (2) 的通解与 (1) 的一个特解 $x_0(t)$ 之和, 由下式给出:

$$x(t)=C_1x_1(t)+\cdots+C_nx_n(t)+x_0(t),$$

其中 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 是 (2) 的一个基本解组, 而 $C_1, \cdots, C_n$ 是任意常数. 如果已知方程 (2) 的一个基本解组 (3), 非齐次方程 (1) 的一个特解可用**常数变易法** (variation of constants) 求得.

2) n 阶线性常微分方程组 (system of linear ordinary differential equations) 是一个方程组

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_i+b_i(t),\ i=1, \cdots, n,$$

或者向量形式

$$\dot{x}=A(t)x+b(t), \qquad (5)$$

其中 $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 是未知列向量, $A(t)$ 是 n 阶方阵, $b(t)$ 是已知向量函数. 再假设 $A(t)$ 和 $b(t)$ 在某个区间 (a, b) 上是连续的. 在这种情况下, 对于任何 $t_0\in(a, b)$ 和 $x_0\in\mathbf{R}^n$, 存在方程组 (5) 的在整个区间 (a, b) 上定义并满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的唯一解.

线性方程组

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (6)$$

称为对应于非齐次方程组(5)的齐次方程组. 如果$x(t)$是(6)的解，且$x(t_0)=0$，则$x(t)\equiv 0$；如果$x_1(t),\cdots,x_m(t)$都是(6)的解，则任何线性组合

$$C_1x_1(t)+\cdots+C_mx_m(t)$$

也是(6)的解；如果$x_1(t),\cdots,x_m(t)$是(6)的线性无关的解，则对于任何$t\in(a,b)$，向量$x_1(t),\cdots,x_m(t)$是线性无关的. 如果n个向量函数

$$x_1(t),\cdots,x_n(t) \tag{7}$$

构成(6)的一个基本解组，则对于(6)的每个解$x(t)$，存在常数$C_1,\cdots,C_n$，使得

$$x(t)=C_1x_1(t)+\cdots+C_nx_n(t). \tag{8}$$

因此，公式(8)给出了方程组(6)的通解. 对于任何$t_0\in(a,b)$和任何n个线性无关向量$a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^n$，存在方程组(6)的一个基本解组(7)，使得

$$x_1(t_0)=a_1,\cdots,x_n(t_0)=a_n.$$

对于作为方程组(6)的解的n个向量函数，矩阵

$$x(t)=\begin{Vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{Vmatrix} \tag{9}$$

的行列式$W(t)$称为**Wronski 行列式**(Wronskian)，这里$x_{ij}(t)$是第i个解的第j个分量. 如果(7)是(6)的一个基本解组，则对于一切$t\in(a,b)$，$W(t)\neq 0$，而(9)称为一个基本矩阵(fundamental matrix). 如果方程组(6)的解(7)至少对于一点t_0是线性相关的，则它们对于任何$t\in(a,b)$都是线性相关的，这时$W(t)\equiv 0$. 对于方程组(6)的解(7)的Wronski行列式，Liouville公式(Liouville formula)成立:

$$W=W(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}(A(\tau))d\tau\right],$$

其中$\mathrm{Tr}(A(\tau))=a_{11}(\tau)+\cdots+a_{nn}(\tau)$是矩阵$A(\tau)$的迹. 矩阵(9)满足矩阵方程$\dot{X}=A(t)X(t)$. 如果$X(t)$是方程组(6)的一个**基本矩阵**(fundamental matrix)，则对于这个方程组任何另一个基本矩阵$Y(t)$，存在一个非奇异$n\times n$常数矩阵C，使得$Y(t)=X(t)C$. 如果$X(t_0)=E$，其中E是单位矩阵，则基本矩阵$X(t)$称为在点t_0上正规化的(normalized)，而公式$x(t)=X(t)x_0$给出了方程组(6)的满足初始条件$x(t_0)=x_0$的解.

如果把矩阵$A(t)$同它的积分交换，则方程组(6)的在点$t_0\in(a,b)$上正规化的基本矩阵由公式

$$X(t)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]$$

给出. 特别是，对于常数矩阵A，在点t_0上正规化的基本矩阵由公式$X(t)=\exp A(t-t_0)$给出. 方程组(5)的通解是齐次方程组(6)的通解与(5)的一个特解之和，由公式

$$x(t)=C_1x_1(t)+\cdots+C_nx_n(t)+x_0(t)$$

给出，其中$x_1(t),\cdots,x_n(t)$是(6)的基本解组，$C_1,\cdots,C_n$是任意常数. 如果已知方程组(6)的一个基本解组(7)，则非齐次方程组(5)的特解可用**常数变易法**(variation of constants)求得. 如果$X(t)$是方程组(6)的一个基本矩阵，则公式

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$$

给出方程组(5)满足初始条件$x(t_0)=x_0$的解.

3)假设在方程组(5)和(6)中，$A(t)$和$b(t)$在半直线$[a,+\infty)$上是连续的. (5)的一切解或者同时是稳定的、或者同时是不稳定的，于是方程组(5)称为稳定的(stable)(一致稳定的(uniformly stable)，渐近稳定的(asymptotically stable))，如果它的一切解是稳定的(一致稳定的，渐近稳定的)，见**渐近稳定解**(asymptotically-stable solution)；**Ляпунов稳定性**(Lyapunov stability). 方程组(5)是稳定的(一致稳定的，渐近稳定的). 当且仅当方程组(6)是稳定的(一致稳定的，渐近稳定的). 所以，在研究线性微分方程组的**稳定性**(stability)问题时，只需考虑齐次方程组.

方程组(6)是稳定的，当且仅当它的一切解在半直线$[a,+\infty)$上是有界的. 方程组(6)是渐近稳定的，当且仅当对于它的一切解$x(t)$有

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0. \tag{10}$$

后一条件等价于对构成基本解组的n个解$x_1(t),\cdots,x_n(t)$，关系式(10)成立. 渐近稳定的方程组(6)在大范围内是渐近稳定的.

常系数线性方程组

$$\dot{x}=Ax \tag{11}$$

是稳定的，当且仅当A的一切本征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$都具有非正的实部(即$\mathrm{Re}\,\lambda_i\leqslant 0$，$i=1,\cdots,n$)，实部为零的本征值只能有简单的**初等因子**(elementary divisors). 方程组(11)是渐近稳定的，当且仅当A的一切本征值都具有负的实部.

4)方程组

$$\dot{y} = -A^T(t)y \tag{12}$$

称为方程 (6) 的伴随方程组 (adjoint system)，其中 $A^T(t)$ 是 $A(t)$ 的转置矩阵. 如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是 (6) 和 (12) 的任意解，则标量积

$$(x(t), y(t)) \equiv \text{常数}.$$

如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是 (6) 和 (12) 的解的基本矩阵，则

$$Y^T(t)X(t) = C,$$

其中 C 是非奇异常数矩阵.

5) 研究线性方程组的各种特殊性质，特别是稳定性问题，涉及到解的 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent) 概念以及 A. M. Ляпунов 发展的稳定性理论中的第一方法 (见**正则线性方程组** (regular linear system)；**可约线性方程组** (reducible linear system)；**Ляпунов 稳定性**).

6) 两个形如 (6) 的方程组称为渐近等价的 (asymptotically equivalent)，如果在它们的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 之间存在一个一一对应关系，使得

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t) - x_2(t)) = 0.$$

如果具有常数矩阵 A 的方程组 (11) 是稳定的，则它渐近等价于方程组 $\dot{x} = (A + B(t))x$，其中矩阵 $B(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是连续的，并且

$$\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty. \tag{13}$$

如果 (13) 成立，则方程组 $\dot{x} = B(t)x$ 渐近等于方程组 $\dot{x} = 0$.

两个形如 (11) 的常系数方程组称为拓扑等价的 (topologically equivalent)，如果存在一个同胚 $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，使一个方程组的定向轨道转化为另一个方程组的定向轨道，如果两个 n 阶方阵 A 和 B 的实部为负的本征值的个数相同，并且没有实部为零的本征值，则方程组 $\dot{x} = Ax$ 和 $\dot{x} = Bx$ 是拓扑等价的.

7) 假设在方程组 (6) 中，矩阵 $A(t)$ 在整个实轴上是连续的和有界的. 称方程组 (6) 具有指数二分性 (exponential dichotomy)，如果空间 $\mathbf{R}^n$ 分解为直和：$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n_1} \oplus \mathbf{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$，于是对于每个具有 $x(0) \in \mathbf{R}^{n_1}$ 的解 $x(t)$，不等式

$$\|x(t)\| \geqslant c e^{k(t-t_0)}$$

成立，而对每个具有 $x(0) \in \mathbf{R}^{n_2}$ 的解 $x(t)$，不等式

$$\|x(t)\| \leqslant c^{-1} e^{-k(t-t_0)}$$

成立，其中对一切 $t_0 \in \mathbf{R}$, $t \geqslant t_0$，而 $0 < c \leqslant 1$ 和 $k > 0$ 均为常数. 例如，在具有常数矩阵 A 的方程组 (11) 中存在指数二分性，如果 A 没有实部为零的本征值 (这种方程组称为双曲型的 (hyperbolic)). 如果向量函数 $b(t)$ 在整个实轴上是有界的，则具有指数二分性的方程组 (5) 存在在整个实轴 $\mathbf{R}$ 上有界的唯一解.

参考文献

[1] Петровский, И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд. М., 1970 (中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程讲义，人民教育出版社，1959).

[2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970 (中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962).

[3] Арнольд, В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970 (中译本：В. И. 阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985).

[4] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., 1950.

[5] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

[6] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей ляпунова ···, М., 1966.

[7] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

Н. Н. Ладис 撰

【补注】 如果在 (6) 中，$A(t)$ 是周期的，其周期为 T，则基本矩阵具有下列形式：

$$X(t) = Y(t)e^{Rt},$$

其中 $Y(t)$ 是具有 T 周期系数的矩阵，R 是常数矩阵，详见 **Floquet 理论** (Floquet theory).

参考文献

[A1] Bellman, R. E., Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, 1953 (中译本：贝尔曼，微分方程的解的稳定性理论，科学出版社，1960).

[A2] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

张鸿林 译

二阶线性常微分方程 [linear ordinary differential equation of the second order; линейное дифференциальное уравнение второго порядка]

形如

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t) \tag{1}$$

的方程，其中 $x(t)$ 是未知函数，$p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ 是给定的在某个区间 (a, b) 内连续的函数. 对于任何实数 x_0, x_0' 以及 $t_0 \in (a, b)$，存在 (1) 的定义于所有 $t \in (a, b)$ 的唯一解 $x(t)$，满足初始条件 $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$.

如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是对应的齐次方程(homogeneous equation)

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (2)$$

的线性无关的解，而 $x_0(t)$ 是非齐次方程(1)的一个特解，则(1)的**通解**(general solution)由公式

$$x(t) = x_0(t) + C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$$

给出，其中C_1，C_2 是任意常数．如果已知(2)的一个非零解 $x_1(t)$，则此方程的另一个与 $x_1(t)$ 线性无关的解由公式

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{\exp(-\int p(t)dt)}{x_1^2(t)}\, dt$$

给出．如果已知(2)的两个线性无关的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，则可用**常数变易法**(variation of constants)求出(1)的一个特解 $x_0(t)$．

在研究(2)时，把它变换为其他类型的方程起着重要作用．例如，通过变量替换 $x = x_1$，$x' = x_2$，方程(2)就转化为一阶线性方程构成的正规方程组；作未知函数替换

$$x = y\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(t)dt\right),$$

方程(2)就转化为方程 $y'' + R(t)y = 0$，其中

$$R(t) = -\frac{1}{2}p'(t) - \frac{1}{4}p^2(t) + q(t)$$

称为方程(2)的不变量(invariant of an equation)；作变量替换 $x' = yx$，方程(2)就转化为 **Riccati 方程**(Riccati equation)

$$y' + y^2 + p(t)y + q(t) = 0.$$

乘以

$$P(t) = \exp(\int p(t)dt)$$

后，方程(2)就采取自伴形式

$$(P(t)x')' + P(t)q(t)x = 0.$$

方程(2)只在少数几种情形才能由求积来积分；不可积方程(2)的一些最重要的特别类型则产生各种特殊函数(special function)．

关于零点分隔的 Sturm 定理(Sturm theorem)：如果 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 是(2)的线性无关的解，t_1，t_2 $(t_1 < t_2)$ 是 $x_1(t)$ 的相邻的零点，则在区间 (t_1, t_2) 内恰有 $x_2(t)$ 的一个零点．

假定方程

$$x'' + q_1(t)x = 0,\ x'' + q_2(t)x = 0 \quad (3)$$

中的函数 q_1，q_2 在 (a, b) 内连续且有 $q_2(t) > q_1(t)$，则有(比较定理(comparison theorem))：如果 t_1，$t_2(t_1 < t_2)$ 是(3)中第一个方程的一个非零解的相邻零点，则在 (t_1, t_2) 内至少有(3)中第二个方程的任一解的一个零点．

关于方程(1)的线性边值问题(linear boundary value problem)可陈述如下：求(1)的解 $x(t)$，使之满足边界条件(boundary condition)：

$$\alpha_1x(a) + \beta_1x'(a) = \gamma_1,\ \alpha_2x(b) + \beta_2x'(b) = \gamma_2,$$

其中 α_i，β_i，γ_i 是给定的常数且

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} \neq 0.$$

方程

$$x'' + \lambda q(t)x = 0$$

(其中 $q(t) > 0$ 在 $[a, b]$ 上连续)的 **Sturm-Liouville 问题**(Sturm-Liouville problem)可陈述如下：求参数 λ 的值，使所给方程对这些 λ 值具有满足边界条件 $x(a) = x(b) = 0$ 的非零解．这些 λ 值称为本征值(eigen value)，而对应的解称为本征函数(eigen function)．

如果方程(2)中的 t 和 x 是复的，函数 $p(t)$ 和 $q(t)$ 在点 t_0 处全纯，则对任何数 x_0 和 x_0'，存在(2)的唯一的复解 $x(t)$，它在 t_0 处全纯且满足初始条件 $x(t_0) = x_0$，$x'(t_0) = x_0'$．如果方程

$$x'' + \frac{p(t)}{t - t_0}x' + \frac{q(t)}{(t - t_0)^2}x = 0 \quad (4)$$

中的函数 $p(t)$ 和 $q(t)$ 在点 t_0 处是全纯的且数 $p(t_0)$，$q(t_0)$，$q'(t_0)$ 中至少有一不等于零，则 t_0 称为方程(4)的正则奇点(regular singular point)．在这种点的邻域内，可以求(4)的广义幂级数形式的解：

$$x(t) = (t - t_0)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t - t_0)^k,\ c_0 \neq 0; \quad (5)$$

其中 ρ 从定义方程(defining equation)

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0$$

求出，此处 $p_0 = p(t_0)$，$q_0 = q(t_0)$．假定此方程的根 ρ_1，$\rho_2(\rho_1 \leqslant \rho_2)$ 是实的，如果 $\rho_2 - \rho_1$ 不是整数，则有两个线性无关的对应于 $\rho = \rho_1$ 和 $\rho = \rho_2$ 的形如(5)的解；如果 $\rho_2 - \rho_1$ 是整数，则一般地说只有一个对应于 $\rho = \rho_2$ 的形如(5)的解，而第二个解具有更复杂的形式(见[3]－[6])．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970(中译本：Л. С. 庞特里雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962)．

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen,

Chelsea, reprint, 1947 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977).

[3] Sansone, G., Equazioni differenziali nel campo reale Ⅰ, Ⅱ, Zanichelli, 1948 – 1949.

[4] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[5] Tricomi, F., Repertorium der Theorie der Differentialgleichungen, Springer, 1968.

[6] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: B. B. 戈鲁别夫, 微分方程解析理论讲义, 高等教育出版社, 1956).

Н. Н. Ладис 撰

【补注】 亦见**常微分方程** (differential equation, ordinary); **线性常微分方程** (linear ordinary differential equation).

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[A2] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

【译注】 定义方程又称指标方程 (indicial equation), 后一名称现在更加通用.

参考文献

[B1] Birkhoff, G., Rota, G.-C., Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, 1969.

[B2] Schäfke, F. W., Schmidt, D., Gewöhnliche Differentialgleichungen — Die Grundlagen der Theorie im Reellen und Komplexen, Springer, 1973 (中译本: F. W. 谢弗克, D. 施米特, 常微分方程——实域及复域中的理论基础, 人民教育出版社, 1982).

沈永欢 译

常系数线性常微分方程 [linear ordinary differential equation with constant coefficients; линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами]

形如

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

的常微分方程 (见**常微分方程** (differential equation, ordinary)), 其中 $x(t)$ 是未知函数, $a_1, \cdots, a_n$ 是给定的实数, $f(t)$ 是给定的实函数.

对应于 (1) 的齐次方程 (homogeneous equation)

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0 \qquad (2)$$

可求积如下. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是特征方程

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (3)$$

的所有不同的根, 重数分别为 $l_1, \cdots, l_k$; $l_1 + \cdots + l_k = n$. 于是函数

$$e^{\lambda_j t}, \ t e^{\lambda_j t}, \ \cdots, \ t^{l_j - 1} e^{\lambda_j t}, \ j = 1, \cdots, k \qquad (4)$$

是 (2) 的线性无关的解 (一般说是复的); 即它们构成一个**基本解组** (fundamental system of solutions). (2) 的通解是基本解组的具有任意常数系数的线性组合. 如果 $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$ 是复数, 则对每个满足 $0 \leq m \leq l_j - 1$ 的整数 m, 复解 $t^m e^{\lambda_j t}$ 的实部 $t^m e^{\alpha_j t} \cdot \cos \beta_j t$ 和虚部 $t^m e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$ 是 (2) 的线性无关的实解, 从而重数为 l_j 的一对共轭复根 $\alpha_j \pm \beta_j i$ 对应 $2l_j$ 个线性无关的实解

$$t^m e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, \ t^m e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \ m = 0, 1, \cdots, l_j - 1.$$

非齐次方程 (1) 可以用**常数变易法** (variation of constants) 求积. 如果 f 是拟多项式 (quasi-polynomial) 即

$$f(t) = e^{at}(p_m(t)\cos bt + q_m(t)\sin bt),$$

其中 p_m, q_m 是次数 $\leq m$ 的多项式, 且 $a + bi$ 不是 (3) 的根, 则可求 (1) 的形如

$$x_0(t) = e^{at}(P_m(t)\cos bt + Q_m(t)\sin bt) \qquad (5)$$

的特解; 这里 P_m, Q_m 是系数待定的 m 次多项式, 这些系数可通过以 (5) 代入 (1) 求出. 如果 $a + bi$ 是 (3) 的 k 重根, 则可用待定系数法求 (1) 的形如

$$x_0(t) = t^k e^{at}(P_m(t)\cos bt + Q_m(t)\sin bt)$$

的特解. 如果 $x_0(t)$ 是非齐次方程 (1) 的一个特解而 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 是相应的齐次方程 (2) 的基本解组, 则 (1) 的通解由公式

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \cdots + C_n x_n(t)$$

给出, 其中 $C_1, \cdots, C_n$ 是任意常数.

n 阶齐次线性微分方程组

$$\dot{x} = Ax \qquad (6)$$

(其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是未知向量, A 是 $n \times n$ 实矩阵) 可如下求积. 如果 λ 是矩阵 A 的重数为 k 的实本征值, 则可求出对应于 λ 的一个解 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 其中

$$x_1 = P_1(t)e^{\lambda t}, \ \cdots, \ x_n = P_n(t)e^{\lambda t}; \qquad (7)$$

$P_1(t), \cdots, P_n(t)$ 是系数待定的 $k-1$ 次多项式, 这些系数可通过以 (7) 代入 (6) 求出. 恰有 k 个形如 (7) 的线性无关的解. 如果 λ 是重数为 k 的复本征值, 则形如 (7) 的复解的实部和虚部构成 (6) 的 $2k$ 个线性无关的实解, 而一对 k 重共轭复本征值 λ, $\bar{\lambda}$ 得出 (6) 的 $2k$ 个线性无关的实解. 取 A 的所有本征值, 即可求出 n 个线性无关的解, 此即基本解

组.(6)的通解是基本解组的具有任意常数系数的线性组合.

矩阵 $X(t)=e^{At}$ 是(7)的在原点处正规化的**基本矩阵**(fundamental matrix),这是因为 $X(0)=E$,E 是单位矩阵. 这里

$$e^{At}=E+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!};$$

此矩阵级数对任一矩阵 A 和所有实数 t 绝对收敛. 方程组(6)的任何别的基本矩阵都具有 $e^{At}C$ 的形式,C 是 n 阶非退化常数矩阵.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970 (中译本: Л. С. 庞特里雅金,常微分方程,上海科学技术出版社,1962).
[2] Арнольд, В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971 (中译本: В. И. 阿诺尔德,常微分方程,科学出版社,1985).
[3] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

Н. Н. Ладис 撰 沈永欢 译

线性抛物型偏微分方程和方程组[linear parabolic partial differential equation and system; линейное параболическое уравнение и система]

形如

$$\frac{\partial^{k_i}u_i}{\partial t^{k_i}}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{ps_0+|s|\leqslant pk_j}A_{s_0 s}^{ij}(x,t)\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\frac{\partial^{s}}{\partial x^{s}}u_j+$$

$$+f_i(x,t) \qquad (1)$$

的偏微分方程(组),其中 $1\leqslant i\leqslant N$,$k_0,\cdots,k_N$ 是自然数,p 是整数,$s=(s_1,\cdots,s_n)$,$|s|=s_1+\cdots+s_n$,在变量为 $(x,t)=(x_1,\cdots,x_n,t)$ 的区域 D 内考虑此方程. 对于 $(x^0,t^0)\in D$ 点,若多项式(关于 λ)

$$\det\left[\sum_{ps_0+|s|=pk_j}A_{s_0 s}^{ij}\lambda^{s_0}(i\xi)^s-\delta_{ij}\lambda^{k_i}\right]$$

的根 $\lambda_m(\xi,x,t)$ $(1\leqslant m\leqslant k_1+\cdots+k_N)$ 满足不等式

$$\sup_{\substack{m\\|\xi|=1}}\operatorname{Re}\lambda_m(\xi,x^0,t^0)<0, \qquad (2)$$

则称组(1)在 (x^0,t^0) 点是(Петровский)抛物型的,其中 $(i\xi)^s=(i\xi_1)^{s_1}\cdots(i\xi_n)^{s_n}$,$i$ 是虚数单位量,δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

若不等式(2)对 D 中所有点 (x,t) 均成立,则称组(1)在 D 内是抛物型的. 若存在某常数 $\delta>0$,使有

$$\sup_{\substack{m\\|\xi|=1\\(x,t)\in D}}\operatorname{Re}\lambda_m(\xi,x,t)<-\delta,$$

则称组(1)在 D 内是一致抛物型的(uniformly parabolic).

对二阶方程

$$\sum_{i,j=0}^{n}c_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=0}^{n}c_iu_{x_i}+cu=h \qquad (3)$$

情形,人们可给出抛物性的另一定义. 在给定点 $x^0=(x_0^0,\cdots,x_n^0)$,存在一个仿射变换使(3)成为

$$\sum_{i,j=0}^{n}b_{ij}v_{x_ix_j}+\sum_{i=0}^{n}b_iv_{x_i}+bv=g,$$

其中当 $i\neq j$ 时,$b_{ij}(x^0)=0$. 如果在点 x^0 处 $b_{ii}(x^0)$ 中有一个(例如 $b_{00}(x^0)$)为零,而另外一些 $b_{ii}(x^0)\neq0(i>0)$,且它们有同样的符号,还有 $b_0(x^0)\neq0$,则方程(3)在 x^0 点是抛物型的. 若在 D 的每点均为抛物型,则方程(3)在 D 内为抛物型的. 对 D 内抛物型的方程(3),若它的系数充分光滑,则在任意点 $x^0\in D$ 的邻域内,用一自变量的非奇异变换,可化为

$$u_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}+au=f, \qquad (4)$$

其中 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是正定形式.

抛物型方程的一个典型代表是**热传导方程**(thermal-conductance equation)

$$u_t-\sum_{j=1}^{n}u_{x_jx_j}=0, \qquad (5)$$

此方程的一些主要性质为一般抛物型方程保持.

下面一些问题对方程(4)而言是基本的.

Cauchy-Dirichlet 问题(Cauchy-Dirichlet problem):找函数 $u(x,t)$,使在 $t>0$,$x\in\mathbf{R}^n$ 部分满足(4),而在 $t=0$ 上满足初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\mathbf{R}^n.$$

第一边值问题. 在此问题中,(4)被规定在一柱体

$$\overline{Q}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]$$

内,Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一区域. 要找 u 使之满足初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\Omega,$$

及边界条件

$$u\Big|_{\substack{x\in\partial\Omega\\ \sigma\leqslant t\leqslant T}}=\psi(x,t). \qquad (6)$$

第二和第三边值问题仅是条件(6)不同于第一边值问题,此条件由第二边值条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\substack{x\in\partial\Omega\\ \sigma\leqslant t\leqslant T}} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_i = \psi(x, t)$$

或第三边值条件

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right]_{\substack{x\in\partial\Omega\\ 0\leqslant t\leqslant T}} = \psi(x, t)$$

代替，其中 $v_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是外法向 N 的分量.

这些问题的古典解要求解在闭区域中连续，关于空间变量的直到二阶的导数在区域内部连续，并且在第二及第三边值问题中其一阶导数连续到柱体 $\overline{Q}_T$ 的侧面. 而对 Cauchy-Dirichlet 问题，或 Ω 是无界的边值问题，则要求解 u 当 $|x| \to \infty$ 时有界（或更一般地，$|u|$ 按适当方式规定其增长性）.

假定方程（4）是一致抛物型的，且方程的系数，初始及边界条件，以及区域的边界是充分光滑的，而对无界区域情形时原始数据满足适当的增长条件. 在这些假设下，Cauchy-Dirichlet 问题和第一边值问题的解存在且是唯一的. 又若 $a \leqslant 0$，$\sigma > 0$，且满足必须的相容性条件，则对第二及第三边值问题也有类似的结果.

这些问题的唯一性由**最大值原理**（maximum principle）得到. 假设方程（4）的系数在 $\overline{Q}_T$ 连续，Ω 是有界区域；令

$$\Gamma = \partial Q_T \setminus \{(x, t): x \in \Omega, t = T\}$$

及

$$M = \max_{\overline{Q}_T} a, \quad N = \max_{\overline{Q}_T} |f|,$$

则对方程（4）的任一解

$$u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^2(\overline{Q}_T \setminus \Gamma),$$

估计式

$$|u(x, t)| \leqslant e^{mt}[Nt + \max_{\Gamma} |u|], \ (x, t) \in Q_T$$

成立. 最大值原理也能推广到无界区域的情形. 另外，对抛物型方程成立 Zaremba-Giraud 原理的一个类似物，它是关于在极值点的斜导数的符号的原理，这在椭圆型方程理论中是众所周知的.

在抛物型方程理论中，基本解起着重要的作用. 对热传导方程（5），这是函数

$$w(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{(x-\xi)^2/4(t-\tau)},$$

它对 $t > \tau$ 满足（5），且对 $\mathbf{R}^n$ 内任一连续且有界的函数 $\varphi(x)$，在 $\mathbf{R}^n$ 内关于 x 的紧子集上，一致地有

$$\lim_{t\to\tau+0} \int_{\mathbf{R}^n} w(x, t, \xi, \tau)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x).$$

特别地，对 $\tau = 0$，可得 Cauchy-Dirichlet 问题的解

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x, t, \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi. \qquad (7)$$

函数 $\varphi(x)$ 的全体的值影响解在 (x, t) $(t > 0)$ 处的值. 这是下列事实的一个表示：Cauchy-Dirichlet 问题的扰动是以无限速度进行传播的. 这是抛物型方程和双曲型方程之间的本质差异，对于后者，扰动的传播速度是有限的.

在关于系数的光滑性作了非常一般的假定后，也能对一般的抛物型方程及方程组构造其基本解.

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976.

[2] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967 (英译本：Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N., Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., 1968).

[3] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本：A. 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1964).

[4] Эйдельман, С. Д., Параболические системы, М., 1964 (英译本：Eidel'man, S. D., Parabolic systems, North-Holland, 1969).

[5] Ильин, А. М., Калашников, А. С., Олейник, О. А., 《Успехи матем. наук》, **17** (1962), 3, 3 – 46.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 必须强调指出，“Cauchy-Dirichlet 问题”这一名词通常是指在第一边值问题之中. 在全空间内的始值问题称为 Cauchy 或特征 Cauchy 问题（因为数据提在**特征**（characteristic）上面），亦见 **Cauchy 特征问题**（Cauchy-characteristic problem）；**Cauchy 问题**（Cauchy problem）.

同样，在正文中关于第二和第三边值问题之间的差异并不像人们通常发现的那样：在西方文献中，这两个问题并非由 σu 项存在与否来区分，而是由边界条件中出现的导数是余法方向的导数（第二边值问题或 **Neumann 问题**（Neumann problem）），还是一个不同方向的导数（**第三边值问题**（third boundary value problem））来区分.

第四和第五边值问题同样是有某些重要性的问题（见[A1]，[A5]）.

Schauder 型估计在线性抛物型方程理论中具有基本的作用，这种估计在[A3]中得到了. M. Gevrey（[A4]）的经典工作是抛物型方程理论的里程碑.

参考文献

[A1] Baderko, E. A., Solution of a heat conduction problem for concentrated heat capacities by the method of parabolic potentials, *Differential Eq.*, **8** (1972), 940 – 947 (*Differentsial. Uravn.*, **8** (1972), 1225 – 1234).

[A2] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, 1984.

[A3] Ciliberto, C., Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili, *Richerche di Mat.*, **3** (1954), 1234 − 1249.

[A4] Gevrey, M., Oeuvres, C. N. R. S., 1970.

[A5] Ughi, M., Stime a priori la soluzioni di problemi al contorno di quarto e quinto tipo per una equazione parabolica lineare *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **26** (1977), 304 − 328.

[A6] Potter, M. H., Weinberger, H. F., Maximum principles in differential equations, Prentice-Hall, 1967 (中译本：M. H. 普芳特，H. F. 温伯格，微分方程的最大值原理，科学出版社，1985).

仇庆久 译

线性偏微分方程 [**linear partial differential equation**; **линейное дифференциальное уравнение с частными производными**]

形式为

$$F(x, \cdots, p_{i_1 \cdots i_n}, \cdots) = 0$$

的方程，其中 F 是实变量

$$p_{i_1 \cdots i_n} \equiv \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$$

的**线性函数** (linear function)，$i_1, \cdots, i_n$ 是非负整数指标，$\sum_{j=1}^{n} i_j = k$，$k = 0, \cdots, m$，$m \geqslant 1$，导数

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \cdots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m$$

中至少有一个不为零．

详细情况，见**偏微分方程** (differential equation, partial).

А. Б. Иванов 撰　张鸿林 译

线性规划 [**linear programming**; **линейное программирование**]

研究线性函数在由线性不等式和等式组来规定的 n 维向量空间的集合上的极值问题的求解理论和方法的数学学科；线性规划是**数学规划** (mathematical programming) 的分支之一．典型的线性规划问题如下：求线性函数

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

的最大值，条件为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i = 1, \cdots, m; \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \ j = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

其中 c_j, a_{ij} 和 b_i 是给定的数．

线性规划问题是许许多多有技术 - 经济内容的问题的数学模型．企业中的下列计划工作问题是一个例子．为了制造同种产品，必须利用各种生产要素：原材料、劳动力、机械、燃料、运输等等．通常有多种进行生产的工艺模式，并且在这些模式中，生产要素在制造产品的单位时间中的消耗量是不同的．生产要素的消耗量和产品的产出量依赖于以某种工艺模式生产时所花费的时间．问题在于如何合理分配在不同的生产模式上所花的时间，也就是说，如何在每种生产要素的消耗量都有限制时，来适当分配各种生产模式所花的时间，使得产品的产出量最大．这一问题可形式化如下．假设有 n 种制造产品的工艺模式和 m 种生产要素．c_j 是以第 j 种工艺模式生产时在单位时间中所制造的产品量，a_{ij} 是以第 j 种工艺模式生产时在单位时间中所消耗的第 i 种生产要素的量，b_i 是第 i 种生产要素的资源量，x_j 是以第 j 种工艺模式生产的计划时间．量

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

表示第 i 种生产要素在计划为 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 时的总消耗．既然资源由量 b_i 来限制，就引起自然条件 (2) 和 (3)．问题就被提出为：为使生产总量 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 最大，求每种工艺模式的工作时间分配 (最优计划) $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$，即问题 (1) − (3)．另一个应用线性规划问题的有特色的例子是**运输问题** (transport problem)．

线性规划问题也经常作为求解非线性数学规划问题的许多方法中的从属问题而发生．例如，在可行方向法 (见**数学规划** (mathematical programming)) 中，为求出每次迭代的下降方向时，必须解出对应的线性规划问题．

“线性规划”这一术语的含义在于在线性规划中，人们解出一个形成最优行动的规划 (计划)．在这一联系中，线性规划可看作**运筹学** (operations research) 中的数学模型之一．

在比 (1) − (3) 更一般的线性规划问题中，条件 (2) 中的某些 (或全部) 可以是等式，而对变量 x_j 中的某些 (或全部) 可以不加非负条件．任何线性规划问题可以归结为形式 (1) − (3) 的等价问题．

研究线性规划问题性质的基础是对偶理论．问题 (1) − (3) 的对偶问题 (dual problem) 是使函数

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4}$$

最小化，条件为

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \ j = 1, \cdots, n; \tag{5}$$

$$y_i \geqslant 0, \ i = 1, \cdots, m. \tag{6}$$

问题 (1) − (3) 和 (4) − (6) 或者都有解，或者都

无解．目标函数（1）和（4）在两个解上的值重合．

解线性规划问题的主要方法之一是**单纯形法**（simplex method）．可行集（2）和（3）是凸多面集（如果它是有界的，则是高维凸多面体）．如果线性规划有解，那么存在多面集顶点 $\mathbf{x}^*$ 是一个最优计划．单纯形法的要点在于直接搜索顶点，使得目标函数在顶点上的值由一个顶点到另一个顶点时有所增长．每个顶点对应一个方程组，这些方程是以某种特殊形式在不等式组（2），（3）中选取的，使得单纯形法的计算程序可由逐次求解线性代数方程组来组成．算法的简明性使得这一方法的计算机实现很方便．在线性规划中，整个一系列其他有限方法已经得到发展，例如对偶单纯形法（dual simplex method），这时原问题（1）－（3）的解可通过对于对偶问题（4）－（6）应用单纯形法而得到．除了术语“单纯形法”和“对偶单纯形法”以外，也采用术语“逐次最优计划法”和“逐次精确估计法”．

在对实际现象进行模型化时，经常会提出大维数的线性规划问题．这方面的内容取决于计算算法的可能性以及所使用的计算机的诸如内存容量、速度等特征．为解决大维数问题，已经创立考虑约束矩阵的特殊结构的解法．许多这类方法的核心在于限制系统分解（decomposition）为子系统的概念，对于每个子系统必须求解一个维数比原问题的维数低的线性规划子问题．

为求解线性规划问题，除了有限方法以外，也运用构造以最优计划为极限的逼近序列的迭代法．与此有关的有基于应用罚函数的方法（见**罚函数法**（penalty functions，method of）），以及对策论的迭代法；后者是基于任何**矩阵对策**（matrix game）都等价于一对互为对偶的线性规划问题；还有一系列其他方法．

在线性规划中，稳定性问题处于一个重要位置．在实际问题中（尤其是那些有技术－经济内容的问题），原始信息往往只以一定的精度已知，即使对原始数据只有一点小扰动（误差），也可能使扰动解对真实解有可观的偏差．在某些有限方法的数值实现中，会带来舍入误差，这些舍入误差的累积，特别是在大维数问题中，可以导致所得到的逼近解对真实解的显著的偏离．这两种情况都刻画了不稳定性质，并且对不适定问题是内在的．解不适定的线性规划问题的方法已经得到发展．这样，在正则化方法中，利用对解的某些附加信息，可通过一个带参数的稳定问题的序列来逼近原问题，使得前者的解序列收敛于原问题的解．

除了有限维线性规划问题以外，还可考虑无限维空间上的线性规划问题．例如，具有混合约束的线性最优控制问题就与这类问题有关．

参考文献

[1] Юдин, Д. Б., Гольштеин, Е. Г., Линейное программирование, М., 1969.

[2] Dantzig, G. B., Linear programming and extensions, Princeton Univ. Press, 1963.

[3] Еремин, И. И., Астафьев, Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1976.

[4] Карманов, В. Г., Математическое программирование, М., 1975.

[5] Тер-Крикоров, А. М., Оптимальное управление и математическая и математическая экономика, М., 1977.

В. Г. Карманов 撰

【补注】 线性规划的创立之父是前苏联数学家 Л. В. Канторович 和美国数学家 G. B. Dantzig，前者还因他在这一领域中的工作获得诺贝尔经济学奖．

线性规划问题的计算复杂性长期来是一个开问题．单纯形法的所有变种都被鉴定为在最坏的情况下需要指数时间；见例如，[A5]．1979年，Л. Г. Хачиян（[A4]）解决了对线性规划提出多项式时间算法的问题；这种椭球算法（ellipsoid method）原来是由 Н. З. Шор，Д. Б. Юдин 和 А. С. Немировский 为非线性规划所发展的．随后有一系列其他的对于线性规划的多项式算法．其中最引人注目的是 N. Karmarkar 的射影法（projective method）（[A3]），它可以在实际上与单纯形法竞争．余下的开问题是线性规划问题是否可用强多项式算法（strongly polynomial algorithm）来求解，对这种算法来说，运行时间是多项式地界于维数 n 和 m，而不受数 c_j，a_{ij} 和 b_i 的尺度所影响．N. Megiddo（[A6]）设计了一种算法，对于固定的 n，它以线性时间运行．

这些新算法促使对单纯形算法的形态作进一步研究．K. H. Borgwardt（[A1]）与另一些著作（[A8]）已经指出，在某种自然的概率模型中，多种单纯形法的变种以多项式期望时间来运行．

也见两本教科书[A2]，[A7]．

参考文献

[A1] Borgwardt, K. H., The simplex method: a probabilistic analysis, Springer, 1987.

[A2] Chva'tal, V., Linear programming, Freeman, 1983

[A3] Karmarkar, N., A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, **4** (1984), 373－395.

[A4] Khachiyan, L. G., A polynominal algorithm in linear programming, *Soviet Math. Dokl.*, **20** (1979), 191－194（《Докл. Акад. Наук СССР》, **244** (1979), 1093－1096).

[A5] Klee, V. and Minty, G. J., How good is the simplex algorithm?. in O. Shisha (ed.): Inequalities, Vol. Ⅲ, Acad. Press, 1972, 159－175.

[A6] Megiddo, N., Linear programming in linear time when the dimension is fixed. *J. Assoc. Computing Mach.*, **31** (1984), 114 - 127.

[A7] Schrijver, A.. Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986.

[A8] Shamir, R., The efficiency of the simplex method: a survey, *Management Science*, **33** (1987), 301 - 334.

【译注】

参考文献

[B1] 管梅谷、郑绍鼎，线性规划，山东科学技术出版社，1984.

[B2] 张建中、许绍结，线性规划，科学出版社，1990.

史树中 译 韩继业 校

线性回归[**linear regression**; **линейная регрессия**]，一个随机变量 $\mathbf{Y}=(Y^{(1)},\cdots,Y^{(m)})'$ 对另一个 $\mathbf{X}=(X^{(1)},\cdots,X^{(p)})'$ 的

关于 $\mathbf{x}$ 线性的 m 维向量型，描绘随机向量 $\mathbf{Y}$(在 $\mathbf{X}=\mathbf{x}$ 的条件下)的条件数学期望对 $\mathbf{x}=(x^{(1)},\cdots,x^{(p)})'$ 值的依赖关系．相应的方程

$$y^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{b})=\mathsf{E}(Y^{(k)}\mid\mathbf{X}=\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x^{(j)} \qquad (*)$$
$$x^{(0)}\equiv 1,k=1,\cdots,m,$$

称为 $\mathbf{Y}$ 对 $\mathbf{X}$ 的线性回归方程(linear regression equations)，而参数 b_{kj} 称为回归系数(regression coefficients)(亦见回归(regression))，$\mathbf{X}$ 是所考虑的结果函数(响应) $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ 之数学期望所依赖的被观测参数(未必是随机的)．

此外，常把 $Y^{(k)}$ 对 $\mathbf{X}$ 的线性回归理解为 $Y^{(k)}$ 由变量 $\mathbf{X}$(在一定意义上)的"最优"线性逼近，或在不能把试验点组视为来自相应总体的样本的情形下理解为利用空间 $(Y^{(k)},\mathbf{X})$ 中的超平面对已有试验点("观测结果")组 $(Y_i^{(k)},\mathbf{X}_i)(i=1,\cdots,n)$(在一定意义上)最优平滑的结果．在这样的定义下，需要根据 $Y^{(k)}$ 由变量 $\mathbf{X}$ 线性逼近误差之计算方法的选择(或根据平滑质量标准的具体选择)，区分线性回归的不同类型．利用 $\mathbf{X}$ 的线性组合(点组 $(Y^{(k)},\mathbf{X}_i)$ 的线性平滑)逼近 $Y^{(k)}$ 的质量的一些最常用准则是:

$$Q_1(\mathbf{b})=\mathsf{E}\left\{\omega^2(\mathbf{X})\left[Y^{(k)}(\mathbf{X})-\sum_{j=0}^{p}b_{kj}X^{(j)}\right]^2\right\},$$

$$\widetilde{Q}_1(\mathbf{b})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\left[Y_i^{(k)}-\sum_{j=0}^{p}b_{kj}X_i^{(j)}\right]^2,$$

$$Q_2(\mathbf{b})=\mathsf{E}\left\{\omega(\mathbf{X})\left|Y^{(k)}(\mathbf{X})-\sum_{j=0}^{p}b_{kj}X^{(j)}\right|\right\},$$

$$\widetilde{Q}_2(\mathbf{b})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|Y_i^{(k)}-\sum_{j=1}^{p}b_{kj}X_i^{(j)}\right|,$$

$$Q_3(\mathbf{b})=\mathsf{E}\left\{\omega^2(\mathbf{X})\cdot\rho^2\left[Y^{(k)}(\mathbf{X}),\ \sum_{j=1}^{p}b_{kj}X^{(j)}\right]\right\},$$

$$\widetilde{Q}_3(\mathbf{b})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\cdot\rho^2\left[Y_i^{(k)},\ \sum_{j=1}^{p}b_{kj}X_i^{(j)}\right].$$

在以上各式中"权" $\omega(\mathbf{X})$ 或 ω_i 是根据所研究模型的性质来选取的．例如，若 $Y^{(k)}(\mathbf{X})$ 作为随机变量其方差 $\mathsf{D}\,Y^{(k)}(\mathbf{X})$(或其方差的估计值)是已知的，则 $\omega^2(\mathbf{X})=[\mathsf{D}Y^{(k)}(\mathbf{X})]^{-1}$．最后两准则中，逼近或平滑"误差"由 $Y^{(k)}(\mathbf{X})$ 或 $Y_i^{(k)}$ 到所求超平面的距离 $\rho(\cdot,\cdot)$ 来度量．如果系数 b_{kj} 由变量 $Q_1(\mathbf{b})$ 和 $\widetilde{Q}_1(\mathbf{b})$ 的最小化条件求得，则线性回归称做最小二乘的(least squares)或 L_2；如果使用准则 $Q_2(\mathbf{b})$ 和 $\widetilde{Q}_2(\mathbf{b})$，则线性回归称为最小绝对偏差的(minimal absolule diviations)或 L_1；如果采用准则 $Q_3(\mathbf{b})$ 或 $\widetilde{Q}_3(\mathbf{b})$，则线性回归称为最小 ρ 距离的(minimum ρ-distance)．

在有些场合，经典意义下的线性回归(*)与利用 Q_i 型泛函定义的线性回归相同．例如，如果向量 $(\mathbf{X}',Y^{(k)})$ 服从多维正态律，则 $Y^{(k)}$ 对 $\mathbf{X}$ 在(*)意义下的回归与($\omega(\mathbf{X})\equiv 1$ 时)最小二乘或最小均方线性回归相同．

参考文献

[1] Линник, Ю.В., Методы наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本：H.克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[3] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Macmillan, 1979.

[4] Rao, C.R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965(中译本：C.R.劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1985).

С.А.Айвазян 撰 周概容 译

线性表示[**linear representation**; **линейное представление**]

群(或者代数、环、半群) X 到向量空间 E 的全体可逆线性算子构成的群(或者 E 上全体线性算子构成的代数、环、乘法半群)的一个**同态**(homomorphism) π．当 E 是拓扑向量空间时，X 在 E 上的线性表示要求其象只包含 E 上的连续线性算子．空间 E 称为 π 的表示空间(representation space)，算子 $\pi(x)$ $(x\in X)$ 称为表示 π 的算子(operators of the representation)．

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978(英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Methods of representation theory, 1-2, Wiley, 1981 - 1987.

[A2] Serre, J.-P., Representations lineaires des groupes finis, Hermann, 1967.

[A3] Naïmark, M. A. and Shtern, A. I., Theory of gro-

up representations, Springer, 1982 (译自俄文).

丁 杰 译 石生明 校

线性表示的不变量 [**linear representation, invariant of a; линейного представления инвариант**]

群 G 的表示(见**群的表示**(representation of a group)) π 的空间 E 中的向量 $\xi \neq 0$, 对所有的 $g \in G$ 满足 $\pi(g)\xi = \xi$. Lie 代数 X 的线性表示 π 的不变量是 π 的空间 E 中的向量 $\xi \neq 0$, 对所有的 $x \in X$ 满足 $\pi(x)\xi = 0$. 特别地, 当 π 是线性群在一个多线性函数空间中的表示时, 这里给出的线性表示不变量的定义与经典定义一致. 将**不可约表示**(irreducible representation)限制在一个子群上得到的线性表示的不变量在 Lie 群和 Lie 代数的表示理论中起着重要的作用(见 **Lie 代数的表示**(representation of a Lie algebra)).

参考文献

[1] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ Press, 1946.

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Springer, T. A., Invariant theory, Lecture notes in math., 585, Springer, 1977.

[A2] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

[A3] Brocker, Th. and tom Dieck, T., Representations of compact Lie groups, Springer, 1985.

丁 杰 译 石生明 校

线性空间 [**linear space; линейное пространство**]

同**向量空间**(vector space).

线性子空间 [**linear subspace; линейное подпространство**], 向量子空间(vector subspace)

域 K 上**向量空间**(vector space)(线性空间) E 的一个非空子集 L, 使得 L 自身关于定义于 E 上的加法和标量乘法运算是一个向量空间. 集合 $L + x_0 (x_0 \in E)$ 称为一个**线性簇**(linear variety)或线性流形(linear manifold).

М. И. Войцеховский 撰 沈永欢 译

线性求和法 [**linear summation method; линейный метод суммирования**]

具有线性性质的**求和法**(summation method):

1) 如果级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 按此求和法可求和, 其和为 A, 则级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c a_k$ 按此求和法可求和, 其和为 cA;

2) 如果级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ 按此求和法可求和, 其和分别为 A、B, 则级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ 按此求和法可求和, 其和为 $A + B$.

应用最广泛的求和法都是线性的; 特别是, **矩阵求和法**(matrix summation method)和**半连续求和法**(semi-continuous summation method)是线性的. 也有非线性求和法. 例如, 如下定义的一个级数可求和, 其和为 S 的方法是非线性的: 序列 $\{T_n\}$ 存在极限 S, 这里

$$T_n = \frac{s_{n+1}s_{n-1} - s_n^2}{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n}$$

(s_n 是所给级数的第 n 部分和).

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon Press, 1949.

[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

[3] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70.

[4] Барон, С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Тал., 1977.

И. И. Волков 撰 沈永欢 译

线性系 [**linear system; линейная система**]

代数簇(algebraic variety)上的一族线性等价的有效**除子**(divisor), 它为射影空间所参数化.

设 X 是域 k 上非异代数簇, $\mathscr{L}$ 是 X 上**可逆层**(invertible sheaf), $\Gamma(X, \mathscr{L})$ 是 $\mathscr{L}$ 的整体截面的空间, $L \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$ 是一个有限维子空间. 如果 $\dim L > 0$, 则由 $\mathscr{L}$ 的截面的零点所确定的除子是线性等价的有效除子. L 的一维子空间构成的射影空间 $|L| = P(L)$ 就是一个线性系, 它给出了上述除子的参数化. 如果 $\dim \Gamma(X, \mathscr{L}) < \infty$, 则称线性系 $|\Gamma(X, \mathscr{L})|$ 为完全的(complete), 同样记为 $|L|$.

设 $s_0, \cdots, s_n$ 是 L 的一个基. 通过

$$x \mapsto (s_0(x), \cdots, s_n(x)), x \in X,$$

可定义一个**有理映射**(rational mapping) $\varphi_L: X \to P^n$. 通常就说 φ_L 是由线性系 $|L|$ 定义的. 象 $\varphi_L(X)$ 不会落在 P^n 的任何超平面之内(见[2]). 反之具有上述性质的任何有理映射 $\psi: X \to P^m$ 都由某个线性系所确定.

线性系 $|L|$ 的固定分支(fixed component of a linear system)是指 X 上的一个有效除子 D^*, 使得对任何 $D \in |L|$ 都有 $D = D' + D^*$, 其中 D' 是一个有效除子. 当 D 取遍 $|L|$ 时, 除子 D' 构成一个线性系 $|L'|$, 它与 $|L|$ 有相同维数. 映射 $\varphi_{L'}$ 与 φ_L 是重合的. 所以当考虑 φ_L 时可以假设 $|L|$ 没有固定分支. 在这种情形, φ_L 恰在 $|L|$ 的**基本集**(basic set)上没有定义.

例 1) 设 $X = P^2$, $L = \mathscr{O}_{P^2}(d)$, $d \geqslant 1$; 则 $\Gamma(P^2,$

$\mathcal{O}_{P^2}(d)$)的截面可被等同于 P^2 上的 d 次形式，而且完全线性系 $|\mathcal{O}_{P^2}(d)|$ 可被等同于所有 d 次曲线的集合.

2) 标准二次变换 $\tau: P^2 \to P^2$ (见 **Cremona 变换** (Cremona transformation)) 是由通过点 (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) 的圆锥曲线的线性系所定义的.

3) Geiser 对合 $\sigma: P^2 \to P^2$ 是由以重数 3 通过 7 个**一般位置点** (point in general position) 的 8 次曲线的线性系所定义的.

4) Bertini 对合 $\beta: P^2 \to P^2$ 是由以重数 6 通过 8 个处于一般位置的点的 17 次曲线的线性系所定义.

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965.
[2] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.
[3] Zariski, O., Algebraic surfaces, Springer, 1971.

В. А. Исковских 撰

【补注】在古典 (初等) 射影几何和解析几何里，人们谈论到曲线、曲面、二次超曲面等的线性系. 这是指形如下式的曲线、曲面等的族:

$$\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m = 0,$$

这里的 $F_i = 0$ 是各个曲线、曲面等的方程. 如果这个族是一维的 (即对于一个处于一般位置的点，族中有一个成员通过它)，就称为一个**束** (pencil), 二维的族 (即族中有两个不同的成员通过一个处于一般位置的点) 称为一个**网** (net), 三维 (或高维) 的族称为一个**罗** (web) ([A1]). 有时也用术语"**丛** (bundle)" 代替"网"，有时也用"网"代替"罗".

一般地说，如果 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集，U 上的一个余维数 (codimension) k 的 d 罗 (d-web) 由 U 上 d 个余维数 k 的叶层所定义，使得对每个 $x \in U$，通过 x 的 d 个叶处于一般位置. 亦见**罗** (web). 特别是在余维数 $(n-1)$ 的 n 罗的情形，即曲线的 n 罗 (n-web of curves)，在 $U \subset \mathbf{R}^n$ (同一个 n)，常常使用"网"这个词.

"线性系" (作为一个简称) 当然也出现在数学许多其他分支. 例如在微分方程理论中，是线性微分方程组的简称，在控制和系统理论中，作为线性输入/输出系统、线性动力系统或线性控制系统的简称.

参考文献

[A1] Todd, J. A., Projective and analytical geometry, Pitman, 1947, Chapt. VI.

陈志杰 译

殆周期系数的线性微分方程组 [**linear system of differential equations with almost-periodic coefficients; линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами**]

常微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ x \in \mathbf{R}^n, \qquad (1)$$

其中 $A(\cdot): \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $f(\cdot): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ 为殆周期映射 (见**殆周期函数** (almost-periodic function)). 按坐标写出，则有形式

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t) x^j + f^i(t),\ i = 1, \cdots, n.$$

其中 $a_j^i(t)$ 和 $f^i(t)$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ 为殆周期实值函数. 这种方程组的出现与 **Bohr 殆周期函数** (Bohr almost-periodic functions) 有关 (见[1]). 对一类范围较狭的方程组 (其中 $A(t)$ 和 $f(t)$ 为拟周期映射，见**拟周期函数** (quasi-periodic function)) 更早就有兴趣，这同沿着天体力学方程的条件周期解去考虑变分方程有关.

如果齐次方程组

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (2)$$

是积分分离的 (见**积分分离条件** (integral seperation condition))，则它可通过 (关于 t 的) 殆周期 **Ляпунов 变换** (Lyapunov transformation) $x = L(t)y$ 化成殆周期系数的对角方程组 $\dot{y} = B(t)y$; 即对于它所化成的方程组，存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个与 t 无关的基，这个基由对每个 $t \in \mathbf{R}$，算子 $B(t)$ 的本征向量组成. 在关于这个基的坐标下，方程组 $\dot{y} = B(t)y$ 可写成对角形式:

$$\dot{y}^i = b_i^i(t) y^i,\ i = 1, \cdots, n.$$

在殆周期系数方程组 (2) 的空间中赋予度量

$$d(A_1, A_2) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| A_1(t) - A_2(t) \|,$$

具有积分分离的方程组的集合是开集. 下述定理成立: 设 $A(t) = C + \varepsilon D(t)$，这里 $C \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$，$C$ 的本征值都为不同实数，且 $D(\cdot)$ 为殆周期映射 $\mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$，则存在 $\eta > 0$，使得对所有满足 $|\varepsilon| < \eta$ 的 ε，方程组 (2) 可通过 (关于 t 的) 殆周期 Ляпунов 变换化为具有殆周期系数的对角方程组.

对于殆周期映射 $A(t): \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$，下述四个论断等价: 1) 对每个殆周期映射 $f(\cdot): \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$，存在方程组 (1) 的殆周期解; 2) 存在方程组 (2) 解的指数**二分性** (dichotomy); 3) 方程组 $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$，其中 $\widetilde{A}(t) = \lim_{k \to \infty} A(t_k + t)$，没有非零有界解; 4) 对于每个有界映射 $f(t): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，方程组 (1) 具有有界解.

参考文献

[1] Bohr, H., Almost-periodic functions, Chelsea, reprint, 1947 (译自德文).
[2] Favard, J., Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Gauthier-Villars, 1933.
[3] Еругин, Н. П., Линейные системы обыкновенных

дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963 (英译本: Erugin, N. P., Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad. Press, 1966).

[4] Massea, J. L. and Schäffer, J. J.: Linear differential equations and function spaces, Acad. Press, 1966.

[5] Мухамадиев, Э., 《Докл. АН СССР》, **196** (1971), 1, 47 – 49.

[6] Итоки науки и техники. Математический анализ, **12** (1974), 71 – 146.

B. M. Миллионщиков 撰

【补注】 又见**常微分方程** (Differential equation, ordinary) 及其参考文献.

唐 云 译

周期系数的线性微分方程组 [linear system of differential equations with periodic coefficients; линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами]

下列形式的 n 个线性常微分的方程组:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_{11}(t)x_1 + \cdots + \alpha_{1n}(t)x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \alpha_{n1}(t)x_1 + \cdots + \alpha_{nn}(t)x_n, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

其中 t 为实变量, $\alpha_{jh}(t)$ 和 $x_h = x_h(t)$ 为复值函数, 且

$$\alpha_{jh}(t+T) = \alpha_{jh}(t), \text{ 对任意 } j, h. \quad (2)$$

数 $T > 0$ 称为方程组 (1) 的系数周期 (period of the coefficients). (1) 可方便地写成一个向量方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (3)$$

其中

$$x^T = (x_1, \cdots, x_n), \ A(t) = \|\alpha_{jh}(t)\|,$$
$$j, h = 1, \cdots, n.$$

假定函数 $\alpha_{jh}(t)$ 对 $t \in \mathbf{R}$ 有定义, 在 $[0, T]$ 上可测且 Lebesgue 可积, 而等式 (2), 即 $A(t+T) = A(t)$, 几乎处处成立. (3) 的解是具有绝对连续分量的向量函数 $x = x(t)$, 使得 (3) 几乎处处满足. 设 $t_0 \in \mathbf{R}$ 和 a 为 (任意) 给定的数和向量. 满足条件 $x(t_0) = a$ 的解 $x(t)$ 存在且唯一确定. 具有绝对连续元素的 n 阶矩阵 $X(t)$ 称为 (3) 的矩阵子 (matrizant) (或发展矩阵 (evolution matrix), 或转移矩阵 (transition matrix), 或 **Cauchy 矩阵** (Cauchy matrix)), 如果在 $\mathbf{R}$ 上几乎处处有

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

及 $X(0) = I$, 这里 I 为单位 $n \times n$ 矩阵. 转移矩阵 $X(t)$ 满足关系

$$X(t+T) = X(t)X(T), \ t \in \mathbf{R}$$

矩阵 $X(t)$ 称为单值矩阵 (monodromy matrix), 它的本征值 ρ_j 称为 (3) 的乘子 (multiplier). 乘子 ρ_j 的方程

$$\det[X(T) - \rho I] = 0 \quad (4)$$

称为方程 (3) (或方程组 (1)) 的特征方程 (characteristic equation). 具有乘子 ρ_0 的单值矩阵的每个本征向量 $a^{(0)}$, 对应于 (3) 的一个满足条件

$$x^{(0)}(t+T) = \rho_0 x^{(0)}(t)$$

的解 $x^{(0)}(t) = X(t)a^{(0)}$. Floquet-Ляпунов 定理 (Floquet-Lyapunov theorem) 成立: (3) 的具有 T 周期矩阵 $A(t)$ 的转移矩阵可表示成形式

$$X(t) = F(t)e^{tK}, \quad (5)$$

其中 K 为常数矩阵, $F(t)$ 为绝对连续的矩阵函数, 具有周期 T, 对所有 $t \in \mathbf{R}$ 是非奇异的, 且使得 $F(0) = I$. 反之, 若 $F(t)$ 和 K 为具有上述性质的矩阵, 则矩阵 (5) 是具有 T 周期矩阵 $A(t)$ 的方程 (3) 的转移矩阵. 表示式 (5) 中的矩阵 K (称为指示矩阵 (indicator matrix)) 和矩阵函数 $F(t)$ 并不唯一确定. 在 (5) 中实系数 $\alpha_{jh}(t)$ 情形, $X(t)$ 为实矩阵, 但 $F(t)$ 和 K 一般是复矩阵. 此时有改进的 Floquet-Ляпунов 定理: 具有 T 周期实矩阵 $A(t)$ 的 (3) 的转移矩阵可表示成 (5) 的形式, 其中 K 为常数实矩阵, 而 $F(t)$ 为实的绝对连续矩阵函数, 它对所有 t 是非奇异的, 且满足关系

$$F(t+T) = F(t)L, \ F(0) = I, \ KL = LK,$$

这里 L 为实矩阵, 使得

$$L^2 = I.$$

特别地, $F(t+2T) = F(t)$. 反之, 若 $F(t)$, K 和 L 为具有上述性质的任意矩阵, 则 (5) 为具有 T 周期实矩阵 $A(t)$ 的方程 (3) 的转移矩阵.

(5) 的一个直接推论是 Floquet 定理 (Floquet theorem), 它是说, 方程 (3) 具有一**基本解组** (fundamental system of solutions), 可分成若干子集, 每一子集具有形式

$$x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}u_1(t),$$
$$x^{(2)}(t) = e^{\lambda t}[tu_1(t) + u_2(t)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(m)}(t) =$$

$$=e^{\lambda t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}u_1(t)+\cdots+tu_{m-1}(t)+u_m(t)\right],$$

其中 $u_j(t)$ 为绝对连续 T 周期（一般地说，复值的）向量函数．（上述解子集对应于 K 的 Jordan 形式的一个 $(m\times m)$ 块．）如果 K 的每个初等因子为单的（特别是，如果特征方程 (4) 的所有根是单的），则存在形如

$$x^{(j)}(t)=e^{\lambda_j t}u_j(t),\ u_j(t+T)=u_j(t),$$

$$j=1,\cdots,n$$

的基本解组．由公式 (5) 得知，(3) 可通过变量替换 $x=F(t)y$ 化为方程（见**可约线性系统**（reducible linear system））

$$\frac{dy}{dt}=Ky$$

（Ляпунов 定理（Lyapunov theorem））．

设 $\rho_1,\cdots,\rho_n$ 为方程 (3) 的乘子，K 为任意指示矩阵，即

$$e^{TK}=X(T). \tag{6}$$

K 的本征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 称为 (3) 的**特征指数**（characteristic exponent）．从 (6) 得到 $e^{T\lambda_j}=\rho_j,\ j=1,\cdots,n$．特征指数 λ 可定义为一个复数，使得 (3) 具有可表示为下列形式的解：

$$x(t)=e^{\lambda t}u(t),$$

其中 $u(t)$ 为 T 周期向量值函数．这些解在应用中常感兴趣的主要性质由所给方程的特征指数或乘子来确定（见下表）．

续表

解的性质	特征指数	乘　子
平凡解的稳定性（所有解在 $(0,\infty)$ 上的有界性）	实部非正；若出现零或纯虚特征指数，则它们对应于指示矩阵的单重初等因子	位于单位圆内或单位圆上；后一情形对应于单值矩阵的单重初等因子
平凡解的渐近稳定性（对任意解当 $t\to\infty$ 时 $\lvert x(t)\rvert\to 0$）	实部为负	位于单位圆内
所有解在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性	具有指示矩阵单重初等因子的为纯虚数	位于单位圆上；对应于单值矩阵的单重初等因子
平凡解的不稳定性（存在在 $(0,\infty)$ 上无界的解）	有一特征指数或具有正实部，或为纯虚数（特别，为零）且有指示矩阵的非单重初等因子	有一乘子或在单位圆外，或在单位圆上且有单值矩阵的一个非单重的初等因子
存在一 T 周期解	对某个特征指数 λ_j 有 $\lambda_j T=2\pi im$（m 为整数）	有一特征乘数等于 1
存在一半周期解，即解 $x(t)$ 使对所有 t，$x(t+T)=-x(t)$	对某个特征指数 λ_j 有 $\lambda_j T=(2m+1)\cdot\pi i$（$m$ 为整数）	有一乘子 $\rho=-1$

在应用中，(1) 的系数常依赖于参数；应当在参数空间中分辨出使 (1) 的解具有所需性质的点的区域（这些性质通常是上表中的前四个，或对所给的 α 有 $\lvert x(t)\rvert\leqslant$ 常数 $\cdot e^{-\alpha t}$）．因而这类问题归结 (1) 的特征指数（乘子）的计算或估计．

方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \tag{7}$$

这里 $A(t)$ 和 $f(t)$ 分别为可测的 T 周期的矩阵函数和向量函数，且在 $[0,T]$ 上 Lebesgue 可积（几乎处处 $A(t+T)=A(t),\ f(t+T)=f(t)$），称为**周期系数的非齐次线性常微分方程**（inhomogeneous linear ordinary differential equation with periodic coefficients），如果相应的齐次方程

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y \tag{8}$$

不存在 T 周期解，则 (7) 有唯一的 T 周期解，它可由公式

$$x(t)=[I-R(t,0)]^{-1}\int_0^T R(t,T-\tau)f(t-\tau)d\tau$$

来确定，这里 $R(t,s)=Y(t+T)Y(t+T)^{-1}$，而 $Y(t)$ 为齐次方程 (8) 的转移矩阵，且 $R(t+T,s)=R(t,s)$，$\det[I-R(t,0)]\neq 0$．

假定 (8) 有 $d\geqslant 1$ 个线性无关的 T 周期解 $y_1(t),\cdots,y_d(t)$，则伴随方程

$$\frac{dz}{dt}=-A(t)^{*}z$$

也有 d 个线性无关的 T 周期解 $z_1(t),\cdots,z_d(t)$．非齐次方程 (7) 具有 T 周期解，当且仅当正交关系

$$\int_0^T (f(t),z_j(t))dt=0,\ j=1,\cdots,d \tag{9}$$

成立．如果这样，则 (7) 的任一 T 周期解具有形式

$$x(t)=x^{(0)}(t)+\gamma_1 y_1(t)+\cdots+\gamma_d y_d(t),$$

其中 $\gamma_1,\cdots,\gamma_d$ 为任意数，而 $x^{(0)}(t)$ 是 (7) 的一

个 T 周期解．在附加条件

$$\int_0^T (x(t),\ y_j(t))dt = 0,\ j = 1,\ \cdots,\ d$$

下，T 周期解 $x(t)$ 唯一确定；而且存在与 $f(t)$ 无关的常数 $\theta > 0$，使得

$$|x(t)| \leqslant \theta \left[\int_0^t |f(s)|^2 ds \right]^{1/2},\ t \in [0,\ T].$$

假设给定方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\ \varepsilon)x, \tag{10}$$

其矩阵系数全纯地依赖于复“小”参数 ε:

$$A(t,\ \varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \varepsilon^2 A_2(t) + \cdots \tag{11}$$

假设对 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$，级数

$$\| A_0(\cdot)\| + \varepsilon \| A_1(\cdot)\| + \varepsilon^2 \| A_2(\cdot)\| + \cdots$$

收敛，这里

$$\| A_j(\cdot)\| = \int_0^t |A_j(t)| dt,$$

它保证级数 (11) 在空间 $L(0,\ T)$ 中对 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 的 (分量方式的) 收敛性．这时对固定的 $t \in [0,\ T]$，(10) 的转移矩阵对 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 为 ε 的解析函数．设 $A_0(t) = C$ 为具有本征值 $\lambda_j (j = 1,\ \cdots,\ n)$ 的常数矩阵．设 $\rho_j(\varepsilon)$ 为方程 (10) 的乘子，$\rho_j(0) = \exp(\lambda_j T)$．如果 $\rho_{h_1}(0) = \cdots = \rho_{h_r}(0) = \exp(\alpha^{(0)}T)$ 为 r 重乘子，则

$$\lambda_h = \alpha^{(0)} + \frac{2\pi i}{T} m_h,\ h = h_1,\ \cdots,\ h_r, \tag{12}$$

其中 m_h 为整数．如果单值矩阵的单重初等因子对应于该乘子，或换句话说，如果对每个 λ_h，$h = h_1$，$\cdots$，h_r，对应于矩阵 C 的单重初等因子 (例如，如果所有数 λ_h 不同)，则 $\alpha^{(0)}$ 称为 (方程 (10) 当 $\varepsilon = 0$ 时的) 单型 r 重特征指数 (r-fold characteristic exponent)．这样，(10) 对于小 $\varepsilon > 0$ 的相应的 r 个特征指数可以很容易计算到一次逼近．也就是说，设 a_h 和 b_h 为矩阵 C 和 C^* 相应的正规化本征向量；

$$Ca_h = \lambda_h a_h,\ C^* b_h = \bar{\lambda}_h b_h,$$

$$(a_j,\ b_h) = \delta_{jh},\ j,\ h = h_1,\ \cdots,\ h_r;$$

设

$$A_1(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_1^{(m)} \exp\left[\frac{2\pi imt}{T}\right]$$

为 $A_1(t)$ 的 Fourier 级数，且设

$$\sigma_{jh} = (A_1^{(m_h - m_j)} a_j,\ b_h),\ j,\ h = h_1,\ \cdots,\ h_r,$$

其中 m_j 为 (12) 中的数．这时对于 (10) 的相应的 r 个特征指数 $\alpha_h(\varepsilon)$、$h = h_1$，$\cdots$，h_r，它们在 $\varepsilon = 0$ 时为 $\alpha^{(0)}$，有着从一阶项开始的 ε 的分数幂级数展开式

$$\alpha_h(\varepsilon) = \alpha^{(0)} + \beta_h \varepsilon + O(\varepsilon^{1+1/q_h}),\ h = h_1,\ \cdots,\ h_r, \tag{13}$$

这里 β_h 为方程

$$\det \| \sigma_{jh} - \beta \delta_{jh} \| = 0$$

的根 (其重数按次数记)，而 q_h 为等于相应于 β_h 的重数的自然数 ($\delta_{jj} = 1$，$\delta_{jh} = 0$，对 $j \neq h$)．若根 β_h 是单重的，则 $q_h = 1$ 且相应的函数 $\alpha_h(\varepsilon)$ 对 $\varepsilon = 0$ 解析．由 (13) 得出有可能出现这种情形：“无扰动”(即 $\varepsilon = 0$ 时) 系统为稳定 (所有 λ_j 为纯虚数，且对应于单重初等因子)，而“扰动”系统 (小 $\varepsilon \neq 0$) 为不稳定 (至少有一个 β_h 有 $\mathrm{Re}\,\beta_h > 0$)．这种由参数 (随时间) 的任意小周期变化而失稳的现象称为参数共振 (parametric resonance)．类似而更复杂的公式对于非单式特征指数成立．

设 $\rho^{(1)}$，$\cdots$，$\rho^{(q)}$ 为方程 (3) 的不同乘子，且设 n_1，$\cdots$，n_q 为它们的重数，$n_1 + \cdots + n_q = n$．假定复 ζ 平面上的点 $\rho^{(j)}$ 被围在不相交的圆盘 $|\zeta - \rho^{(j)}| \leqslant R_j$ 中，且假定从点 $\zeta = 0$ 到点 $\zeta = \infty$ 画一条与这些圆盘不交的割线．若将每个乘子 $\rho^{(j)}$ 与一个任意整数 m_j 相联，且 $U = X(T,\ \varepsilon)$ 为 (10) 的转移矩阵．对数 $(\ln\zeta)_m$ 的分支由该割线确定．矩阵 $\ln U$ (“矩阵对数”) 可由公式

$$\ln U = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{q} \int_{\Gamma_j} (\zeta U - U)^{-1} (\ln\zeta)_{m_j} d\zeta, \tag{14}$$

确定，其中 Γ_j 为圆 $|\zeta - \rho^{(j)}| = R_j$．数 m_1，$\cdots$，m_q 集决定了该对数矩阵的一条分支．对小 ε，$\exp(\ln U) = U$ 也如此．一般地说，公式 (14) 对所有可能的 m_1，$\cdots$，m_q 并不覆盖矩阵对数的所有值，即方程 $\exp Z = U$ 的所有解 Z．但由 (14) 给出的解具有重要的全纯性质：(14) 中矩阵 $\ln U$ 的元素是 U 的元的全纯函数．对方程 (10)，公式 (5) 取形式

$$X(t,\ \varepsilon) = F(t,\ \varepsilon)\exp[tK(\varepsilon)], \tag{15}$$

其中 $F(t + T,\ \varepsilon) = F(t,\ \varepsilon)$，$K(\varepsilon) = T^{-1}\ln X(T,\ \varepsilon)$．若 $\ln X(T,\ \varepsilon)$ 按 (14) 确定，则

$$\left.\begin{aligned} K(\varepsilon) &= K_0 + \varepsilon K_1 + \cdots, \\ F(t,\ \varepsilon) &= F_0(t) + \varepsilon F_1(t) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

为对小 $|\varepsilon|$ 收敛的级数．关于解当 $t\to+\infty$ 时的性状（这常在应用中感兴趣）的主要信息包含在指示矩阵 $K(\varepsilon)$ 中．下面给出一个求（10）的渐近积分的方法，即逐次确定（16）的系数 K_j 和 $F_j(t)$ 的方法．

假定（11）中 $A_0(t)\equiv C$．虽然 $X(t,0)=\exp(tC)$，一般来说，不存在矩阵对数分支，使得矩阵 $K(\varepsilon)$ 对 $\varepsilon=0$ 解析，且 $K(0)=C$．该对数分支将存在于所谓非共振情况（non-resonance case），即在 C 的本征值 λ_j 中不存在使

$$\lambda_j-\lambda_h=\frac{2\pi m i}{T}\neq 0$$

的数（m 为整数）的情况．在共振情况（resonance case）（此时这样的本征值存在），通过适当的变量替换 $X=P(t)y$，其中 $P(t+T)=P(t)$，方程（10）化为类似的方程且使非共振情况成立．矩阵 $P(t)$ 可由矩阵 C 确定．

在（16）中，在非共振情况，$K_0=C$，$F_0(t)\equiv I$，而矩阵 $F_j(t)$，$K_j(j=1,2,\cdots)$ 由方程

$$\frac{dF}{dt}=[C+\varepsilon A_1(t)+\varepsilon^2A_2(t)+\cdots]F(t,\varepsilon)-F(t,\varepsilon)K(\varepsilon)$$

令其中同次幂系数相等而得到．为确定 $Z(t)=F_j(t)$ 和 $L=K_j$，得到形如

$$\frac{dZ}{dt}=CZ-ZC+\Phi(t)-L,\qquad(17)$$

的矩阵方程，其中 $\Phi(t+T)=\Phi(t)$．从（17）及周期性条件 $Z(t+T)=Z(t)$ 求得矩阵 $Z(t)$ 和 L，而且是唯一的（非共振情况）．

对于系统（1）的特殊情况，见**线性 Hamilton 系统**（Hamiltonian system, linear）和 **Hill 方程**（Hill equation）．

参考文献

[1] Штокало, И. З., Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, К., 1960（英译本：Shtokalo, I. Z., Linear differential equations with variable coefficients: criteria of stability and unstability of their solutions, Hindushtan Publ. Comp., 1961).

[2] Еругин, Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963（英译本：Erugin, N. P., Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad. Press, 1966).

[3] Якубович, В. А., Старжинский, В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения М., 1972（英译本：Yakubovich, V. A. and Starzhinskiĭ, V. M., Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975).

В. А. Якубович 撰

【补注】

参考文献

[A1] Brockett, R. W., Finite dimensional linear systems, Wiley, 1970.

[A2] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1969（中译本：J. K. Hale，常微分方程，人民教育出版社，1980).

唐 云 译

线性拓扑空间［**linear topological space**; **линейное топологическое пространство**］

同时又是拓扑空间的（线性）**向量空间**（vector space）L，其中的加法运算和乘以标量的运算关于 L 中给定拓扑是连续的．见**拓扑向量空间**（topological vector space）．　М. И. Войцеховский 撰　葛显良 译

线性拓扑［**linear topology**; **линейная топология**］，环 A 的

环上的拓扑，其中存在着由左理想构成的零的基本邻域系（此时称这拓扑为左线性的）．类似地，在 A 模 E 上的拓扑称为线性的，是指它有由子模构成的零的基本邻域系．使用最多的是 **adic 拓扑**（adic topology），它的基底由一个理想的幂给出．

可分的线性拓扑 A 模 E 称为是**线性紧模**（linearly-compact module），如果任一由 E 的仿射线性簇（即形如 $x+E'$ 的子模，其中 $x\in E$，E' 是 E 的子模）构成的滤子基底（见**滤子**（filter））有极限点．在紧局部 Noether 环上的任一有限型模是线性紧的．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）.

В. И. Данилов 撰

【补注】 环上的 Gabriel 拓扑是线性拓扑的例子，它出现在局部化理论（见**交换代数中的局部化**（localization in a commutative algebra））或挠论中．Gabriel 拓扑对应于环上左模范畴的 Serre 局部子范畴．

参考文献

[A1] Golan, J., Localization of noncommutative rings, M. Dekker, 1975.

[A2] Stenström, B., Rings of quotients, Springer, 1975.

[A3] Oystaeyen, F. van and Verschoren, A., Reflectors and localization, Application to sheaf theory, M. Dekker, 1979.

[A4] Lambek, J., Torsion theories, additive semantics and rings of quotients, Lecture notes in math., 77, Springer, 1971.

冯绪宁 译

线性变换［**linear transformation**; **линейное преобразование**］

一个**向量空间**（vector space）到其自身内的映射，在它作用下两个向量和的象是它们象之和，且一个向

量与一个数乘积的象是该向量的象乘以这个数的积．如果 V 是向量空间，f 是定义在它内的线性变换，$\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是该空间的任意向量，且 λ 是任意数(某域的任意元素)，则

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}),\ f(\lambda\mathbf{x})=\lambda f(\mathbf{x}).$$

如果向量空间 V 有有限维数 n，$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 为它的**基**(basis)，$x_1,\cdots,x_n$ 是任一向量 $\mathbf{x}$ 关于这个基的坐标，且 $y_1,\cdots,y_n$ 是它的象 $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ 的坐标，则向量 $\mathbf{y}$ 的坐标可用向量 $\mathbf{x}$ 的坐标按下列线性齐次函数来表达：

$$y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n.$$

矩阵

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{Vmatrix}$$

称为关于基 $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 线性变换 f 的矩阵(matrix of the linear transformation f)．它的诸列由基向量的象的坐标组成．如果

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11}\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\cdots c_{nn}\end{Vmatrix}$$

是自基 $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 到基 $\mathbf{e}_1',\cdots,\mathbf{e}_n'$ 的转换矩阵：

$$\mathbf{e}_1'=c_{11}\mathbf{e}_1+\cdots+c_{n1}\mathbf{e}_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{e}_n'=c_{1n}\mathbf{e}_1+\cdots+c_{nn}\mathbf{e}_n,$$

则关于基 $\mathbf{e}_1',\cdots,\mathbf{e}_n'$ 线性变换 f 的矩阵 B 是 $B=C^{-1}AC$.

两个线性变换 f 与 g 的和是变换 h，它使得对任意向量 $\mathbf{x}\in V$,

$$h(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}).$$

一个线性变换 f 与数 λ 的积是变换 k，对此变换，$k(\mathbf{x})=\lambda f(\mathbf{x})$ 对每一个向量 $\mathbf{x}\in V$ 成立．

线性变换 g 乘以线性变换 f 的积是下面变换：

$$l(\mathbf{x})=g(f(\mathbf{x})).$$

两个线性变换的和，线性变换与数的乘积，以及两个线性变换(按任意顺序)的乘积其本身仍为线性变换．线性变换的全体组成一个代数．在维数为 n 的有限维空间情况下，它的线性变换组成的代数同构于 n 阶方阵组成的代数，这些方阵以构造该向量空间的基域的元素为其元素．

在其作用下使线性空间映射到自身上的线性变换 f 称为可逆的(invertible)，如果存在变换 f^{-1} 使得

$$ff^{-1}=f^{-1}f=E,$$

其中，E 是恒等变换．变换 f^{-1} 是一个线性变换，且称为 f 的逆变换(inverse transformation)．定义在某有限维向量空间上的线性变换是可逆的，当且仅当关于某个(因而关于任意)基它的矩阵的**行列式**(determinant)是非零的．如果 A 是某可逆的线性变换 f 的矩阵，则逆 f^{-1} 的矩阵是 A^{-1}．可逆的线性变换全体关于乘法组成群．在具有有限维数 n 的向量空间情况下，这个群同构于 n 阶非奇异方阵组成的群．

向量空间 V 的子空间 V' 称为关于线性变换 f 的不变子空间(invariant subspace)，如果对每一个向量 $\mathbf{x}\in V'$，$f(\mathbf{x})\in V'$．一个非零向量 $\mathbf{x}\in V$ 称为线性变换 f 的对应于本征值(eigen value) λ 的本征向量(eigen vector)，如果 $f(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$．在复数域(或更一般地，代数闭域)上有限维向量空间情况下，每一个线性变换有本征向量(具有一维不变子空间)．在实数域上有限维空间情况下，每一个线性变换有一维或二维的不变子空间．

定义在有限维向量空间 V 上的线性变换 f 称为可对角化线性变换(diagonalizable linear transformation)，如果存在 V 内一个基，关于此基该线性变换的矩阵有对角形式(见**对角矩阵**(diagonal matrix))．换言之，一个线性变换是可对角化的，如果空间有这个线性变换的本征向量组成的基．然而，即使在复数域上空间内，也不是每一个线性变换都有本征向量组成的基．例如，由矩阵

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$$

给出的二维空间的线性变换有唯一的含基向量 $(1,0)$ 的一维不变子空间．

在复数域(或任意代数闭域)上有限维向量空间内，对每一个线性变换存在一个基，这个变换关于此基的矩阵有分块形式(见**分块对角算子**(block-diagonal operator))，Jordan 块在其主对角上，其他处为零．一阶的 Jordan 块由一个数 λ 组成；k 阶 Jordan 块是具有下列形式的 k 阶方阵：

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{Vmatrix}.$$

诸数 λ 是线性变换的矩阵的本征值．同阶的几个块以及不同阶的块可以对应着同一个 λ．由 Jordan 块组成的矩阵称为矩阵的 Jordan 正规形式(Jordan normal form)(或 Jordan 典范形式(Jordan canonical form))．

定义在 Euclid 空间(**酉空间**(unitary space))上的线性变换 f 称为自伴的(self-adjoint)(对应地，Hermite 的(Hermitian))，如果对任意两个向量 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$，有 $(\mathbf{x},$

$f(\mathbf{y}))=(\mathbf{y},f(\mathbf{x}))$ (对应地，$(\mathbf{x},f(\mathbf{y}))=\overline{(\mathbf{y},f(\mathbf{x}))}$)．

定义在有限维 Euclid（酉）空间上的线性变换是自伴(Hermite)的，当且仅当关于某个(因而任意)正交基它的矩阵是**对称矩阵**(symmetric matrix)（对应地，**Hermite 矩阵**(Hermite matrix)）．定义在有限维 Euclid（对应地，酉）空间上的自伴(Hermite)线性变换有一正交基，关于此基它的矩阵有对角形式，其主对角线由该矩阵的(总是实的)本征值组成．

定义在 Euclid（酉）空间 V 上的线性变换 f 称为等距的(isometric)或正交的(orthogonal)(对应地，酉的(unitary))，如果对每一个向量 $\mathbf{x}\in V$，

$$\|f(\mathbf{x})\|=\|\mathbf{x}\|.$$

定义在有限维 Euclid（酉）空间上的线性变换是等距的(对应地，酉的)，当且仅当关于某个(因而任意)正交基它的矩阵 A 是**正交矩阵**(orthogonal matrix)(对应地，**酉矩阵**(unitary matrix))．对定义在有限维 Euclide 空间上的每一个等距的线性变换，存在一个正交基，关于此基该变换的矩阵由其主对角上的一阶与二阶块组成，其一阶块是变换的矩阵 A 的实本征值，等于 $+1$ 与 -1，而二阶块有形式

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

其中 $\cos\varphi$ 与 $\sin\varphi$ 分别是 A 的复本征值 $\lambda=\cos\varphi+i\sin\varphi$ 的实部与虚部，并且 A 的其他元素均为零．对定义在酉空间上的每一个酉变换，存在一个正交基，关于此基这个变换的矩阵是对角的，且主对角上所有数的绝对值为 1．

定义在有限维 Euclid(酉)空间上每一个线性变换是一个**自伴线性变换**(self-adjoint linear transformation)与一个等距线性变换(对应地，一个 Hermite 与一个酉线性变换)的乘积．

参考文献

[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии …, М., 1968.

[2] Гельфанд, И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971(中译本：И. М. 盖尔冯德，线性代数学，高等教育出版社，1957)．

[3] Ефимов, Н. В., Розендорн, Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970.

[4] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

А. С. Пархоменко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, 2. Linear and multilinear algebra, Addison-Wesley, 1973, Chapt. 2 (译自法文)．

[A2] Jacobson, N., Lectures in abstract algebra, 2. Linear algebra, v. Nostrand, 1953 (中译本：N. 贾柯勃逊，抽象代数学，1—3，科学出版社，1987)．

陈公宁 译

线性簇 [**linear variety**; **линейное многообразие**]，线性流形(linear manifold)，仿射子空间(affine subspace)．

（线性）**向量空间**(vector space) E 中的子集 M 且是 E 中**线性子空间**(linear subspace) L 的平移．即形如 x_0+L 的集合 M，其中 $x_0\in M$．集合 M 唯一确定 L，而 x_0 只是模 L 确定的：

$$x_0+L=x_1+N,$$

当且仅当 $L=N$ 及 $x_1-x_0\in L$．M 的维数是 L 的维数．与余维数为 1 的子空间相对应的线性簇称为超平面(hyperplane)．М. И. Войцеховский 撰　葛显良 译

线性化方法 [**linearization methods**; **линеаризации методы**]

使把非线性问题的求解化为有关的线性问题的逐次求解成为可能的方法．

考虑一个非线性算子方程

$$L(u)=f, \tag{1}$$

其中算子 L 把 Banach 空间 H 映到它自身中，$L(0)=0$，并且是 Fréchet 可微的．解(1)的基于把(1)线性化的经典方法之一是 Newton-Канторович 迭代法(也见 **Newton 法**(Newton method)；**Канторович 法**(Kantorovich process))，这个方法是从一个已知的近似解 u^n 把新的 u^{n+1} 作为线性方程

$$L'_{u^n}(u^{n+1}-u^n)+L(u^n)=f \tag{2}$$

的解来决定．这个方法的基础是(对小的 $\|z\|$)用表达式 $L'_{u^n}(z)$ 逼近 $L(u^n+z)$，这里 L'_{u^n} 是 L 在点 u^n 的 **Fréchet 导数**(Fréchet derivative)．在[1]－[4]中可以找到这个方法各式各样的修改和相应的收敛速率的估计．算子方程(1)本身可能对应于，例如，一个偏微分方程的非线性边值问题(见[2],[4],[5])，并且在(2)的每一步都必须解一个线性边值问题，这使得必须使用数值方法和原问题以及与它有关的线性问题的某种离散化．从计算的观点看，在原问题适当的离散化后，把(1)作为一个有限维空间中的算子方程来考虑线性化方法，显得更自然一些．

求(1)的近似解的线性化方法的另一个例子是(试位法的)段的迭代法(见[2],[3])．在许多情形下，对从数学物理中提出来的问题(1)更好的是在物理论证的基础上对 $L(u^n+z)$ 线性化，对某个线性算子 M_{u^n} 用 $M_{u^n}(z)$ 代替 $L(u^n+z)$(见[5]－[10])．那么所得到的

迭代法可以写成

$$M_{u^n}(u^{n+1})=f-(L(u^n)-M_{u^n}(u^n)) \qquad (3)$$

的形式．这种方法的例子是弹性理论中的非线性问题解的弹性解和可变参数方法(见[5]－[8])；对弹性解方法线性算子 $M_{u^n}=M$ 对应于线性弹性理论的算子．与此紧密相关的是 Качанов 迭代法(见[9],[10])和把线性化的想法与关于参数的延拓结合起来的序列负载法(见[6]－[8])．有时候代替像(3)那样的方法用更一般的形如

$$M_{u^n}(u^{n+1}-u^n)=-\gamma_n(L(u^n)-f) \qquad (4)$$

带有一个可选择的迭代参数 γ_n 的迭代法．

在这些方法的实现中必须考虑系统的解的近似本质(例如，作为辅助迭代法应用的结果)(见例如[1],[11],[12])．在考虑非线性本征值问题(找分歧点的问题)，例如形如

$$L(u)=\lambda M(u),\ L(0)=0,\ M(0)=0 \qquad (5)$$

的问题时，把研究问题(5)化为研究线性本征值问题

$$L_0'(z)=\lambda M_0'(z)$$

的线性化(5)的思想已经显示出是非常富有成效的(见[13],[14])．在解不稳定非线性问题(见例如[15]－[18])的网格法中频繁地使用这种或那种线性化，它从直到 t_n 的已知瞬时解出发，给出为求得下一个离散瞬时 $t_{n+1}=t_n+\tau$(τ是时间步长)解的线性方程．

参考文献

[1] Красносельский, М.А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1 (1969)(英译本: Kranosel'skiǐ, M.A., et al., Approximate solution of operator equations, Welters-Noordhoff, 1972).

[2] Collatz, L., Funktionalanalysis und numerische mathematik, Springer, 1964.

[3] Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad. Press, 1970.

[4] Bellman, R.E. and Kalaba, R., Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems, Amer. Elsevier, 1970.

[5] Победря, Б.Е., в кн., Упругость и неупругость, в. 3. М., 1973, 95－173.

[6] Oden, J.T., Finite elements of nonlinear continua, McGraw-Hill, 1972.

[7] Zenkevich, O., The method of finite elements in engineering, McGraw-Hill, 1977 (中译本: O. C. 监凯维奇，有限元法，科学出版社，1985).

[8] Свирский, И.В., Методы типа Бубнова-Галеркина и последовательных приближений, М., 1968.

[9] Михлин, С.Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966.

[10] Fučik, S., Kratochvil, A. and Nečas, J., Kačanov-Galerkin method and its applications, *Acta. Univ. Carolinae Math. Phys.*, 15 (1974), 1－2, 31－33.

[11] Eisenstat, S.C., Schultz, M.H. and Sherman, A.H., The application of sparse matrix methods to the numerical solution of nonlinear elliptic partial differential equations, in D.L. Colton and R.P. Gilbert (eds.), Constructive and computational methods for differential and integral equations, Lectures notes in math., Vol. 430, Springer, 1974, 131－153.

[12] Eisenstat, S.C., Schultz, M.H., Sherman, A.H., *Lect. Notes Math.*, 1974, 430, 131－153.

[13] Keller, J.B. and Antman, S. (eds.), Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, Benjamin, 1969.

[14] Скрыпник, И.В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973.

[15] Ладыженская, О.А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970 (中译本: О.А. 拉德任斯卡娅，粘性不可压缩流体动力学的数学问题，上海科学技术出版社，1963).

[16] Дьяконов, Е.Г., Расностные матоды решения краевых задач, в. 2-Нестационарные задачи, М., 1972.

[17] Fairweather, G., Finite elemetnt Galerkin methods for differential equations, M. Dekker, 1978.

[18] Luskin, M., A Galerkin method for nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, *SIAM J. Num. Anal.*, 16 (1979), 2, 284－299.

Е.Г. Дьяконов 撰

【补注】 上面的这篇文章考虑数值分析中的线性化方法，这样的方法也出现在其他领域．例如，算子多项式 $L(\lambda)=A_0+\lambda A_1+\cdots+\lambda^k A_k$ 的研究，其中 $A_0,\cdots,A_k$ 是作用在 Banach 空间 X 上的算子，可以约化为线性束

$$\lambda\begin{bmatrix} I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & . & . \\ . & \cdots & . & . \\ . & \cdots & I & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ . & 0 & \cdots & . \\ . & & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{k-1} \end{bmatrix}$$

的研究，其中 I 代表 X 上的恒等算子．这个方向的其他例子见[A1]．

参考文献

[A1] Gohberg, I.C., Kaashoek, M.A. and Lay, D.C., Equivalence, linearization, and decomposition of holomorphic operator functions, *J. Funct. Anal.*, 28 (1978), 102－144.

鲁世杰 译 葛显良 校

线性紧模[linearly-compact module; линейно компактный модуль]

拓扑环(topological ring)上的**拓扑模**(topological module)，它有由子模组成的零的邻域基(见**基**(base))，

且其中每个闭子模的陪集构成的中心系统（或滤子基，亦见**有心集族**（centred family of sets））具有非空的交．每个线性紧模是一个完全的拓扑群．

一个线性紧模称为狭义的线性紧模，如果每个到有由子模组成的零的邻域基的拓扑模之上的连续同态是开的（见**开映射**（open mapping））．一拓扑模是一个狭义线性紧模，当且仅当它是一个完全的拓扑群，且每个相对于开子模的商模是一个 **Artin 模**（Artinian module）．特别地，一个 Artin 模，取离散拓扑，则就是一个狭义线性紧模．这样狭义线性紧模是 Artin 模的一个拓扑类比．

（狭义）线性紧模的直积、闭子模、相对于闭子模的商模及在有由子模构成的零的邻域基的拓扑模上的连续同态的象仍然是（狭义）线性紧模．

参考文献

[1] Lefschetz, S., Algebraic topology, Amer. Math. Soc., 1955.

[2] Zelinsky, D., Linearly compact modules and rings, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 1, 79－90.

[3] Leptin, H., Linear kompakte Moduln und Ringe, *Math. Z.*, **62** (1955), 241－267.

[4] Leptin, H., Linear kompakte Moduln und Ringe Ⅱ, *Math. Z.*, **66**(1957), 289－327.

В. И. Арнаутов 撰

【补注】（拓扑）域（环）上的拓扑模 M 称为有线性拓扑（linear topology），如果存在由子模组成的零的邻域基．M 的一个线性子簇 V 是线性紧的，如果每个由 V 的闭有限子簇组成的系统 $\{V_\alpha\}$ 都有有限交性质，即如果 $\{V_\alpha\}$ 中有限个元素交是非空的，则 $\bigcap V_\alpha$ 是非空的．这种线性子簇是闭的．

群 G 上的滤过（filtration on a group G）（指标用整数）是一个 G 的子群 $(G_n)_{n\in Z}$ 的升或降的集合．设 A 是一个环，它有 A 的加法群下的滤过 $(A_n)_{n\in Z}$．这个滤过称作与环结构是相容的，如果 $A_nA_m\subset A_{n+m}$，对一切 $n, m\in \mathbf{Z}$，$1\in A_0$．有这样一个滤过的环称为滤过环（filtered ring）．现设 M 是一 A 模，$(M_n)_{n\in Z}$ 是在 Abel 群下的滤过．此滤过称为与滤化环 A 相容，如果 $A_nM_m\subset M_{n+m}$，对所有 $n, m\in\mathbf{Z}$．这种模称为滤过环 A 上的滤过模（filtered module）．如像通常情形，$A_0=A$，则 M_n 都是 M 的 A 子模．在文中滤过模定义就正对应了 M 的 A 子模．使用 (A_n) 和 (M_n) 作为 A 和 M 的开邻域基，就定义了 A 和 M 的线性拓扑．这是线性拓扑化的模与环常见的例子．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Hermann, 1961. Chapt. 3. Graduations, filtrations et topologies.

[A2] Warner, S., Topological fields, North-Holland, 1989, Chapt. 5, Sect. 31.

冯绪宁 译

线性无缘扩张［**linearly-disjoint extensions**; **линейно разделенные расширения**］，域 K 的

k 的扩张 Ω 中的两个子扩张 A 和 B，使得 A 与 B 在 Ω 中生成的子代数是（同构于）k 上的**张量积**（tensor product）$A\otimes B$（见**域的扩张**（extension of a field））．设 A 和 B 是 k 的扩张 Ω 中任意两个子环，并设 C 是由 A 和 B 生成的 Ω 的子环，则总是存在一环同态 $\varphi: A\otimes B\to C$，将 $x\otimes y\in A\otimes B$ 映为 $xy\in C$，这里 $x\in A$，$y\in B$．代数 A 和 B 称为在 k 上是线性无缘的（linearly disjoint）．如果 φ 是 $A\otimes B$ 到 C 上的同构．此时 $A\cap B=k$．为使 A 和 B 在 k 上线性无缘，只须存在一组 B 在 k 上的基底在 A 上无关．如果 A 是 k 上的有限扩张，则扩张次数 $[B(A):B]$ 不超过 $[A:k]$，两者相等的充分必要条件为 A/k 和 B/k 是线性无缘的．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algebra, Springer, 1988, Chapts. 4－7（译自法文）.

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

冯绪宁 译

线性-正则随机过程［**linearly-regular random process**; **линейно регулярный случайный процесс**］

满足正则性条件

$$\bigcap_t H_\xi(-\infty, t)=0$$

的广义**平稳随机过程**（stationary stochastic process）$\xi(t)$ $(-\infty<t<\infty)$，其中 $H_\xi(-\infty,t)$ 是 $\xi(s)$ $(s\leqslant t)$ 的线性组合的均方闭包．（此处假定 $\mathsf{E}\xi(t)=0$．）正则性意味着在非常久远的未来对过程 $\xi(t)$（线性）预报的不可能性；更确切地说，若 $\hat{\xi}(t+u)$ 是 $\xi(t+u)$ 基于 $\xi(s)$ $(s\leqslant t)$ 的最佳线性预报，即

$$\mathsf{E}|\xi(t+u)-\hat{\xi}(t+u)|^2=\min_{\eta\in H_\xi(-\infty,t)}\mathsf{E}|\xi(t+u)-\eta|^2,$$

则有

$$\lim_{u\to\infty}\hat{\xi}(t+u)=0.$$

（一维）平稳过程满足正则性的必要和充分条件是存在**谱密度**（spectral density）$f(\lambda)$，使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda>-\infty.$$

多维或无穷维平稳过程正则性的解析条件更为复杂．在一般情况下，当谱密度 $f(\lambda)$ 是 Hilbert 空间中的正算子函数时，正则性条件等价于 $f(\lambda)$，有如下形式的因子分解：

$$f(\lambda)=\varphi^*(\lambda)\varphi(\lambda),$$

其中 $\varphi(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty)$ 是在下半平面 $z=\lambda+i\mu$ $(\mu<0)$ 解析的算子函数 $\varphi(\lambda+i\mu)$ 当 $\mu\to 0$ 时的边界值.

每一广义平稳过程 $\zeta(t)$ 都有一个正交和形式的分解:

$$\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t),$$

$$\mathsf{E}\,\xi(t)\,\overline{\eta(t)}=0,$$

其中 $\xi(t)$ 是线性-正则过程, 而 $\eta(t)$ 是线性-奇异过程 (linearly-singular process), 它是一广义平稳过程, 且

$$\bigcap_t H_\eta(-\infty,t)=H_\eta(-\infty,\infty);$$

此外, 对一切 t 还满足

$$H_\xi(-\infty,t)\subset H_\zeta(-\infty,t)$$

及

$$H_\eta(-\infty,t)\subset H_\zeta(-\infty,t).$$

参考文献

[1] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963. (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary random processes, Holden-Day, 1967.)

[2] Розанов, Ю. А., Теория обновляющих процессов, М., 1974. (英译本: Rozanov, Yu. A., Innovation processes, Wiely, 1977.)

Ю. А. Розанов 撰

【补注】人们更常用的名称是 (广义) 纯非确定性过程 (purely non-deterministic process), 而不是线性-正则过程. 一个二阶过程分成正则和奇异部分的分解 (如正文所述), 称为 Wold 分解 (Wold decomposition).

参考文献

[A1] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, Изд-во. Наука, М., 1965. (英译本: Ibragimov, I. A. and Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971.)

[A2] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[A3] Ibragimov, I. A. and Rozanov, Yu. A., Gaussian random processes, Springer, 1978 (译自俄文).

刘秀芳 译

链环 [link; пояс], 单形 σ 在三角剖分 T 中的

闭星形 $\mathrm{St}(\sigma, T)$ (T 中含有 σ 的单形的并) 中, 既不与 σ、也不与 σ 的面相交的单形组成的集合 $\ln(\sigma, T)$. 　М. И. Войцеховский 撰

【补注】 亦见单形 (抽象的) (simplex (abstract)).

沈信耀 译　余建明 校

环绕系数 [linking coefficient; зацепления коэффициент]

与 n 维流形 M 中的两个不相交的闭链 z^{k-1} 和 z^{n-k} 相联系的整数或分数, 它们的同调类分别是整数同调群 $H_{k-1}(M,\mathbf{Z})$ 和 $H_{n-k}(M,\mathbf{Z})$ 的挠子群的部分. 最简单的例子是 $\mathbf{R}^3$ 中的两条不相交的可求长的闭曲线 L_1, L_2 的环绕系数, 它用所谓的 Gauss 积分 (Gauss integral):

$$I=\frac{1}{4\pi}\iint_{L_1 L_2}\frac{(x_1-x_2)dx_1dx_2}{|x_1-x_2|^3}$$

给出 (这里 x_1 和 x_2 是 L_1 和 L_2 的向量径).

环绕系数的概念推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的闭定向流形 M^{k-1} 和 M^{n-k} 的情形: 环绕系数等于定向直积 $M^{k-1}\times M^{n-k}$ 到球面 $S^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ 的映射 χ 的度 (见**映射度** (degree of mapping)), 其中, $\chi(x,y)(x\in M^{n-k})$ 是一个点, 在其上, S^{n-1} 被过原点且平行于向量 (x, y) 的射线所切割. 环绕系数等于任何使得 $\partial C^k=\alpha z^{k-1}$ 且具有闭链 z^{n-k} 的 k 链 C^k 的**相交指数 (同调论中的)** (intersection index (in homology)) 除以 α. 该数不依赖于 C^k 的选择. 如果闭链 z^{k-1} 和 z^{n-k} 的作用可交换, 则环绕系数乘以 (在可定向的情形) $(-1)^{k(n-k)}$. 如果闭链中的任何一个用在另一个闭链的补中的同调闭链代替, 则环绕系数保持相同. 这是 **Alexander 对偶性** (Alexander duality) 的环绕解释的基础. 如果闭链之一用一个同调闭链代替, 那么环绕系数改变一个整数, 从而定义了一对值在商群 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 中的 $H_{k-1}(M,\mathbf{Z})$ 和 $H_{n-k}(M,\mathbf{Z})$ 的挠子群, 其中 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集. 这一个偶对在它们之间建立了 **Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality). 特别地, 考虑在 $n=2m+1$ 情形中的 $H_m(M,\mathbf{Z})$ 的挠子群, 它定义了值在 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 中的自环绕的非退化二次型, 它是流形的同伦不变量. 例如, 这就导致对非对称流形的首次观察, 而它是特殊的透镜流形 (见**透镜空间** (lens space)).

也可用其他系数域考虑环绕系数; 例如, 如果群 π 自由地作用在流形上, 则同调群是群模且环绕系数定义在适当的局部群环中.

参考文献

[1] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Chelsea, 1980.

[2] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976 (英译本: Pontryagin, L. S., Smooth manifolds and their applications, in homolopy theory, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **11** (1959), 1-114).

А. В. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E., Algebraic topology, Springer, 1978 (中

译本: E.H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

徐森林 译

Линник离散遍历法 [Linnik discrete ergodic method; Линника дискретный эргодический метод]

解析数论(analytic number theory)中的一种特殊的方法, 它利用非交换算术把流形上整点的**一致分布**(uniform distribution)问题归结为考虑在这流形上的整点"流"和产生这些"流"的算子的问题. 这一方法的基础是由 Ю.В.Линник 奠定的([1]). Линник 的离散遍历法从其结果[2],[3]的特征而得到实质性的发展和"遍历"的特色. 离散遍历法已经应用于用三元二次型表示数的问题和在相应的椭球面和双曲面上整点的渐近分布问题. 已知的最佳结果是关于在递增半径的球面上整点渐近一致分布的 Линник 定理(见[2], 第四章).

参考文献

[1] Линник, Ю.В.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **4**(1940), 4－5, 363－402.

[2] Линник, Ю.В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967 (英译本: Linnik, Yu, V., Ergodic properties of algebraic fields, Springer, 1968).

[3] Малышев, А.В., О представлении целых чисел положительными квадратичными формами, М.-Л., 1962 (Тр, Матем. ин-та АН СССР, **65**).

[4] Малышев, А.В.,《Зап, науч. семинаров ЛОМИ》, **50**(1975), 179－186.

[5] Malyshev, A.V., Yu.V. Linnik's ergodic method in number theory, *Acta Arithm.*, **27**(1975), 555－598.

[6] Peters, M., Darstellungen durch definite ternäre quadratische Formen, *Acta Arithm.*, **34**(1977), 57－80.

А.В. Малышев 撰 戚鸣皋 译 朱尧辰 校

Liouville方程 [Liouville equation; Лиувилля уравнение]

经典 N 粒子系统按动量 $p=(\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_N)$ 和坐标 $q=(\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_N)$ 的分布函数 $w_N(p, q; t)$ 的运动方程:

$$\frac{\partial w_N}{\partial t}=\{H, w_N\}_{\mathrm{cl.}}\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}\frac{\partial w_N}{\partial \mathbf{p}_i}-\frac{\partial w_N}{\partial \mathbf{q}_i}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}\right],$$

其中 H 是系统的 **Hamilton 算子**(Hamilton operator), 花括号表示经典 **Poisson 括号**(Poisson brackets).

在相空间 (p, q) 中, 分布 $w_N(p, q; t)$ 与相点密度相联系(每个相点对应于给定 N 质点系统的一个确定的力学态). 由于力学运动方程解的唯一性, 这些相点的运动轨道并不相交, 以及由于按 **Liouville 定理**(Liouville theorems)相体积守恒的事实, 这些相点的系综在相空间形成一种不可压缩流体. 其密度 w_N 相对于时间的全导数等于零:

$$\frac{dw_N}{dt}=\frac{\partial w_N}{\partial t}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial w_N}{\partial \mathbf{q}_i}\frac{d\mathbf{q}_i}{dt}+\frac{\partial w_N}{\partial \mathbf{p}_i}\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}\right]=0.$$

如果按照 **Hamilton 方程**(Hamilton equations), 将坐标和动量的导数用 Hamilton 函数的相应偏导数表示, 则导致 Liouville 方程.

Liouville 方程不仅应用于研究统计力学的一般问题, 它们与阐明多体系统态的微观和宏观结构, 趋向平衡的过程, 相空间中的"混合"问题, 遍历性等等有关; 而且应用于一些具体研究, 因为 Liouville 方程是构造 **Боголюбов 方程系列**(Bogolyubov chain of equations)的原始方程, 因而也是构造各种不同类型动理方程的原始方程, 借助于这些方程, 应用物理的问题已可予以求解.

在量子系统的情况下, Liouville 方程的角色由统计算子 $\rho(t)$(**密度矩阵**(density matrix))的运动方程扮演, 在 Schrödinger 绘景中它具有形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\{H, \rho\}_{\mathrm{qu}}\equiv\frac{1}{i\hbar}[H\rho-\rho H],$$

其中 H 是 Hamilton 算子, 大括号表示量子 Poisson 括号. 这个量子 Liouville 方程是(由给定统计算子所描述的)混合态的结构的一个推论, 其中, 组成混合态的每个纯量子力学态按照 **Schrödinger 方程**(Schrödinger equation)演化.

参考文献

[1] Goldstein, H., Classical mechanics, Addison-Wesley, 1957 (中译本: H.戈德斯坦, 经典力学, 第二版, 科学出版社, 1986).

[2] Uhlenbeck, G.E., Ford, G.V., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

[3] Боголюбов, Н.Н., Избр. труды, т. 2, К., 1970.

И.А. Квасников 撰

【补注】 量子 Poisson 括号通常写成 $\{H, \rho\}_{\mathrm{qu.}}=[H, \rho]/i\hbar$, 其中 $[H, \rho]=H\rho-\rho H$ 是**对易式括号**(commutator bracket).

参考文献

[A1] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988.

[A2] Gantmacher, F. [F.R. Gantmakher], Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975 (译自俄文).

徐锡申 译

Liouville函数 [Liouville function; Лиувилля функция]

由下式定义的**算术函数**(arithmetic function) $\lambda(n)$:

$$\lambda(n)=(-1)^{\nu(n)},$$

其中 ν 是 n 的素因子的个数. Liouville 函数与 **Möbius 函数**(Möbius function) $\mu(n)$ 有着密切联系:

$$\lambda(n)=\sum_{d^2|n}\mu\left[\frac{n}{d^2}\right].$$

在数论中, 一个重要的估计是和

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}\lambda(n),\ \text{当}\ x\to\infty\ \text{时}$$

的估计. 存在一个猜想

$$S(x)\ll\sqrt{x}\ \ln x.$$

用 И. М. Виноградов 方法得到的最新结果是

$$S(x)\ll x\exp(-c\ln^{3/5}x\ln^{1/5}\ln x).$$

Liouville 函数是 J. Liouville 引入的.

参考文献

[1] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[2] Chandrasekharan, K., Arithmetical functions, Springer, 1970.

А. Ф. Лаврик 撰 张鸿林 译

Liouville 网 [Liouville net; Лиувилля сеть]

曲面上的一种参数曲线网, 使得曲面的线素具有下列形状:

$$ds^2=(U+V)(du^2+dv^2),$$

其中 $U=U(u), V=V(v)$. 在由不同族的两对参数曲线组成的每个矩形中, 两测地对角线具有相同的长度. 具 Liouville 网的曲面是 **Liouville 曲面**(Liouville surface). 例如, 二阶中心曲面是 Liouville 曲面. Liouville 网是由 J. Liouville 在 1846 年引入的(见[1], 命题 3).

参考文献

[1] Monge, G., Application ds l'analyse à la géométrie, Bachelier, 1850.

[2] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.

[A2] Berger, M. amd Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988.

沈一兵 译

Liouville 范式 [Liouville normal form; Лиувилля нормальная форма]

把二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+(q(x)+\lambda r(x))y=0 \tag{1}$$

写为

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(\lambda+\varphi(\xi))\eta=0 \tag{2}$$

的形式, 其中 λ 是参数. 如果 $p(x)\in C^1$, $r(x)\in C^2$ 且 $r(x)>0$, 则方程(1)可通过代换

$$\eta(\xi)=\Phi(x)y(x),\ \xi=\int_a^x\sqrt{r(t)}\ dt,$$

$$\Phi(x)=(r(x))^{1/4}\exp\left[\frac{1}{2}\int_a^x p(t)dt\right]$$

化简为 Liouville 范式(2); 此代换(引进于[1]中)称为 Liouville 变换(Liouville transformation). 在研究(1)的解对于参数 λ 或自变量的很大的值时的渐近性态以及在研究 **Sturm-Liouville 问题**(Sturm-Liouville problem)的本征函数和本征值的渐近性态中, Liouville 范式起着重要作用(见[3]).

参考文献

[1] Liouville, J., *J. Math. Pures Appl.*, **2** (1837), 16–35.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947(中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977).

[3] Titchmarsh, E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, 1–2, Clarendon Press, 1946–1948(中译本: E. C. 梯其玛希, 与二阶微分方程相联系的本征函数展开, 上海科学技术出版社, 1964).

М. В. Федорюк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

沈永欢 译

Liouville 数 [Liouville number; Лиувилля число]

一个实数 α, 使得对任何 $\nu\geqslant1$, 不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-\nu}$$

具有无穷多个满足条件 $q>0$, $(p,q)=1$ 的整数解 p 和 q. Liouville 数是**超越数**(transcendental number)这一事实, 可从 **Liouville 定理**(Liouville theorems)得出. J. Liouville 研究过这些数([1]).

Liouville 数的一些例子是

$$\alpha_1=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n!},$$

$$\alpha_2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n2^{-3^n},$$

$$\alpha_3=\sum_{n=1}^{\infty}(10^{n!})^{-1}.$$

参考文献

[1] Liouville, J., Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 883 – 885.

[2] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952 (英译本: Gel'fond, A. D., Transcendental and algebraic numbers, Dover, reprint, 1960).

C. B. Котов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Perron, O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1, Teubner, 1977.

[A2] Perron, O., Irrationalzahlen, Chelsea, reprint, 1948.

张鸿林 译

Liouville-Остроградский 公式 [**Liouville-Ostrogradski formula**; **Лиувилля-Остроградского формула**], Liouville 公式 (Liouville formula)

一个联系着线性常微分方程解组的 **Wronski 行列式** (Wronskian) 和方程系数的关系式.

设 $x_1(t_1), \cdots, x_n(t)$ 为 n 个一阶线性齐次方程组

$$x' = A(t)x,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

的任意 n 个解, 算子 $A(t)$ 在区间 I 上连续, 且设

$$W(x(t), \cdots, x_n(t)) = W(t)$$

为这一组解的 Wronski 行列式. Liouville-Остроградский 公式具有下列形式:

$$\frac{d}{dt} W(t) = W(t) \cdot \operatorname{Tr} A(t),\ t \in I, \tag{2}$$

或等价形式

$$W(x_1(t), \cdots, x_n(t)) =$$

$$= W(x_1(t_0), \cdots, x_n(t_0)) \cdot \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s) ds,$$

$$t,\ t_0 \in I. \tag{3}$$

这里 $\operatorname{Tr} A(t)$ 是算子 $A(t)$ 的**迹** (trace). Liouville-Остроградский 公式可以通过系统 (1) 的 **Cauchy 算子** (Cauchy operator) $X(t, t_0)$ 表示成:

$$\det X(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s) ds,\ t,\ t_0 \in I. \tag{4}$$

(4) (或 (3)) 的几何意义是经过变换 $X(t, t_0)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, 任何物体的有向体积会增加一个因子

$$\exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s) ds.$$

如果考虑在区间 I 上具有连续系数的 n 阶线性齐次方程

$$P_0(t) y^{(n)} + \cdots + P_n(t) y = 0, \tag{5}$$

且对 $t \in I$, 有 $p_0(t) \neq 0$, 则 Liouville-Остроградский 公式为等式

$$W(y_1(t), \cdots, y_n(t)) =$$

$$= W(y_1(t_0), \cdots, y_n(t_0)) \cdot \exp \left[- \int_{t_0}^{t} \frac{p_1(s)}{p_0 - (s)} ds \right],$$

$$t_1,\ t_0 \in I, \tag{6}$$

这里 $W(y_1(t), \cdots, y_n(t))$ 是 (5) 的 n 个解 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 的 Wronski 行列式. Liouville-Остроградский 公式 (3) 和 (6) 常用于考虑的解组为**基本解组** (fundamental system of solutions) 的情形. 例如, 如果知道二阶线性齐次方程的一个非平凡特解, 就可以利用公式 (6), 通过求积得到它的通解.

方程 (5) 在 $n = 2$ 时的关系式 (6) 是由 N. H. Abel 在 1827 年发现的 (见 [1]), 对于任意的 n, 则是由 J. Liouville ([2]) 和 M. B. Остроградский ([3]) 于 1838 年发现的; 等式 (3) 是由 Liouville ([2]) 和 C. G. J. Jacobi ([4]) 得到的 (因而, (3) 有时也称为 Jacobi 公式 (Jacobi formula)).

Liouville-Остроградский 公式 (2) 可以推广到非线性系统

$$x' = f(t, x),\ x \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

这里假设向量值函数

$$f(t, x) = (f_1(t_1, x_1, \cdots, x_n),$$

$$\cdots, f_n(x, x_1, \cdots, x_n))$$

和矩阵 $\partial f / \partial x$ 连续. 如果 $\Omega_{t_0} \subset \mathbf{R}^n$ 为具有有限测度 $\mu(t_0)$ 的集合, 并且它在线性映射 $X(t_1 t_0)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 下的象 Ω_t 具有测度 $\mu(t)$, 这里 $X(t, t_0)$ 为系统 (7) 的 Cauchy 算子, 则

$$\frac{d\mu}{dt} = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_x f(t, x) dx;$$

这里

$$\operatorname{div}_x f(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i}.$$

这蕴涵了关于相体积守恒的 Liouville 定理 (Liouville theorem on the conservation of phase volume), 它在动力系统理论和**统计力学** (statistical mechanics) 中都有重要应用: 光滑**自治系统** (autonomous system)

$$x' = f(x),\ x \in \mathbf{R}^n$$

的流保持相空间 $\mathbf{R}^n$ 中任何物体的体积不变，当且仅当对所有的 x，$\operatorname{div} f(x)=0$；特别地，相体积在 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）的流作用下守恒．

参考文献

[1] Abel．N．H．，Ueber einige bestimmte Integrale，*J．Reine Angew．Math．*，**2**（1827），22－30．

[2] Liouville，J．，*J．Math．Pures Appl．*，3（1838），342－349．

[3] Остроградский，М．В．，Полн．собр．трудов，т．3，К．，1961，124－126．

[4] Jacobi，C．G．，J．，Gesammelte Werke，4，Chelsea，reprint，1969．

[5] Понтриягин，Л．С．，Обыкновенные дифференциальные уравнения，4 изд．，М．，1974（中译本：Л．С．庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）．

[6] Арнольд，В．И．，Обыкновенные дифференциальные уравнения，М．，1971（中译本：В．И．阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985）．

Н．Ф．Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartman，P．，Ordinary differential equations，Birkhäuser，1982．

唐 云 译

Liouville 曲面［Liouville surface；Лиувилля поверхность］

测地线方程容有二次积分 $a_{ij}du^i du^j$ 的曲面，其中张量 a_{ij} 不同于曲面的**度量张量**（metric tensor）g_{ij}．例如，常数 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature）的曲面是 Liouville 曲面．曲面容有到平面上的**测地映射**（geodesic mapping）的充要条件是它是 Liouville 曲面（Dini 定理（Dini theorem））．也见 **Liouville 网**（Liouville net）．

И．Х．Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke，W．and Leichtweiss，K．，Elementare Differentialgeometrie，Springer，1973．

[A2] Berger，M．and Gostiaux，B．，Differential geometry：manifolds，curves and surfaces，Springer，1988．

沈一兵 译

Liouville 定理［Liouville theorems；Лиувилля теорема］

1）关于有界整解析函数的 Liouville 定理．如果复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的**整函数**（entire function）$f(z)$ 为有界，即如果

$$|f(z)|\leqslant M<+\infty,\ z\in\mathbf{C}^n,$$

则 $f(z)$ 是一常数．这一命题是解析函数论的基本结果之一，看来对于 $n=1$ 的情形是由 A．L．Cauchy 于 1844 年首次发表的（[1]）；J．Liouville 在其 1847 年的讲授中提出了这个命题，由此它被冠以 Liouville 的姓氏．

Liouville 定理可从各个方向得到推广．例如，如果 $f(z)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的整函数且对某个非负整数 m 有

$$|f(z)|\leqslant M(1+|z|^m),\ z\in\mathbf{C}^n,$$

则 $f(z)$ 是变量 $(z_1,\cdots,z_n)$ 的不超过 m 次的多项式．还有，如果 $u(x)$ 是空间 $\mathbf{R}^n$ 中的实值**调和函数**（harmonic function），$x=(x_1,\cdots,x_n)$，且

$$u(x)\leqslant M(1+|x|^m)$$
$$(\text{或 } -u(x)\leqslant M(1+|x|^m)),\ x\in\mathbf{R}^n,$$

则 $u(x)$ 是 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的不超过 m 次的调和多项式（亦见[4]）．

【译注】 事实上，J．Liouville 于 1844 年 12 月 16 日在巴黎科学院会议上已表述了有界全纯函数必为常数这一命题．

参考文献

[B1] Lützen，J．，Joseph Liouville 1809－1882：Master of pure and applied mathematics，Springer，1990．

2）关于共形映射的 Liouville 定理．Euclid 空间 $E^n(n\geqslant 3)$ 中区域的每个**共形映射**（conformal mapping）可表示为有限个非常简单的 4 类映射——平移、相似变换、正交变换与反演的复合．此定理为 J．Liouville 于 1850 年证明（见[2]，附录 6）．

这一定理表明，空间中共形映射类并不丰富．从这个观点看，它在多复变量解析函数论和**拟共形映射**（quasi-conformal mapping）理论中十分重要．

参考文献

[1] Cauchy，A．L．，*C．R．Acad．Sci．Paris*，**19**（1844），1377－1384．

[2] Monge，G．，Application de l'analyse à la géométrie，Bachelier，1850，pp．609－616．

[3] Бицадзе，А．В．，Основы теории аналитических функций комплексного переменного，2 изд．，М．，1972．

[4] Владимиров，В．С．，Методы теории функций многих комплексных переменных，М．，1964（英译本：Vladimirov，V．S．，Methods of the theory of functions of several complex variables，M．I．T．，1966）．

Е．Д．Соломенцев 撰

3）关于代数数逼近的 Liouville 定理是陈述代数无理性不可能很好地为有理数逼近的一条定理，即如果 α 是 n 次（$n\geqslant 2$）**代数数**（algebraic number），p 和 q 是任何正整数，则

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^n},$$

其中 c 是只依赖于 α 的正常数，并可通过与 α 相联系的量显式表示．

J．Liouville（[1]）用这条定理首次构造了非代数

(超越)数(见**超越数**(transcendental number)). 例如,

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

就是这样的一个数,它是一个具有急减项的级数.

对于 $n=2$, Liouville 定理给出了最好可能的结果. 对于 $n \geqslant 3$, 此定理经常得到加强. 1909 年, A. Thue([2]) 证明, 对于次数 $n \geqslant 3$ 的代数数 α 以及 $\nu > 1 + n/2$, 有

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{\nu}} . \qquad (1)$$

C. L. Siegel([3]) 证明, 如果(s 是整数)

$$\nu > \min_{1 \leqslant s \leqslant n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s \right),$$

特别地, 如果 $\nu > 2\sqrt{n}$, (1) 仍满足, 从而改进了Thue 的结果. 后来 F. J. Dyson([4]) 证明当 $\nu > \sqrt{2n}$ 时 (1) 仍成立. 最后, K. F. Roth([5]) 证明, 对任何 $\nu > 2$, (1) 都成立. Roth 的结果是这类结果中最好的, 因为任一 (代数的或非代数的) 无理数 ξ 必有无穷多个有理逼近 p/q, 满足不等式

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} . \qquad (2)$$

所有上面提到的 Liouville 定理的强化都有一个重大缺陷, 即它们都不是有效的: 其证明方法都不能建立不等式 (1) 中的常数 $c = c(\alpha, \nu)$ 如何依赖于 α 和 ν. 已经得到 Liouville 定理的有效加强 (见 [6]-[8]), 可惜只是对于与 n 差别不大的 ν 值.

参考文献

[1] Liouville, J., Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 883 - 885; 910 - 911.

[2] Thue, A., Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **135** (1909), 284 - 305.

[3] Siegel, C. L., Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.*, **10** (1921), 173 - 213.

[4] Dyson, F. J., The approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.*, **79** (1947), 225 - 240.

[5] Roth, K. F., Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1 - 20; 168.

[6] Baker, A., Contributions to the theory of Diophantine equations I, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **263** (1968), 173 - 191.

[7] Спринджук, В. Г., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **35** (1971), 991 - 1007.

[8] Фельдман, Н. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **35** (1971), 973 - 990.

С. А. Степанов 撰

【补注】 使 (2) 成立的有理逼近 p/q 可从 ξ 的连分数展开的渐近分数求得.

4) 关于相体积守恒的 Liouville 定理: $6N$ 维相空间 (p, q) (此空间的分量为具有相互作用位势力的 N 个质点的经典系统中每个质点的动量 $p = (\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_N)$ 和坐标 $q = (\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N)$) 的任一区域 G 的体积 V 在时间进程中保持不变:

$$V = \int_{(G)} dp\,dq = \text{常数},$$

假定这个区域中所有点按照经典力学方程运动. 这个断言是下述事实的推论: 从 (t 时刻的) 变量 (p, q) 到 ($t' > t$ 时刻的) 变量 (p', q') 按运动方程 (例如 Hamilton 方程) 变换的 Jacobi 行列式等于 1. 量 V 是 Poincaré 积分不变量之一, 因而所述定理是这些积分不变量存在性的推论. Liouville 定理用于经典系统的统计力学中(见 **Liouville 方程**(Liouville equation)), 它是由 J. Liouville 于 1851 年提出的.

И. А. Квасников 撰

【译注】 J. Liouville 的研究首次发表于 1838 年, 见 [B1].

参考文献

[B1] Liouville, J., Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraite, *J. Math. Pure Appl.*, **3** (1838), 342 - 349.

沈永欢 译

Lipschitz 条件 [Lipschitz condition; Липшица условие]

函数增长性态的一种限定. 如果对属于区间 $[a, b]$ 的任何点 x, x', 函数 f 的增长满足不等式

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|^{\alpha}, \qquad (*)$$

其中 $0 < \alpha \leqslant 1$, M 是一常数, 则称 f 在 $[a, b]$ 上满足 α 阶 Lipschitz 条件, 记作 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $f \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$ 或 $f \in H^{\alpha}(M)$. $[a, b]$ 上对于某个 $\alpha > 0$ 满足 Lipschitz 条件的函数在 $[a, b]$ 上是一致连续的; 满足 $\alpha = 1$ 阶 Lipschitz 条件的函数是绝对连续的 (见**绝对连续性**(absolute continuity); **一致连续性** (uniform continuity)). 在 $[a, b]$ 上具有有界导数的函数在该区间上满足对任一 $\alpha \leqslant 1$ 的 Lipschitz 条件.

Lipschitz 条件 (*) 等价于条件

$$\omega(\delta, f) \leqslant M\delta^{\alpha},$$

其中 $\omega(\delta, f)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的连续模 (见**连续模**(continuity, modulus of)). R. Lipschitz 在 [1] 中作为 f 的 **Fourier 级数** (Fourier series) 收敛性的充分条件首次考察了 Lipschitz 条件. 对于 $0 < \alpha < 1$ 的情形, 条件 (*) 也称为 α 阶 **Hölder 条件** (Hölder condition).

参考文献

[1] Lipschitz, R., De explicatione per series trignometricas insttuenda functionum unius variablis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variablis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infintum disquisitio, *J. Reine Angew. Math.*, **63** (1864), 296 – 308.

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] Натансон, И. П., Конструктивная теория функций, М.-Л., 1949 (中译本: И. П. 纳唐松, 函数构造论, 科学出版社, 1958).

А. В. Ефимов 撰 沈永欢 译

Lipschitz 常数 [**Lipschitz constant**; **Липшица константа**], 定义于区间 $[a, b]$ 上的函数 f 的

α 阶 $(0<\alpha\leqslant 1)$ **Lipschitz 条件** (Lipschitz condition)

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|^{\alpha},\ x,\ y\in[a,\ b]$$

中常数 $M>0$ 的下确界.

А. В. Ефимов 撰 沈永欢 译

Lipschitz 积分条件 [**Lipschitz integral condition**; **Липшица условие интегральное**]

以积分度量给出的关于函数增长性态的一种限制. 称空间 $L_p(a, b)$ $(p\geqslant 1)$ 中的函数 f 在 $[a, b]$ 上满足具有常数 $M>0$ 的 $\alpha>0$ 阶 Lipschitz 积分条件, 如果对所有 $h\in(0, b-a)$, 有

$$\left\{\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant Mh^{\alpha};\quad (*)$$

记作 $f\in \mathrm{Lip}_M(\alpha, p)$, $f\in H_p^{\alpha}(M)$ 或 $f\in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, $f\in H_p^{\alpha}$. 对于周期函数 (以 $b-a$ 为周期) 情形, 可类似地定义 Lipschitz 积分条件, 只是不等式 (*) 中的积分上限 $b-h$ 必须代之以 b.

参考文献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[2] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiǐ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[3] Бесов, О. В., Ильин, В. П., Никольский, С. М., Интегральное представление функций и теоремы вложения, М., 1975 (英译本: Besov, O. V., Il'in, V. P., Nikol'skiǐ, S. M., Integral representations of functions and imbedding theorems, Wiley, 1978).

А. В. Ефимов 撰 沈永欢 译

Lisp 语言 [**Lisp**; **Лисп**]

由 J. McCarthy 在 1959 至 1962 年间开发的一种**算法语言** (algorithmic language) ([1]). 由一种非常一致的语法所描述, 其中, 程序及其对象都一致地以所谓表结构 (list structure) —— **图** (graph), 特别是**树** (tree) 的形式出现, 其基底的顶点是原子 (见下面), 其余顶点都是表 (list), 即被空格和括号隔开的元素 (表或原子) 的序列 (可能是空的), 例如

$$(A\,X(35\,B)44\,Z)$$

原子 (atom) 是语言字母表上的非空字, 它不包含括号或间隔, 而是表示变量、常数、函数或自身. 可以谈论其值的表和原子被称为表达式 (expression). 一个表 —— 表达式 E —— 的第一个元素是一个原子, 此原子是一个函数或者是表示一个函数的表. 表 E 的其余元素是作为该函数变量的表达式, 而 E 的值是从其变量上作用一个函数的结果. 这里变量与常数的值按通常的方法理解. 一个函数是以表的形式来表示的 (lambda $(x1, \cdots, xn)$ exp), 其中 lambda 是一固定原子, $(x1, \cdots, xn)$ 是表示函数变量的约束变元的表, 而 exp 是计算函数值的表达式, 包含 $x1, \cdots, xn$ 作为自由变量.

Lisp 语言的基本函数有: car(l) 和 cdr(l), 它们指出表 l 的第一个元素及其 "剩余部分"; quote(l), 指出 l 的值; cons(lm), 指用表 m 来 "延长" 表 l; cond$((p1e1)\ (p2e2))$, 指如果谓词表示 $p1$ 正确, 那么它取表达式 $e1$ 的值, 如果 $p2$ 正确, 则取 $e2$ 的值, 如果 $p1$ 与 $p2$ 都不正确, 则取 $e1$ 的值. 基本谓词有: atom(l), 验证 l 是否为原子; eg$(l1l2)$, 如果 $l1$ 和 $l2$ 是相等的原子, 那么 eg$(l1l2)$ 正确; 以及 null(l), 指如果 l 是空表, 那么 null(l) 正确. 基本函数和谓词形成一个编程工具箱, 足以实现 Lisp 语言中算法语言的其他构造, 例如, 将变量值赋予一个表达式或建立原子与其函数表示之间的关系. Lisp 语言中的程序是由表达式组成的一个任意的表.

Lisp 语言有易于表示任意表结构的能力, 尤其是以递归定义的手段, 以及在计算过程中形成表达式, 是 Lisp 语言作为复杂逻辑问题的实用的程序设计手段而广泛流行的原因.

参考文献

[1] McCarthy, J., Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, *Comm. ACM*, 3 (1960), 184.

[2] Lavrov, S. S. and Silagadze, G. S., Automatic data processing. The language Lisp and its realization, Moscow, 1978 (俄文).

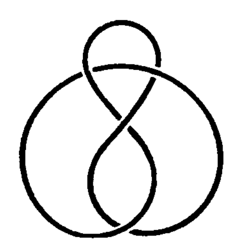
[3] Higman, B., A comparative study of programming

languages, Amer. Elsevier, 1968.

A. P. Ershov 撰 曹为理 译 王继民 校

8字纽结 [listing knot; листинга узел]

最简单的非平凡纽结之一（见图和**纽结理论**（knot theory））．8字纽结用符号 4_1 表示（见**纽结表**（knot table）)，有时称为8字图或4折纽结．8字纽结的群（见**纽结群和连接群**（knot and link groups））有表达式 $|x,y:yx^{-1}yxy^{-1}=x^{-1}yxy^{-1}x|$，且 Alexander 多项式是 $\Delta_1=t^2-3t+1$．这是由 I.B. Listing 得出的（[1]）．



参考文献

[1] Listing, I. B., Vorstudien zur topologie, Gottingen, 1847.

М. Ш. Фарбер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[A2] Kauffman, L. H., On Knots, Princeton Univ. Press, 1987.

徐森林 译

Littlewood 问题 [Littlewood problem; Литлвуда проблема]

1）关于相容 Diophantos 逼近的 Littlewood 问题是对于任意实数 $\alpha,\beta,\varepsilon>0$，是否存在满足 $n\|\alpha n\|\|\beta n\|<\varepsilon$ 的自然数 n 的问题，此处 $\|\alpha\|$ 是 α 到最近整数的距离．在某些情况下，例如对于有理数 α 和 β，或者两数 α 和 β 之一可表成具有非负元素的**连分数**（continued fraction）之时，Littlewood 问题具有肯定的回答．

2）关于积分的 Littlewood 问题是对于自然数 m_k $(k=1,2,\cdots)$ 的任意递增序列 M，是否有

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\exp(2\pi i m_k x)\right|dx>f(n). \qquad (*)$$

这里 $f(n)=C\ln n, C>0$ 是绝对常数，而 $n>n_0$．对于任意序列 M，已经得到比（*）弱一些的估计，而对某些特殊序列 M，得到了接近于（*）甚至与它相吻合的估计．

Littlewood 问题是由 J. E. Littlewood 陈述的（见[1]）．

参考文献

[1] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., A new proof of a theorem on rearrangements, J. Londor Math. Soc., **23** (1948), 163 – 168.

[2] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1959.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】关于积分的 Littlewood 问题曾在三十年的期间内吸引了众多数学家的巨大兴趣．最终由 O. C. McGehee, L. Pigno 和 B. Smith（[A1]）以及 S. V. Konyagin（[A2]）独立地于1981年予以肯定的解决．问题在解决之前的描述可见[A3]的1.3.节．

当 $n=2N+1, m_k=k$ 时，（*）的左边等于 **Lebesgue 常数**（Lebesgue constants）L_N．因 $L_N=(4/\pi^2)\cdot\log N+\lambda_N$，此处 λ_N 为有界正数，故常数 C 的取值不能大于 $4/\pi^2$．留下的一个猜测，是当 $f(n)=(4/\pi^2)\log n$（对所有 $n\geq 1$）时（*）成立．[A4]中在 $f(n)=(4/\pi^3)\cdot\log n$ 时证明了（*）．

参考文献

[A1] McGehee, O. C., Pigno, L. and Smith, B., Hardy's inequality and the L^1 norm for exponential sums, *Ann. of Math.*, **113** (1981), 613 – 618.

[A2] Konjagin, S. V. [S. V. Konyagin], On a problem of Littlewood, *Math. USSR Izv.*, **18** (1982), 2, 205–225. (*Izv. Acad. Nauk SSSR*, **45** (1981), 243 – 265).

[A3] Graham, C. C. and McGehee, O. C., Essays in commutative harmonic analysis, Springer, 1979.

[A4] Stegeman, J. D., On the constant in the Littlewood problem, *Math. Ann.*, **261** (1982), 51 – 54.

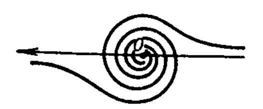
戚鸣皋 译 朱尧辰 校

连锁螺线 [lituus; жезл]

一种平面超越曲线，它在极坐标中的方程是

$$\rho=\frac{a}{\sqrt{\varphi}}.$$

每个 φ 值对应于两个 ρ 值，一个为正的，一个为负的．连锁曲线由两个分支组成，二者都渐近地趋向于极点（见图）．



当 $\rho=\pm\infty$ 时直线 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 是渐近线，$(1/2, a\sqrt{2})$ 和 $(-1/\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ 是拐点．连锁曲线同所谓代数**螺线**（spirals）有联系．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1–3, Chelsea, reprint, 1971.

张鸿林 译

Лобачевский 准则(关于收敛性的) [Lobachevskiĭ criterion (for convergence); Лобачевского признак]

如果在正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中，a_n 单调地趋向于零，则此级数收敛或发散，取决于级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

收敛或发散，其中 p_m 是满足不等式 $a_n \geq 2^{-m}(n=1, \cdots, p_m)$ 的各项 a_n 的最大指标.

这个准则是 Н. И. Лобачевский 于 1834－1836 年提出的. В. И. Битюцков 撰 张鸿林 译

Лобачевский 函数 [Lobachevskiĭ function; Лобачевского функция]

1) **Лобачевский 几何学** (Lobachevskiĭ geometry) 中的平行角 (angle of parallelism) 是一个函数，用垂直于 u_1(或 u_2) 的平行线 a 的线段 OA 的长度 l 表示 u_1 (或 u_2) 和线段 OA 的夹角 α (见图):

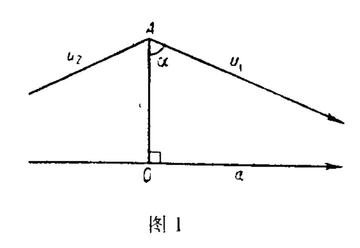


图 1

$$\alpha = \Pi(l) = 2\arctan e^{-l/R},$$

其中 R 是一相应于距离测量尺度的正常数.

Лобачевский 函数是一取值介于 $\pi/2$ 和 0 之间的连续单调递减函数:

$$\lim_{l \to 0} \Pi(l) = \pi/2, \quad \lim_{l \to \infty} \Pi(l) = 0.$$

由 Н. И. Лобачевский 在 1826 年引进.

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.-Л., 1949.

[2] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

2) 如下定义的**特殊函数** (special functions):

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\,dt,$$

其中 x 为实数，Лобачевский 函数可以表示为幂级数

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2kx}{k^2}.$$

主要关系有

$$L(-x) = -L(x), \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$L(\pi - x) = \pi\ln 2 - L(x),$$

$$L(\pi + x) = \pi\ln 2 + L(x).$$

它们由 Н. И. Лобачевский 于 1829 年引进.

参考文献

[1] Рыжик, И. М., Градштейн, И. С., Таблицы интегралов, суми, рядов и произведений, 3 изд., М.-Л., 1951 (英译本: Ryzhik, I. M. and Gradshtein, I. S., Tables of integrals, series, and products, Acad. Press, 1980).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 关于第一个意义 (即平行角) 的 Лобачевский 函数，又见 [A1]－[A4].

关于 2) 中定义的 Лобачевский 函数，又见 [A5].

参考文献

[A1] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974.

[A2] Coxeter, H. S. M., Parallel lines, *Canad. Math. Bull.*, **21** (1978), 385－397.

[A3] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Toronto Univ. Press, 1957.

[A4] Bonola, R., Non-Euclidean geometry, Dover, reprint, 1955.

[A5] Coxeter, H. S. M., Twelve geometric esays, Carbondale, 1968, Chapt. 1.

杨 路、曾振柄 译

Лобачевский 几何学 [Lobachevskiĭ geometry; Лобачевского геометрия]

除了平行公理 (见**第五公设** (fifth postulate)) 以外，其基本前提与 **Euclid 几何学** (Euclidean geometry) 相同的一种几何学. 按照这一公理，在 Euclid 几何学中，平面上通过不在直线 $A'A$ 上的一点 P 正好有一直线 $B'B$ 与 $A'A$ 不相交. 直线 $B'B$ 称为 $A'A$ 的一条平行线. 因为可以经由依次画直线 $PQ \perp A'A$ 及 $PB \perp PQ$ 证明不相交直线的存在性，只要求最多有一条不相交直线就够了.

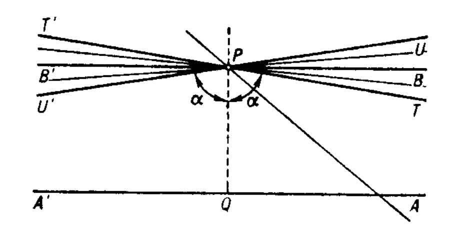


图 2

在 Лобачевский 几何学中平行公理要求通过一点 P (图 1) 有多于一条线与直线 $A'A$ 不相交. 所有这些与 $A'A$ 不相交的直线充满以 P 为顶点而位于关于垂线 PQ 对称的对顶角 TPU 和 $U'PT'$ 之内. 形成对顶角之两边的直线分隔与 $A'A$ 相交和不相交的直线，而它们本身与 $A'A$ 不相交. 这两条边界线称为 $A'A$ 通过 P 点的沿其两个方向的平行线 (parallels): $T'T$ 是 $A'A$ 沿方向 $A'A$ 的平行线，UU' 是 $A'A$ 沿方向 AA' 的平行线. 其他的与 $A'A$ 不相交直线称为 $A'A$ 的超平行

线(ultraparallels)(详见下). 过 P 点的一平行线与垂线 PQ 所构成的角 $\alpha=\angle QPT=\angle QPU'$, $0<\alpha<\pi/2$, 称为线段 $PQ=a$ 的平行角(angle of parallelism), 记为 $\alpha\equiv\Pi(a)$ · $a=0$ 时 $\alpha=\pi/2$; 当 a 增加时角 α 减少, 所以每一给定的 α 对应一确定的值 a. 其对应关系称为 Лобачевский 函数(Lobachevskiǐ functions):

$$\Pi(a)=2\arctan(e^{-a/k}),$$

此处 k 是确定尺度的一个常数, 称为 Лобачевский 空间的曲率半径(radius of curvature of the Lobachevskiǐ space).

Euclid 几何学可以作为 Лобачевский 几何学的极限情况来得到: 即当通过 P 点的两条平行线合而为一时, 所有通过 P 点而与 $A'A$ 不相交的直线是唯一直线. 从而每一 a 对应的角度 $\alpha=\pi/2$. 此条件等价于 $k=\infty$. 在空间的小区域, 即图形的大小与 k 相比是无限小时, Лобачевский 几何学的所有关系式趋近于 Euclid 几何学的关系式.

平面上两条不同直线构成下面三种关系之一.

相交直线(intersecting lines). 一直线上的点到另一直线的距离随其到此二直线之交点的距离的增加而无限增加. 如果两条直线不垂直, 则其中任意一条可正交投影到另外一条的一个有限开区间.

平行线(paralell lines). 没有公垂线的不相交之共面直线. 如图 1, 在 P 点有 $PT\parallel QA$, $PU'\parallel QA'$, 其平行角为 α. 平行是可传递的(如果在同一方向有 $a\parallel b$, $b\parallel c$, 则在该方向有 $a\parallel c$). 平行线沿着平行方向互相无限靠近(意指一直线上一动点到另一直线之距离), 其中之一在另一条上的正交投影是一开半直线.

超平行线(ultraparallels). 有一公垂线, 其长度给出二直线间之最短距离. 超平行线在其公垂线之任一侧无限散开. 每一直线可投影到另一直线的一个有限长度开区间.

相对于直线的三类关系, 平面上有三种类型的线束, 其中每一种都覆盖了整个平面: 第一类线束(pencil of the first kind)是经过某一点的所有直线之集合(该点称为线束中心(centre of the pencil)); 第二类线束(pencil of the second kind)是垂直于某一直线的所有直线之集合(该直线称为线束的底(base of the pencil)); 第三类线束(pencil of the third kind)是在一给定方向上平行于某一直线的所有直线之集合, 包括已给直线.

三类线束中直线的正交轨线分别形成 Euclid 平面上圆的类似物: 正常圆(proper circle); 等距曲线(equidistant curve 或 curve of equal distances)(不包括线束的底); 极限曲线(limiting curve)亦即**极限圆**(horocycle), 可当作圆心在无穷远处的圆. 所有极限圆是合同的, 它们是非紧的, 并在平行的一侧是凹的. 由同一线束所生成的两个极限圆是同心的(它们在线束的各直线上截得相等的线段). 线束中两条直线所夹、位于平行方向一侧的两条同心弧的长度之比是两弧距离 x 的如下指数函数:

$$\frac{s'}{s}=e^{-x/k}.$$

圆的每一种类似物都可由其内部的滑动形成平面上的一种单参数运动: 关于通常圆心的旋转; 平移(一条轨线是线束的底, 其他的是等距线); 以及平行位移(所有轨道都是极限圆).

圆的类似物关于其生成线束中的一直线旋转产生球面的类似物: 正常球面(proper sphere); 等距曲面(surface of equal distances)和极限球面(horosphere); 即极限曲面(limiting surface).

在球面上大圆的几何学就是通常的球面几何学; 在等距曲面上是等距线的几何学, 就是 Лобачевский 测面积学, 但对应于较大的 k 值; 在极限球面上则是极限圆的 Euclid 几何学.

由极限圆的弧长和弦长之间的关系和极限球面上的 Euclid 三角关系式可导出平面上的三角关系式, 即直线三角形的三角公式. 例如, 三角形的面积公式是:

$$\sigma=k^2(\pi-A-B-C);$$

圆的周长的公式是:

$$l=2\pi k\sinh\left(\frac{r}{k}\right).$$

Лобачевский 几何学的三角公式可由将**球面几何学**(spherical geometry)之公式中的半径 R 换成虚数 ki 而得到.

Лобачевский 几何学之相容性的证明可通过构造一个解释(模型)来完成. 第一个这种解释是 **Beltrami 解释**(Beltrami interpretation), 它证实在 Euclid 空间某一个具有常数负 Gauss 曲率的曲面上的内蕴几何学局部合同于 Лобачевский 几何学(其中直线相应于该曲面上的测地曲线). 这种类型的曲面称为伪球面(pseudo-sphere).

Beltrami 的另一解释由从一个常数负曲率曲面到圆盘内部的测地映射所构成.

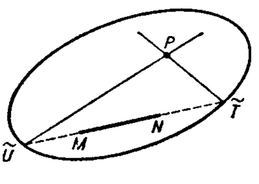


图 2

不过, Beltrami 的解释只建立了 Лобачевский 平面的一部分的模型. 关于整个 Лабачевский 平面的第一个解释是 **Klein 解释**(Klein interpretation), 其中用

到了 Cayley 的**射影度量**(projective metric). 在此解释(图2)中 Лабачевский 平面的直线由一绝对形(不含端点)的弦实现，垂线则是其共轭弦. 距离和角度可由四点组(一线段的端点 M, N 以及线段所在弦的端点 $\tilde{U}$, $\tilde{T}$)和相应的四线组(角的两边以及通过角的顶点的绝对形的虚切线)的**交比**(cross ratio)来表示. 经过点 P 与直线 MN 平行的直线由与 MN 交于绝对形的直线 $P\tilde{T}$ 和 $P\tilde{U}$ 实现. 绝对形的点表示"无穷远点"(它们不是 Лобачевский 平面的点).

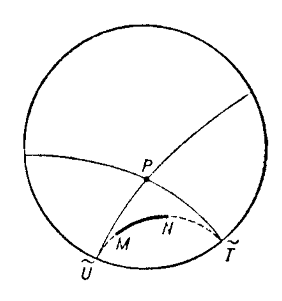


图 3

1882 年，Poincaré 在建立自守函数理论时，得出另外两个模型，其一在圆盘内，其二在半平面上(参见 **Poincaré 模型**(Poincaré model)). 在第一个模型(图3)中 Лобачевский 平面由圆盘的内部实现，直线由与主圆盘正交的圆在圆盘内的弧实现. 距离由交比引入，而此模型中角度的值跟 Лобачевский 平面(共形模型)中的相同.

坐标的引人使得有可能建立 Лобачевский 平面不同的解析模型. Poincaré 在 1887 年提出将一个双叶双曲面之一叶上的径面截线的几何学当作 Лобачевский 几何学模型，它也可以作为**伪 Euclid 空间**(pseudo-Euclidean space)的一个半径为纯虚数之球面的几何学来考虑. 这些模型可以推广到 n 维空间情形.

同**椭圆几何学**(elliptic geometry)一样，Лобачевский 几何学是常曲率 Riemann 空间的几何学.

Лобачевский 几何学的产生起源于平行线问题，即证明 Euclid 关于平行线之第五公设的尝试. Н. И. Лобачевский (1826 年，1829－1830 年发表)证明了由一个与 Euclid 第五公设不同的假设可以构造出比 Euclid 几何学更一般的 Лобачевский 几何学. 独立于 Лобачевский, J. Bolyai 在 1832 年获得同样的发现，但由于没有得到 C.F.Gauss 的公开支持，Bolyai 没有继续其研究.

Gauss 更早以前就作出了这一新的几何学的开端，但他既没有发表其研究工作，也没有公开谈到这些想法. 不过，Gauss 在私人通信中高度评价了 Bolyai 和 Лобачевский 的工作，只是没有公开发表意见.

Лобачевский 几何学的应用. 在其第一篇关于他的几何学的工作中，Лобачевский 运用当时天文学家所测得的恒星年视差，证明了如果他的几何学在物理空间实现，则在太阳系范围内 Euclid 几何学的偏差将比可能的测量误差低几个数量级. 因此，Лобачевский 几何学的第一个应用是 Euclid 几何学之实用精度的保证.

Лобачевский 将其几何学应用于数学分析. 通过将某一坐标系代换他的空间中的另一个坐标系，Лобачевский 得出大约 200 个定积分的值. 其他数学应用由 Poincaré (1882)发现，他将 Лобачевский 几何学成功地应用于自守函数理论的发展.

Лобачевский 几何学对于宇宙论的意义最先由 A. A. Friedman 提出. 1922 年他发现了 **Einstein 方程**(Einstein equations)的一个解，该解蕴涵宇宙随时间膨胀. 这一结论随后由 E. Hubble 的观测所证实，他发现了远星云的散布. Friedman 所发现的度量当时间固定时给出 Лобачевский 空间. 狭义相对论的速度空间就是一个 Лобачевский 空间.

Лобачевский 几何学已被成功地应用于基本粒子的碰撞及核子研究的其他问题.

人对于空间之附近区域的视觉产生逆透视效果，此现象可由透视空间的该区域的几何学接近于曲率半径约为 15 米的 Лобачевский 几何学这一事实来解释.

Лобачевский 几何学的创立是空间可能性质的研究发展中的重要一步. 它对数学基础也有特别重要的意义，因为现代公理方法的原理的形成在很大程度上归功于 Лобачевский 几何学的出现.

参考文献

[1] Лобачевский, Н. И., Полн. собр. соч., т. 1－5, М.-Л., 1946 － 1951.

[2] Bolyai, J., Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens, in Tentamen, Vol. 1, M. Vásárhelyini Die, 1833.

[3] Александров, А. Д., Абстрактные пространства, в кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956.

[4] Егоров, И. П., Введение в неевклидовы геометрии, Пенза, 1972.

[5] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

[6] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.-Л., 1949.

[7] Лаптев, Б. Л., Николай Иванович Лобачевский, Казань, 1976.

[8] Норден, А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1953.

[9] Нут, Ю. Ю., Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении, М., 1961.

[10] Раушенбах, Б. В., Пространственные построения в древнерусской живописи, М., 1975.

[11] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства,

M., 1969.

[12] Широков, П. А., Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, Казань, 1964. Б. Л. Лаптев 撰

【补注】 Лобачевский 几何学又称为双曲几何学. 如同在球面几何学中自然地使用半径为 1 的球面一样，在 Лобачевский 几何学中人们通常假定 $k=1$ 以简化公式. (例如，$\Pi(a)=2\arctan e^{-a}$，$\sigma=\pi-A-B-C$，$l=2\pi\sinh r$.)

假如 Beltrami 结合他的两个解释，就能够得到 F. Klein 的结果.

关于如何在 Poincaré 之第一个模型 (图 3) 中不用交比引入度量，参见 [A2].

有关历史问题又见 [A9]. 此文献收入了 Лобачевский 的一篇论文和 Bolyai 之附录 [2] 的英译.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965.

[A2] Coxeter, H. S. M., Parallel lines, *Canad. Math. Bull.*, **21** (1978), 385 – 397.

[A3] Coxeter, H. S. M., The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit III", *Leonardo*, **12** (1979), 19 – 25; 32.

[A4] Coxeter, H. S. M., Angles and arcs in the hyperbolic plane, *Math. Chronicle (New Zealand)*, **9** (1980), 7 – 33.

[A5] Berger, M., Geometry, 1–2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热，几何，科学出版社，第一卷，1987，第二卷，1989).

[A6] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974.

[A7] Sommerville, D. M. Y., Bibliography of non-Euclidean geometry, Chelsea, reprint, 1970.

[A8] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

[A9] Bonola, R., Non-Euclidean geometry, Dover, reprint, 1955. 杨 路、曾振柄 译

Лобачевский 法 [Lobachevskiǐ method; Лобачевского метод], Graeffe 法 (Graeffe method), Dandelin 法 (Dandelin method)

一种同时计算多项式所有根的方法. 假定多项式

$$f(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$
$$=a_0(z-r_1)\cdots(z-r_n),\ a_0\neq 0 \qquad (1)$$

的根 $r_1,\cdots,r_n$ 满足不等式

$$|r_1|\gg\cdots\gg|r_n|. \qquad (2)$$

作为对根的近似，这时可以取比 a_i/a_{i-1}，$i=1,\cdots,n$.

现在假定 $f(z)$ 的根虽然不满足 (2)，但绝对值各不相同. Лобачевский 法是把乘方过程应用于方程 $f(z)=0$，在经过充分多次重复以后得到一个方程，它的根满足 (2). 平方就是将多项式 $f_k(z)$ 变到多项式 $f_{k+1}(z)$，且方次相同，但是 $f_k(z)$ 根的平方作为 $f_{k+1}(z)$ 的根. 可用递推公式进行这种变换.

Лобачевский 法可以应用于有多组根为绝对值相等的情形，即使这样做会使方法的逻辑和公式复杂化. 这个方法的优点是：它不要求对多项式的根作初始逼近. 在根的绝对值不相等的情况下，这种过程的收敛速度为渐近二次.

但是，Лобачевский 法是数值不稳定的，因为乘方过程会使计算误差非常快地累积. 为此，已经给出了自动校正形式的 Лобачевский 法，例如，为了计算 (1) 的根，构造一列方次 $\leqslant n-1$ 的多项式 $g_k(z)$，满足下列关系式

$$g_{k+1}(z)=zg_k(z)-\varphi_kf(z),\ k=0,1,\cdots;$$
$$g_0(z)=1;$$

因此有

$$g_k(z)=z^k\ (\mathrm{mod} f(z)).$$

对于每个固定的 k，寻找多项式 $g_{k,p}(z)$，使之

$$g_{k,1}(z)=g_k(z);$$

而对 $p\geqslant 2$，$g_{k,p}$ 是如下形式的多项式

$$\psi_{p-2}(z)f(z)+\varphi_{p-1}(z)g_k(z),$$

其方次 $\leqslant n-p$. 如果 $f(z)$ 的根满足不等式

$$|r_1|\geqslant\cdots\geqslant|r_p|>|r_{p+1}|\geqslant\cdots\geqslant|r_n|,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}g_{k,p}=\frac{f^*(z)}{(z-r_1)\cdots(z-r_p)},$$

其中 $f^*(z)$ 是将 $f(z)$ 用其首项系数除后所得的正规化多项式. 因此，由原多项式，可以选出对应于一组绝对值相等的根的因子 (见 [3]). 这个方法是由 Н. И. Лобачевский 在 1834 年提出的 (见 [1]).

参考文献

[1] Лобачевский, Н. И., Полн. собр. соч., т. 4, М. Л., 1948.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[3] Sebastião, e Silva, J., Sur une méthode de approximation semblable à celle de Gräffe, *Portug. Math.*, **2** (1941), 271 – 279.

[4] Householder, A. S. and Stewart, G. W., The nume-

rical factorization of a polynomial, *SIAM Rev.*, **13** (1971), 38 – 46.
Х. Д. Икрамов 撰

【补注】 将根乘方的基本思想是以下面的简单事实为基础的

$$(-1)^n f(-z)f(z) = a_0^2 \prod_{i=1}^{n}(z^2 - r_i^2)$$

是 z^2 的多项式，其根为 $r_1^2, \cdots, r_n^2$. 对复根情况的系统处理请见[A1]. 这个方法通常称为 Graeffe 的平方根法（Graeffe root squaring method）.

参考文献

[A1] Brodetsky, S. and Smeal, G., On Graeffe's method for complex roots, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **22** (1924), 83 – 87.

[A2] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974.

袁国兴、张宝琳 译

Лобачевский 空间 [Lobachevskiǐ space; Лобачевского пространство]

其几何学由 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiǐ geometry）公理所定义的空间. 广义而言，Лобачевский 空间是一非 Euclid 双曲空间，其定义与**伪 Euclid 空间**（pseudo-Eudlidean space）几何学的概念有联系. 设 ${}^1R_{n+1}$ 是含有一个类时方向的 Lorenz-Minkowski（$n+1$）维空间. 一个类时半径的球面类似于双叶双曲面，其中一叶（比如"未来"叶）等距同构于一个 n 维 Лобачевский 空间 ${}^1S_n$. Лобачевский 空间这一定义使其可以包含在非 Euclid 空间的射影类中. 空间 ${}^1S_n$ 在射影空间 P_n 中由一个 $n-1$ 维二次卵形曲面的内部来表示，该曲面是一个类时半径的 n 维球面和空间 ${}^1R_{n+1}$ 的无穷远超平面的交；而 ${}^1R_{n+1}$ 被此超平面完全化为射影空间 P_{n+1}. 该 $n-1$ 维二次卵形曲面上的点是空间 ${}^1S_n$ 的无穷远点，即该二次曲面是此空间的**绝对形**（absolute）. 此二次曲面的外部称为 ${}^1S_n$ 的理想区域（ideal domain），它使 ${}^1S_n$ 完全化为完全空间 P_n. 这个解释称为 Cayley-Klein 射影解释（Cayley-Klein projective interpretation）. 也可以将 ${}^1R_{n+1}$ 中一类时半径的 n 维球面由其中心投影到一 n 维切空间，此切空间是一 n 维 Euclid 空间；则空间 ${}^1S_n$ 可由此 n 维切空间之一 n 维球的内部来表示，而此 n 维球的边界即是 ${}^1S_n$ 的绝对形（${}^1S_n$ 在 Euclid 空间 R_n 的此一解释有时称为 Beltrami-Klein 解释（Beltrami-Klein interpretation））.

用三维 Лобачевский 空间的射影解释可以验证 Лобачевский 几何学公理，给出此几何学的所有图形的表示，并建立其性质；特别是，在此解释中容易由 Лобачевский 几何学之公理建立二维 Лобачевский 平面的几何性质.

设双曲空间 ${}^1S_n$ 嵌入射影空间 P_n，一个 m 维超平面称为是正常的（proper），意指它与绝对形的交是一个 $m-1$ 维二次曲面；与绝对形相切的 m 维超平面称为迷向的（isotropic）；而与绝对形不相交的 m 维超平面称为理想的（ideal）. 正常超平面的极是理想点（ideal points）、正常点（proper points）是理想超平面的极. 更一般地，Лобачевский 空间 ${}^1S_n$ 中正常 m 维超平面的 $n-m-1$ 维极超平面是 $n-m-1$ 维理想超平面，而 m 维理想超平面的 $n-m-1$ 维极超平面是正常的 $n-m-1$ 维超平面.

空间 ${}^1S_n$ 一点 X 的坐标可以取成该点在 ${}^1R_{n+1}$ 相应的向量 $\mathbf{x}$ 的分量. 这些 **Weierstrass 坐标**（Weierstrass coordinates）必须满足条件：

$$(x^0)^2 - \sum_t (x^t)^2 = 1, \quad t > 0.$$

与球面极坐标相类比，可以在空间 ${}^1S_n$ 引入坐标 $u^1, \cdots, u^n$，它与坐标 x^t 的关系如下：

$$x^0 = \cosh u^1 \cosh u^2 \cdots \cosh u^n$$

$$x^1 = \sinh u^1 \cosh u^2 \cdots \cosh u^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^t = \sinh u^t \cosh u^{t+1} \cdots \cosh u^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^n = \sinh u^n,$$

则 ${}^1S_n$ 之两点间的距离 δ 可用 Weierstrass 坐标定义为

$$\cosh \delta = x^0 y^0 - \sum x^t y^t .$$

两个相交平面 $X_0 x^0 + \sum X_t x^t = 0$ 和 $Y_0 x^0 + \sum Y_t x^t = 0$（其中 $-X_0^2 + \sum X_t^2 = 1 = -Y_0^2 + \sum Y_t^2$）之间的夹角 φ 可定义为它们的极（$-X_0, X_1, \cdots, X_n$）和（$-Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$）的类空距离，由下式给出：

$$\cos \varphi = |-X_0 Y_0 + \sum X_t Y_t|.$$

相似地，两个超平行超平面之间的距离 δ 由下式给出：

$$\cos \delta = |-X_0 Y_0 + \sum X_t Y_t|.$$

点之间的距离和平面夹角的值也可借助绝对形的点表示为诸点的**交比**（cross ratio）.

在 Лобачевский 空间 ${}^1S_n$ 中可以定义球面（球体），等距曲面，极限球面（$n=2$ 时即极限圆，参见**极限圆**（horocycle）），m 维单形等.

Лобачевский 空间 ${}^1S_n$ 的运动作为直射变换将绝对形的点映至自身，其分类归结为 Lorentz-Minkowski 空间 ${}^1R_{n+1}$ 中固定一点不变而且不交换"未来"和"过去"的运动（它们构成一 **Lie 群**（Lie group））的分类.

只需给出不在同一超平面的 $n+1$ 个点的象即可确定 ${}^1S_n$ 的一个运动.

Лобачевский 空间有许多共形解释，其中之一是 **Poincaré 模型** (Poincaré model). 空间的共形解释亦可在其超平面上得出. 除此之外也有在复空间上的解释. 特别，对空间 ${}^1S_n$ 可以构造直线流形的 **Котельников 解释** (Kotel'nikov interpretation).

用射影解释的方法，${}^1S_n$ 之中，特别是 2 维平面 ${}^1S_2$ 中的二次曲面可得到更完全的分类.

空间 ${}^1S_n$ 是一个曲率为 $-1/\sigma^2$ 的常负曲率 n 维 Riemann 空间，其中 σi 是空间的曲率半径. Лобачевский 空间的几何学在一点的充分小邻域接近同维数之 Euclid 空间的几何学.

空间 ${}^1S_n$ 在大范围同胚于空间 R_n; 它在各个方向上无限延伸. 当 $m<n$ 时，${}^1S_n$ 之每一 m 维超平面是一空间 ${}^1S_m$. 还有，${}^1S_n$ 的直线是测地线，m 维超平面是此空间的 m 维完全测地曲面.

在非 Euclid 空间的度量的射影分类中，Лобачевский 空间亦可根据其直线上、平面束和 m 维超平面上的度量来分类. 特别，在一 Лобачевский 空间的 2 维超平面上，直线上的度量是双曲的，而直线束中的度量则是椭圆的.

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

[2] Klein, F., Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie, Springer, 1928.

[3] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 1−2, М.-Л., 1949 − 1956.

[4] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A. [B. A. Rozenfel'd], A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988, Chapt, 6 (译自俄文).

[A2] Robb, A. A., Geometry of time and space, Cambridge Univ. Press, 1936, p. 406.

[A3] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, p. 209.

[A4] Berger, M., Geometry, 1−2, Springer, 1987 (译自法文).

[A5] Busemann, H. and Kelly, P., Projective geometry and projective metrics, Acad Press, 1953.

杨 路、曾振柄 译

Lobatto 求积公式 [Lobatto quadrature formula; Лобатто квадратурная формула]

对区间 $[a, b]=[-1, 1]$ 上和具有两个固定结点：$[-1, 1]$ 的端点的权函数 $p(x)=1$ 的最高代数精度的一种求积公式. Lobatto 求积公式的形式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong A[f(-1)+f(1)]+\sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

点 x_j 是多项式 $p_n^{(1,1)}(x)$ (Jacobi 多项式) 的根，它在 $[-1, 1]$ 上关于权 $1-x^2$ 正交，$A=2/(n+1)(n+2)$, $C_j>0$. 代数精度是 $2n+1$. 在文献 [2] 中给出了当 $n=1(1)15$ (n 从 1 变到 15, 且步长为 1) 时 Lobatto 求积公式的结点和系数表 (亦见 [3]).

这个公式是由 R. Lobatto (见 [1]) 建立的.

参考文献

[1] Lobatto, R., Lessen over de differentiaal-en integraalrekening, 1-2, 's Gravenhage, 1851 − 1852.

[2] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967 (英译本: Krylov, V. I., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962).

[3] Michels, H. H., Abscissas and weight coefficients for Lobatto quadrature, *Math. Comp.*, **17** (1963), 237 − 244.

И. П. Мысовских 撰

【补注】 求积公式的代数精度概念可见**求积公式** (quadrature formula).

参考文献

[A1] Stroud, A. H. and Secrest, D., Gaussian quadrature formulas, Prentice-Hall, 1966.

袁国兴、张宝琳 译

局部性质与剩余性质 [local and residual properties; локальные и резидуальные свойства]

代数系统或泛代数的某些抽象性质(即在同构下保持的性质). 如果 P 是代数的一个抽象性质，那么称代数 A 局部地有性质 P, 假如存在 A 的子代数的一个局部系统，其每一个代数均有性质 P. A 的一个局部子代数系统(local system of subalgebras)是非空子代数组成的由包含关系定向的系统，它们的并集与 A 重合. 如果局部地有性质 P 的某类的每一个代数本身实际上有性质 P, 则 P 称为这个类的代数的局部性质 (local property). 例如，成为 Abel 群的性质是所有群组成的类中的局部性质，但成为有限群的性质不是局部的. 有关性质的局部性的更多细节见 **Мальцев 局部定理** (Mal'tsev local theorems).

称代数 A 剩余地有性质 P, 如果存在 A 上分离同余族 $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, 使得每个商代数 A/q_λ 均有性质 P. 族 $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 称为分离同余族 (separating family of congruences), 如果所有 q_λ 的交是给定代数上的对角同余 (等式关系). 一个代数剩余地有性质 P, 当且仅当它可表示成有性质 P 的合适类型的代数的次直积. 性质 P 称为在一个代数类中剩余的 (residual), 如果此类中每一个剩余地有性质 P 的代数本身实际上有性质 P. 在所有群

的类中，成为 Abel 的性质是剩余的，但有限性不是剩余的．在转移到同态象下保持的每一个代数的剩余性质都是局部的．

参考文献

[1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

О. А. Иванова 撰

【补注】 短语"局部性质"的精确含义当然有赖于用来定义它的代数局部系统．

A 的子代数的局部系统的一个最重要例子是 A 的所有有限生成子代数的系统；亦见**局部自由群**(locally free group)；**局部可解群**(locally solvable group)；**局部可解代数**(locally solvable algebra)；**局部性质**(local property)；**局部幂零群**(locally nilpotent group)；**局部幂零代数**(locally nilpotent algebra)；**局部有限群**(locally finite group)；**局部有限代数**(locally finite algebra)．

术语"局部性质"不仅用在代数学中，也用于拓扑学中．如果 P 是拓扑空间的一个抽象性质，则说空间 X 局部地有性质 P，假如 X 的每一个点都有具有性质 P 的一个邻域基．(例如，"局部紧"与"局部连通"的性质可按此方式来定义.) 称 P 是一个局部性质(local property)，如果局部地有性质 P 的空间恰是 P 空间(P-space)．例如，T_1 **分离公理**(separation axiom)是局部性质，但 **Hausdorff 公理**(Hausdorff axiom)却不是．

陈公宁 译

函数的局部逼近 [**local approximation of functions**; **локальное приближение функций**]

集合 $E\subset\mathbf{R}^m$ 上函数 f 的一种逼近度量(特别是**最佳逼近**(best approximation)度量)．主要问题是研究当 mes $E\to 0$ 时一个函数局部逼近的性态．在某些情形下，可借助函数的局部逼近来刻画被逼近函数的光滑阶，设 $E_n(f;(\alpha,\beta))$ 为区间 $(\alpha,\beta)(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$ 上 n 次代数多项式对函数 $f\in C[a,b]$ 的最佳逼近．下述结论成立：函数 f 在 $[a,b]$ 上各点有 $n+1$ 阶连续导数的充分必要条件是

$$\frac{E_n(f;(\alpha,\beta))}{(\beta-\alpha)^{n+1}}\to\lambda(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

对 $\beta\to x$，$\alpha\to x$，$\alpha<x<\beta$ 一致成立，其中连续函数 λ 由下式定义：

$$(n+1)!\,2^{2n+1}\lambda(x)=|f^{(n+1)}(x)|.$$

参考文献

[1] Райков, Д. А., 《Докл. АН СССР》, **24** (1939), 7.

[2] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., **2** (1954), М.

[3] Брудный, Ю. А., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **24** (1971), 69－132.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】 文献 [3] 是一个含有丰富参考文献的很有价值的综述报告．该报告指出，最早用局部逼近刻画光滑函数空间的结果是由 Д. А. Райков 在 [1] 中得到的．

参考文献

[A1] Peetre, J., On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, *J. Funct. Anal.*, **4** (1969), 71－87.

王仁宏、檀结庆 译

局部上同调 [**local cohomology**; **локальные когомологии**]，其值取自可换群层的

一种值取自层(sheaf)，而支集属于某个给定子集的**上同调**(cohomology)理论．设 X 为**拓扑空间**(topological space)，$\mathscr{S}$ 为 X 上的一个可换群层，而 Z 为 X 的一个局部闭子集，即 X 中某个开子集 V 的闭子集．于是 $\Gamma_Z(X,\mathscr{S})$ 表示 $\Gamma(V,\mathscr{S}|_V)$ 中的这样一个子群：它由层 $\mathscr{S}|_V$ 中支集属于 Z 的那些截面组成．固定 Z，对应 $\mathscr{S}\to\Gamma_Z(X,\mathscr{S})$ 确定一个由 X 上的可换群层范畴到可换群范畴的一个左正合函子．对应于 $\mathscr{S}$ 上的第 i 个右**导出函子**(derived functor)的值记为 $H^i_Z(X,\mathscr{S})$，并称之为 X 相对于 Z、值取自 $\mathscr{S}$ 的第 i 个局部上同调群．这时

$$H^0_Z(X,\mathscr{S})=\Gamma_Z(X,\mathscr{S}).$$

设 $\mathscr{H}^0_Z(\mathscr{S})$ 是 X 上对应于下述预层的层：对每个开子集 $U\subset X$，规定群 $\Gamma_{Z\cap U}(U,\mathscr{S}|_U)$ 与之对应．对应 $\mathscr{S}\to\mathscr{H}_Z(\mathscr{S})$ 是一个由 X 上的可换群层范畴到自身的一个左正合函子．对应于 $\mathscr{S}$ 上的第 i 个右导出函子的值记为 $\mathscr{H}^i_Z(\mathscr{S})$，并称之为 $\mathscr{S}$ 相对于 Z 的第 i 个局部上同调层．层 $\mathscr{H}^i_Z(\mathscr{S})$ 是对应于下述预层的层：对每个开子集 $U\subset X$，规定群 $H^i_{Z\cap U}(U,\mathscr{S}|_U)$ 与之对应．

存在着一个收敛于 $H^{p+q}_Z(X,\mathscr{S})$ 的谱序列 $E^{p,q}_r$，这时 $E^{p,q}_2=H^p(X,\mathscr{H}^q_Z(\mathscr{S}))$ (见[2]，[3])．

设 Z 为 X 的局部闭子集，Z' 为 Z 的闭子集，又 $Z''=Z\setminus Z'$，那么存在着下述诸正合序列：

$$0\to H^0_{Z'}(X,\mathscr{S})\to\cdots\to H^i_{Z'}(X,\mathscr{S})\to H^i_Z(X,\mathscr{S})\to\to H^i_{Z''}(X,\mathscr{S})\to H^{i+1}_{Z'}(X,\mathscr{S})\to\cdots;\quad(1)$$

$$0\to\mathscr{H}^0_{Z'}(\mathscr{S})\to\cdots\to\mathscr{H}^i_{Z'}(\mathscr{S})\to\mathscr{H}^i_Z(\mathscr{S})\to\to\mathscr{H}^i_{Z''}(\mathscr{S})\to\mathscr{H}^{i+1}_{Z'}(\mathscr{S})\to\cdots.\quad(2)$$

如果 Z 就是整个 X，Z' 为 X 的闭子集，那么序列(2)给出正合序列

$$0\to\mathscr{H}^0_{Z'}(\mathscr{S})\to\mathscr{S}\to\mathscr{H}^0_{X\setminus Z'}(\mathscr{S})\to\mathscr{H}^1_{Z'}(\mathscr{S})\to 0$$

以及一组同构

$$\mathscr{H}^i_{X\setminus Z'}(\mathscr{S})\cong\mathscr{H}^{i+1}_{Z'}(\mathscr{S}),\ i\geqslant 1.$$

层 $\mathscr{H}^i_{X\setminus Z'}(\mathscr{S})$ 称为 $\mathscr{S}$ 的第 i 个间隙层(gap sheaf)，它在涉及截面和定义在 $X\setminus Z'$ 的上同调类到

整个 X 上的扩充问题上有重要应用(见[4]).

若 X 为局部 **Noether 概形** (Noetherian scheme), $\mathscr{F}$ 是 X 上的**准凝聚层** (quasi-coherent sheaf), 又 Z 为 X 的闭子概形, 那么 $\mathscr{H}^i_Z(\mathscr{F})$ 是 X 上的准凝聚层. 如果 $\mathscr{Y}$ 是 X 上的理想的一个**凝聚层** (coherent sheaf), 它界定子概形 Z, 那么有同构

$$\varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{Y}^n, \mathscr{F}) \cong \mathscr{H}^i_Z(\mathscr{F}).$$

下面的判定局部上同调层的平凡性和凝聚性的准则, 在应用中是重要的(见[3], [4]).

设 X 是局部 Noether 概形或复解析空间, Z 是一个局部闭子概形或 X 的解析子空间, $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathscr{O}_X$ 模的凝聚层, 又 $\mathscr{Y}$ 是界定 Z 的一个理想凝聚层. 命

$$\operatorname{prof}_Z \mathscr{F} = \min_{x \in Z} \operatorname{prof}_{\mathscr{Y}_{X,x}} \mathscr{F}_x .$$

这里 $\operatorname{prof}_{\mathscr{Y}_{X,x}} \mathscr{F}_x$ 是 $\mathscr{Y}_{X,x}$ 中的一串在 $\mathscr{F}_x$ 中为正规的序列的最大长度, 若 $\mathscr{F}_x = 0$ 则它为 ∞. 于是在 $i < n$ 时, $\mathscr{H}^i_Z(\mathscr{F}) = 0$ 等价于条件 $\operatorname{prof}_Z \mathscr{F} \geqslant n$. 命 $\operatorname{codh}_x \mathscr{F}_x = \operatorname{prof}_{\mathfrak{m}_x} \mathscr{F}_x$ (这里 $\mathfrak{m}$ 是环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的极大理想). 又命 $S_m(\mathscr{F}) = \{x \in X: \operatorname{codh}_x \mathscr{F}_x \geqslant m\}$. 如果 X 是复解析空间或代数簇, 则所有的集合 $S_m(\mathscr{F})$ 也相应的为解析的或代数的. 如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的凝聚层, Z, 相应地, 是解析子空间或子簇, 那么当 $0 \leqslant i \leqslant q$ 时, 层 $\mathscr{H}^i_Z(\mathscr{F})$ 的凝聚性等价于条件: 对所有的整数 k,

$$\dim Z \cap \overline{S_{k+q+1}(\mathscr{F}|_{X \setminus Z})} \leqslant k .$$

利用局部上同调, 可以定义超函数 (hyperfunction), 它们在偏微分方程理论中有重要的应用, 见[5]. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, 它可自然地嵌入于 $\mathbf{C}^n$. 于是对 $p \neq n$, $\mathscr{H}^p_\Omega(\mathbf{C}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) = 0$. $\mathbf{R}^n$ 上的预层 $\Omega \to \mathscr{H}^n_\Omega(\mathbf{C}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$ 定义了一个称为超函数的**松弛层** (flabby sheaf).

在艾达尔上同调论中也存在一种局部上同调([3]).

参考文献

[1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология, Геометрия, **10** (1972), 47 – 112 (英译本: Dolgachev, I. V., Abstract algebraic geometry, *Russian Math. Surveys*, **2** (1974), 3, 264 – 303).

[2] Grothendieck, A., Local cohomology, Springer, 1967.

[3] Grothendieck, A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, North-Holland, 1968.

[4] Siu, Y.-T., Trautmann, G., Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves, Springer, 1971.

[5] Schapira, P., Théorie des hyperfonctions, Springer, 1970.

[6] Banica, C., Stanasila, O., Algebraic methods in the global theory of complex spaces, Wiley, 1976 (译自罗马尼亚文).

Д. А. Пономарев 撰

【补注】 对超函数层也可见**超函数** (hyperfunction).

对于具有单位的交换环 R 中的一个理想 $\mathfrak{a}$, 局部上同调可以叙述如下: 设 A 为 R 中包含有 $\mathfrak{a}$ 的素理想的集合. 对 R 模 M, 子模 $\Gamma_A(M)$ 定义为 $\{m: \text{support } (m) \subset A\}$. 于是

$$\Gamma_A(M) = \{m: \operatorname{rad}(\operatorname{Ann}(m)) \supset \mathfrak{a}\}$$
$$= \{m: \mathfrak{a}^n m = 0, \text{ 当 } n \text{ 足够大 }\} \simeq$$
$$\simeq \varinjlim_n \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, M).$$

$M \mapsto \Gamma_A(M)$ 是 R 模范畴到自身的一个左正合, R 线性的协变函子. 它的导出函子是(M 对于 A (或 $\mathfrak{a}$) 的) 局部上同调函子 $\mathscr{H}^i_A(M)$, 这些上同调函子可以利用 Koszul 复形予以有效的计算, 见 **Koszul 复形** (Koszul complex).

参考文献

[A1] Siu, Y.-T., Techniques of extension of analytic objects, M. Dekker, 1974.

沈信耀 译 黄华乐 校

局部分解 [**local decomposition**; **локальное разбиение**], 局部分割 (local cut)

空间 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集 Φ 是一个局部分割, 如果存在一点 a (集合 Φ 在该点分割此空间) 和一个正数 ε, 使得对任意数 $\delta > 0$ 和中心为 a 半径为 δ 的(开)球 $O(a, \delta)$, 在开集 $O(a, \delta) \setminus \Phi$ 中存在一对点满足下列性质: 含于 $O(a, \varepsilon)$ 且包含此点对的任何**连续统** (continuum) 都与 Φ 有非空交集. K. Menger 和 П. С. Урысон 证明了, 平面上的闭集 Φ 的维数是 1 的充要条件是, 它不包含(平面的)内点且(至少在一点 a) 局部分割此平面.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中 $(n-1)$ 维闭集的类似刻画由 П. С. Александров 给出(见**局部连接** (local linking)).

А. А. Мальцев 撰 白苏华、胡师度 译

局部微分几何学 [**local differential geometry**; **локальная дифференциальная геометрия**]

微分几何学的一部分, 它研究几何形态, 尤其是曲线和曲面, 在小范围内的性质. 换言之, 在几何形态任一点的小邻域内研究它的结构.

设三维 Euclid 空间 E^3 中一曲线 γ 由它的方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

给出.

这条曲线的研究归结为发现关于 E^3 的运动群不变的量. 曲线上一点 M 的位置向量 $\mathbf{r}$ 与 E^3 的直角坐标系的选取有关, 但它的导数

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \cdots \qquad (*)$$

与直角坐标系无关. 曲线 γ 上一点 M 的 n 阶微分邻域

(differential neighbourhood)是指与曲线有关的能用序列(*)中前 n 个向量表达的所有概念和性质的总体．因此，曲线的切线和法平面的概念属于一阶微分邻域．曲线的曲率、密切平面、Frenet 三棱形和密切圆的概念属于二阶微分邻域．曲线的挠率概念则属于三阶微分邻域．一曲线的曲率和挠率在某种意义下构成了曲线不变量的完全系，即曲线的任何不变量是其曲率、挠率及它们的某些阶导数的函数．E^3 中曲面的局部理论可类似地构造．E^3 的曲线和曲面的局部理论是局部微分几何学中最古老的部分，主要创建于 18－19 世纪．在 19 世纪，这个理论的各种推广已开始出现．其中之一与**齐性空间**(homogeneous space)的概念相联系．在任何微分几何学的齐性空间 G/H 中，人们可以类似于在 E^3 的情形那样构造各种维数的曲线和曲面的局部理论；即作为基本群 G 的不变量的理论．这方面的最主要发展出现在**仿射微分几何学**(affine differential geometry)和**射影微分几何学**(projective differential geometry)中．

E^3 中曲面的第一基本形式概念的推广导致了 Riemann 空间的理论．Riemann 空间的局部理论在 19 世纪中期已经出现并继续发展，找到了大量的应用．

空间中曲面上向量沿曲线平行移动的概念导致了**仿射联络**(affine connection)空间的理论．进而，这是一般联络论(见**联络**(connection))的发展的开始．

参考文献

[1] Favard, J., Curse de géométrie differentièlle locale, Gauthier-Villars, 1957.
A. C. Феденко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988.

[A2] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978.

[A3] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1979.
沈一兵 译

局部维数 [local dimension; локальная размерность]，

正规拓扑空间 X 的

拓扑不变量 $\mathrm{locdim}\, X$，定义如下：$\mathrm{locdim}\, X \leqslant n$, $n = -1, 0, 1, \cdots$，如果任何一点 $x \in X$ 都有一个邻域 O_x，使得其闭包的 **Lebesgue 维数**(Lebesgue dimension)满足关系 $\dim \bar{O}_x \leqslant n$．如果对某个 n 有 $\mathrm{locdim}\, X \leqslant n$，那么 X 的局部维数是有限的，记为 $\mathrm{locdim}\, X < +\infty$，定义

$$\mathrm{locdim}\, X = \min\{n : \mathrm{locdim}\, X \leqslant n\}.$$

$\mathrm{locdim}\, X \leqslant \dim X$ 恒成立；的确存在正规空间 X 使得 $\mathrm{locdim}\, X < \dim X$；就仿紧空间类而言，总有 $\mathrm{locdim}\, X = \dim X$．如果在局部维数的定义中，把 Lebesgue 维数 $\dim \bar{O}_x$ 换为大**归纳维数**(inductive dimension) $\mathrm{Ind}\, \bar{O}_x$，就得到局部大归纳维数(local large inductive dimension) $\mathrm{locInd}\, X$．

【补注】 [A1] 中构造了一个空间，使得 $\mathrm{locdim}\, X < \dim X$，作为应用，还构造了一个遗传正规空间 Y，使得 $\dim Y = 0$，但 Y 含有任意高维的子空间．

关于解析空间、代数簇或概形在一点处的局部维数的概念见**解析空间**(analytic space)、结合环的**维数**(dimension)、**解析集**(analytic set)以及**环的谱**(spectrum of a ring)．

参考文献

[A1] Pol, E. and Pol, R., A hereditarily normal strongly zero-dimensional space containing subspaces of arbitrarily large dimension, *Fund. Math.*, **102**(1979), 137－142.

[A2] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holand, 1978.
胡师度、白苏华 译

局部域 [local field; локальное поле]

一个域，其相对于一个离散赋值是完全的，且具有有限的剩余类域．局部域 K 的结构是熟知的：1)若 K 的特征是 0，则 K 是 p-adic 数域 $\mathbf{Q}_p$ 的有限扩张(见 **p 进数**(p-adic number))；2)若 K 的特征大于 0，则 K 同构于有限域 k 上的形式幂级数域 $k((T))$．这种域之所以称为局部的是有别于整体域(数域 $\mathbf{Q}$ 的有限扩张或 $k(T)$)而且是研究后者的一种工具．有关一个局部域的 Galois 扩张的上同调性质可参见[1]，亦见**阿代尔**(Adèle)；**伊代尔**(Idèle)及**类域论**(class field theory)．

为构造多维概形的类域论，我们应用局部域概念的一种推广．亦即，一个 n 维局部域(n-dimensional local field)，是一列完全离散赋值环 $O_0, \cdots, O_n$ 并带有同构

$$k(O_i) \xrightarrow{\sim} K(O_{i+1}),$$

其中 k 是剩余域，K 是一个环 O 的商域．进而要求 $k(O_n)$ 是有限的，则存在对于 n 维局部域的结构理论(见[3])．

参考文献

[1] Serre, J.-P., Local fields, Springer, 1979(译自法文).

[2] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[3] Паршин, А. Н.,《Докл. АН СССР》, **243**(1978), 4, 855－858.
В. И. Данилов 撰

【补注】 局部域的概念有时被扩充到有任意剩余类域的离散赋值域．对于具有完满的剩余类域的局部域存在一个以某种基本群(fundamental group)为术语的类域论([A1],[A2])．有关 n 维局部域类域论的描述(用代数 K 论的语言)亦见[A3]－[A5]．

参考文献

[A1] Serre, J.-P., Sur les corps locaux à corps résiduel al-

gébriquement clos, *Bull. Soc. Math. France*, **89**(1961), 105－154.

[A2] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algébriques, North-Holland, 1971, 648 － 674 (Appendix: M. Hazewinkel, Classes de corps local).

[A3] Kato, K., Class field theory and algebraic K-theory, in M. Raynaud and T. Shioda (eds.), Algebraic geometry, Lecture notes in Math. Vol. 1016, Springer, 1983, 109 －126.

[A4] Kato, K., Vanishing cycles, ramification of valuations and class field theory, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 629 － 661.

[A5] Paršin, A. N., Local class field theory, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165** (1985), 157－185 (*Trudy Mat. Inst. Steklov*, **165**(1984), 143 － 170). 冯绪宁 译

局部同胚 [local homeomorphism; локальный гомеоморфизм]

两个拓扑空间之间的映射 $f: X \to Y$, 使得每个点 $x \in X$ 都有一个邻域 O_x 被 f 同胚地映入 Y (见**同胚** (homeomorphism)). 有时在局部同胚的定义中还要求 $fX = Y$, 并且假定 f 是**开映射** (open mapping). 局部同胚的例子有: 把 n 维 Euclid 空间的一个开子集映入该 n 维 Euclid 空间的连续可微映射, 若其 Jacobi 行列式不为零, 则为局部同胚; 覆叠映射, 特别是把拓扑群映成其关于某离散子群的商空间的自然映射, 都是局部同胚. 如果把 Čech 完全空间 (特别是把局部紧的 Hausdorff 空间) 映成 Тихонов 空间 Y 的映射 $f: X \to Y$ 是开映射, 并且是可数对一的映射, 即对任何 $y \in Y$ 有 $|f^{-1}y| \leqslant \aleph_0$, 那么在 X 的某个处处稠密的开集上, 映射 f 是局部同胚. Б. А. Пасынков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984(译自俄文). 胡师度、白苏华 译

局部同调 [local homology; локальные гомологий]

确定在点 $x \in X$ 的**同调群** (homology group)

$$H_p^x = H_p^c(X, X\setminus x; G),$$

这里 H_p^c 是**具有紧支集的同调** (homology with compact support). 这些群与点 x 的开邻域上的顺向极限

$$\varinjlim H_p^c(X, X\setminus U; G)$$

一致. 在 X 是同调局部连通时, 它们又与反向极限

$$\varprojlim H_{p-1}^c(U\setminus x; G)$$

一致. 有限维可度量化的局部紧空间 X 在 G 上的同调维数 (见**空间的同调维数** (homology dimension of a space)). 就是使 $H_n^x \neq 0$ 的那些 n 中的最大者. 并且这种点 $x \in X$ 的集合有维数 n.

设 $\mathscr{C}_\cdot$ 是 X 上的如下的可微层: 对每个开集 $U \subset X$, 规定链复形 $C_\cdot(X, X\setminus U, G)$ 和它对应. 群 H_p^x 是诱导层 $\mathscr{H}_p = H_p(\mathscr{C}_\cdot)$ 的纤维. 对于广义流形, 当 $p \neq n = \dim X$ 时, $H_p^x = 0$. 这时, 偶 (X, A) 的系数取自 G 的同调序列. 与偶 $(X, X\setminus A)$ 的系数取自层 $\mathscr{H}_n$ 的上同调序列一致 (Poincaré-Lefschetz 对偶性 (Poincaré-Lefschetz duality)). 对于局部紧空间的局部上同调 (local cohomology), 类似的结论不成立.

参考文献

[1] Скляренко, Е. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **35** (1971), 831 － 843.

[2] Харлап, А. Э., 《Матем. сб.》, **96** (1975), 347 － 373. Е. Г. Скляренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1972, Sect. Ⅳ. 3. 沈信耀 译 黄华乐 校

局部极限定理 [local limit theorems; локальные предельные теоремы], 概率论中的

关于密度的极限定理, 即建立一列分布的密度向极限分布密度 (如给定的密度存在) 收敛的定理, 或者, 局部极限定理的经典形式, 即格点分布的局部定理, 其最简单的是局部 **Laplace 定理** (Laplace theorem).

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列有相同分布函数 $F(x)$ 的独立随机变量, 其均值为 a, 且有有限的正方差 σ^2. 令 $F_n(x)$ 表正规化和

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - a)$$

的分布函数, $\Phi(x)$ 表正态 (0, 1) 分布函数. 上述假设保证了当 $n \to \infty$ 时, 对任何 x, $F_n(x) \to \Phi(x)$. 可以证明, 即使分布 F 有密度, 也并不蕴含随机变量 Z_n 的分布密度 $p_n(x)$ 向正态密度

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

的收敛性. 如果对于某 $n = n_0$, Z_n 有有界密度 $p_{n_0}(x)$, 那么

$$p_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (*)$$

关于 x 一致成立. 对某一 n_0, $p_{n_0}(x)$ 为有界这一条件, 对于 (*) 关于 x 一致成立也是必要的.

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列有共同非退化分布的独立随机变量, 且设 X_1 以概率 1 取形如 $b + Nh$ $(N = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的值, 其中 $h > 0$ 而 b 为常

数（即 X_1 有步长为 h 的**格点分布**（lattice distribution））.

假设 X_1 有有限方差 σ^2，令 $a = \mathsf{E}X_1$，且令

$$P_n(N) = \mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j = nb + Nh\right\}.$$

为使当 $n \to \infty$ 时

$$\sup_N \left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(N) + - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{nb+Nh-na}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2\right\}\right| \to 0$$

成立，其必要充分条件是：步长 h 应当是极大的. Б. В. Гнеденко 的这个定理是局部 Laplace 定理的一个推广.

关于独立非恒同分布随机变量和的局部极限定理在经典统计力学和量子统计学中乃是一个基本的数学工具（见[7]，[8]）.

局部极限定理在独立随机变量与向量和的情形已做了充分的研究，同时还估计了这些定理中的收敛速度. 极限分布为正态的情形研究得最为充分（见[3]，第 7 章），还有一些论文致力于任一**稳定分布**（stable distribution）情形的局部极限定理（见[2]）. 类似的研讨也已被搬到相依随机变量之和，特别是构成 **Марков 链**（Markov chain）的随机变量之和（见[5]，[6]）.

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949（中译本：Б. В. 哥涅坚科等著，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955）.

[2] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965（英译本：Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971）.

[3] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972（英译本：Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975）.

[4] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973（英译本：Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969）.

[5] Сираждинов, С. Х., Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955.

[6] Статулявичус, В. А., 《Литовский матем. сб.》, **1**（1961），1－2，231－314；**9**（1969），2，345－362.

[7] Хинчин, А. Я., Математические основания статистической механики, М.-Л., 1943（英译本：Khinchin, A. Ya., Mathematical foundations of statistical mechanics, Dover, reprint, 1949）.

[8] Хинчин, А. Я., Математические основания квантовой статистики, М.-Л., 1951.

В. В. Петров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bhattacharya, R. N., Ranga Rao, R., Normal approximations and asymptotic expansions, Wiley, 1976.

[A2] Paulauskas, V., Račkauskas, A., Approximation theory in the central limit theorem, Kluwer, 1989（译自俄文）.

潘一民 译

局部环挠[**local linking**; **локальное зацепление**]

刻画 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中闭集 Φ 在 Φ 中一点 a 附近配置的性质. Φ 在 a 附近存在 q 维环挠，如果存在 $\varepsilon > 0$，对任意正数 δ，在开集 $O(a, \delta)\setminus\Phi$ 内均有一个整系数的 q 维闭链 Z^q，$q < n$，使得对 $O(a, \varepsilon)$ 中的任意闭集 P，只要 Z^q 在 P 中同调于零，便有 P 与 Φ 的交集非空. 这里 $O(a, \delta)$ 和 $O(a, \varepsilon)$ 分别为以 a 为中心，δ 和 ε 为半径的球面. 还可局限于仅考虑紧致集 P 为多面体的情形. 当 $q = 0$ 时，局部环挠的概念等同于局部割点的概念（见**局部分解**（local decomposition））. Александров 阻碍定理（Aleksandrov obstruction theorem）: $\dim\Phi = p$ 当且仅当 $n - p - 1$ 为最小的整数 q 使得 $\Phi \subset \mathbf{R}^n$ 在某点 $a \in \Phi$ 附近存在 q 维环挠. 此外，还有类似的有关"模 m"阻碍的定理，用于刻画具有"模 m"**同调维数**（homological dimension）p 的点集 Φ.

阻碍定理的更深入的推广为关于紧致集合的**同调包含**（homological containment）的定理.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

[2] Ситников, К., 《Докл. АН СССР》, **81**（1951），2，153－156.

А. А. Мальцев 撰 李贵松 译 张平 校

局部性质[**local property**; **локальное свойство**]，交换代数的

交换环（commutative ring）A 或 A 模 M 的一个性质 P，它在 A（或 M）上正确，当且仅当一个类似的性质在 A（或 M）关于 A 的所有素理想的局部化(见**局部环**（local ring）)上都成立，也就是说，一个性质在整体上成立，当且仅当它在局部上处处成立. 经常可限于仅考察 A 的所有极大理想以代替所有素理想的集合. 若把环 A 与由 A 的所有素理想组成的拓扑空间 $\operatorname{Spec}A$（A 的谱）联系起来，这个术语就变得清楚了. 这时，论断"P 对 A 成立"等价于论断"P 在整个空间 $\operatorname{Spec}A$ 上成立"，而论断"P 对所有 $A_{\mathfrak{P}}$ 成立"

等于论断“Spec A 的每个点 $\mathfrak{P}$ 都有一个领域，在此领域上 P 成立”.

局部性质的例子. 一个整环 A 在它的分式域中整闭，当且仅当对于 A 的所有极大理想 $\mathfrak{P}$，局部化 $A_{\mathfrak{P}}$ 是整闭的. 一个 A 模的同态 $f:M\to N$ 是同构(单射，满射，零态射)，当且仅当对于 A 的所有极大理想 $\mathfrak{P}$，局部化的模的映射 $f_{\mathfrak{P}}:M_{\mathfrak{P}}\to N_{\mathfrak{P}}$ 是同构(单射，满射，零态射).

但是，A 模 M 是自由模这个性质不是局部的.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 在代数系统(例如群)及拓扑中的术语“局部性质”，见**局部性质和剩余性质**(local and residual properties).

裴定一 译 赵春来 校

局部环[**local ring**; **локальное кольцо**]

有唯一极大理想的含幺元**交换环**(commutative ring). 若 A 是局部环，$\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想，则商环 $A/\mathfrak{m}$ 是一个域，称为 A 的剩余域(residue field).

局部环的例子. 任意域和赋值环是局部环. 一个域 k 或任一局部环上的形式幂级数环 $k[[X_1,\cdots,X_n]]$ 是局部环. 另一方面，多项式环 $k[X_1,\cdots,X_n](n\geqslant 1)$ 不是局部环. 设 X 是拓扑空间(或微分流形，解析空间，代数簇)及 x 是 X 的一个点，设 A 是在 x 点的连续函数(相应地，可微、解析或正则函数)的芽构成的环，则 A 是局部环，它的极大理想由在 x 点取值为零的所有函数的芽构成.

环论中的一些一般性构造产生局部环，其中最重要的是局部化(见**交换代数的局部化**(localization in a commutative algebra)). 设 A 是一个交换环，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想. 环 $A_{\mathfrak{p}}$ 由形如 a/s 的分式构成，其中 $a\in A$，$s\in A\setminus\mathfrak{p}$，它是局部环，称为环 A 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化(localization). $A_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想是 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，$A_{\mathfrak{p}}$ 的剩余类域同构于整商环 $A/\mathfrak{p}$ 的分式域. 其他的产生局部环的构造是 Hensel 化(见 **Hensel 环**(Hensel ring))或一个环相对于某个极大理想的**完全化**(completion). 局部环的任一商环是局部环.

环 A(或 A 模 M，或 A 代数 B)的一个性质称为局部性质(local property)，若它对 A 成立等价于对所有 $A_{\mathfrak{p}}$(相应地，模 $M\otimes_A A_{\mathfrak{p}}$、或代数 $B\otimes_A A_{\mathfrak{p}}$)都成立，其中 $\mathfrak{p}$ 取遍 A 的所有素理想(见**局部性质** local property)).

局部环 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的所有的幂 $\mathfrak{m}^n$ 定义了所谓局部环拓扑(local-ring topology)(或 $\mathfrak{m}$ 进拓扑($\mathfrak{m}$-adic topology))的在零处的一个邻域基. 对于 Noether 局部环，这个拓扑是可分的(Krull 定理(Krull theorem))，它的任一理想都是闭集.

以下仅考虑 Noether 局部环(亦见 **Noether 环**(Noetherian ring)). 一个局部环称为完全局部环(complete local ring)，若它相对于 $\mathfrak{m}$-adic 拓扑是完全的. 这时 $A=\lim_{\leftarrow n}A/\mathfrak{m}^n$. 在完全局部环中，$\mathfrak{m}$-adic 拓扑比任何其他可分拓扑弱(Chevalley 定理(Chevalley theorem)). 任一完全局部环都能表成形式幂级数环 $S[[X_1,\cdots,X_n]]$ 的商环，其中 S 是域(在特征相同的情况下)或完全离散赋值环(在特征不同的情况下). 这个定理可以用于证明完全局部环的一些特殊性质，这些性质在一般的 Noether 局部环中是不成立的(见[5]). 例如，完全局部环是一个**优环**(excellent ring).

局部环 A 的更精细的定量化的研究与伴随分次环(adjoint graded ring) $\mathrm{Gr}(A)=\oplus_{n\geqslant 0}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$ 的概念的应用有关. 设 $H_A(n)$ 是向量空间 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 在剩余类域 $A/\mathfrak{m}$ 上的维数，作为整数变量 n 的函数，它称为局部环 A 的 Hilbert-Samuel 函数(Hilbert-Samuel function)或特征函数(characteristic function). 对充分大的 n，这个函数与 n 的一个多项式 $\widetilde{H}_A(n)$ 一致，称它为局部环 A 的 Hilbert-Samuel 多项式(Hilbert-Samuel polynomial)(亦见 **Hilbert 多项式**(Hilbert polynomial)). 这个事实也可用 Poincaré 级数表述：形式级数

$$P_A(t)=\sum_{n\geqslant 0}H_A(n)\cdot t^n$$

是一个形如 $f(t)(1-t)^{-d(A)}$ 的有理函数，其中 $f(t)\in\mathbf{Z}[t]$ 是一个多项式，$d(A)-1$ 是 $\widetilde{H}_A$ 的次数. 整数 $d(A)$ 是环 A 的(Krull)维数((Krull) dimension) $\dim A$，它是环 A 的一个最重要的不变量之一. $d(A)$ 是使商环 $A/(a_1,\cdots,a_d)$ 是 **Artin 环**(Artinian ring)的元素 $a_1,\cdots,a_d\in A$ 的最小的个数. 如果能选择这些元素，使它们生成极大理想 $\mathfrak{m}$，那么 A 称为正则局部环(regular local ring). A 的正则性等价于 $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=\dim A$. 对一个 d 维正则环 A，

$$H_A(n)=\binom{n+d-1}{d-1},$$

且 $P_A(t)=(1-t)^{-d}$. 几何上，正则性意味着(解析或代数)簇上相应的点是非奇异的.

除了特征函数 H_A 及与之相关的维数和重数之外，局部环还有一些同调性质的不变量. 其中主要的一个不变量是深度 depth A(见**模的深度**(depth of a module))；满足条件 depth $A=\dim A$ 的局部环称为 **Cohen-Macaulay 环**(Cohen-Macaulay ring). 对任意或完全局部环 A，是否存在一个模 M 满足 depth $M=\dim A$，这尚不清楚(1989). 另一组同调不变量是所谓局部环 A 的 Betti 数(Betti numbers) $b_i(A)$，它是 k 空间 $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ 的维数，其中 k 是 A 的剩余类域.

Poincaré 级数 $\sum_{n\geq 0} b_n(A)t^n$ 的有理性问题仍是个未知的问题，虽然对于许多类型的环，已得到肯定的答案．也有一些代数几何性质的不变量，它们用局部环对应的奇性的化解来定义．

具有有限个极大理想的环称为半局部环（semi-local rings），对这类环也建立了类似的理论．极大理想的作用由 **Jacobson 根**（Jacobson radical）来代替．

参考文献

[1] Krull, W., Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. Reine Angew. Math.*, **179**(1939), 204 – 226.
[2] Chevalley, C., On the theory of local rings, *Ann. of Math.*, (2), **44**(1943), 690 – 708.
[3] Cohen, I.S., On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59**(1946), 54 – 106.
[4] Samuel, P., Algèbre locale, Gauthier-Villars, 1953.
[5] Nagata, M., Local rings, Interscience, 1962.
[6] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2, Springer, 1975.
[7] Serre, J.-P., Algèbre locale, Multiplicités, Springer, 1965.
[8] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）.
[9] Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G., Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969（中译本：M.F. 阿蒂亚等著，交换代数导引，科学出版社，1982）.
В.И. Данилов 撰

【补注】 关于 Krull 维数的概念见结合环的**维数**（dimension）.

D.Anick（[A1]）给出了第一个 Poincaré 级数有理性问题的反例．

参考文献

[A1] Anick, D., Construction d'espaces de lacets et d'anneaux locaux à séries de Poincaré-Betti non rationelles, *C.R. Acad. Soc Paris*, **290**(1980), 1729 – 1732（英文摘要）.
裴定一 译　赵春来 校

局部结构稳定性 [**local structural stability**; **локальная грубость**]，一个光滑动力系统的紧不变集 F 的

此动力系统在 F 的某个邻域中的一切拓扑性质均在此系统的任意（C_1 意义下的）充分小扰动下的保持不变性．更准确地说，局部结构稳定性就是：有 F 的邻域 $U\supset V\supset F$，且对任何 $\varepsilon>0$ 均有 $\delta>0$，使得若原系统在 U 中在 C^1 度量下扰动的距离不超过 δ，必有一同胚嵌入 $V\to U$，使点的移动不超过 ε，而原系统在 ∇ 中的一段轨道弧变为扰动后系统的一段轨道弧．(这样，严格地说，局部结构稳定性并不是集合 F 本身的性质，而是在 F 的邻域中考虑的动力系统的性质．)

若 F 是一个**流（连续时间动力系统）**(flow)（continuous-time dynamical system)）的平衡位置（或一**瀑布**(cascade) 的不动点，即一离散时间动力系统的不动点），则 F 的局部结构稳定性蕴涵了此系统在 F 中的点线性化后能保持系统的拓扑性质不变．在此情况下，几乎明显的是，局部结构稳定性的一个必要条件是线性化系统的本征值不在虚轴上（在瀑布情况下则为不在单位圆上）．这条件也是充分的（Grobman-Hartman 定理（Grobman-Hartman theorem），见 [1]，第 IX 章）．由此容易得到流的周期轨道的局部结构稳定性的必要充分条件：变分方程只有一个乘子（见**乘子**(multipliers)）在单位圆上．关于某些**双曲集**(hyperbolic set，又见 [2]，[3]）的局部结构稳定性也有一些结果．

参考文献

[1] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.
[2] Аносов, Д.В., в кн.: Тр. 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям, т.2 — Качественные методы, Киев, 1970, 39 – 45.
[3A] Robinson, C., Structural stability of vector fields, *Ann. of Math.*(2), **99**(1974), 154 – 175.
[3B] Robinson, C., Correction to Structural stability of vector fields, *Ann. of Math.*(2), **101**(1975), 368.
Д.В.Аносов 撰

【补注】 "变分方程的乘子"亦称 Floquet 乘子（Floquet multiplier）.

齐民友 译

轨道的局部结构 [**local structure of trajectories**; **локальная структура траекторий**]，二次微分的

定向 **Riemann 曲面**（Riemann surface）上的**二次微分**（quadratic differential）在该曲面任一点的邻域内轨道状态的一种描述．设 R 是定向 Riemann 曲面，$Q(z)dz^2$ 是 R 上的二次微分；设 C 是 $Q(z)dz^2$ 的所有零点与单极点的集合，H 是 $Q(z)dz^2$ 的所有阶数 ≥ 2 的极点的集合．$Q(z)dz^2$ 的轨道构成 $R\backslash\{C\cup H\}$ 上的正则曲线族．就推广的正则曲线族概念而言，在 $R\backslash H$ 上仍然如此．H 的点的邻域内轨道的状态要复杂得多．下面给出轨道局部结构的完整描述．

a) 对于任一点 $P\in R\backslash\{C\cup H\}$，存在 P 在 R 上的邻域 N 及 N 到圆盘 $|w|<1\,(w=u+iv)$ 的同胚映射，使得 N 内每条轨道的最大开弧变为于其上 v 是常数的线段．因而 $R\backslash\{C\cup H\}$ 的每一点有 $Q(z)dz^2$ 的一条轨道通过，或是 R 上的一条开弧或是 R 上的一条 Jordan 曲线．

b) 对于任一 μ 阶点 $P\in C$（当 P 是零点时 $\mu>0$，当 P 是单极点时 $\mu=-1$），存在 P 在 R 上的邻域 N、及 N 到圆盘 $|w|<1$ 的同胚映射，使得 N 内每条轨道的最大开弧变成于其上 $\operatorname{Im} w^{(\mu+2)/2}$ 是常数的开弧．存在 $\mu+2$ 条以 P 为端点的轨道且其极限切线方向彼此作成等角 $2\pi/(\mu+2)$．

c) 设 $P\in H$ 是阶数 $\mu>2$ 的极点．若某条轨道

有一端点在 P，则它必沿着作成等角 $2\pi/(\mu-2)$ 的 $\mu-2$ 个方向之一趋于 P. 存在 P 在 R 上的邻域 N 具有下述性质：1）通过 N 的某个点的每条轨道在各个方向或趋于 P 或离开 N；2）存在包含在 N 内的 P 的邻域 N^* 使得过 N^* 的某点的每条位于 N^* 内的轨道在至少一个方向趋于 P；3）若某条轨道整个地位于 N 内因而在两个方向趋于 P，则从这相应的方向逼近 P 时该轨道的切线趋于两个相邻的极限位置之一. 将 P 添入该轨道所得的 Jordan 曲线所围成的区域 D 包含由这两条相邻的极限切线所构成的角中的点. 当从这两个方向趋于 P 时，与 D 有公共点的任一轨道的切线趋于这些相邻的极限位置. 借助于函数 $\zeta=\int[Q(z)]^{\frac{1}{2}}dz$ 的适当分支，区域 D 被映射成半平面 $\mathrm{Im}\zeta>c$（此处 c 是实数）；4）对于每对相邻的极限位置，存在轨道具有 3）中所描述的性质.

d）设 $P\in H$ 是二阶极点，利用 P 是点 $z=0$，设 z 是局部参数. 假定 $[Q(z)]^{-\frac{1}{2}}$（对于根式分支的某种选取）在 $z=0$ 的邻域内具有下述展开式

$$[Q(z)]^{-\frac{1}{2}}=(a+ib)z\{1+b_1z+b_2z^2+\cdots\},$$

其中 a 和 b 是实常数，而 $b_1,b_2,\cdots$，是复常数. z 平面内二次微分 $Q(z)dz^2$ 的轨道的象的结构由下列三种情形之一成立所确定：

情形Ⅰ：$a\neq0$，$b\neq0$. 对于充分小的 $\alpha>0$，同圆盘 $|z|<\alpha$ 相交的每条轨道的象在一个方向上趋于 $z=0$，而在另一个方向上离开 $|z|<\alpha$. 在 $|z|<\alpha$ 内的轨道的象上，z 的模和幅角呈单调变化. 轨道的每个象绕点 $z=0$ 盘旋而且渐近地呈一条**对数螺线**（logarithmic spiral）状.

情形Ⅱ：$a\neq0$，$b=0$. 对于充分小的 $\alpha>0$，同圆盘 $|z|<\alpha$ 相交的每条轨道的象在一个方向上趋于 $z=0$，而在另一方向上离开 $|z|<\alpha$. 在 $|z|<\alpha$ 内的轨道的象上，z 的模呈单调变化. 诸轨道的不同的象在点 $z=0$ 处有不同的极限方向.

情形Ⅲ：$a=0$，$b\neq0$. 对于每个 $\varepsilon>0$，存在数 $\alpha(\varepsilon)>0$，使得对于 $0<\alpha\leqslant\alpha(\varepsilon)$，同圆周 $|z|=\alpha$ 相交的轨道的象是一条位于圆环 $\alpha(1+\varepsilon)^{-1}<|z|<\alpha(1+\varepsilon)$ 内的 Jordan 曲线.

参考文献

[1] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

Г. В. Кузьмина 撰

【补注】 对于二次微分的轨道的概念见**二次微分**（quadratic differential）.

这种描述本质上取自[1]的 3.2 节. 对于二次微分的详尽处理亦见[A1].

关于其整体结构见**轨道的整体结构**（global structure of trajectories）.

参考文献

[A1] Strebel, K., Quadratic differentials, Springer, 1984（译自德文）.
[A2] Gardiner, F. P., Teichmuller theory and quadratic differentials, Wiley, 1987.

杨维奇 译

局部拓扑群[**local topological group**; **локальная топологическая группа**]

一个**拓扑群**（topological group），在其中群运算仅对足够接近单位元的元素有定义. 局部拓扑群的引入是受了对拓扑群局部结构（即在单位元的任意小邻域内的结构，见[1]）的研究的启发. 局部拓扑群的确切定义如下.

令 G 是一个拓扑空间，e 是 G 的一个元素，Θ 和 Ω 分别是 G 和 $G\times G$ 的开子集，$e\in\Theta$，又令 i：$\Theta\to G$ 和 $m:\Omega\to G$ 是连续映射. 如果下列条件被满足，就称系统（G,e,Θ,Ω,i,m）是一个局部拓扑群：

1） 对于任意 $g\in G$，(e,g) 和 $(g,e)\in\Omega$ 且 $m((e,g))=m((g,e))=g$；

2） 如果 $g,h,t\in G$ 且 (g,h)，(h,t)，$((g,h),t)$，$(g,(h,t))\in\Omega$，则 $m((m((g,h)),t))=m((g,m((h,t))))$；

3） 对于任意 $g\in\Theta$，$(g,i(g))$ 和 $(i(g),g)\in\Omega$ 且 $m((g,i(g)))=m((i(g),g))=e$.

局部拓扑群（G,e,Θ,Ω,i,m）常简记作 G. 元素 $m((g,h))$ 记作 gh 并且称为 g 与 h 的积（product）；元素 $i(g)$ 记作 g^{-1} 并且称为 g 的逆元（inverse）；元素 e 称为 G 的单位元（identity）. 如果 $(g,h)\in\Omega$，就说积 gh 被定义；如果 $g\in\Theta$，就说对 g 定义了逆元.

G 上这些运算（不是对所有元素都定义的）在单位元 e 的一个任意邻域内诱导出一个局部拓扑群结构. 令 G_1 和 G_2 是两个局部拓扑群. G_1 到 G_2 内的局部同态（local homomorphism）是 G_1 的单位元 e 的一个邻域 U_1 到 G_2 的单位元 e_2 的一个邻域 U_2 内的连续映射 f，使得 $f(e_1)=e_2$，并且对于任意元素 $g,h\in U_1$，它们的积在 G_1 中有定义，元素 $f(g)$，$f(h)$ 的积在 G_2 中也有定义且 $f(gh)=f(g)f(h)$. G_1 到 G_2 内两个局部同态说成是等价的（equivalent），如果它们在 G_1 的单位元的某个邻域内一致. 假设局部同态 f 是邻域 U_1 与 U_2 间的一个**同胚**（homeomorphism）并且逆映射 f^{-1}：$U_2\to U_1$ 是 G_2 到 G_1 的一个局部同态，则称 f 是 G_1 到 G_2 的一个局部同构（local isomorphism）. 如果两个局部拓扑群之间有一个局部同构，那么就称它们是局部同构的（locally isomorphic）. 例如，任意局部拓扑群都与它的单位元的任意邻域是局部同构的.

作为局部拓扑群的例子可以取任意拓扑群（从而可以取它的单位元的任意邻域）. 在局部拓扑群理论中主要问题就是这个例子的性质能够作多大程度的推广；就是说，是否任意局部拓扑群都与某个拓扑群局部同构. 在一般情形下，答案是否定的（见[4]），然而在有限维**局部 Lie 群**（Lie group，local）这个重要的特殊情形中，答案是肯定的.

如同在拓扑群论中一样，在局部拓扑群理论中也可以定义（局部）子群，正规子群，陪集，以及商群. 例如，令 $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ 是一个局部拓扑群，令 H 是 G 的一个包含 e 的子集，并且在 e 在 G 中一个邻域 U 内，集合 $U \cap H$ 是闭的. 又假设对于任意 $g \in H \cap \Theta$，元素 $i(g)$ 属于 H 并且集合

$$\Omega_H = \{(g, h) \in \Omega \cap (H \times H): m((g, h)) \in H\}$$

在 $H \times H$ 中是开的（在 H 带有由 G 所诱导的拓扑的假定下）. 那么系统

$$\{H, e, \Theta \cap H, \Omega_H, i|_H, m|_{\Omega_H}\}$$

是一个局部拓扑群，叫做 G 的一个局部子群（local subgroup）. 关于正规子群，关于子群的陪集以及商群的定义见[1].

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，上册，1957，下册，1958）.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[3] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965（Springer, 1992）.

[4] Lie, S. and Engel, F., Theorie der Transformations-gruppen, 1－3, Teubner, 1930.

В. Л. Попов 撰　郝钢新 译

局部单值化 [**local uniformization；локальная униформизация**]

确定与一个**局部环**（local ring）双有理等价的正则局部环. 对于域 k 上的不可约代数簇 V（见**不可约簇**（irreducible variety）），一个分解系（resolving system）就是一族双有理等价于 V 的不可约射影簇 $\{V_\alpha\}$（即使得有理函数域 $k(V_\alpha)$ 同构于 $k(V)$），它们满足下述条件：对于 $k(V)$ 的任何一个赋值（位）v，存在簇 $V' \in \{V_\alpha\}$ 使得 v 在 V' 上的中心 P' 是非奇异点. 分解系的存在性（即局部单值化定理（local uniformization theorem））已在下列情形得到证明：对特征数零的域上的任意簇（[1]），对任意域上的两维簇以及对特征数不等于 2，3 或 5 的代数闭域上的三维簇（[2]）. V 的仅含一个簇的分解系的存在性蕴含 V 的奇点可解消而且当维数≤3时可从局部单值化定理得到. 在一般的情形局部单值化定理蕴含有限可解系的存在性（[3]）.

参考文献

[1] Zariski, O., Local uniformization on algebraic varieties, *Ann. of Math.*, (2) **41** (1940), 852－896.

[2] Abhyankar, S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Acad. Press, 1966.

[3] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Mathods of algebraic geometry, 3, Cambridge Univ. Press, 1954.

[4] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2, Springer, 1975.

В. И. Данилов 撰

【补注】特征数零的代数闭域上任意维数代数簇的奇点解消已被广中平祐在 1964 年解决（[A1]）. 在特征数 $p > 0$ 的代数闭域上 2 维簇以及 $p > 5$ 时的 3 维簇的奇点解消已被 S. S. Abhyankar 证明（[A2]）.

关于解析几何里以及单复变函数论里（Riemann 曲面）的（局部）单值化，参见**单值化**（uniformization）.

参考文献

[A1] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 109－326.

[A2] Abhyankar, S. S., Resolution of singularities of arithmetic surfaces, Harper & Row, 1965.

陈志杰 译

局部单值化参数 [**local uniformizing parameter；локальный униформизирующий параметр**]，局部单值化子（local uniformizer），局部参数（local parameter）

一个复变量 t，作为 **Riemann 曲面**（Riemann surface）R 上的点 p 的连续函数 $t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p)$ 在点 $p_0 \in R$ 的某个邻域 $V(p_0)$ 内处处有定义，并且实现 $V(p_0)$ 到圆盘 $D(p_0) = \{t \in \mathbf{C}: |t| < r(p_0)\}$ 上的一个同胚映射，其中 $\varphi_{p_0}(p_0) = 0$. 这里，$V(p_0)$ 称为特异邻域或参数邻域（parametric neighbourhood），$\varphi_{p_0}: V(p_0) \to D(p_0)$ 称为特异映射或参数映射（parametric mapping），而 $D(p_0)$ 则称为特异圆盘或参数圆盘（parametric disc）. 通过一个参数映射，任意的在参数邻域 $V(p_0)$ 定义的点函数 $g(p)$ 成为局部单值化参数 t 的函数，即 $g(p) = g[\varphi_{p_0}^{-1}(t)] = G(t)$. 如果 $V(p_0)$ 和 $V(p_1)$ 是满足 $V(p_0) \cap V(p_1) \neq \phi$ 的两个参数邻域，而 t_{p_0} 和 t_{p_1} 是对应的两个局部单值化参数，那么 $t_{p_1} = \varphi_{p_1}[\varphi_{p_0}^{-1}(t_{p_0})]$ 是 $D(p_0)$ 的某个子区域上的单叶解析函数，它实现这个子区域到 $D(p_1)$ 里的一个双全纯映射.

如果 $R = R_F$ 是解析函数 $w = F(z)$ 的 Riemann 曲面，p_0 是 $F(z)$ 的一个投影为 $z_0 \neq \infty$ 的正则元，那么 $t_{p_0} = z - z_0$；对于 $z_0 = \infty$ 有 $t_{p_0} = 1/z$. 如果 p_0 是 $F(z)$ 的一个对应于级为 $k-1 > 0$ 的**分支点**（branch point）的奇异元，或代数元，那么对 $z_0 \neq \infty$ 有 $t_{p_0} = (z - z_0)^{1/k}$，对 $z_0 = \infty$ 有 $t_{p_0} = 1/z^{1/k}$. 一般地，在元素 p_0 的一个参数邻域，局部单值化参数 t 按照公

式(例如，对于 $z_0 \neq \infty$)：

$$z = z_0 + t^k, \ w = F(z_0 + t^k) = w(t), \ k \geqslant 1,$$

确实实现了多值关系 $w = F(z)$ 的一个局部**单值化**(uniformization).

在 R 是包括边界的 Riemann 曲面的情形下，对于属于 R 的边界的点 p_0，局部单值化参数 $t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p)$ 把参数邻域 $V(p_0)$ 映成半圆盘:

$$D(p_0) = \{t \in \mathbf{C} : |t| < r(p_0), \ \mathrm{Im}\, t \geqslant 0\}.$$

如果 R 是复空间 $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ 上的 **Riemann 区域**(Riemannian domain)，那么局部单值化参数

$$t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p) = (t_1, \cdots, t_n)_{p_0} = (\varphi_1(p), \cdots, \varphi_n(p))_{p_0}$$

实现参数邻域 $V(p_0)$ 到多圆柱

$$D(p_0) = \{t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbf{C}^n : \\ |t_1| < r_1(p_0), \cdots, |t_n| < r_n(p_0)\}$$

上的一个同胚映射．如果 $V(p_0) \cap V(p_1)$ 是非空的，那么映射 $t_{p_1} = \varphi_{p_1}[\varphi_{p_0}^{-1}(t_{p_0})]$ 把 $D(p_0)$ 的某个子区域双方全纯地映到 $D(p_1)$ 里．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 2, Chelsea, 1977).

[2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1-2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Farkas, H. M. and Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.

陈怀惠 译

局部变分方法 [local variations, method of; локальных вариаций метод]

数值求解在相坐标和控制函数上有约束的最优控制问题的，基于状态空间中变分的一种**直接方法**(direct method)（见[1]-[3]）．

在局部变分方法中，使作为一个 **Lagrange 问题**(Lagrange problem)给出的原来的最优控制问题关于自变量 t 和相向量 x 离散．原问题就这样转换成加性泛函

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k, x_{k+1}, u_k, t_k, t_{k+1}) \qquad (1)$$

在约束

$$x_{k+1} - x_k = \tau F(x_k, x_{k+1}, u_k, t_k, t_{k+1}), \quad (2)$$

$$k = 0, \cdots, N-1,$$

$$(x_k, u_k) \in G_k, \ k = 0, \cdots, N \qquad (3)$$

下的极小化问题，这里 x_k 和 u_k 是在结点 t_k 的相坐标向量和控制向量（分别有维数 n 和 m），G_k 是 $(n+m)$ 维空间中给定的区域（G_0 和 G_N 描述边界条件），而 $\tau = (T - t_0)/N$ 是自变量的原区间 $[t_0, T]$ 分划的步长．对局部变分方法，一个必不可少的条件是 x 和 u 的维数 n 和 m 相等．在这种情形下，一个初等运算的构造原来是很简单的．一个初等运算是决定一个使系统从点 (t_k, x_k) 到一个邻近点 (t_{k+1}, x_{k+1}) 的控制 u_k．如果 x 和 u 的维数相等，并且在一定的附加约束下，那么控制 u_k 由 N 个方程的方程组(2)的解定义在每个区间 (t_k, t_{k+1}) 上，组(2)是作为原变分问题的微分方程组的有限差分逼近的结果而得到的．

假设作为初始逼近指定了一条使(2)和(3)都满足的折线 Γ_0: $(x_0^0, \cdots, x_N^0)$，对此(2)和(3)满足局部变分方法的算法在于逐步改进 Γ_0 通过的结点的位置，它是作为向量 x_k 的每一个 j 分量的逐次局部变分的结果而实现的．对固定的 x_k 和 x_{k+2}，在从 t_k 到 t_{k+2} $(k = 0, 1, \cdots)$ 的每一部分上，x_k 的每一个 j 分量依次以步长 $h_j > 0$ 变化．如果作为这个变分的结果泛函(1)的值减小((2)和(3)仍满足)，则对 x_k 的下一个 $(j+1)$ 分量进行类似的变分，否则这个 j 分量以步长 $(-h_j)$ 变化．这个局部变分对 Γ_0 的所有结点逐次地进行．结果，在迭代结束的时刻得到一条新的折线 Γ_1，其上泛函(1)取的值不大于在初始逼近 Γ_0 上的值．类似地进行逐次迭代．如果必要，减小步长 h_j 和 τ．原变分问题的逼近解由对在每一步找到的控制值的插值决定．

对 $m = n = 1$，对给定值 τ 和 h，用局部变分方法得到的解满足 **Euler 方程**(Euler equation)的有限差分逼近精确到阶为 $\max(h, h/\tau, h/\tau^2)$ 的项（见[3]）．

如果原始折线 Γ_0 的变形不限于它的结点的逐次变形，而是在对应于步长 τ 和 h_j 的选取且包括 Γ_0 的一个更完全的图上进行，则称之为**行进管法**(travelling-tube method)．

对 $m < n$，实施初等运算出现一定的困难．在这种情况下，代替局部变分方法可以用**行进波法**(travelling wave method)，它与局部变分方法接近．

局部变分方法能直接推广到带非加性泛函的变分问题，其中约束具有等周条件的特征（见[3]）．局部变分方法可以扩展到未知函数依赖于几个自变量且对应的泛函是以不同维数区域上积分形式给出的变分问题（见[2]）．

参考文献

[1] Моисеев, Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971.

[2] Крылов, И. А., Черноусько, Ф. Л., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, **6** (1966), 2, 203－217.

[3] Баничук, Н. В., Петров, В. М., Черноусько, Ф. Л., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, **9** (1969), 3, 548－557.

И. Б. Вапнярский 撰　葛显良 译　鲁世杰 校

场所 [locale; локация]

【补注】一个看成"广义拓扑空间"的完全 Heyting 代数 (见 **Brouwer 格** (Brouwer lattice)). "场所"这名词应归于 J. R. Isbell [A1], 虽然这概念已经被很多更早的作者研究过: 基本思想是, 对任何拓扑空间 X, X 的开子集的格 $\mathscr{O}(X)$ 是完全的且满足无穷分配律 (infinite distributive law)

$$U \cup \bigcap \{V_i : i \in I\} = \bigcup \{U \cap V_i : i \in I\}$$

(等价地, 它是一个 Heyting 代数 (Heyting algebra)), 且空间的很多重要拓扑性质 (紧性, 连通性, 等等) 事实上是其开集格的性质. 这样, 可以把满足无穷分配律的任何完全格 (这种格普通称为标架 (frame)) 看成一个空间的开集格, 而不考虑它是否有足够的"点"使被描述为一个实在的开子集格. 一个标架同态 (frame homomorphism) 是保持有限交和任意并的映射. 一个场所外延上与标架是同一事物, 但内涵上不同: 不同在于这样的事实, 从 X 到 Y 的场所的态射 (或连续映射 (continuous mapping)) 是定义为从 Y 到 X 的标架同态. (为强调内涵的不同, 有些作者把对应于场所 X 的标架写成 $\mathscr{O}(X)$. 另外一些作者——例如 [A2] 的作者——用不同的术语: 他们重新定义"空间"以表示上面所称的场所, 而用"场所"表示上面术语中的标架. 本文所用的"场所"的意义是 Isbell 所用的原来的意义.)

一个标架可表示为一个空间的开集格, 当且仅当每一个元素可表示为素元素的交; 具有这性质的场所称为空间的 (spatial). 对应于空间场所的空间不是唯一决定的, 但是如果要求它是朴素的 (sober), 即每一个素开集必须是唯一的点的闭包的补集, 则它是唯一决定的. (每个 Hausdorff 空间是朴素的, 且每个朴素空间满足 T_0 分离性公理.) 从朴素空间到场所的过渡是范畴的满嵌入; 一般地它不保持积, 但是如果一个因子是局部紧的, 则它保持积 (对此结果的更一般形式, 见 [A3]). 很多类似的拓扑性质能够从 (朴素) 空间范畴扩张到场所范畴. 例如, 定义一个场所是局部紧的 (locally compact), 如果对应的标架是**连续格** (continuous lattice); 能够证明 ([A4]) 每一个局部紧场所是空间性的, 且事实上局部紧场所范畴等价于局部紧朴素空间范畴.

有对应于拓扑子空间概念的子场所 (sublocale) (或商标架 (quotient frame)) 概念. 每一个场所能表成空间性场所的子场所, 但是一般地子场所表现出很不同于子空间: 最明显的事实是一个给定场所的任何个数稠子场所的交是稠的. 正是这个性质 (常常连同两个积的概念之间的差异) 引起场所范畴与空间范畴之间大多数重大的差异; 如由 Isbell ([A1]) 最初指出的那样, 这些差异常常产生影响使得前者比之后者成为更乐于去研究的范畴. 这方面的三个例子: 对场所的仿紧性质被任意场所积所继承 ([A1]), 对场所的 Lindelöf 覆盖性质等价于实紧性 ([A5]), 以及场所群的每一个场所子群是闭的 ([A6], [A7]) (场所群相对于拓扑群恰如场所相对于空间).

跟场所群一样, 一致场所已受到某种注意 ([A1], [A8]): 一个场所上的一致结构通常被定义为满足适当的闭包性质的一族覆盖 (即标架的一些子集, 其并是顶元素). 场所在对一般拓扑学的构造方法中也起重要作用 ([A9], [A10]). 关于场所理论的一般报导, 见 [A11].

参考文献

[A1] Isbell, J. R., Atomless parts of spaces, *Math. Scand.*, **31** (1972), 5－32.

[A2] Joyal, A. and Tierney, M., An extension of the Galois theory of Grothendieck, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **309** (1984).

[A3] Isbell, J. R., Product spaces in locales, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81** (1981), 116－118.

[A4] Banaschewski, B., The duality of distributive continuous lattices, *Canad. J. Math.*, **32** (1980), 385－394.

[A5] Madden, J. and Vermeer, J., Lindelof locales and realcompactness, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **99** (1986), 473－480.

[A6] Isbell, J. R., Kříž, I., Pultr, A. and Rosický, J., Remarks on localic groups, in F. Borceux (ed.): Categorical Algebra and its Applications, Lecture notes in math., Vol. 1348, Springer, 1988, 154－172.

[A7] Johnstone, P. T., A simple proof that localic subgroups are closed, *Cahiers Top. et Géom. Diff. Catégoriques*, **29** (1988), 157－161.

[A8] Pultr, A., Pointless uniformities, *Comment. Math. Univ. Carlolinae*, **25** (1984), 91－120.

[A9] Fourman, M. P. and Grayson, R. J., Formal spaces, in A. S. Troelstra and D. van Dalen (eds.): The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium, Studies in Logic, Vol. 110, North-Holland, 1982, 107－122.

[A10] Johnstone, P. T., Open locales and exponentiation. in J. W. Gray (ed.): Mathematical Applications of Category Theory, Contemporary Math., Vol. 30, Amer. Math. Soc., 1984, 84－116.

[A11] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.

P.T.Johnstone 撰 葛显良 译 李慧陵 校

局部性原理 [locality principle; локальности принцип]

一个汇集的概念，此概念组合了若干主要有关于椭圆（在某些情形下是亚椭圆）型方程（算子）的断言，并且由这类方程基本解的奇异性的逐点特征而产生．例如，如下形式

$$L(D, x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \ x \in \mathbf{R}^n$$

的变系数椭圆型算子 $L(D, x)$，在适当意义下，于点 x_0 的邻域内可表为

$$L(D, x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x_0) D^\alpha + L'(x).$$

此中第一项是常系数算子，且 $L'(x)$ 在给定的邻域内"充分小"．

参考文献

[1] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

А. А. Дезин 撰 仇庆久 译

交换代数的局部化 [localization in a commutative algebra; локализация в коммутативной алгебре]

从交换环 A 到其**分式环**(fractions, ring of) $A[S^{-1}]$ 的转化，其中 S 是 A 的子集．环 $A[S^{-1}]$ 可以当作是由环 A 到一个环的通用映射问题的解，在这映射下 S 中的元素都映为可逆元．不过，$A[S^{-1}]$ 也可以明确地构造出来：

1)作为形如 a/s 的分式的集合，其中 $a \in A$, s 是 S 中元素的乘积（两个分式 a/s 和 a'/s' 视为等价的，当且仅当存在 s''，它也是 S 中元素的乘积，使得 $s''(s'a - sa') = 0$；这些分式按通常的规则做加法和乘法）；

2)作为多项式环 $A[X_s](s \in S)$ 相对于由 $sX_s - 1$ 生成的理想的商环；

3)作为 A 模的归纳系 (A_i, φ_{ij}) 的**归纳极限**(inductive limit)，其中 i 取遍自然定序的自由交换幺半群 $N^{(S)}$．所有 A_i 与 A 同构，并且同态 $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ 与乘 $s_1^{n_1} \cdots s_k^{n_k} \in A$ 的乘法一致，其中 $j = i + n_1 s_1 + \cdots + n_k s_k$．

环 A 可以典范地映入 $A[S^{-1}]$，从而使 $A[S^{-1}]$ 成为 A 代数．映射 $A \to A[S^{-1}]$ 是单射，当且仅当 S 不含零因子．另一方面，如果 S 含幂零元，则 $A[S^{-1}] = 0$．

不失一般性，可以假定 S 对乘法封闭（这种集合也称为**乘性的**(multiplicative)或**乘性系统**(multiplicative system)）．这时 $A[S^{-1}]$ 也可记为 $S^{-1}A$ 或 A_S．最重要的乘性系统的例子有以下几种：

a)一个元素 $s \in A$ 的所有幂的集合 $\{s^n\}$；

b)集合 $A \setminus \mathfrak{P}$，也就是一个素理想 $\mathfrak{P}$ 的补集．对应的分式环是局部环，记为 $A_{\mathfrak{P}}$；

c) A 中所有非零因子的集合 R．

环 $R^{-1}A$ 称为 A 的**完全分式环**(complete ring of fractions)．如果 A 是整的，则 $R^{-1}A = A_{(0)}$，即为 A 的分式域．

若令

$$M[S^{-1}] = M \otimes_A A[S^{-1}],$$

则局部化可以毫无困难地扩展到任意 A 模 M 上．从 M 到 $M[S^{-1}]$ 的变换是一个正合函子．换句话说，$A[S^{-1}]$ 是平坦 A 模．局部化与直和和归纳极限是可交换的．

从几何观点看，局部化意味着转向一个开子集．更确切地说，对 $s \in A$，谱 $\operatorname{Spec} A[s^{-1}]$ 可以典范地等同于(在 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)下) $\operatorname{Spec} A$ 的开子集 $D(s)$，其中 $D(s)$ 是 A 的所有不含 s 的素理想的集合．进一步，这个运算使得有可能把每个 A 模 M 与仿射概形 $\operatorname{Spec} A$ 上的一个拟凝聚层 $\widetilde{M}$ 联系起来，使得

$$\Gamma(D(s), \widetilde{M}) = M[S^{-1}].$$

局部化也可看作是一个运算，它使得在 A 模的范畴内用 $s \in S$ 乘的态射成为可逆的．从这种观点出发，可以把局部化推广到任意范畴(见**范畴的局部化**(localization in categories))．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

В. И. Данилов 撰 裴定一 译 赵春来 校

范畴中的局部化 [localization in categories; локализация в категориях]

与特殊的根子范畴相联系的一种构造；它首先出现在 Abel 范畴中用环上模范畴的术语对所谓 **Grothendieck 范畴**(Grothendieck category)所作的描述中．设 $\mathfrak{A}$ 为一个 **Abel 范畴**(Abelian category)．$\mathfrak{A}$ 的一个满子范畴 $\mathfrak{A}'$ 称为**厚的**(thick)，如果它包含其对象的所有子对象与商对象，并且对于扩张是封闭的，即，在一个正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

中，$B \in \operatorname{Ob} \mathfrak{A}'$，当且仅当 A, $C \in \operatorname{Ob} \mathfrak{A}'$．商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ 用下述方法来构造．设 $(R, \mu]$ 为直和 $A \oplus B(\pi_1, \pi_2)$ 的一个子对象，π_1 与 π_2 为投射，假定正方形

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi_2 \mu} & B \\ {\scriptstyle \pi_1 \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C \end{array}$$

为一个推出．子对象 $(R, \mu]$ 称为一个 $\mathfrak{A}'$ 子对象，如果 $\operatorname{Coker}\pi_1\mu$, $\operatorname{Ker}\beta\in\operatorname{Ob}\mathfrak{A}'$．两个 $\mathfrak{A}'$ 子对象是等价的，如果它们包含一个 $\mathfrak{A}'$ 子对象，由定义，集合 $H_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'}(A, B)$ 是由直和 $A\oplus B$ 的 $\mathfrak{A}'$ 子对象的等价类所组成的．在一个 Abel 范畴中，二元关系的通常合成对于上面所引进的等价性是适用的，这就使得定义商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ 成为可能．这个商范畴却是一个 Abel 范畴．一个正合函子 $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ 可以由让每一个态射 $\alpha:A\to B$ 对应它在 $A\oplus B$ 中的图来定义．一个厚的子范畴 $\mathfrak{A}'$ 称为一个局部化的子范畴（localizing subcategory），如果函子 T 有一个满且忠实的右伴随 $S:\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}$．一个局部化子范畴总是某个遗传根的所有根对象的子范畴．

在 Abel 群的范畴中，所有挠群的子范畴都是局部化的子范畴．任何模范畴对其一个局部化子范畴的商范畴是一个 Grothendieck 范畴．反之，任何 Grothendieck 范畴都等价于一个适当的模范畴的商范畴．

局部化子范畴的概念也可以对非 Abel 范畴来定义（[3]）．可是，在非 Abel 的情况，通常只有很少的这种子范畴，例如，在结合环的范畴中，只有两个平凡的局部化子范畴，就是，整个范畴本身，以及只包含平凡环的满子范畴．

参考文献

[1] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[2] Gabriel, P., Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 323 – 448.

[3] Шульгейфер, Е. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 19 (1968), 271 – 301.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】“稠密子范畴”（dense subcategory）这个名词有时也用来代替“厚的子范畴”；但“稠密子范畴”有另一个，相矛盾的意义．“Serre类”（Serre class）也用来表示这个概念，特别是被代数拓扑学家们使用（见[A1]）．一个厚的子范畴 $\mathfrak{A}'$ 是一个局部化的子范畴当且仅当：1）$\mathfrak{A}$ 的每一个对象都在 $\mathfrak{A}'$ 中有一个极大的子对象；2）给定一个对象 A 使这个极大的子对象为 0，则存在一个单态射 $A\to B$，这里的 B 有这样的性质：在商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ 中每一个态射 $C\to B$ 都是从 $\mathfrak{A}$ 中唯一的态射 $C\to B$ 引导来的（见[A2]）．商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ 也可以定义成分式范畴（category of fractions）（见[A3]），其中形式地添加了 $\mathfrak{A}$ 中这些态射的逆，它们都是“模 $\mathfrak{A}'$ 同构”的，其意思是它们的核与余核都属于 $\mathfrak{A}'$．所有模 $\mathfrak{A}'$ 同构的类既允许有左分式的运算也允许有右分式的运算；这对应于这样的事实，典范函子 $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ 是正合的．

模范畴的局部化已经很广泛地用于非-交换环论中，并且也企图用于发展一种“非-交换的代数几何学”；见[A4]，[A5]．

在非 Abel 范畴中，一个范畴 C 的局部化一般都用于指一个函子 $T:C\to D$，它是正合的（即，保持有限极限与余极限）且有一个满与忠实的右伴随 S；等价地，C 的局部化可以认同为 C 的那些（满的、自反的）子范畴，它们都是上述右伴随的象．这样的局部化不能像 Abel 的情况那样，由局部化子范畴来分类，但在许多有兴趣的特殊情形，曾经发展了各种技巧来掌握它们．例如，“小 Giraud 定理”（little Giraud theorem）就用 C 上 Grothendieck 拓扑来将一个函子范畴 $[C^{op}, \mathrm{Set}]$ 的局部化分类（[A6]）；更一般地，一个任意的（初等的）**拓扑斯**（topos）E 的局部化是由 E 中的 Lawvere-Tierney 拓扑来分类的（[A7]）．（也见[A8]，Serre 类的概念在拓扑斯理论上的类似．）对于代数范畴（与更一般的局部可表现范畴）的局部化，见[A9] 与[A10]．[A11] 研究了一个给定的范畴的诸局部化的有序集；结果是，在合理的假定下，这个集合是一个满足一个无限分配律的**完全格**（complete lattice）．

参考文献

[A1] Serre, J.P., Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Ann. of Math.*, **58** (1953), 258 – 294.

[A2] Popescu, N., Abelian categories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973.

[A3] Gabriel, P. and Zisman, M., Categories of fractions and homotopy theory, Springer, 1967.

[A4] Golan, J. S., Localizations of noncommutative rings, M. Dekker, 1975.

[A5] Golan, J. S., Torsion theories, Longman, 1986.

[A6] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L., Théorie des topos (SGA 4, Vol. I), Lecture notes in math., 269, Springer, 1972.

[A7] Johnstone, P. T., Topos theory, Acad. Press, 1977.

[A8] Adelman, M. and Johnstone, P. T., Serre classes for toposes, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **25** (1982), 103 – 115.

[A9] Borceux, F. and Van den Bossche, G., Algebra in a localic topos with applications to ring theory, Lecture notes in math., 1038, Springer, 1983.

[A10] Borceux, F. and Veit, B., On the left exactness of orthogonal reflections, *J. Pure Appl. Alg.*, **49** (1987), 33 – 42.

[A11] Borceux, F. and Kelly, G. M., On locales of localizations, *J. Pure Appl. Alg.*, **46** (1987), 1 – 34.

周伯埙 译

局部化原理[localization principle; локализации принцип]

对于系数趋向于零的任何**三角级数**（trigonometric series），这个级数在某一点上是收敛的还是发散的，取决于所谓 Riemann 函数（Riemann function）在这一

点的领域内的性状.

给定的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

的 Riemann 函数 F 是把这个级数积分两次的结果，即

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.$$

局部化原理可以推广到系数不趋向于零的级数的情况 (见 [2]).

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1, Cambridge Univ. Press, 1988.

М. И. Войцеховский 撰 张鸿林 译

局部紧除环 [**locally compact skew-field; локально компактное тело**]

一个集合 K，其上既有一个**除环** (skew-field) 的代数结构，又有一个局部紧的拓扑 (见**局部紧空间** (locally compact space)). 要求它的代数运算，即加法、乘法以及向负元和逆元的转移 (后者仅对非零元的集合 $K^*=K\backslash 0$ 有定义)，在给定的拓扑下是连续的. 因为任意除环相对离散拓扑是局部紧的，所以假定 K 的拓扑不是离散的.

对局部紧除环的研究基于局部紧群 K_+ (体的加群) 上的 **Haar 测度** (Haar measure) 的存在性. 设 μ 是 K_+ 上的一个 Haar 测度，且 $S\subset K$ 是 K 中一个具有正测度的紧子集，则公式

$$\operatorname{mod}_K(a)=\frac{\mu(aS)}{\mu(S)}$$

定义了乘法群 K^* 到正实数的乘法群 $\mathbf{R}_+^*$ 的一个同态 (模). 按定义，令 $\operatorname{mod}_K(0)=0$.

"模" 函数满足不等式

$$\operatorname{mod}_K(a+b)\leqslant A\sup(\operatorname{mod}_K(a),\operatorname{mod}_K(b)),$$

其中 $A>0$ 为常数. 若这个不等式当 $A=1$ 时成立，则称 K 为非 Archimedes 的 (non-Archimedean)，或超度量的 (ultrametric)，否则称 K 为 Archimedes 除环 (Archimedean skew-field). 一个除环 K 是 Archimedes 的，当且仅当它是连通的. 任何 Archimedes 除环都同构于实数域、复数域或四元数除环.

超度量除环 K 是全不连通的 (见**全不连通空间** (totally-disconnected space)). "模" 函数决定了 K 上的一个非 Archimedes 度量. 任一这样的除环都是关于某素数 p 的有理 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$ (K 的特征为 0 时) 或 p 个元素的域 $\mathbf{F}_p$ 上的**形式幂级数** (formal power series) 域 $\mathbf{F}_p((X))$ 的有限扩张 (K 的特征为 p 时). 域 $\mathbf{Q}_p$ (相应地，域 $\mathbf{F}_p((X))$) 位于 K 的中心. 在上述两种情况下，K 分别称为 p 除环 (p-skew-field) 或 p 域 (p-field).

超度量除环 K 包含一个由条件

$$R=\{a\in K:\ \operatorname{mod}_K(a)\leqslant 1\}$$

定义的唯一的极大子环 R，这个环是**局部环** (local ring). 它的极大理想 P 由条件

$$P=\{a\in K:\ \operatorname{mod}_K(a)<1\}$$

决定，R 中具有模为 1 的元素都是可逆的. P 是**主理想** (principal ideal)，剩余类域 R/P 是特征为 p 的有限域.

当 p 除环非交换时，它在其中心 K_0 上的维数是 n^2，在 K_0 上的分歧指数为 n. 同时，存在一个中间域 K_1，使 $K\supset K_1\supset K_0$，K_1 是 K_0 的一个次数为 n 的非分歧扩张，并且 K_1 在 K_0 上的所有自同构均由 K 的内自同构诱导出来.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[2] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

[3] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967 - 1971 (译自德文).

[4] Cassels, J. W. S. and Frölich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[5] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (英译本: Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).

Л. В. Кузьмин 撰 裴定一 译 赵春来 校

局部紧空间 [**locally compact space; локально бикомпактное пространство**]

一个拓扑空间，其中每一点都有一个具有紧闭包的邻域. 局部紧的 Hausdorff 空间 X 是**完全正则空间** (completely-regular space)，它所有的 Hausdorff **紧化** (compactification) 构成的半序集是一个完全格. 其极小元是 **Александров 紧化** (Aleksandrov compactification) αX. 局部紧的 Hausdorff 空间类与 Hausdorff 紧统的开子集类一致. 局部紧的 Hausdorff 空间 X 在任何 Hausdorff 紧化 bX 中的补集 $bX\backslash X$ 是一个 Hausdorff 紧统. 任何连通的仿紧且局部紧的空间都是可数多个紧子集之和.

局部紧空间最重要的例子是 n 维 Euclid 空间. 非离散的完全赋范除环 k 上的 Hausdorff 拓扑**向量空间** (vector space) E (不简化成零元) 是局部紧空间的充要条件是: k 是局部紧的，而 E 是 k 上的有限维空间.

В. В. Федорчук 撰

【补注】 拓扑空间的乘积 $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ 是局部紧空间的充要条件是：各个坐标空间 X_{α} 是局部紧空间，并且除有限多个外全都是紧空间.

参考文献

[A1] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955, 146 - 147(中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).
胡师度、白苏华 译

局部连通连续统 [locally connected continuum; локально связный континуум]

一个连续统，它是**局部连通空间**(locally connected space). 局部连通连续统的例子有 n 维立方体，$n=0, 1, \cdots$, **Hilbert 立方体**(Hilbert cube)，和所有 **Тихонов 立方体**(Tikhonov cube). 函数

$$y=\sin\frac{1}{x}, \quad 0<x\leqslant 1,$$

的图象和区间 $I=\{(0, y): -1\leqslant y\leqslant 1\}$ 的并集给出了(在 I 的点上)不是局部连通的连续统的例子. 可度量化连续统是局部连通的，当且仅当它是 Jordan 意义下的曲线(见**线(曲线)**(line(curve))). 任何可度量化局部连通连续统都是道路连通的(见**道路连通空间**(path-connected space)). 此外，这种连续统 K 的任意不同两点都包含于 K 中一条简单弧上.

Б. А. Пасынков 撰 白苏华、胡师度 译

局部连通空间 [locally connected space; локально связное пространство]

一个拓扑空间 X，对它的任意点 x 和任意邻域 O_x，存在一个 x 的较小的连通邻域 U_x. 局部连通空间的任何开子集都是局部连通的. 局部连通空间的任何连通分支都是开且闭的. 空间 X 是局部连通的，当且仅当对 X 的任意子集族 $\{A_t\}$ 有

$$\partial\bigcup_t A_t\subset\overline{\bigcup_t\partial A_t},$$

这里，∂B 是 B 的边界、$\overline{B}$ 是 B 的闭包. 任何**局部道路连通空间**(locally path-connected space)都是局部连通的. 此论断的部分逆命题如下：任何局部连通的完全度量空间都是局部道路连通的(Mazurkiewicz-Moore-Menger 定理(Mazurkiewicz-Moore-Menger theorem)).

С. А. Богатый 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955, p. 61(中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).
[A2] Čech, E., Topological spaces, Interscience, 1966, §21 B.
白苏华、胡师度 译

局部凸格 [locally convex lattice; локально выпуклая решетка]

同时是**向量格**(vector lattice)的实**拓扑向量空间**(topological vector space) E，其拓扑是**局部凸拓扑**(locally convex topology)，而 $E\times E$ 到 E 中由下式

$$(x, y)\to\sup(x, y), (x, y)\to\inf(x, y),$$
$$x, y\in E,$$

定义的映射是连续的. 局部格理论中的一般问题如下：研究拓扑性质与其他性质之间的联系；特别是，在局部凸格中带与正锥的拓扑性质以及在局部凸格中完全性的格性质与拓扑性质之间的联系. 研究局部凸格的强对偶的性质和局部格 E 嵌入到它的第二对偶的性质. 建立局部凸格上正泛函和局部凸格间线性映射的扩张理论.

局部凸格最重要的例子是 **Banach 格**(Banach lattice).

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функцональный анализ, 2 изд., М., 1977(中译本：Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982).
[2] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.
[3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.
А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, Ⅰ, North-Holland, 1971.
[A2] Zaanen, A. C., Riesz space, Ⅱ, North-Holland, 1983.
[A3] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Springer, 1974.
葛显良 译

局部凸空间 [locally convex space; локально выпуклое пространство]

一种实或复数域上的 Hausdorff **拓扑向量空间**(topological vector space)，其中零元素的任一邻域包含零元素的一个凸邻域；换言之，拓扑向量空间 E 是局部凸空间，当且仅当 E 的拓扑是 Hausdorff **局部凸拓扑**(locally convex topology). 局部凸空间的例子(而且也正是在理论上和应用上重要的几类局部凸空间)有**赋范空间**(normed space)，**可数赋范空间**(countably-normed space)和 **Fréchet 空间**(Fréchet space).

从相应的局部凸拓扑的性质立即推出局部凸空间的很多一般性质；特别地，局部凸空间的子空间和 Hausdorff 商空间，以及局部凸空间族的乘积空间也是局部凸空间. 设 A 是指标的上有向集且 $\{E_{\alpha}: \alpha\in A\}$ 是(同一域上)局部凸空间族，带有拓扑 $\{\tau_{\alpha}:$

$\alpha \in A\}$；设对任一对 (α, β)，$\alpha \leqslant \beta$、$\alpha, \beta \in A$、已定义一个连续线性映射 $g_{\alpha\beta}: E_\beta \to E_\alpha$；设 E 是积 $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ 的子空间，其中元素 $x=(x_\alpha)$ 对所有的 $\alpha \leqslant \beta$ 满足关系式 $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$，则空间 E 称为族 $\{E_\alpha\}$ 关于 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 的**投射极限**（projective limit），且表成 $\lim g_{\alpha\beta} E_\beta$ 或 $\lim_{\leftarrow} E_\alpha$；$E$ 的拓扑是关于族 $\{E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha\}$ 的投射拓扑，这里 f_α 是投射 $(\prod_{\beta\in A} E_\beta) \to E_\alpha$ 到子空间 E 的限制．另一方面，假设对任一对 (α, β)，$\alpha \leqslant \beta$，$\alpha, \beta \in A$、已定义一个连续线性映射 $h_{\alpha\beta}: E_\alpha \to E_\beta$；设 g_α，$\alpha \in A$ 是 E_α 到直和 $\oplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ 的典范嵌入，且设 H 是所有空间 E_α 在映射 $g_\alpha - g_\beta \circ h_{\alpha\beta}$ 下的象生成的 $\oplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ 的子空间，这里 (α, β) 取遍 $A \times A$ 中满足 $\alpha \leqslant \beta$ 的所有对．如果 H 在 $\oplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ 中是闭的，则局部凸空间 $(\oplus_{\alpha\in A} E_\alpha)/H$ 称为族 $\{E_\alpha\}$ 关于 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 的**归纳极限**（inductive limit），且表成 $\lim h_{\alpha\beta} E_\alpha$ 或 $\lim_{\rightarrow} E_\alpha$．如果 $\{E_\alpha\}$ 是向量空间 E 的子空间族，按包含关系有序，且对 $\alpha \leqslant \beta$，拓扑 τ_β 在 E_α 上诱导出 τ_α，则族 $\{E_\alpha\}$ 的归纳极限称为**严格的**（strict）．局部凸空间可度量化，当且仅当它的拓扑是由一**半范数**（semi-norm）序列诱导的；局部凸空间可赋范，当且仅当它包含一有界开集（Колмогоров **定理**（Kolmogorov theorem））．局部凸空间的任一有限维子空间有闭补子空间．局部凸空间的完全化是局部凸空间，且任一完全局部凸空间同构于一族 Banach 空间的投射极限．从一拓扑向量空间 F 到一局部凸空间 E 中的连续线性映射的空间 $L(F, E)$ 关于一个给定的 F 的有界集族 γ，当其并的线性包在 F 中为稠时，自然地赋予一个局部凸空间的结构（亦见**算子拓扑**（operator topology））．相应的拓扑中，零点的一个邻域基是集族 $\{f: f\in L(F, E), f(s) \subset V\}$，这里 s 取遍 γ 而 V 取遍 E 中零的一个邻域基．

局部凸空间理论中的中心课题（也是拓扑向量空间理论中的中心课题）是研究这种空间与其对偶或**伴随空间**（adjoint space）的关系．对局部凸空间，这种**对偶性**（duality）理论的基础是 **Hahn-Banach 定理**（Hahn-Banach theorem）、特别地，由此可推出，如果 E 是局空间，则其对偶 E' 分离 E 的点．

局部凸空间理论中的一个基本的部分是局部凸空间中的紧凸集理论．局部凸空间 E 中准紧集 K 的凸包 $\operatorname{co} K$ 和凸平衡包（亦见**平衡集**（balanced set））是准紧的；如果 E 也是拟完全的，则 K 的闭凸包 $\overline{\operatorname{co}}\, K$ 和它的闭凸平衡包是紧的．如果 A 和 K 是局部凸空间中不相交非空凸子集，当 A 是闭集而 K 是紧集时，则存在 E 上连续实**线性泛函**（linear functional）f．使得对某实数 α，对所有的 $x \in A$，$y \in K$，不等式 $f(x) > \alpha$，$f(y) < \alpha$ 分别地成立．特别地，局部凸空间中非空闭凸集 A 是所有包含它的闭半空间的交．一个闭凸集 A 的非空闭凸子集 B 称为 A 的**面**（face）或**端子集**（extremal subset），如果 A 中闭线段有内点在 B 中则完全落在 B 中；一个点 $x \in A$ 称为 A 的**端点**（extreme point），如果集合 $\{x\}$ 是 A 的面．如果 K 是局部凸空间 E 中紧凸集且 $\partial_e K$ 是它的端点的集合，则以下条件对于集合 $X \subset K$ 是等价的：1) $\overline{\operatorname{co}}\, X = K$；2) $\bar{X} \supset \partial_e K$；和 3) 对 E 上任意的连续实线性泛函 f，$\sup f(X) = \sup f(K)$．特别地，$\overline{\operatorname{co}}\, \partial_e K = K$（Крейн-Мильман **定理**（Kreĭn-Mil'man theorem））．集合 $\partial_e K$ 按诱导拓扑是 **Baire 空间**（Baire space）（即任一在 $\partial_e K$ 中稠密的 $\partial_e K$ 的开子集序列的交在 $\partial_e K$ 中稠密），且对任一 $x \in K$、存在 K 上概率测度 μ，使得 $x = \int_K d\mu(y)$ 而在所有与 $\partial_e K$ 不相交的 Baire 子集 $X \subset K$ 上测度 μ 为 0（如果 K 可度量化，则 $\mu(\partial_e K) = 1$）（Choquet **定理**（Choquet theorem））．局部凸空间中紧凸集 K 到自身中的任意连续映射有不动点（Schauder-Тихонов **定理**（Schauder-Tikhonov theorem））；K 到自身上的连续仿射变换的交换族（和 K 到自身上的连续仿射变换的等度连续群）有不动点（Марков-**角谷靜夫定理**（Markov-Kakutani theorem））．

局部凸空间理论的一个十分重要的分支是局部凸空间上线性算子理论；特别地，紧（又称完全连续）、核型和 Fredholm 算子（见**紧算子**（compact operator）；**Fredholm 算子**（Fredholm operator）；**核型算子**（nuclear operator））的理论．在局部凸空间理论中，闭图象和开映射定理有深远的推广．局部凸空间 E 称为有**逼近性质**（approximation property），如果 E 到自身中的恒同映射能用 E 到自身中的有限秩连续线性映射在 E 的准紧集上一致逼近．如果一局部凸空间有逼近性质，则它有另外若干值得注意的性质．特别地，在这样的空间中任一核型算子有一唯一定义的**迹**（trace）．存在无逼近性质的可分 Banach 空间，但有 Schauder 基的 Banach 空间和 Hilbert 空间的投射极限的子空间必有逼近性质．这个性质的某些变形在完全连续和 Fredholm 算子理论中是值得注意的．

在局部凸空间理论中，与局部凸空间及其映射的范畴以及此范畴的某些子范畴的研究相联系的同调代数的方法起着显著的作用．特别地，同调方法使有可能解决许多与线性映射的扩张相联系的问题以及与到一给定空间的这样的线性映射的存在性相联系的问题，它把一个映射提升到这个空间的商空间，也使有可能研究与空间 E 和 F 的完全性有联系的商空间 E/F 的完全性性质．

局部凸空间理论中其他的重要问题是：取值在局部凸空间（通常为桶型空间）中的向量值函数的积分

理论；局部凸空间之间的非线性映射的微分理论；局部凸空间的拓扑张量积理论以及 Fredholm 算子和核型算子理论．有很多特定类型局部凸空间的详细理论，如**桶型空间**（barrelled space），闭空间（在其上任一在有界集上有界的半范数是连续的），自反和半自反空间（各自到强第二对偶中的典范映射分别是拓扑同构或线性同构），**核型空间**（nuclear space）等等．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, **5** (1935), 29 – 33.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8 (译自法文).

[4] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[5] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1973.

[6] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[7] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972 (译自德文).

[8] Robertson, A. P. and Robertson, W. J., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1973.

[9] Phelps, R. R., Lectures on Choquet's theorem, v. Nostrand, 1966.

[10] Enflo, P., A counterexample to the approxiamation problem in Banach spaces, *Acta Math.*, **130** (1973), 309 – 317.

[11] Frölicher, A. and Bucher, W., Calculus in vector spaces without norm, Lecture notes in math., 30, Springer, 1966.

[12] Паламодов, В. П., 《Успехи Матем. Наук》, **26** (1971), 1, 3 – 65.

А. И. Штерн 撰

【补注】 局部凸空间在遍及分析学的诸领域中大量出现，如测度和积分理论，单变量、多变量或无穷多变量的复分析，偏微分方程，积分方程，逼近论，算子和谱理论，以及概率论．许多序列空间，全纯函数、连续函数或可测函数的空间，测度空间，检验函数和广义函数的空间有自然的局部凸拓扑．

强有力的局部凸空间的对偶理论提供了一个重要工具，把关于空间（或关于局部凸空间之间的线性算子）的问题变成关于线性型的问题．对偶理论的基本结果包括双极定理（bipolar theorem）（**Hahn-Banach 定理**（Hahn-Banach theorem）的一种形式），Alaoğlu-Bourbaki 定理（Alaoğlu-Bourbaki theorem）（关于对偶中的等度连续集）和 Mackey-Arens 定理（Mackey-Arens theorem）（刻画与给定的对偶对相容的拓扑的特征）．借助于对偶理论，能研究线性算子的满射性质和连续线性右逆的存在性（引向偏微分方程的解算子）；想到这些应用，В. П. Паламодов 发展了同调方法．拓扑和有界型性（bornology）之间存在抽象的对偶性，而等度连续集提供了紧论（compactology）的一个重要例子．

局部凸空间的经典结构理论的一部分可以看成（基本的）**Banach 空间**（Banach space）理论及其主要定理（它们通常是 Hahn-Banach 定理和 Baire 范畴定理（见 **Baire 定理**（Baire theorem））的推论）的推广．这方面的发展导致引入一些特殊类型的局部凸空间，其中最重要的类是：Fréchet 空间和（DF）空间，桶型空间和有界型空间，自反空间，（LF）空间（即 Fréchet 空间的可数归纳极限），核型空间，Schwartz 空间和 Montel 空间．

拓扑张量积是作为一种工具引进，用以研究算子空间和矢量值函数与矢量值广义函数的空间．A. Grothendiek [A4] 在这方面探讨了核型空间并提出了逼近问题，它已被 P. Enflo [10] 解决，他给出了无逼近性质的 Banach 空间的第一个例子．此后，A. Szankowski 证明了一个 Hilbert 空间上所有有界线性算子的空间无逼近性质．

除了紧凸集外（Choquet 理论在抽象位势论中有重要应用），也对弱紧集作了研究（见[A3]）．

参考文献[A5] – [A8] 是关于局部凸空间和对偶理论的一般性专著．[A1]，[A9] 和[A10] 专用于更特定的论题，而[A2] 是关于无穷维全纯论及其与局部凸空间的联系方面的专著．

参考文献

[A1] DeWilde, M., Closed graph theorems and webbed spaces, Pitman, 1978.

[A2] Dineen, S., Complex analysis in locally convex spaces, North-Holland, 1981.

[A3] Floret, K., Weakly compact sets, Lecture notes in math., 801, Springer.

[A4] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer. Math. Soc., 1955.

[A5] Grothendieck, A., Topological vector spaces, Gordon & Breach, 1973 (译自法文).

[A6] Horváth, J., Topological vector spaces and distributions, 1, Addison-Wesley, 1966.

[A7] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981 (译自德文).

[A8] Köthe, G., Topological vector spaces, 1-2, Springer, 1969 – 1979.

[A9] Pérez Carreras, P. and Bonet, J., Barrelled locally convex spaces, North-Holland, 1987.

[A10] Schmets, J., Espaces de fonctions continues, Lecture notes in math., 519, Springer, 1976.

[A11] Choquet, G., Lectures on analysis, 1 – 3, Benjamin, 1969.

葛显良 译 鲁世杰 校

局部凸拓扑 [**locally convex topology**; **локально выпуклая топология**]

实或复**拓扑向量空间**(topological vector space) E 上这样的(不必是 Hausdorff 的)拓扑 τ，具有凸集组成的基，且 E 中线性运算关于 τ 是连续的. 向量空间 E 上的局部凸拓扑可解析地由一族**半范数**(semi-norm) $\{p_\alpha: \alpha \in A\}$ 定义，此拓扑具有有形如 $\{n^{-1}U\}$ 的集合组成的零点的邻域基，这里 n 遍及自然数而 U 是形如 $\{x \in E: p_\alpha(x) \leqslant 1\}$ $(\alpha \in A)$ 的集合的所有有限交；这样的一族半范数称为 τ 的生成子(generator)或者说生成 τ. 由给定的局部凸拓扑在向量子空间上诱导的拓扑、在商空间上的商拓扑和局部凸拓扑的积拓扑也都是局部凸拓扑. 拓扑向量空间 E 上的一个拓扑 τ 是局部凸拓扑，当且仅当 τ 是**伴随空间**(adjoint space) E^* 的等度连续子集上的**一致收敛**(uniform convergence)拓扑.

设 E 和 $E_\alpha, \alpha \in A$，是 **R** 或 **C** 上向量空间，设 f_α(分别地 g_α)是 E 到 E_α 中(分别地，E_α 到 E 中)的线性映射且 τ_α 是 $E_\alpha(\alpha \in A)$ 上局部凸拓扑. E 上使所有 f_α 是 E 到 (E_α, τ_α) 中连续映射的最弱拓扑称为 E 上关于族 $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha): \alpha \in A\}$ 的投射拓扑(projective topology). 投射拓扑是局部凸拓扑. 特别地，在一给定向量空间上一族局部凸拓扑的最小上界，子空间上的诱导拓扑和局部凸拓扑的乘积拓扑是投射拓扑(因而是局部凸拓扑). E 中使所有 $g_\alpha, \alpha \in A$，是 (E_α, τ_α) 到 E 中连续映射的最强局部凸拓扑称为 E 上关于族 $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha): \alpha \in A\}$ 的归纳拓扑(inductive topology). 特别地，给定局部凸拓扑的商拓扑和局部凸拓扑的直和拓扑是归纳拓扑(因而是局部凸拓扑). 投射和归纳局部凸拓扑概念使得有可能在局部凸空间及其线性映射的范畴中定义投射极限和归纳极限运算.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977(译自法文).

[2] Schaefer, H. H., Topological vector space, Macmillan, 1966.

[3] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977(中译本: Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析, 上、下册, 高等教育出版社, 1982).

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Köthe, G., Topological vector space, 1, Springer, 1969.

[A2] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

葛显良 译 鲁世杰 校

局部有限代数 [**locally finite algebra**; **локально конечная алгебра**]

其每个具有有限多生成元的子代数均在其基础域上有有限维数的代数.

将局部有限代数表作有限维子代数升链的并集是方便的. 局部有限代数类关于取同态象和转移到子代数都是封闭的. 如果限于考虑结合代数(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))，则由局部有限代数通过局部有限代数的扩张还是局部有限代数. 因而，在任一代数中，所有局部有限理想之和是一个包含全部局部有限理想的最大局部有限理想，被称为局部有限根(locally finite radical).

在结合的情形下，任一局部有限代数都是代数的(见**代数的代数**(algebraic algebra)). 反之则未必(见[6]). 然而，满足多项式恒等式的代数的代数是局部有限的. 代数的可除代数是否必为局部有限的仍不清楚(1989). 有一个猜测: 有限定义的代数的代数是有限维的. 局部有限的结合代数的 Jacobson 根与其上诣零根重合. 局部有限的 Jordan 代数的 Jacobson 根也是一个诣零理想. 特征非 2 域上有界指数(所有元素的极小零化多项式的次数一致有界)的每个交错或特殊 Jordan 的代数的代数(见 **Jordan 代数**(Jordan algebra), **代数的代数**(algebraic algebra))是局部有限的. 可解的代数的 Lie 代数(所有元素的内导子都是代数的)是局部有限的. 有界指数的代数的 Lie 代数(见**代数的 Lie 代数**(Lie algebra, algebraic))是局部有限的.

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[3] Ширшов, А. И., 《Матем. сб.》, **41** (1957), 3, 381-394.

[4] McCrimmon, K., The radical of a Jordan algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **62** (1969), 671-678.

[5] Лю Шао-сюэ, 《Матем. сб.》, **39** (1956), 3, 385-396.

[6] Голод, Е. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 273-276.

В. Н. Латышев 撰

【译注】

参考文献

[B1] 刘绍学, 一类局部有限代数的 Wedderburn 结构定理, 数学学报, **23** (1980), 942-952.

郭元春 译 牛凤文 校

局部有限覆盖 [**locally finite covering**; **локально конечное покрытие**]

由拓扑空间的子集组成的该空间的一个覆盖(见**覆盖(集合的)**(covering (of a set)))，使得每个点都有一个邻域，只与该覆盖的有限多个元素相交. 从直线的每个开覆盖中并不是都能选出一个局部有限覆盖: 这只须考虑长度无限增大的、单调的区间序列即知. 原来，从空间的任何开覆盖中选出一个局部有限覆盖的可能性等价于空间的**紧性**(compactness). 局部有限这一概念与加细的概念结合起来便具有崭新的意义. Stone

定理(Stone theorem)说，任意**度量空间**(metric space)的任何开覆盖均可加细为一个局部有限覆盖．具有上述性质的 Hausdorff 空间就称为**仿紧空间**(paracompact space)．局部有限覆盖之所以重要，不仅是因为用来定义仿紧性．除此以外，局部有限这个要求，在维数论的某些结构以及在各种加法定理的陈述与证明中，都起着本质的作用．**正则空间**(regular space)中存在一个由可数多个局部有限开覆盖合并而成的基这一条件等价于空间的可度量化．**正规空间**(normal space)的局部有限开覆盖可以用来构造该空间上从属于该覆盖的单位分划，特别是，利用单位分划可以构造把流形映入 Euclid 空间的标准映射．覆盖的局部有限性这一要求与覆盖的开性条件不必有什么联系．空间的一个覆盖的局部有限性自然蕴涵该覆盖中有"充分多的"集合，其性质与开集相近．如果正则空间的任何开覆盖均可加细为局部有限覆盖，则该空间是仿紧空间．也可以考虑空间中的集族，不必是空间的覆盖，其局部有限性同样定义．一个特例是离散集族(discrete families of sets)：即是整个空间中每一点都有一个邻域，至多与该族中一个元素相交．离散族在研究空间中的分离性时很重要．例如，集体正规空间的特性是：任何离散的集族都可以由离散的邻域族分离开．把局部有限的集族组合扩充为局部有限的开集族这个问题与上述条件有直接的联系．

参考文献

[1] Engelking, R., General topology, PWN, 1977.

[2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974

[3] Alexandroff, P., Sur les ensembles de la première classe et les espaces abstraits, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **178** (1924), 185 − 187.

[4] Stone, A. H., Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 977 − 982.

[5] Michael, E. A., A note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 831 − 838.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 空间 X 上的单位分划(partition of unity)是指一族连续函数 $\{f_i\}_i$，把 X 映入 $[0,1]$、使得对所有的 $x\in X$，有 $\sum_i f_i(x)=1$．单位分划称为从属于覆盖 $\mathfrak{U}$，如果开覆盖 $\{f_i^{-1}[(0,1]]\}_i$ 是 $\mathfrak{U}$ 的加细．

一个(局部有限的)(开)集族 $\{U_i\}_i$ 是(局部有限的)集族 $\{F_i\}_i$ 的组合扩张(combinatorial extension)，如果对所有的 i 有 $F_i\subseteq U_i$，并且对任何指标集 I，$\bigcap_{i\in I}F_i=\varnothing$ 蕴涵 $\bigcap_{i\in I}U_i=\varnothing$．

参考文献

[A1] Burke, D. K., Covering properties, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.): Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, Chapt 9, 347 − 422

【译注】 单位分划的定义通常如下：一族连续函数 $\{f_\alpha|f_\alpha:X\to[0,1],\ \alpha\in A\}$ 称为 X 上的单位分划，如果

(1) $\left\{\overline{\{x\in X|f_\alpha(x)\neq 0\}}\,\middle|\,\alpha\in A\right\}$ 是 X 的一个局部有限的闭覆盖．

(2) 对所有的 $x\in X$ 有 $\sum_{\alpha\in A}f_\alpha(x)=1$．

条件(1)保证 $\sum f_\alpha(x)$ 是有限和． 胡师度、白苏华 译

局部有限集族 [**locally finite family of sets; локально конечное семейство множеств**]，拓扑空间中的

一个集族 F，使得空间每一点都有一个邻域只和 F 的有限多个元素相交．局部有限的开集族与局部有限的开覆盖都很重要．例如，**正则空间**(regular space)可度量化的充要条件是：该空间有一个基，可以分解为可数多个局部有限族．**度量空间**(metric space)的任何开覆盖均可加细为一个局部有限开覆盖．具有这一性质的空间称为**仿紧空间**(paracompact space)．

А. В. Архангельский 撰

【补注】 亦见**局部有限覆盖**(locally finite covering)．

胡师度、白苏华 译

局部有限群 [**locally finite group; локально конечная группа**]

每一有限生成子群皆有限的群．任意局部有限群是一个扭群(见**周期群**(periodic group))，但反之未必成立(见 **Burnside 问题**(Burnside problem))．一个局部有限群被另一局部有限群的扩张仍是局部有限群．满足子群(甚至是 Abel 子群)的极小条件的每个局部有限群均包含一个指数有限的 Abel 子群([3])(见**具有有限性条件的群**(group with a finiteness condition))．一个其 Abel 子群具有有限秩(见**群的秩**(rank of a group))的局部有限群本身亦具有有限秩，且包含一个有限指数的局部可解子群(见**局部可解群**(locally solvable group))．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本：А. Г. 库洛什，群论，上、下，高等教育出版社，1987，1982)．

[2] Черников, С. Н., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 45 − 96.

[3] Шунков, В. П., 《Алгебра и логика》, **9** (1970), 5, 579 − 615.

[4] Шунков, В. П., 《Алгебра и логика》, **10** (1971), 2, 199 − 225.

А. Л. Шмелькин 撰 王 杰 译 石生明 校

局部有限半群 [**locally finite semi-group; локально конечная полугруппа**]

每一有限生成子半群皆有限的半群．局部有限半群是一个**周期半群**(periodic semi-group)(亦称扭半

群). 反之未必成立: 甚至存在不是局部有限的扭群(见 **Burnside 问题**(Burnside problem)). 早在群的 Burnside 问题解决之前, 在诣零半群类(见**诣零半群**(nil semi-group))等一些与群相差甚远的半群类中就构造出了非局部有限的扭半群的例子. 例如, 一个具有由 $x^3=0$ 给出的簇中的两个生成元的自由半群, 以及具有由 $x^2=0$ 给出的簇中的三个生成元的自由半群都是这样的半群. 进一步地, 对于某些类型的半群, 周期性和局部有限性条件是等价的. 一个平凡的例子是交换半群. 局部有限半群的一个带(见**半群的带**(band of semi-groups))本身也是一个局部有限半群([1]). 进一步地, 一个具有局部有限群分解的半群是一个局部有限半群. 特别地, **幂等半群**(idempotents, semi-group of)是局部有限半群([7]). 如果 n 是这样一个整数, 使得任意满足 $x^n=1$ 的群都是局部有限的, 则任意满足 $x^{n+1}=x$ 的半群都是局部有限的([6]). 具有局部有限半群分解的半群未必是局部有限半群([3]), 但如果 ρ 是半群 S 上的一个同余关系, 使得商半群 S/ρ 和每个成为子半群的 ρ 类都是局部有限的, 则 S 是一个局部有限半群(见[4], [5]); 特别地, 一个局部有限半群被另一个局部有限半群的理想扩张仍是一个局部有限半群. 如果 S 是体上矩阵的一个周期半群, 且其所有的子群都是局部有限的, 则 S 是局部有限的(见[8]). 这蕴涵着任意域上矩阵的周期半群是局部有限的.

当 S 为一个域上矩阵的周期可逆半群时, 如果其所有元素的周期(见**单演半群**(monogenic semi-group))一致有界且不能被域的特征整除, 则 S 是有限的([2]).

参考文献

[1] Шеврин, Л. Н., 《Докл. АН СССР》, **162** (1965), 4, 770 – 773.

[2] Шнеперман, Л. Б., 《Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук》, **4** (1976), 4, 22 – 28.

[3] Brown, T. C., On locally finite semigroups, *Ukr. Mat. Zh.*, **20** (1968), 6, 732–738.

[4] Brown, T. C., A semigroup union of disjoint locally finite subsemigroups which is not locally finite, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 1, 11 – 14.

[5] Brown, T. C., An interesting combinatorial method in the theory of locally finite semigroups, *Pacific J. Math.*, **36** (1971), 2, 285 – 289.

[6] Green, J. A. and Rees, D., On semi-groups in which $x^r=x$, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48** (1952), 1, 35 – 40.

[7] McLean, D., Idempotent semigroups, *Amer. Math. Monthly*, **61** (1954), 2, 110 – 113.

[8] McNaughton, R. and Zalcstein, Y., The Burnside problem for semigroups, *J. of Algebra*, **34** (1975), 2, 292 – 299.

Л. Н. Шеврин 撰 王 杰 译 石生明 校

局部平坦嵌入[**locally flat imbedding**; **локально плоское вложение**]

一个拓扑流形 $M=M^m$ 到另一个拓扑流形 $N=N^n$ 中的嵌入(见**浸入**(immersion))q, 使得对任意点 $x\in M$, 有 x 的坐标邻域 U 及 N 中点 qx 的坐标邻域 V 中的坐标卡, 在其中, q 在 U上的限制将 U 线性的映到 V. 换言之, q 在适当的坐标系统中是局部线性的. 等价地, 存在点 $x\in M$ 的邻域 U 和点 $qx\in N$ 的邻域 V, 使得偶对 (V, qU) 能被同胚地映到标准的偶对 (D^n, D^m) 或 (D^n, D_+^m), 其中 D^k 是空间 $\mathbf{R}^k$ 的中心在原点的单位球, 而 D_+^k 是该球与半空间 $x_k\geqslant 0$ 的交.

圆和弧到平面中的任何嵌入是局部平坦的; 然而, 圆或弧可以用不是局部平坦的方式嵌入 $\mathbf{R}^k (k\geqslant 3)$ 中(见**非驯嵌入**(wild imbedding); **野生球面**(wild sphere)). 任何光滑嵌入在光滑意义下是局部平坦的(那就是, 在定义中, 坐标可以选成光滑的). 一个分片线性嵌入不需要局部平坦, 不仅在分片线性意义下, 而且甚至不必在拓扑意义下; 例如, 在边界面 $\mathbf{R}^3$ 中的闭多边形纽结上的顶点在 $\mathbf{R}_+^4$ 中的锥. 当 $n\neq 4$ 和 $m\neq n-2$ 时, 对一个局部平坦的嵌入有同伦判别准则: 对每个点 $x\in M$ 及点 qx 的邻域 U, 存在邻域 $V\subset U$, 使得 $V\setminus qM$ 中的任何闭路同伦于 $U\setminus qM$ 中的零(局部单连通性). 如果 $m=n-2$, 那么这样的判别准则对 $n\neq 4$ 成立, 但实质上更加复杂. 当 $m=4$ 时, 问题尚未解决(1989). 当 $m=n-1$ 和 $m=n-2$ 时, 局部平坦嵌入有一个拓扑的**法丛**(normal bundle).

А. В. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cantrell, J. C. and Edwards, C. H., Jr. (eds.): Topology of manifolds, Markham, 1970.

薛春华 译

局部自由群[**locally free group**; **локально свободная группа**]

其每个有限生成子群皆自由的群(见**有限生成群**(finitely-generated group); **自由群**(free group)). 因此可数的局部自由群是自由子群的一个升序列之并集.

局部自由群称为具有有限秩 n, 如果其任意有限子集皆包含在一个秩 n 的自由子群中, 且 n 为满足该性质的最小整数. 局部自由群的类对于取自由积是封闭的, 而有限秩的局部自由群的自由积的秩等于各因子的秩之和.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

А. Л. Шмелькин 撰 王 杰 译 石生明 校

局部自由层 [**locally free sheaf; локально свободный пучок**]

局部同构于结构层的一些复本的直和的模层（sheaf).更精确地说，设（$X,\mathscr{O}_X$）是**戴环空间**（ringed space). $\mathscr{O}_X$上的模层 $\mathscr{S}$ 称为局部自由的（locally free),如果对每个点 $x\in X$存在一个开邻域 $U\subset X, x\in U$，使得 $\mathscr{S}$ 对 U 的限制 $\mathscr{S}|_U$ 是 $\mathscr{O}_X|_U$ 上的自由模层，也就是说它同构于由结构层 $\mathscr{O}_X|_U$ 的复本所构成的集合 $I(x)$ 的直和．如果 X 是连通的，$I(x)$是含 n个元素的有限集，那么 n 与点 x 无关，称为局部自由层 $\mathscr{S}$ 的秩．设 V是 X上秩 n 的向量丛，$\mathscr{S}$是它的截面的芽层，则 $\mathscr{S}$是 n秩局部自由层．反之，对每个 n秩局部自由层 $\mathscr{S}$，存在 X上的 n秩向量丛 V，使得 $\mathscr{S}$是 V的截面的芽层（见[1],[2]).所以在 n 秩局部自由层的同构类与 X上 n秩向量丛的同构类之间有一个自然的一一对应．

例．设 X 是 n 维光滑连通代数簇，则正则微分形式的层 Ω_X^1 是 n 秩局部自由层．

设连通**仿射概形**（affine scheme）$X=\mathrm{Spec}\,A$ 是交换环 A 的谱（见**环的谱**（spectrum of a ring)),$\mathscr{S}$是 n秩局部自由层，$M=\Gamma(X,\mathscr{S})$ 是 $\mathscr{S}$ 的整体截面的 A模，则 A 模 M 是投射的，而且映射 $\mathscr{S}\mapsto\Gamma(X,\mathscr{S})$ 建立了 n 秩局部自由层的同构等价类的集合与 n 秩投射 A 模的同构等价类集合间的一一对应关系（见[2]).

参考文献

[1] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

В. А. Исковских 撰　陈志杰 译

局部可积函数 [**locally integrable function; локально интегрируемая функция**]，在一点 M 的

在 M 的一邻域上依某种意义可积的函数．如果定义在区间 $[a, b]$ 上的实函数 f 为同区间上的实函数 F 的逐点有限导数，则 f 在 $[a, b]$ 中一个处处稠密的开集的每点局部 Lebesgue 可积．在二维情形（见[2]）下，存在定义于正方形 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上的实函数 f，它是 F 依任意次序的逐点有限混合导数 $\partial^2F/\partial x\partial y=\partial^2F/\partial y\partial x=f(x, y)$，但在正方形的任一点不是局部 Lebesgue 可积的．

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

[2] Толстов, Г. П.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **35** (1950), 1 − 101.

И. А. Виноградова 撰　郑维行 译　沈祖和 校

局部幂零代数 [**locally nilpotent algebra; локально нильпотентная алгебра**]

其任一有限生成子代数均为幂零的（见**幂零代数**（nilpotent algebra)；**有限生成群**（finitely-generated group))．将局部幂零代数表作幂零子代数升链的并集是方便的．局部幂零的**幂结合代数**（algebra with associative powers）是**诣零代数**（nil algebra)．局部幂零 Lie 代数是 **Engel 代数**（Engel algebra)．局部幂零代数类关于取同态象和转移到子代数都是封闭的．

在结合代数情形下，由局部幂零代数通过局部幂零代数的扩张还是局部幂零代数．从而，一个结合代数的全部局部幂零理想之和就是最大局部幂零理想，包含全部局部幂零理想；它被称为 Левицкий 根 (Levitskiĭ radical)．可以在有界指数的 Engel Lie代数中定义与 Левицкий 根类似的概念．局部幂零代数不能是单的(见**单代数**(simple algebra))．

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[3] Кострикин, А. И.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **21** (1957), 4, 515−540.

В. Н. Латышев 撰　郭元春 译　牛凤文 校

局部幂零群 [**locally nilpotent group; локально нильпотентная группа**]

其每个有限生成子群皆幂零的群（见**幂零群**（nilpotent group)；**有限生成群**（finitely-generated group))．在局部幂零群中，全体有限阶元素构成一个**正规子群**（normal subgroup)，即这个群的挠部分（见**周期群**（periodic group))．这个子群是其 Sylow 子群的直积，而关于它的商群是无挠的．局部幂零的**无挠群**（group without torsion）具有根唯一性质：对于元素 a, b 和任意整数 $n\neq0$，如果 $a^n=b^n$，则 $a=b$．每个局部幂零的无挠群 G 都有一个 Мальцев 完全化（Mal'tsev completion)，即 G 可被嵌入到唯一的一个局部幂零的无挠群 G^* 中，使得形如 $x^n=g$ 的方程在 G^* 中有解，其中 $n\neq0$ 而 g 是 G 中的任意元素．这个完全化是函子的，即任意局部幂零的无挠群 G_1 到 G_2 的同态 f: $G_1\to G_2$ 都可以唯一地扩充成为同态 $f^*:G_1^*\to G_2^*$．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本：А. Г. 库洛什，群论，上、下，高等教育出版社，1987，1982).

[2] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977（英译本：Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

А. Л. Шмелькин 撰　王　杰 译　石生明 校

局部正规群 [**locally normal group; локально нормальная группа**]

一个群 G，其中任何有限子集皆包含在 G 的一个

有限正规子群(normal subgroup)中.

王 杰 译 石生明 校

局部道路连通空间 [**locally path-connected space**; **локально линейно связное пространство**]

一个拓扑空间 X，对任意点 $x \in X$ 和 x 的任意邻域 O_x，有一个较小的邻域 $U_x \subset O_x$，使得对任意两点 $x_0, x_1 \in U_x$，存在一个把单位区间 $I=[0,1]$ 映入 O_x 中的连续映射 $f: I \to O_x$ 满足 $f(0)=x_0, f(1)=x_1$. 任何局部道路连通空间都是局部连通的. 局部道路连通空间的任何开子集都是局部道路连通的. 连通的局部道路连通空间是**道路连通空间**(path-connected space).

局部道路连通空间在覆叠空间理论中起着重要作用. 设 $p:(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x)$ 是一个**覆叠**(covering)，设 Y 是一个局部道路连通空间. 则映射 $f:(Y, y_0) \to (X, x_0)$ 容许一个提升(即满足 $f=p \circ q$ 的映射 $g:(Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$)的充分必要条件是

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)),$$

这里 π_1 是**基本群**(fundamental group). 若 X 是局部单连通(局部 1 连通，见下面)空间且 $x_0 \in X$，则对 $\pi_1(X, x_0)$ 的任一子群 H，存在一个覆叠 $p:(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 满足 $p_{\#}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))=H$.

局部道路连通性的高维推广是局部 k 连通性(local k-connectedness)(k 维局部连通性). 空间 X 称为局部 k 连通的，如果对任意点 $x \in X$ 和 x 的任意邻域 O_x，存在一个较小的邻域 $U_x \subset O_x$，使得把 r 维球面 $S^r(r \leqslant k)$ 映入 U_x 中的任一映射在 O_x 都同伦于常值映射. 度量空间 X 是局部 k 连通的，当且仅当满足 $\dim Y \leqslant k+1$ 的**度量空间**(metric space) Y 的任意闭子集 A 上的映射 $f: A \to X$ 可以扩张到 A 在 Y 中的邻域上(Kuratowski-Dugundji 定理(Kuratowski-Dugundji theorem)).

С. А. Богатый 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mill, J. van, Infinite-dimensional topology, North-Holland, 1988.

白苏华、胡师度 译

局部可解代数 [**locally solvable algebra**; **локально разрешимая алгебра**]

每个有限生成子代数均可解的代数(见**可解群**(solvable group)). 把一个局部可解代数表成可解子代数的一个升链的并集是方便的. 局部可解代数类对于向子代数的过渡和取同态象是封闭的.

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (又: Dover, 重印, 1979) (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

В. Н. Латышев 撰 牛凤文 译 邓邦明 校

局部可解群 [**locally solvable group**; **локально разрешимая группа**]

其每个有限生成子群皆可解的群(见**有限生成群**(finitely-generated group); **可解群**(solvable group)). 局部可解群的类对于取子群和同态象是封闭的，但对于扩张不封闭.

局部可解挠群是局部有限的.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

А. Л. Шмелькин 撰 王 杰 译 石生明 校

局部平凡纤维丛 [**locally trivial fibre bundle**; **локально тривиальное расслоение**]

纤维为 F 的纤维丛 $\pi: X \to B$(见**纤维空间**(fibre space))，对任意 $b \in B$ 均存在一个邻域 $U \ni b$ 和一个同胚 $\varphi_U: U \times F \to \pi^{-1}(U)$ 满足 $\pi\varphi_U(u, f)=u$，其中 $u \in U, f \in F$. 映射 $h_U=\varphi_U^{-1}$ 称为局部平凡丛的一个坐标卡(chart). 相应于基空间的覆盖 $\{U\}$ 的全体坐标卡 $\{h_U\}$ 构成局部平凡丛的一个图册(atlas). 例如，以局部紧致空间为基空间. Lie 群 G 为群的**主纤维丛**(principal fibre bundle)即是一个局部平凡纤维丛，其坐标卡 h_U 满足关系

$$h_U(gx)=gh_U(x), \ x \in \pi^{-1}(U),$$

其中 G 在 $G \times U$ 上的作用由公式 $g(g', u)=(gg', u)$ 给出. 给定局部平凡纤维丛 $\pi: X \to B$ 和连续映射 $f: B_1 \to B$，相应的**诱导纤维丛**(induced fibre bundle)亦局部平凡.

参考文献

[1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.
[2] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.
[3] Hu, S.-T., Homotopy theory, Academic Press, 1959.
[4] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

М. И. Войцеховский 撰 李贵松 译 张 平 校

对数 [**logarithm**; **логарифм**]，数 N 以 a 为底的

为使之等于 N，数 a(对数的底(base of the logarithm))必须取的幂指数 m，记作 $\log_a N$; 这表明 $m=\log_a N$ 意味着 $a^m=N$. 对每个正数 N 和给定的底 $a>0, a \neq 1$，对应唯一的实对数(负数的对数是复数). 对数的主要性质是:

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a N^k=k\log_a N,$$

$$\log_a N^{1/k} = \frac{1}{k} \log a^N.$$

这些性质使得把数的乘法和除法简化为对数的加法和减法，把数的幂与开方简化为幂或根的指数乘、除对数成为可能.

适应于十进数制，最常用的对数是十进对数（$a=10$），记作 $\lg N$. 对于不等于 10^k（k 为整数）的有理数，其十进对数是**超越数**（transcendental number），它可用有限十进分数近似表示. 十进对数的整数部分称为它的首数（characteristic），小数部分称为它的尾数（mantissa）. 由于 $\log(10^k N) = k + \lg N$，所以相互之比为 10^k 的不同的数的十进对数具有相同的尾数，它们之间只是首数不同. 这一性质是制作对数表的基础，对数表中只列出整数的对数的尾数.

自然对数（natural logarithm）也具有很大意义，其底是超越数 $e = 2.71828\cdots$；记作 $\ln N$. 从一个底的对数向另一个底的对数的转换公式是 $\log_b N = \log_a N / \log_a b$；其中的因子 $1/\log_a b$ 称为从底 a 到底 b 的换底模（modulus of transition）. 自然对数与十进对数之间的转换公式是:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}, \ \lg N = \frac{\ln N}{\ln 10},$$

$$\frac{1}{\lg e} = 2.30258\cdots, \ \frac{1}{\ln 10} = 0.43429\cdots.$$

亦见**对数函数**（logarithmic function）. БСЭ-3

【补注】 西方写作微积分后续课程的数学家几乎总是用 $\log N$ 来代替 $\ln N$ 以表示 N 的自然对数（底为 e）. 数 e 由 $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ 和 $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ 给出（见 e（**数**）（e(number)））.

另一方面，微积分和微积分预备教材的作者以及计算器制造厂家总是用 $\log N$ 表示十进对数（常用对数），用 $\ln N$ 表示自然对数. 亦见**对数函数**（logarithmic function）.

沈永欢 译

对数分支点 [**logarithmic branch point**; **логарифмическая точка ветвления**]，无穷阶分支点（branch point of infinite order）

单复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的一种特殊形式的**分支点**（branch point）a，对于它不存在有限条以同一方向绕 a 的相连回路，使得 $f(z)$ 的某个元素沿此回路的**解析延拓**（analytic continuation）回到原来的元素. 更精确地说，孤立奇点 a 称为 $f(z)$ 的对数分支点，如果存在：1）圆环 $V = \{z: 0 < |z-a| < \rho\}$，使得 $f(z)$ 在 V 内可沿任何路径解析延拓；2）点 $z_1 \in V$ 和 $f(z)$ 的一个以 z_1 为中心、具有正收敛半径 r 的幂级数形式的元素 $\Pi(z_1; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-z_1)^\nu$，使得此元素以同一方向沿圆周 $|z-a| = |z_1 - a|$ 任意多次的解析延拓都不会回到原先的元素 $\Pi(z_1; r)$. 在以无穷远点 $a=\infty$ 为对数分支点的情形，必须用邻域 $V' = \{z: |z| > \rho\}$ 代替上述的 V. 对数分支点属于超越分支点类（见**超越分支点**（transcendental branch point））. 具有对数分支点 a 的函数 $f(z)$ 的 Riemann 曲面 R 的性态可由下述事实刻画：R 的同一分支的无穷多叶在 a 上连接起来；这个分支由元素 $\Pi(z_1; r)$ 在 V 或 V' 中定义.

亦见解析函数的**奇点**（singular point）.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第八章）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 函数 $\mathrm{Ln}(z-z_0)$ 在 z_0 处具有对数分支点，其中 Ln 是复变量的（多值）**对数函数**（logarithmic function）.

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979, Chapt. 8（中译本：L. V. 阿尔福斯，复分析，上海科学技术出版社，1984，第八章）.

沈永欢 译

对数容量 [**logarithmic capacity**; **логарифмическая емкость**]

见**容量**（capacity）.

对数收敛准则 [**logarithmic convergence criterion**; **логарифмический признак сходимости**]

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （$a_n > 0$）是收敛的，如果存在数 $\alpha > 0$，使得

$$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \geqslant 1+\alpha, \ \text{当}\ n \geqslant n_0\ \text{时}$$

是发散的，如果

$$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leqslant 1, \ \text{当}\ n \geqslant n_0\ \text{时}.$$

В. И. Битюцков 撰　张鸿林 译

对数导数 [**logarithmic derivative**; **логарифмическая производная**]

给定的函数的对数的导数.

【补注】 设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 是正函数，则它的对数导数等于

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}.$$

张鸿林 译

对数函数 [**logarithmic function**; **логарифмическая функция**]，对数（logarithm）

指数函数（exponential function）的反函数. 对数

函数表示如下：

$$y = \ln x; \tag{1}$$

与自变量 x 的值对应的函数值 y，称为 x 的自然对数（natural logarithm）．由定义，关系式（1）等价于

$$x = e^{y}. \tag{2}$$

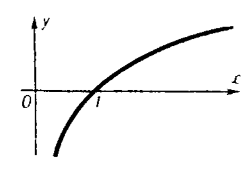
因为对于任何实数 y，$e^{y} > 0$，所以对数函数仅对 $x > 0$ 有定义．在更一般的意义下，对数函数是函数

$$y = \log_a x,$$

其中 $a > 0$ $(a \neq 1)$ 是任意对数底；这个函数能够通过 $\ln x$ 由下列公式来表示：

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

对数函数是主要初等函数之一；它的图形（见图）称为对数曲线（logarithmic curve）．



对数函数的主要性质可由指数函数和对数的相应性质推出；例如，对数函数满足函数方程

$$\ln x + \ln y = \ln xy.$$

对称函数 $y = \ln x$ 是严格增函数，并且 $\lim_{x \to +0} \ln x = -\infty$，$\lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$．在每一点 $x > 0$，对数函数具有各阶导数，在充分小的邻域内，它可展开为幂级数，也就是说，它是**解析函数**（analytic function）．对于 $-1 < x \leqslant 1$，（自然）对数函数的下列展开式成立：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

对数函数的导数是：

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

许多积分可以通过对数函数来表示；例如

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C.$$

J. Napier 于 1614 年首先考虑了由对数函数表示的变量之间的依赖关系．

复平面上的对数函数是无限多值函数，对一切自变量的值 $z \neq 0$ 有定义，表示为 $\mathrm{Ln}\, z$（当不发生混淆时，也可表示为 $\ln z$）．这个函数由

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

定义的单值分支，称为对数函数的主值（principal value），其中 $\arg z$ 是复数 z 的辐角的主值，$-\pi < \arg z \leqslant \pi$，于是有

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i, \ k = 0, \ \pm 1, \ \cdots.$$

对于负实数 z，对数函数的一切值都是纯虚数．对于复自变量的对数函数的第一个满意的理论是 L. Euler 于 1749 年给出的；他是由定义

$$\mathrm{Ln}\, z = \lim_{n \to \infty} n(z^{1/n} - 1)$$

出发的．

参考文献

[1] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975（中译本：С. М. 尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，第一、二分册，人民教育出版社，1981－1982）．

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1. М., 1967（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）． БСЭ-3

【补注】 对数的主值把有孔复 z 平面 $(z \neq 0)$ 映射到复 w 平面的带形 $-\pi < \mathrm{Im}\, w \leqslant \pi$ 上．为了填满 w 平面，必须把 z 平面重复映射无穷多次，其中第 n 次重复（叶）为 $-\pi + 2n\pi < \arg z \leqslant \pi + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \cdots$．这情况下 0 是**分支点**（branch point）．这些重复的平面粘合成所谓的对数函数的 **Riemann 曲面**（Riemann surface）．显然，$\ln z$ 是此曲面 $(z \neq 0)$ 到 w 平面上的一一映射．对 $-\pi < \arg z < \pi$，对数主值的导数是 $1/z$（如同实的情况）．

代替 ln 和 Ln，许多西方微积分后数学的作者用 log 和 Log（亦见**数的对数**（logarithm of a number）的补注）．

参考文献

[A1] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1973（中译本：J. B. 康威，复变函数，上海科学技术出版社，1985）．

[A2] Marsden, E., Basic complex analysis, Freeman, 1973.

[A3] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979（中译本：E. C. 梯其玛希，函数论，科学出版社，1962）．

[A4] Saks, S. and Zygmund, A., Analytic functions, PWN, 1952（译自波兰文）．

[A5] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

张鸿林 译

对数正态分布 [**logarithmic normal distribution**; **логарифмически нормальное распределение**]

集中于 $(0, \infty)$ 上的一种连续概率分布，其密度

为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\log e}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\ e^{-(\log x-a)^2/2\sigma^2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad (*)$$

其中 $-\infty<a<\infty$, $\sigma^2>0$. 一个随机变量 X 服从密度为 (*) 的对数正态分布，如果 $\log X$ 有参数 a 与 σ^2 的**正态分布** (normal distribution). 因此, $a=E\log X$ 及 $\sigma^2=\mathrm{D}\log X$. 对数正态分布是单峰分布，且具有正的非对称性. 有参数为 a 与 σ^2 的对数正态分布的随机变量 X 的矩由下列公式给出：

$$\mathrm{E}X^k=e^{ka+k^2\sigma^2/2};$$

因此，其均值与方差分别等于

$$\mathrm{E}X=e^{a+\sigma^2/2},\ \mathrm{D}X=e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

对数正态分布是其矩不能唯一确定其分布的最简单例子之一. 对数正态分布的性质由其对应的正态分布的性质所决定. 它的一个重要性质可述如下：有对数正态分布的独立随机变量之积仍服从对数正态分布. 还有类似于**中心极限定理** (central limit theorem) 的结论: n 个独立正值随机变量之积的分布，在某些一般的条件下，当 $n\to\infty$ 时趋于一对数正态分布. 对数正态分布是作为一种极限分布而产生的，同时也产生于某些其他的概形 (例如粒子的分支模型，生长模型等).

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **31** (1941), 2, 99 – 101.

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[3] Aitchison, J., Brown, J. A. C., The lognormal distribution, Cambridge Univ. Press, 1957.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 对数正态分布英文又可写成 lognormal distribution，它是无穷可分的 (见**无穷可分分布** (infinitely-divisible distribution))，见 [A2].

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Distributions in statistics: continuous univariate distributions, 1, Wiley, 1970.

[A2] Thorin, O., On the infinite divisibility of the lognormal distribution, *Skand. Aktuartidskr.*, 1977, 3, 121 – 148.

潘一民 译

对数纸 [logarithmic paper; логарифмическая бумага]，双对数纸 (double logarithmic paper)

一种特殊形式的直纹纸；它通常是按下述式样来印刷的 (图 1)：在直角 (u, v) 坐标系的每个坐标轴上，分别标出数 u 的常用对数 (在水平轴上) 和数 v 的常用对数 (在竖直轴上) (见**数的对数** (logarithm of a number))；然后，通过所得到的各点 (u, v) 画平行于坐标轴的直线.

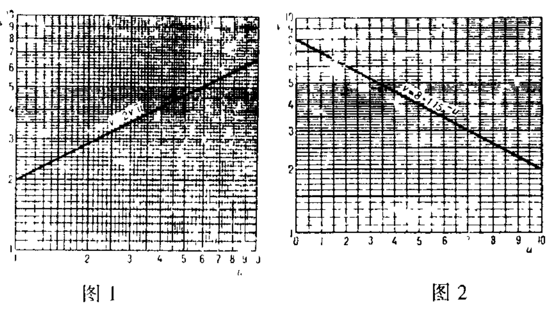


图 1　　图 2

此外还有半对数纸 (semi-logarithmic paper) (单对数纸 (single logarithmic paper)) (图 2)：在直角 (u, v) 坐标系的一个坐标轴上标出数 u 的值，而在另一个坐标轴上标出数 v 的常用对数.

对数纸和半对数纸用来绘制函数的图形，(在这些坐标系中) 它们具有比较简单、比较明显的形式，在许多情况下是直线. 在对数坐标纸上，直线表示由形如 $v=au^b\,(u>0)$ 的方程给出的函数，其中 $a>0$ 和 b 是常系数；在半对数纸上，直线表示由形如 $v=ab^u$ 的方程给出的函数.

БСЭ-3 张鸿林 译

对数位势 [logarithmic potential; логарифмический потенциал]

具有对数核 (logarithmic kernel) $\ln 1/|x-y|$ 的位势，这里 $|x-y|$ 是 Euclid 平面 $\mathbf{R}^2$ 里两点 x 和 y 之间的距离，即如下形式的位势

$$u(x)=\int\ln\frac{1}{|x-y|}\,d\mu(y),\qquad (1)$$

一般说来，这个积分是对 $\mathbf{R}^2$ 上任意一个具有紧支集 $S=S(\mu)$ 的 **Borel 测度** (Borel measure) μ 进行的. 在物理上，可以认为对数位势来源于万有引力的 **Newton 位势** (Newton potential)，当产生吸引力的质量在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中各点 $y=(y_1, y_2, y_3)$ 的分布不依赖于某个坐标，例如 y_3 时的情形. 当然总质量是无限的，但若对计算的引力 F (可以认为它是作用在平面 (x_1, x_2, 0) 上) 进行正则化，去掉无穷的项，那么 F 的有限部分的位势恒为形式 (1) (见 [2]). 不同于 Newton 核，对数核不仅当 $|x-y|\to 0$，而且当 $|x-y|\to\infty$ 有奇性. 这使得对数位势的性质与 Newton 位势有些差别. 这主要出现在外边界值问题的解中 (见**外部和内部边界值问题** (exterior and interior boundary value problems)). 对数位势主要应用于**位势论中的边界值问题** (boundary value problems in potential theory) 的解. 亦见**椭圆方程边界值问题** (boundary value pro-

blem, elliptic equations).

对数位势的主要性质: 1) 对数位势在测度 μ 的支集 S 的外部是 **Laplace 方程** (Laplace equation) $\Delta u = 0$ 的一个正则解, 即 u 是开集 $R^2 \setminus S$ 上的**调和函数** (harmonic function), 但在无穷远点不正则; 然而, 2) 若测度 μ 是绝对连续的, 即积分 (1) 取形式

$$u(x) = \int_D f(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \, d\sigma(y), \qquad (2)$$

其中 D 是有限区域, $d\sigma$ 是 D 的面积元素且密度 f 属于 $C^1(D \cup \partial D)$ 类, 则 u 的二阶导数在 D 连续且满足 **Poisson 方程** (Poisson equation) $\Delta u = -2\pi f$.

如果 (2) 中的积分是沿一条闭 Ляпунов 曲线 L (见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapynov surfaces and curves)), 即

$$u(x) = \int_L f(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \, ds(y), \qquad (3)$$

称为分布在 L 上的单层对数位势 (logarithmic potential of a single (or simple) layer). 如果 $f \in C^1(L)$, 那么单层对数位势 (3) 在 $\mathbf{R}^2$ 里是处处连续的. 它的法向导数从 L 的内部和外部都有极限, 分别为

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0} \bigg|_i = \frac{du(y_0)}{dn_0} + \pi f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0} \bigg|_0 = \frac{du(y_0)}{dn_0} - \pi f(y_0),$$

其中

$$\frac{du(y_0)}{dn_0} = \int_L f(y) \frac{\cos(y-y_0, n_0)}{|y-y_0|} \, ds(y), \quad y_0 \in L, \qquad (4)$$

是所谓单层对数位势法向导数的直接值, $(y-y_0, n_0)$ 是向量 $y-y_0$ 与 L 在点 $y_0 \in L$ 的外法线 n_0 之间的夹角. 积分 (4) 在 L 上是连续的.

双层对数位势 (logarithmic potential of a double layer) 具有形式

$$v(x) = \int_L g(y) \frac{\cos(y-x, n)}{|y-x|} \, ds(y), \qquad (5)$$

其中 n 是 L 在点 $y \in L$ 的外法线. 如果 $g \in C^1(L)$, 那么双层对数位势 (5) 在 L 的内部和外部是正则调和函数, 且从 L 的内部和外部都有法向 (非角形) 极限, 分别为:

$$\lim_{x \to y_0} v(x)|_i = v(y_0) + \pi f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} v(x)|_0 = v(y_0) - \pi f(y_0),$$

其中

$$v(y_0) = \int_L g(y) \frac{\cos(y-y_0, n)}{|y-y_0|} \, ds(y), \quad y_0 \in L,$$

是双层对数位势在点 $y_0 \in L$ 的直接值. 双层对数位势的法向导数穿过 L 时是连续的.

上述的单和双层对数位势的边界性质完全类似于 Newton 位势相应的性质 (亦见**位势论** (potential theory)). 由式 (5) 易见, 双层对数位势是在无穷远点正则的调和函数.

对数位势也直接联系**解析函数论的边界值问题** (boundary value problems of analytic function theory), 因为 Cauchy 型的积分可以用单层和双层对数位势表示 (见[3]).

参考文献

[1] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966 (中译本: С. Л. 索波列夫, 数学物理方程, 人民教育出版社, 1958).

[2] Webster, A. G., Partial differential equations of mathematical physics, Hafner, 1955.

[3] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966).

[4] Vallée-Poussin, Ch. J. de la, Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme, Libraire Univ., 1949.

[5] Evans, G. C., The logarithmic potential, discontinuous Dirichlet and Neumann problems, New York, 1927.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦见 **Ляпунов 定理** (Lyapunov theorem).

参考文献

[A1] Hayman, W. K. and Kennedy, P. B., Subharmonic functions, 1, Acad. Press, 1976.

[A2] Král, J., Integral operators in potential theory, Lecture notes in math., 823, Springer, 1980.

高琪仁、吴炯圻 译

对数残数 [**logarithmic residue**; **логарифмический вычет**], 亦称对数留数

亚纯函数 $w = f(z)$ 在扩充 z 复平面的点 a 处的对数残数是对数导数 $f'(z)/f(z)$ 在点 a 处的残数

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

在点 $a \neq \infty$ 的邻域 $V(a)$ 中把函数 $\ln f(z)$ 表示为 $\ln f(z) = A \ln(z-a) + \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 是 $V(a)$ 中的正则函数, 则得

$$\operatorname{res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = A.$$

在 $a = \infty$ 的情形下, 相应的式子为

$$\ln f(z) = A \ln\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z),$$

$$\operatorname{res}_{\infty} \frac{f'(z)}{f(z)} = A.$$

如果 a 是 $f(z)$ 的重数为 m 的零点或极点，则 $f(z)$ 在 a 处的对数残数分别等于 m 或 $-m$；在所有其他点处其对数残数为零．

如果 $f(z)$ 是区域 D 内的亚纯函数，Γ 是位于 D 内的可求长 Jordan 曲线，它不通过 $f(z)$ 的零点或极点，则 $f(z)$ 关于围道 Γ 的对数残数是积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P, \tag{1}$$

其中 N, P 分别是 $f(z)$ 在 Γ 内的零点数和极点数（按重数计数）．式（1）的几何意义是：当 z 沿 Γ 按正方向旋转一周时，向量 $w=f(z)$ 围绕 w 平面的原点 $w=0$ 旋转 N-P 圈（见**辐角原理**（argument, principle of the））．特别是，如果 $f(z)$ 在 D 内正则即 $P=0$，则由（1）得到用对数残数计算点 $w=0$ 关于 Γ 的象 $\Gamma^*=f(\Gamma)$ 的指标的公式：

$$\operatorname{ind}_0 \Gamma^* = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz. \tag{2}$$

公式（2）导致对数残数概念对于复空间 $\mathbf{C}^n(n \geq 1)$ 的区域 D 中多复变量正则函数情形的推广．设 $w=f(z)=(f_1, \cdots, f_n)$: $D \to \mathbf{C}^n$ 是**全纯映射**（holomorphic mapping），其 **Jacobi 行列式**（Jacobian）$J_f(z) \not\equiv 0$，且其零点集 $E=f^{-1}(0)$ 在 D 内是孤立的，则对任一由不通过 f 的零点的简单闭曲面 Γ 所围的区域 $G \subset \bar{G} \subset D$，有点 $w=0$ 关于象 $\Gamma^*=f(\Gamma)$ 的指标的公式：

$$\operatorname{ind}_0 \Gamma^* = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_n}{f_1 \cdots f_n} = N, \tag{3}$$

其中积分展布在 n 维骨架 $\Gamma_\varepsilon=\{z \in G: |f_\nu(z)|=\varepsilon, \nu=1, \cdots, n\}$ 上，ε 为充分小的正数．（3）中的积分也表示 f 在 G 中的零点重数之和（见[2]）．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）．

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 原点关于复平面中一条曲线的指标（index）（也称为所给曲线的**卷绕数**（winding number）），是此曲线卷绕原点的周数．更精确地说，它是 $(1/2\pi)\ln w$ 的辐角当 w 沿所给曲线行进一次时的改变量（见[A1]，[A3]）．在高维情形下，一个点关于一闭曲面的指标可定义为具有下述性质的数 N：所给曲面同调于以所给点为中心的一个球的边界的 N 倍（见[A2]，[A4]）．

参考文献

[A1] Burckel, R. B., An introduction to classical complex analysis, 1, Acad. Press, 1979.

[A2] Айзенберг, Л. А., Южаков, А. П., Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, 1979（英译本：Aĭzenberg, L. A., Yuzhakov, A. P., Integral representations and residues in multimensional complex analysis, Amer. Math. Soc., 1983）．

[A3] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979（中译本：L. V. 阿尔福斯，复分析，上海科学技术出版社，1984）．

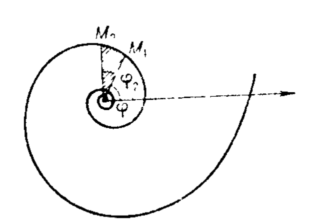
[A4] Milnor, J., Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1969（中译本：J. W. 米尔诺，从微分观点看拓扑，上海科学技术出版社，1983）．

沈永欢 译

对数螺线［**logarithmic spiral**；**логарифмическая спираль**］

一类平面**超越曲线**（transcendental curve），在极坐标中，它的方程具有下列形式：

$$\rho = a^{\varphi},\ a > 0.$$



如果 $a>1$，则当 $\varphi \to +\infty$ 时，对数螺线沿反时针方向伸张，而当 $\varphi \to -\infty$ 时，对数螺线沿顺时针方向卷屈并趋向于它的渐近点 O（见图）．如果 $a<1$，则伸卷性状相反．由对数螺线上任意一点的切线与该点的位置向量所形成的角仅与参数 a 有关．两点 $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ 和 $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ 之间的弧长为

$$l = \rho_2 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} - \rho_1 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}.$$

曲率半径为 $r=\sqrt{1+\ln^2 a}$．**自然方程**（natural equation）为 $s=kr$，其中 $k=1/\ln a$．在平面的线性等距同构，相似变换和反演下，对数螺线变为对数螺线．对数螺线与所谓伪螺线有关（见**螺线**（spirals））．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1-2, Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一、二卷，科学出版社，1987，1989）．

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley,

1963.

[A3] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962. 张鸿林 译

对数求和法 [**logarithmic summation method**; **логарифмический метод суммирования**]

数项级数求和法之一. 设级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 的部分和为 s_n, 这个级数按对数求和法是可和的, 其和为 s, 如果对数平均值 (logarithmic mean)

$$\sigma_m = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1}} \left[s_0 + \frac{s_1}{2} + \cdots + \frac{s_m}{m+1} \right]$$

当 $m \to \infty$ 时收敛于 s. 对数求和法是 **Riesz 求和法** (Riesz summation method) (R, p_n) 当 $p_n = 1/(n+1)$ 时的情况. 这种求和法等价于 Riesz 求和法 $(R, \lambda_n, 1)$ 当 $\lambda_n = \ln(n+1)$ 时的情况, 并与其是相容的, 它比**算术平均求和法** (arithmetical averages, summation method of) 更强.

参考文献

[1] Riesz, F., Sur la sommation des séries de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **149** (1909), 18 – 21.

[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon Press, 1949.

И. И. Волков 撰 张鸿林 译

对数下调和函数 [**logarithmically-subharmonic function**; **логарифмически субгармоническая функция**]

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的一个区域里的正函数 $u(x)$, 其对数 $\log u(x)$ 是**下调和函数** (subharmonic function). 例如, 一个复变量的解析函数 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$ 就是一个对数下调和函数, 但是存在平面区域里的连续的对数下调和函数, 它不能表示成任何一个解析函数的模. 对数下调和函数全体组成强下调和函数的一个子类 (见**下调和函数**). 当 $n=1$ 时, 和它相对应的是对数凸函数.

对数下调和函数的主要性质是, 几个对数下调和函数的乘积和正线性组合仍是对数下调和函数.

参考文献

[1] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937, гл. 3. Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ronkin, L. I., Introduction to the theory of entire functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1974, p. 36 (译自俄文).

[A2] Hayman, W. K. and Kennedy, P. B., Subharmonic functions, 1, Acad. Press, 1976.

高琪仁、吴炯圻 译

逻辑公理 [**logical axiom**; **логическая аксиома**]

一个逻辑系统 S 通常由一个语言 L 和 L 的一个句子集 T 构成, T 中的句子叫做在 S 中可证明的. T 被归纳地定义为包含一个给定的 L 句子集 A, 并且关于某些特定运算封闭的 L 的最小句子集. A 的元素叫做 S 的逻辑公理.

参考文献

[1] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

[2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967. В. Е. Плиско 撰

【补注】 "逻辑公理" 一词经常用于形式理论中的一些特定的公理, 这些公理是关于建立逻辑联接词和量词的内涵 (见**逻辑演算** (logical calculus)) 的公理. 与逻辑公理相对的是 "非逻辑公理", 它们表示用公式刻画的理论的语言中关于特殊的函数及谓词符号的解释的假设 (见**逻辑数学演算** (logico-mathematical calculus)).

卢景波 译

逻辑演算 [**logical calculus**; **логические исчисления**]

逻辑理论的一种形式化系统. 逻辑演算中可推导的对象被解释为命题, 它是由最简命题 (一般说来, 有主谓词结构) 用命题联结词和量词联结而成的. 最常用的联结有 "非", "并且", "或", "如果…, 那么…", 以及存在量词和全称量词. 逻辑演算不同于任何别的**演算** (calculus), 它有纯逻辑性的解释和推演法则; 也不同于**逻辑数学演算** (logico-mathematical calculus), 它在语言符号中没有数学中特定的谓词和函数 ("=" 号除外, 解释为相等, 通常认为它不影响演算的逻辑特征). 这些不同点有一种相对性, 由于逻辑演算是纯粹形式的系统, 对它们所作的任何可能的语义解释都必须被看作是系统之外的, 这种解释在研究演算的性质时有启发作用, 但不能当作演算的结论.

最重要的逻辑演算之一是带函数符号 (function symbols) 的经典谓词演算 (classical predicate calculus). 这一演算的语言除了括号和逻辑符号 $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\exists$, $\forall$ 之外, 还有三种符号系列, 每种都可有无穷多个符号, 即个体变元、谓词变元以及函数变元的系列. (每一个谓词或函数变元的维数都预先约定, 谓词变元至少 1 维, 函数变元的维数至少是 0.) 项 (terms) 的定义是: 1) 任何个体变元、任何 0 维函数变元都是项; 2) 若 $T_1, \cdots, T_l$ 是项, f 是 l 维函数变元, 则 $f(T_1, \cdots, T_l)$ 也是项. 如果 $T_1, \cdots, T_k$ 是项, P 是 k 维谓词变元, 则 $P(T_1, \cdots, T_k)$ 称为原子公式 (atomic formula). 公式 (formulas) 的定义是: 1) 任何原子公式是公式; 2) 若 F, G 是公式, x 是一个个体变元, 则表达式

$$\neg F, \ (F \& G), \ (F \vee G), \ (F \supset G), \ \exists x F, \ \forall x F$$

都是公式. 最后两个公式中变元 x 的出现称为约束的(bound); 构造公式的过程中不受量词制约的变元的出现称为自由的(free). 一个项 T 称为在 F 中相对于 x 自由的(free), 如果 F 中 x 的任何自由出现都不在形如 $\exists yG$ 或 $\forall yG$ 的子公式中, 而其中 y 是 T 中出现的变元之一; $[F]_T^x$ 表示用 T 代换 F 中所有自由出现的 x 得到的公式.

令 x 是任意一个个体变元, A、B, C, D 是任意公式, x 不在 D 中自由出现, 令 T 是任意一个项, 在 A 中相对于 x 自由. 本演算所用的公理有如下 10 种(每一种都称为一个公理模式(axiom scheme)):

1. $(A \supset (B \supset A))$,
2. $((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$,
3. $(A \supset (B \supset (A \& B)))$,

4a. $((A \& B) \supset A)$, 4b. $((A \& B) \supset B)$,

5a. $(A \supset (A \vee B))$, 5b. $(B \supset (A \vee B))$,

6. $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
7. $((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$,
8. $(\neg\neg A \supset A)$,
9. $(\forall x A \supset [A]_T^x)$,
10. $([A]_T^x \supset \exists x A)$.

这个演算中还有三条推演法则: "由 A 和 $(A \supset B)$ 得 B"; "由 $(D \supset A)$ 得 $(D \supset \forall x A)$"; 以及 "由 $(A \supset D)$ 得 $(\exists x A \supset D)$". 演算中可证公式(provable formulas)或可证定理(provable theorems), 是指从演算的公理出发应用(可以重复应用)给定的法则所得的结果(见**逻辑推导**(derivation, logical)).

谓词演算的基本解释. 个体变元取值于一个非空个体集 M. 函数变元解释为 M^l 到 M 的函数, 谓词变元解释为 M^k 到 $\{0, 1\}$ 的函数(一个值理解为"真", 另一个理解为"假"), 这里 l, k 分别是函数变元和谓词变元的维数. 对任意一个原子公式, 取定了其中所出现的谓词变元、函数变元和个体变元的值, 就可以得出这个公式所取的值是真或假. 类似地, 用命题联结词的真值表和通常对谓词的解释(如同无穷合取和无穷析取), 就可以确定任意一个公式在取定的 M 中, 当取定了公式中出现的谓词变元、函数变元和自由变元的值以后的真假值. 一个公式称为恒真的(identically true), 如果对任意这样的解释, 公式取值都是真. 例如, 一个二元谓词变元 P 和一个一元函数 f, 无论它们怎样取值, 只要对某个 x 对任意的 y 公式 $P(f(x), f(y))$ 是真的, 就得出存在一个 z, 使 $P(z, f(z))$ 是真的. 由此可知, 公式

$$(\exists x \forall y P(f(x), f(y)) \supset \exists z P(z, f(z)))$$

是恒真的. 可以证明, 在这样构造的演算中, 一个公式是可推导的, 当且仅当它是恒真的(这就是 **Gödel 完全性定理**(Gödel completeness theorem)). 这样一种解释依赖于相当复杂又抽象的集合论, 从而不能被某些数学哲学和元数学(例如, **直觉主义**(intuitionism); **有限主义**(finitism); **构造数学**(constructive mathematics))所接受. 不过, 在这些理论的框架中通过改变逻辑演算的语义就可以得到完全性定理.

对以上构造的逻辑演算加以修改, 可以得到许多种逻辑演算. 例如, 在语言中加上符号"="以及公理模式

11. $(T = T)$,
12. $((T_1 = T_2) \supset ([A]_{T_1}^x = [A]_{T_2}^x))$

(这里 A 和 T 是任意的, T_1, T_2 在 A 中相对于 x 自由), 就得到经典的带等号的谓词演算(predicate calculus with equality). 在语言中去掉函数符号就得到纯粹的(或狭义的, 限制的)谓词演算(pure (narrow, restricted) predicate calculus). 公理模式 1)–8) 加上第一个推演法则就给出经典命题演算(classical propositional calculus); 由于主谓词结构式的推理不能用谓词演算进行分析, 所以在演算语言中出现的各种变元通常只须用一种命题变元来代替, 每个命题变元所起的作用就相当于一个原子公式. 从上述种种演算中除去模式 8 便得到各种极小逻辑演算(minimal logical calculi), 除去 7 和 8 就得到相应的正逻辑演算(positive logical calculi). 此外, 还可以得到另外一些部分逻辑演算(partial logical calculi). 例如, 固定用语言中一部分逻辑符号或变元符号(可能要对公理系统作一些改动), 而保留所有由这些符号和变元组成的经典的可推导公式, 这样可得到**蕴涵命题演算**(implicative propositional calculus)(只用一个联结词 $\supset$); 纯一元谓词演算(pure one-place (monadic) predicate calculus)(语言中只有个体变元和一元谓词变元), 等等. 部分逻辑演算中更有意义的例子是直觉主义(构造)演算(intuitionistic (constructive) calculi), 它是由上面所说的经典演算中把模式 8 改为下面的模式得到的

8′. $(A \supset (\neg A \supset B))$.

各种逻辑演算都是自然地根据它所用到的条件来命名的; 例如, 模式 1–7, 8′, 11, 12 所定义的便是带等号的直觉主义命题演算.

我们也可以考虑多种类逻辑演算(many-sorted logical calculi)(及其项), 其中不允许用一个类的项代换另一类的项. 在一些例子中不同类的项的取值范围解释为不同的对象集合(例如, 借助有两种类个体——"点"和"直线"的逻辑演算, 平面几何就可以方便地被形式化). 当然, 我们也可以先考虑只有唯一一类

个体的逻辑演算，再考虑增加一个类，即第一个类上的谓词的演算（这就是说，第二个演算中允许对第一个类的谓词变元取量词），如此等等．这就得到了高阶逻辑演算（higher-order logical calculi）（原先定义的逻辑称为一阶逻辑）．采用更多的概念扩展逻辑理论得到了许多推广了的逻辑演算．在“真”“假”之间考虑各种程度的不确定性，就得到各种形式的**多值逻辑**（many-valued logic）和部分谓词演算（partial predicate calculi）．后者与逻辑推论的演算和**严格蕴涵演算**（strict implication calculus）密切相关，严格蕴涵演算是尝试把通常所用的表达式“A 蕴涵 B”形式化，以避免实质蕴涵产生的悖论，并避免用真值表来作定义．模态逻辑演算（modal logical calculi）是要把**模态逻辑**（modal logic）中所考查的“必然性”、“可能性”和“偶然性”等有关论断的区别加以形式化．

除了采用公理模式的逻辑演算之外，人们也常见到采用有限条特定公理的形式化系统，这时要增加对各种变元的代换法则．另外，对逻辑演算的形如 **Gentzen 形式系统**（Gentzen formal system）的改造对于证明论中许多问题的研究较为方便．

一个演算作为形式化理论是充分合理的，如果在其中公式的可推演性和它在基本解释中为恒真是一致的．可推演公式的恒真性关系到演算的相容性（可靠性）（见**可靠性法则**（sound rule）），而所有恒真公式的可推演性则关系到演算的完全性．以上所提到的所有逻辑演算都是可靠的，其中很多是在这种或那种意义上完全的（见 **Gödel 完全性定理**（Gödel completeness theorem）．逻辑演算的一个很重要的性质是可判定性（见**可解问题**）（solvable problem）：几乎所有已构造的命题演算都是可判定的；另一方面，（除了单调的，即只含一元谓词的以外）所有上面提到的谓词演算都是不可判定的．尽管如此，存在着算法能对不可判定逻辑演算中每个可推导的公式确定其可推导性，只是对某些不可推演的公式还无法确定．

参考文献

[1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1, Springer, 1968.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，1984）．

[3] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд. М., 1973（英译本：Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964）．

[4] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[5] Математическая теория логического вывода. сб. переводов, М., 1967.

С. Ю. Маслов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.

[A2] Kreisel, G. and Krivine, J. L., Elements of mathematical logic, North-Holland, 1967（译自法文）．

[A3] Wójcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988.

沈复兴 译

逻辑结果［**logical consequence**; **логическое следствие**］，给定前提的

在使前提皆真的非逻辑符号（即对象、函数、谓词的**名字**（name））的任何解释中都真的命题．如果命题 A 是命题集合 Γ 的逻辑结果，则称 Γ 逻辑蕴涵 A，或说逻辑上 A 是 Γ 的必然结果．

如果 Γ 是一个形式化一阶**逻辑数学语言**（logico-mathematical language）中的命题集合，并且 A 是该语言的一个命题，那么“A 是 Γ 的逻辑结果”这一关系意味着 Γ 的任一模型皆是 A 的模型．这一关系用 $\Gamma \vDash A$ 表示．由经典谓词演算的 **Gödel 完全性定理**（Gödel completeness theorem）可知，关系 $\Gamma \vDash A$ 与关系 $\Gamma \vdash A$ 是一致的，即 $\Gamma \vDash A$，当且仅当 A 可由 Γ 用经典谓词演算的方法推演出．

参考文献

[1] Rasiowa, H. and Sikorski., The mathematics of metamathematics, PWN, 1963.

[2] Gödel, K., Die vollständigkeit der axiome des logischen funktionenkalküls, Monatsh. *Math. Phys.*, **37** (1930), 349 – 360.

В. Е. Плиско 撰

【补注】 在英语中有时用词组“semantic entailment”（语义蕴涵）代替“logical consequence”（逻辑结果）；于是表示式 $\Gamma \vDash A$ 读作“Γ 语义蕴涵 A”．类似地，表示式 $\Gamma \vdash A$ 读作“Γ 语法蕴涵 A”．

参考文献

[A1] Johnstone, P. T., Notes on logic and set theory, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A2] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

卢景波 译

逻辑公式［**logical formula**; **логическая формула**］

形式逻辑语言中的表示式．逻辑公式的确切定义要在每一个具体语言中给出．一般逻辑公式的定义有一种归纳特性：首先区分出称为原子公式（atomic formula）的一类命题，然后给出由已经构造出的公式，利用**逻辑运算**（logical operation）的符号构造出新公式的法则．例如，命题逻辑的公式如下定义：任一命题变元是一个（原子）公式．如果 A 和 B 皆为公式，那么 $(A \& B)$、$(A \vee B)$、$(A \supset B)$、$(\neg A)$ 都是公式．谓词逻辑的公式是由命题变元、谓词和个体变元用逻辑联接词、量词和辅助符号（括号及逗号）构成．命题变元和形如 $P(y_1, \cdots, y_n)$ 的表示式都是原子公式，其中 P 是一个 n 元谓词变元，并且 y_1、$\cdots$、y_n 是个

体变元．谓词演算公式（formulas of predicate calculus）定义为：a）任一原子公式是一个公式；b）如果 A 及 B 均是公式，并且 y 是一个个体变元，那么 $(\neg A)$，$(A \& B)$，$(A \vee B)$，$(A \supset B)$，$(\forall y A)$，$(\exists y A)$ 都是公式．

В．Е．Плиско 撰

【补注】 术语"合式的公式"（"well-formed formula"（有时缩写为"wff"或"wf"））的使用是相当广泛的．

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

卢景波 译

逻辑函数 [logical function; логическая функция]

一种 n 元函数，其定义域和值域都是**真假值**（truth value）集合 $\{T, F\}$．每一种**逻辑运算**（logical operation）$\mathfrak{A}$ 都对应一个逻辑函数 $f_{\mathfrak{A}}$：如果 $V_1, \cdots, V_n$ 都是真假值，则函数 $f_{\mathfrak{A}}(V_1, \cdots, V_n)$ 取命题 $\mathfrak{A}(P_1, \cdots, P_n)$ 的真假值，其中 $P_1, \cdots, P_n$ 都是命题，P_i 的取值等于 $V_i (i = 1, \cdots, n)$．一个逻辑函数有时也定义为一个 n 元函数，其定义域为一个集合 M 而取值于集合 $\{T, F\}$．这种函数在数理逻辑中的作用与**谓词**（predicate）相同．

В．Е．Плиско 撰 沈复兴 译

逻辑定律 [logical law; логический закон]

数理逻辑中的逻辑定律是指这样的**逻辑公式**（logical formula），无论对公式中的命题变元和谓词变元给以怎样的解释，它都是一个真命题．这样的公式也称为恒真的（identically true, generally valid 或 universally valid），或重言式（tautology）．例如，重言式 $A \vee \neg A$ 表示**排中律**（law of the excluded middle）．

В．Е．Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

沈复兴 译

逻辑矩阵 [logical matrix; логическая матрица]

形如

$$\mathfrak{M} = \langle M; D, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$$

的一个系统，其中 M 是一个非空集合；$D \subseteq M$；$\&$，$\vee$，$\supset$ 都是 M 的二元运算；$\neg$ 是一元运算．如果让 $p_1, \cdots, p_n$ 作为在 M 中取值的变元，逻辑联结词作为逻辑矩阵 $\mathfrak{M}$ 上相应的运算，那么命题逻辑中由命题变元 $p_1, \cdots, p_n$ 经逻辑联词 $\&, \vee, \supset, \neg$ 联结而成的任意公式，都可以看成是 M 上的一个 n 元函数．如果不论变元在 M 中怎样取值，一个公式 $\mathfrak{A}$ 的值都属于 D，就称 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中是恒真的（generally valid）．一个逻辑矩阵 $\mathfrak{M}$ 称为对命题演算 K 示性，如果在 $\mathfrak{M}$ 中恒真的公式恰好是 K 中可推导的公式．系统

$$\langle \{0, 1\}; \{1\}, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$$

就是逻辑矩阵的一个例子，其中

$$x \& y = \min\{x, y\},$$
$$x \vee y = \max\{x, y\},$$
$$x \supset y = \max\{1 - x, y\},$$
$$\neg x = 1 - x.$$

这个逻辑矩阵对经典命题演算示性．K．Gödel 证明，不可能构造具有有限集 M 的一个逻辑矩阵，使它对直觉主义命题演算示性．

В．Е．Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wójcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988.

沈复兴 译

逻辑运算 [logical operation; логическая операция]

由给定的公式构造复合公式的一种方法，所得复合公式的**真假值**（truth value）完全由子公式的真值确定．逻辑运算有**合取**（conjunction）；**析取**（disjunction）；**蕴涵**（implication）；**否定**（negation）等等．**量词**（quantifier）也被算作逻辑运算．

В．Е．Плиско 撰 沈复兴 译

逻辑主义 [logicism; логицизм]

数学基础的主要方向之一，它的目标是通过把数学的初始概念归约为逻辑概念来论证数学的合理性．把数学归约为逻辑的思想是由 G．Leibniz（在 17 世纪末）提出的．逻辑主义论点具体体现在 19 世纪末和 20 世纪初 G．Frege 和 B．Russell 的论文中（见 [1]，[2]）．把数学视为逻辑的一部分，这种观点基于下述事实：公理系统中任何数学定理都可看作关于逻辑推论的断言．剩下的只是要用逻辑项来定义这些断言中出现的所有常量．在 19 世纪末数学中包括复数在内的不同形式的数都用自然数及其运算来定义．Frege 试图把自然数归约为逻辑概念．在 Frege 的解释中自然数是某些概念的基数．但 Frege 的系统摆脱不了矛盾．当 Russell 试图把 Cantor 的集合论归约为逻辑时发现的矛盾（Russell **悖论**（antinomy））澄清了这一点．这个矛盾促使 Russell 重新考虑关于逻辑的观点，他据此提出了分支类型论（见**类型论**（types, theory of））．然而，基于类型论的数学的构造需要假定一些不那么自然是纯逻辑的公理．例如无穷公理（axiom of infinity）就是其中之一，它断言有无穷多个个体，即最低层类型的对象．总的来说，把数学归结为逻辑的努力是不成功的．K．Gödel 证明（[3]）：没有足以作为（整个）数学的适当基础的逻辑的形式系统（见 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem））．

参考文献

[1] Frege, G., Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, 1-2, Olms, reprint, 1962.

[2] Whitehead, A. N. and Russell, B., Principia Mathematica, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1910 – 1913.

[3] Gödel, K., Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatsh. Math. Phys.*, **38** (1931), 173 – 198.

[4] Curry, H. B., Foundations of mathematical logic, McGraw-Hill, 1963.

[5] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

B. E. Плиско 撰 孙智伟 译

逻辑-数学演算 [**logico-mathematical calculus**; **логико-математические исчисления**], 应用演算 (applied calculus)

数学理论的形式化. 一个形式化的数学理论由它的语言及一组假设组成. 这两部分组成了形式化理论的语法. 通常它还配置了一个语义. 一个形式化的数学理论及一个通常意义下的公理化理论之间的区别在于: 1) 通常逻辑中的工具和方法被用到公理的公式化及推理规则的限制上, 这样, 人们可以形式化地由一个命题推导至另一个命题. 2) 后者的非形式语言转换成一个精确的**形式语言** (formal language). 逻辑-数学演算的基础通常是一个**逻辑演算** (logical calculus) (基本逻辑演算 (basic logical calculus)). 它的语言包括该逻辑演算的语言, 再加上一些特殊的函数符号及谓词符号 (有时排除谓词变元; 有些函数不含变目). 它的假设包括该逻辑演算的假设 (以新语言的表达式表示), 再加上一些用以描述新增加函数符号及新增加谓词符号不同性质的假设. 例如, 形式化的初等群论, 其语言包括带等式的谓词演算的语言, 增加符号 · (乘法), inv (逆) 以及 e (恒等元), 保留等号, 除去所有其他的谓词符号. 增加的假设

$$\forall x \forall y \forall z (e \cdot x = x \& \mathrm{inv}(x) \cdot x = \\ = e \& (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

断言 e 是恒等元, $\mathrm{inv}(x)$ 是 x 的逆元, 而乘法满足结合律.

基于带等式的谓词演算而构造起来的逻辑-数学演算用以描述大部分熟知的数学结构. 这些演算包括: **形式算术** (arithmetic, formal), 带一阶及二阶量词的形式分析, **公理集合论** (axiomatic set theory), 等等. 逻辑-数学演算的语义给出关于变元数学符号 (函数符号, 谓词符号)、逻辑运算的解释. 这些解释决定了该逻辑-数学演算的模型 (model of the logico-mathematical calculus). 由 **Gödel 完全性定理** (Gödel completeness theorem), 一个公式在所有该逻辑-数学演算的模型中为真, 则此公式可以由该演算形式推导出来.

最简单的一种逻辑-数学演算是无量词逻辑-数学演算 (quantifier-free logico-mathematical calculi). 它们通常用来描述各种可计算函数类的不同性质. 这类演算的语言的构造或者是基于带等式的命题演算的语言, 或者是基于若干个等式. 在第一种情形, 演算的逻辑设置是古典的命题演算; 在第二种情形, 演算本身仅是一个等式演算. 无论如何, 演算都包括如下的假设: 1) 关于函数的一些等式 (如 $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot y' = x \cdot y + x$); 2) 等式的一些基本性质; 3) 数学归纳法的设置 (最常用的模式是 "由 $f(0) = g(0)$, $f(x') = h(x, f(x))$, $g(x') = h(x, g(x))$ 可推得 $f(x) = g(x)$"); 4) $\forall$ 消除律的设置 "给定 $A(x)$, 则 $A(t)$" (该规则允许以一个客体变元代替自由变元). 关于这类演算的一个例子是 PRA 系统 (system PRA) (原始递归算术 (primitive recursive arithmetic) 系统).

PRA 的客体变元是 (a), (aa), (aaa), $\cdots$; 函数变元是 (f), (ff), (fff), $\cdots$; 自然数是 $0, 0', 0'', \cdots$. 函数 (函子) 符号由原始符号 $'$ (后继者), Z (取值为 0 的常值函数), $[J, n, m]$ (m 目函数, 值为第 n 目上的值), n, m 为自然数, $n \leqslant m$, 通过使用替换运算 S 及原始递归式 R 按下法而得到. 如果 φ 是一个 n 目函子而 $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$ 是 m 目函子, 则 $S[\varphi, \psi_1, \cdots, \psi_n]$ (在 φ 中以 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ 替换变元的结果) 是一 m 目函子; 若 φ 是 n 目函子, ψ 是 $n+2$ 目函子, 则 $R(\varphi, \psi)$ 是一个 $n+1$ 目函子, 原始递归式为:

$$R[\varphi, \psi](0, X) = \varphi(X);$$

$$R[\varphi, \psi](y', X) = \psi(y, X, R[\varphi, \psi](y, X)).$$

PRA 的项是 0, 客体变元以及形式为 s', $\varphi(s_1, \cdots, s_n)$ 的表达式, 其中 $s, s_1, \cdots, s_n$ 是项, φ 是函子.

PRA 的公式是形为 $r = s$ 的表达式, r, s 是项. 客体变元所能接受的值是自然数, 函数变元所能接受的值是原始递归函数 (有时是比原始递归函数更大一些的一类可计算函数, 见**原始递归函数** (primitive recursive function)).

为了描述半函数 (即并非处处有定义的函数), 除等号外, 还有谓词 ↑ 或! ("有定义"); 在这种情况下, 等式 $r = s$ 应解释为: r 有定义, 当且仅当 s 有定义. 一旦它们有定义, 一定取相同的值. 另外, 还必须增加一个表达一个函数的办法, 此方法对考虑的函数类处处有作用; 或者允许使用一个符号代表此函数, 或者这样的一条规则. 如果 t 是一个项, 而考虑

的函数类有一个固定的排列，则$\langle t\rangle$表示该排列中的第 t 个函数. $\forall$ 消除规则及 $\exists$ 引入规则必须作以下修改:

$$A(t)\&!t \to \exists x A(x);$$

$$\forall\ xA(x)\&!t \to A(t).$$

最后，还须增加公理 $!t$, t 是一个客体变元或者一个常项，以及形如下式的公理:

$$!\varphi(t) \to !t.$$

逻辑 - 数学演算也用来描述不同类型的可计算函数: 0 是一个类型（类型 0 的客体是自然数）; 如果 σ 及 τ 是类型，则 $(\sigma \to \tau)$ 是一个类型（该类型的客体是将 σ 的客体映到 τ 的客体的运算）. 这些都称为有穷类型（见**类型论**（types, theory of））. 也可以考虑超穷类型. 对每一个类型，引入该类型的变元及常项; 通常的情况下，其中包括一个符号，它代表 0 值运算; 引入客体符号 $'$, 它的型是 $(0 \to 0)$; 对每一类型 σ, 在型为 $(\sigma \to ((0 \to (\sigma \to \sigma)) \to (0 \to \sigma)))$ 的常项中，通常引入原始递归算子. 类型为 σ 的项包括该类型的变元和常项; 形为 $r(s)$ 的表达式，这里 r 是一个项，类型为 $\tau \to \sigma$, s 是一个项，类型为 τ; 还有形为 $\lambda x r$ 的表达式，它是一个泛函记号，表示将 x 转换成 $r(x)$, r 的类型为 β, x 的类型是 α 而 $\sigma=(\alpha \to \beta)$. 有穷类型泛函的无量词逻辑 - 数学演算用来研究带量词的逻辑 - 数学演算. 例如，使用原始递归泛函的一个无量词逻辑 - 数学系统，人们证明了形式算术的相对相容性; 如果对该系统再增加一个所谓的坝递归算子，则可证明形式分析理论的相对相容性.

某些逻辑 - 数学演算系统具有一个重要的性质——完全性（completeness）: 每一不含自由变元的公式可证或者可否证. 该性质蕴涵该系统的判定问题是可解的. 即是说，存在一个算法，它能判定每一公式是否可证. 这类系统的一个例子是代数闭域理论（也称 Tarski 系统（Tarski system））. 按 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem），完全理论是很稀少的. Gödel 不完全性定理是说: 任一协调的，递归可表达的逻辑 - 数学演算，如果含有算术系统中极小的某一部分，都是不完全的，那么大部分逻辑 - 数学演算系统，它们的判定问题都是算法不可解的.

逻辑 - 数学演算系统的一个重要刻画特征是它的表达力. 要增加系统的表达力，人们常常引入新的表达工具. 比如，可以对无量词的语言中引入新的逻辑联结词及受囿量词:

$$x=y\ \&\ u=v \text{ 意指 } |x-y|+|u-v|=0,$$

$$\forall x \leqslant a(f(x)=g(x)) \text{ 意指 } \sum_{x\leqslant a}|f(x)-g(x)|=0.$$

在形式算术系统的语言中，可以谈“有穷集合”，“半递归函数”等对象. 某些逻辑联结词可以由其他的逻辑联结词来表达; 比如，在二阶演算中（包括基于直觉主义逻辑的二阶演算），所有的联结词都可由 $\forall$ 及 $\to$ 来表达. $\exists x A(x)$ 等价于 $\forall P(\forall x(A(x) \to P) \to P)$. Tarski 定理（Tarski theorem）对一个系统的表达力作了限制: 假设给定的语言包括算术中最小的部分，该语言的所有公式有一个自然的排列，则无法找到一个公式 $T(x)$ 使得 $T(n)$ 为真，当且仅当 n 是某个真公式的排列序号. 对某些基于构造性逻辑（直觉主义逻辑）的逻辑 - 数学演算，所谓的析取定理成立: 如果一个闭的形为 $A \vee B$ 的公式是可证的，则至少 A, B 中的一个是可证的. 为了了解这些逻辑 - 数学演算系统的结构，人们考虑了各种类似于**可实现性**（realizability）的概念及其相关问题. 比如，逻辑 - 数学演算系统的协调性; 系统中某一个假设的独立性; 个体公理系统（individual axiomatics）的存在性（即是说，每一个可证明公式 A, 都有一个推导过程，该过程仅在运用蕴涵规则时使用假设，同时只使用 A 出现的符号）; 某些逻辑 - 数学演算系统到另一些逻辑 - 数学演算系统中的嵌入的存在性; 等等. 这些问题都属于**证明论**（proof theory）的范围.

参考文献

[1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1, Springer, 1968.

[2] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964).

[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics North-Holland, 1951.

[4] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[5] Lyndon, R. C., Notes on logic, v. Nostrand, 1966.

Г. Е. Минц 撰

【补注】“逻辑 - 数学演算”一术语在西方科学界中并不通用: 对该概念西方用的名称是“（一阶）理论”((first-order) theory).

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.

[A2] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model theory, North-Holland, 1973.

王 驹 译

逻辑斯谛分布 [logistic distribution; логистическое распределение]

分布函数为 $\psi(ax+b)$ 的概率分布，其中 a 是尺度参数，b 是位移，而

$$\psi(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

函数 $\psi(x)$ 满足微分方程

$$\frac{d\psi}{dx}=\psi(1-\psi).$$

逻辑斯谛分布接近**正态分布**(normal distribution):

$$\sup_x|\psi(1.7x)-\Phi(x)|<0.01,$$

其中$\Phi(x)$是均值为0而方差为1的正态分布函数．对于假设"来自逻辑斯谛分布的两个样本的分布函数相同"对备选假设"逻辑斯谛分布可能有不同位移"的检验，**Wilcoxon 检验**(Wilcoxon test)以及**Mann-Whitney 检验**(Mann-Whitney test)是渐近最优的．在数据处理和解释推论时，逻辑斯谛分布往往比正态分布更适用．在应用中还使用多维逻辑斯谛分布．

参考文献

[1] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

[2] Cox, C. R., Hinkley, D. V., Theoretical statistics, Chapman & Hall, 1974.

А. И. Орлов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Distribution in statistics, 1, Continuous univariate distributions, Wiley, 1970.

周概容 译

逻辑斯谛 [logistics; логистика]

人们在企图将逻辑论证归化为形式计算的努力中，建立起来的一些逻辑系统．在古代和中世纪，"符号逻辑"一词指算术计算的实际操作．G. Leibniz (17 世纪末) 使用该词指称推理的演算．20 世纪初该词指**数理逻辑** (mathematical logic).

В. Е. Плиско 撰 王 驹 译

Lommel 函数 [Lommel function; Ломмеля функция]

非齐次 **Bessel 方程** (Bessel equation)

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=x^\rho$$

的解．如果$\rho=\nu+2n$，其中n是自然数，则

$$y=(-1)^{n-1}(n-1)!2^{\nu+2n-2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{x}{2}\right]^{\nu+2k}\frac{\Gamma(\nu+n)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

如果数$\rho+\nu\geqslant0$和$\rho-\nu\geqslant0$不是整数，则

$$y=2^{\rho-2}\Gamma\left[\frac{\rho+\nu}{2}\right]\Gamma\left[\frac{\rho-\nu}{2}\right]\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{\rho+2k}}{\Gamma(k+1+(\rho+\nu)/2)\Gamma(k+1+(\rho-\nu)/2)}.$$

如果$\rho=\nu-2n\ (n\geqslant0)$是整数，而$\nu$不是整数$(\leqslant n)$，则

$$y=\frac{\Gamma(\nu-n)}{n!\,2^{-\nu+2n+2}}\Bigg[2J_\nu(x)\ln\frac{x}{2}+$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{\Gamma(\nu-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2k}+$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}-\left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right)\Bigg].$$

其中，当$n=0$时，第一个和取为零，而$J_\nu(x)$是 **Bessel 函数** (Bessel functions)．两个变量的 Lommel 函数也已知道．

亦见 **Anger 函数** (Anger function)；**Weber 函数** (Weber function)；**Struve 函数** (Struve function).

E. Lommel ([1]) 研究过这个函数．

参考文献

[1] Lommel, E., Zur Theorie der Bessel'schen Funktionen IV, *Math. Ann.*, **16** (1880), 183 – 208.

[2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1, Cambrige Univ. Press, 1952.

[3] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947 (中译本: E. 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1977).

Е. Д. Соломенцев 撰 张鸿林 译

Lommel 多项式 [Lommel polynomial; Ломмеля многочлен]

关于z^{-1}的m次多项式$R_{m,\nu}(z)$，对$m=0,1,\cdots$和任何ν，它定义为

$$R_{m,\nu}(z)=$$

$$=\frac{\pi z}{2\sin\nu\pi}\left[J_{\nu+m}(z)J_{-\nu+1}(z)+(-1)^mJ_{-\nu-m}(z)J_{\nu-1}(z)\right]$$

或

$$R_{m,\nu}(z)=\frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)}\left[\frac{2}{z}\right]^m\times$$

$$\times{}_2F_3\left[\frac{1-m}{2},-\frac{m}{2};\ \nu,-m,1-\nu-m;-z^2\right].$$

其中$J_\mu(z)$是 **Bessel 函数** (Bessel functions)、${}_2F_3$是**超几何级数** (hypergeometric series)．Lommel 多项式满足关系式

$$J_{\nu+m}(z)=J_\nu(z)R_{m,\nu}(z)-J_{\nu-1}(z)R_{m-1,\nu+1}(z),$$

$$R_{0,\nu}(z)=1,\ m=1,2,\cdots.$$

参考文献

[1] Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni, R. P., Formulas and theorems for the special functions of ma-

thematical physics, Springer, 1966.

А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

Longman 法 [Longman method; Лонгмана метод]

近似计算定积分

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

的一种方法，其中 f 在区间 $[a, b]$ 内部恰有 n 个根 x_i:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n < b = x_{n+1},$$

并满足下述条件. 令

$$v_i = (-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \ i = 0, \cdots, n,$$

则 $I = S$, 其中

$$S = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j v_j.$$

假定 f 在区间 (x_i, x_{i+1}) 内保持定号，在相邻区间中符号不同，且 $v_i \neq 0$, $i = 0, \cdots, n$. 这样的函数称为振荡的 (oscillatory). 由于实用上不可能有振荡函数在整个区间 $[a, b]$ 上很好的近似，所以对于大的 n 值，用求积公式难于计算 I. 利用等式 $I = S$ 导致需要计算所有积分 v_j, 这在 n 很大的情形也是不可取的.

用 Longman 法近似计算 I 基于等式 $(n \geqslant p)$

$$S = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k 2^{-k-1} \Delta^k v_0 + \\ +(-1)^n \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-k-1} \Delta^k v_{n-k} + \\ + 2^{-p}(-1)^p \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \Delta^p v_k. \tag{1}$$

(1) 中的 v_j 的有限差分表现为离散自变量 j 的函数:

$$\Delta v_j = v_{j+1} - v_j, \ j = 0, \cdots, n-1,$$

$$\Delta^{r+1} v_j = \Delta^r v_{j+1} - \Delta^r v_j.$$

$$r = 1, \cdots, p-1; \ j = 0, \cdots, n-r-1.$$

如果 v_j 使得可以忽略 (1) 的右边含有 p 阶有限差分的项，则可用近似等式

$$S \cong \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k 2^{-k-1} \Delta^k v_0 + (-1)^n \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-k-1} \Delta^k v_{n-k} \tag{2}$$

计算 S. 为计算 (2) 的右边，只需知道前 p 个 v_j 即 $v_0, \cdots, v_{p-1}$ 的值和后 p 个 v_j 即 $v_{n-p+1}, \cdots, v_n$ 的值. Longman 法即在于用 (2) 近似计算和 S.

如果积分 I 的积分上限 $b = +\infty$ 且

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i,$$

则必须用等式 (Euler 变换 (Euler transform))

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i 2^{-i-1} \Delta^i v_0$$

来代替 (1) 并用部分和来代替上式右边的级数.

此方法为 I. M. Longman 提出 ([1]).

参考文献

[1] Longman, I. M., A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions, *Math. Comput.*, **14** (1960), 69, 53 - 59.

[2] Davis, P. J., Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1984 (中译本: P. J. Davis, P. Rabinowitz. 数值积分法，高等教育出版社，1986).

И. П. Мысовских 撰 沈永欢 译

幺拟群 [loop; лупа]

具有单位元的**拟群** (quasi-group), 即具有元素 e, 使得对于拟群中任意元素 x 均有 $xe = ex = x$. 在拟群理论中下述定理确定了幺拟群的意义: 任一拟群同痕于一个幺拟群 (见**同痕** (isotopy)). 于是，拟群理论中的主要问题之一是，对于给定的拟群类刻画与之同痕的幺拟群.

对于每个幺拟群，存在三个与之相联的核. 幺拟群 $Q(\cdot)$ 中元素的集合

$$N_l = \{a: ax \cdot y = a \cdot xy, \text{对任意 } x, y \in Q\}$$

称为左核 (left kernel). 类似地可定义中核 (middle kernel) 和右核 (right kernel). 在幺拟群中它们总是存在的. 它们的交称为幺拟群的核 (kernel of the loop). 每个核是结合子幺拟群，即 $Q(\cdot)$ 的子群. 同痕的幺拟群中相应的核是同构的. 对于任一预先设定的核都有幺拟群存在. 同痕于群 $Q(\cdot)$ 的幺拟群 Q, 其本身也是群且同构于群 $Q(\cdot)$ (Albert 定理 (Albert theorem)). 特别地，同痕的群是同构的. 诸如自由幺拟群等其他一些幺拟群的类也具有这一性质. 幺拟群 $Q(\cdot)$ 称为是 G 幺拟群 (G-loop), 如果任意同痕于 $Q(\cdot)$ 的幺拟群都与之同构.

群论中的许多概念和结论都可推广到幺拟群的情形，但群的一些普通性质对于幺拟群并不成立. 例如一般讲，在有限幺拟群中 Lagrange 定理 (即: 子群的阶整除群的阶) 不成立. 然而，如果一个幺拟群中 Lagrange 定理确实成立，则称该幺拟群为 Lagrange 的 (Lagrangian). 如果幺拟群 $Q(\cdot)$ 的每个子幺拟群都是 Lagrange 的，则称 $Q(\cdot)$ 具有性质 L' (property L'). 一个幺拟群 $Q(\cdot)$ 具有性质 L' 的充分必要条件是: $Q(\cdot)$ 有一个正规链

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_n = e,$$

其中 Q_i 是 Q_{i-1} 中的正规子幺拟群，且对于所有的 $i = 1, \cdots, n$, Q_{i-1}/Q_i 具有性质 L'.

被研究得最多也最接近群的幺拟群是 **Moufang 幺**

拟群(Moufang loop). 关于它们的主要定理(Moufang 定理(Moufang theorem))是: 如果这样的一个幺拟群中三个元素 a、b、c 满足结合律, 即

$$ab \cdot c = a \cdot bc,$$

则它们生成一个结合子幺拟群, 即一个群. 特别地, Moufang 幺拟群是双结合的(di-associative), 即它的任意两个元素生成一个结合子幺拟群. Moufang 幺拟群这一性质是泛(universal)性质, 即它在同痕下保持不变: 同痕于 Moufang 幺拟群的幺拟群本身也是 Moufang 幺拟群.

最一般的幺拟群类之一是 IP 幺拟群(IP-loops)的类, 或具有可逆性质(invertibility property)的幺拟群. 它们由等式

$${}^{-1}x \cdot xy = y \quad 和 \quad yx \cdot x^{-1} = y$$

定义. 其中 ${}^{-1}x$ 和 x^{-1} 分别为 x 的左逆元和右逆元. Moufang 幺拟群是 IP 幺拟群. 在 IP 幺拟群中所有的核相等. Moufang 幺拟群的核是正规特征子幺拟群. IP 幺拟群这一性质不是泛性质. 进一步地, 如果任意同痕于 IP 幺拟群 $Q(\cdot)$ 的幺拟群都是 IP 幺拟群, 则 $Q(\cdot)$ 是一个 Moufang 幺拟群.

比 IP 幺拟群类更广泛的是 WIP 幺拟群(WIP-loops)的类, 或具有弱可逆性质(weak invertibility property)的幺拟群. 它们由等式 $x(yx)^{-1} = y^{-1}$ 定义. 该等式是泛性质, 如果

$$(yx)(\theta_y z \cdot y) = (y \cdot xz)y$$

对所有的 $x, y, z \in Q$ 成立, 其中 θ_y 是一个自同构. 这时 WIP 幺拟群的核是正规的, 而关于核的商幺拟群是 Moufang 幺拟群. WIP 幺拟群的一个特例是 CI 幺拟群(CI-loops), 或交叉可逆幺拟群(cross-invertible loops), 它由等式 $(xy)x^{-1} = y$ 定义.

Moufang 幺拟群的一个推广是(左) Bol 幺拟群(Bol loops), 其中有等式

$$x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)z$$

成立. 它们在同痕下是不变的, 且为单结合的(mono-associative), 即这种幺拟群中的每一个元素都生成一个结合子幺拟群.

拟群和幺拟群的理论中一个重要概念是伪自同构(pseudo-automorphism). 幺拟群 $Q(\cdot)$ 的一个置换 φ 称为左伪自同构(left pseudo-automorphism), 如果存在元素 $a \in Q$ 使得

$$\varphi(xy) \cdot a = \varphi(x)(\varphi y \cdot a), \text{对所有 } x, y \in Q,$$

φ 称为右伪自同构(right pseudo-automorphism), 如果存在元素 $b \in Q$ 使得

$$b \cdot \varphi(xy) = (b \cdot \varphi x)\varphi y, \text{对所有 } x, y \in Q.$$

如果 φ 既是左伪自同构又是右伪自同构, 就称 φ 为伪自同构, 而元素 a 和 b 分别称为左伴随(left companions)、右伴随(right companions). 对于幺拟群, 自同构是伪自同构的特例. IP 幺拟群中的每个伪自同构在其核中诱导出一个自同构, 而在交换 Moufang 幺拟群中伪自同构就是自同构.

在幺拟群的理论中, 内置换起重要的作用. 具有单位元 e 的幺拟群 $Q(\cdot)$ 中伴随群 G 的一个置换 α 称为内部的(inner), 如果 $\alpha e = e$. 全体内置换的集合 I 构成 G 的一个子群, 称为内置换群(group of inner permutations). 群 I 由三类置换生成:

$$L_{x,y} = L_{xy}^{-1} L_x L_y;\ R_{x,y} = R_{xy}^{-1} R_y R_x;\ T_x = R_x^{-1} L_x.$$

通过内置换可以定义 A 幺拟群(A-loops), 即所有内置换皆为自同构的幺拟群. 如果一个 A 幺拟群同时也是 IP 幺拟群, 则它是双结合的. 交换双结合 A 幺拟群是 Moufang 幺拟群. 对于交换 Moufang 幺拟群, 内置换是自同构.

群论中的一些定义可以搬到幺拟群上来. 例如, 一个幺拟群称为是 Hamilton 的(Hamiltonian), 若其任意子群都是正规的. Abel 群也被视为是 Hamilton 幺拟群. 具有有限阶元素的单结合 Hamilton 幺拟群是 Hamilton p 幺拟群的直和(p 幺拟群的定义方式与 p 群相同). 双结合 Hamilton 幺拟群或者是 Abel 群或者是直积 $A \times T \times H$, 其中 A 是元素阶均为奇数的 Abel 群, T 是指数为 2 的 Abel 群, 而 H 是满足附加条件的非交换幺拟群.

幺拟群 $Q(\cdot)$ 称为是全(偏)序的(totally (partially) ordered), 如果 Q 是(关于 $\leqslant$ 的)全(偏)序集, 并且 $a \leqslant b$ 蕴涵

$$ac \leqslant bc,\ ca \leqslant cb,$$

反之亦然. 如果一个全序幺拟群 $Q(\cdot)$ 的中心具有有限指数, 则 $Q(\cdot)$ 是中心幂零的. 满足关于元素的极小条件的格序幺拟群是自由 Abel 群.

亦有用伴随群的方法研究幺拟群的. 例如已被证明, 在一个幺拟群的正规子幺拟群和相应的伴随群的正规子群之间存在一一对应.

参考文献见**拟群**(quasi-group).

В. Д. Белоусов 撰 王 杰 译 石生明 校

解析幺拟群 [**loop, analytic; лупа аналитическая**]

具有**幺拟群**(loop)结构的**解析流形**(analitic manifold) M, 其基本运算(乘法和左、右除法)是 $M \times M$ 到 M 的解析映射. 设 e 是幺拟群 M 的单位元, $g(t)$ 和 $h(t)$ 是从 e 出发的解析路径, 且在 e 处具有切向

量 a 和 b，则路径 $k(t)$ 在 e 处的切向量 $c = ab$ 是向量 a 和 b 的双线性函数，这里

$$k(t^2) = (g(t)h(t))/(h(t)g(t)),$$

而 / 代表右除. e 处的切空间 $T(M)$ 赋以乘法运算 $c = ab$，称为幺拟群 M 的切代数 (tangent algebra of the loop). 在元素 $e = (0, \cdots, 0)$ 的某个邻域 U 中，坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 称为是第一类典范的 (canonical of the first kind)，如果对于任一向量 $a = (a^1, \cdots, a^n)$，曲线 $x(t) = (a^1 t, \cdots, a^n t)$ 是局部单参数子群 ($|t| \leqslant \varepsilon$)，且在 e 处的切向量为 a (见[1]). 幂结合的解析幺拟群 (见**结合幂代数** (algebra with associative power)) 具有第一类典范坐标系 (见[2]). 这时对于充分小的 a 定义映射 $a \to x(1)$，即可将 U 与 $T(M)$ 中原点的一个邻域等同起来，进而赋予 $T(M)$ 一个局部解析幺拟群 M_0 的结构. 如果解析幺拟群 M 是交错的，即它的任意两个元素生成一个子群，则切代数 $T(M)$ 是一个**二元 Lie 代数** (binary Lie algebra)，而 M_0 中的乘法 $(x, y) \mapsto x \circ y$ 可用 **Campbell-Hausdorff 公式** (Campbell-Hausdorff formula) 表出. 域 $\mathbf{R}$ 上的任意有限维二元 Lie 代数为且仅为一个 (精确到局部同构的) 局部交错解析幺拟群的切空间 (见[1]).

解析的 **Moufang 幺拟群** (Moufang loop) 被研究得最为充分. 一个解析的 Moufang 幺拟群，其切代数满足等式

$$x^2 = 0,\ J(x, y, xz) = J(x, y, z)x,$$

其中

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y;$$

这样的代数称为 Мальцев 代数 (Mal'tsev algebra). 反之，$\mathbf{R}$ 上任一有限维 Мальцев 代数是某个单连通解析 Moufang 幺拟群 M 的切代数，且 M 在同构意义下是唯一的 (见[2]，[3]). 如果 M' 是一具有相同切代数的连通解析 Moufang 幺拟群，从而与 M 局部同构，则存在满同态 $M \to M'$，其核 H 是 M 的一个离散正规子群. 空间 M' 的基本群 $\pi(M')$ 同构于 H. 如果 φ 是单连通解析 Moufang 幺拟群 M 到连通解析 Moufang 幺拟群 M' 的局部同态，则 φ 可唯一地扩充成为 M 到 M' 的一个同态. 具有可解 Мальцев 切代数的单连通解析 Moufang 幺拟群的空间必解析同构于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ (见[3]).

参考文献

[1] Мальцев, А. И.,《Матем. сб.》, **36** (1955), 3, 569-576.

[2] Кузьмин, Е. Н.,《Алгебра и логика》, **10** (1971), 1, 3-22.

[3] Кердман, Ф. С.,《Докл. АН СССР》, **249**(1979), 3, 533-536.

Е. Н. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chein, O., Pflugfelder, H. and Smith, J. D. H. (eds.), Theory and application of quasigroups and loops, Heldermann, 1989.

王杰 译 石生明 校

闭路 (拓扑学中的) [loop (in topology); петля]

一条闭道路 (path). 详细地说，一条闭路 f 是一个**连续映射** (continuous mapping)，将区间 $[0, 1]$ 映入拓扑空间 X，并满足 $f(0) = f(1)$. 在空间 X 中指定点 $*$，所有适合条件 $f(0) = f(1) = *$ 的全体闭路所构成的集合就是**闭路空间** (loop space).

М. И. Войцеховский 撰 沈信耀 译 余建明 校

闭路空间 [loop space; петель пространство]

在拓扑空间 X 中指定点 $*$，所有在点 $*$ 的全体闭路 (见**闭路 (拓扑学中的)** (loop (in topology))) 组成的空间 ΩX，其拓扑为紧开拓扑. 闭路空间是空间 X 上的 **Serre 纤维化** (Serre fibration) (E, p, X) 的纤维 (这里 E 为**道路空间** (path space)).

【补注】

А. Ф. Харшиладзе 撰

参考文献

[A1] Adams, J. F., Infinite loop spaces, Princeton Univ. Press, 1978.

沈信耀 译 余建明 校

Lorentz 力 [Lorentz force, Лоренца сила]

给定电磁场施加于运动带电粒子上的力. Lorentz 力 $\mathbf{F}$ 的表达式是 H. A. Lorentz 首先给出的 (见[1]). 在国际单位制下，它的形式是:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \tag{1}$$

其中 $\mathbf{E}$ 是电场强度，$\mathbf{B}$ 是磁感应强度，$\mathbf{V}$ 是相对于量 $\mathbf{E}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{F}$ 在其中计算的坐标系中带电粒子的速度，e 是粒子的电荷. Lorentz 力的表达式 (1) 是相对论性不变式 (即它在任何惯性参考系中都适用); 它使得把电磁场方程与带电粒子运动方程联系起来成为可能.

在恒定均匀磁场中，具有质量 m 和电荷 e 的粒子的运动，在非相对论近似 ($|\mathbf{V}| \ll c$，c 是真空中光速) 下，由方程

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = e[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \tag{2}$$

描述. 在 z 轴沿外磁场 B 方向的直角坐标系中，(2) 的解具有形式为

$$x = x_0 + r_L \sin(\omega_L t + \alpha),$$
$$y = y_0 + r_L \cos(\omega_L t + \alpha),$$
$$z = z_0 + \mathbf{V}_{0z} t,$$

其中 $\omega_L = e|\mathbf{B}|/m$ 是粒子回旋的 Larmor 频率，而 $r_L = |\mathbf{V}_{0t}|/\omega_L$ 是粒子的回旋半径 (**Larmor 半径** (Larmor

radius)), α 是回旋的初相位，$\mathbf{V}_0$ 是粒子的初速度．因而，在均匀磁场中电荷沿螺旋线运动，螺旋轴沿磁场方向．

如果电场 $\mathbf{E}$ 不等于零，运动具有更复杂的性质．这时会发生粒子回旋中心穿越磁场 $\mathbf{B}$ 的位移（所谓漂移（drift））．漂移的平均值，写成向量形式是

$$\mathbf{V}_d = \frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|^2}.$$

在这个情况下，粒子在 xy 平面的未平均运动沿次摆线进行．

参考文献

[1] Lorentz, H. A., The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat, Teubner, 1909.

[2] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (中译本: Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席茨，场论，人民教育出版社，1959).

В. В. Параил 撰

【补注】

参考文献

[A1] Levich, B. G., Theoretical Physics, 1, North-Holland, 1970.

[A2] Hylleraas, E. A., Mathematical and theoretical physics, 2, Wiley, 1970.

[A3] Clemmow, P. C. and Dougherty, J. P., Electrodynamics of particles and plasmas, Addison-Wesley, 1969.

徐锡申 译

Lorentz 变换 [Lorentz transformation; Лоренца преобразование]

伪 Euclid 空间 (pseudo-Euclidean space) 中把两个 **Galileo 坐标系** (Galilean coordinate system) 联系起来的坐标变换；换句话说，一个 Lorentz 变换使所谓事件间隔的平方保持不变．Lorentz 变换是 Euclid 空间中正交变换的模拟（或运动概念的推广）．Lorentz 变换形成一个群，称为 Lorentz 群 (Lorentz group)（或一般 Lorentz 群 (general Lorentz group)），用 L 来表示．Lorentz 变换在狭义相对论的四维时空中得到应用；狭义相对论中，对 Galileo 坐标 x, y, z, t，间隔 s 具有形式

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

其中 c 是真空中光速．

人们经常考虑的是 Lorentz 变换的更狭类．因而，保持坐标 t 的正负号不变的 Lorentz 变换形成所谓正时 Lorentz 群 (orthochronous Lorentz group) $L_{\uparrow}$．变换矩阵具有正行列式的 Lorentz 变换称为正常 Lorentz 变换 (proper Lorentz transformation) 并形成正常 Lorentz 群 (proper Lorentz group) L_+．$L_{\uparrow}$ 和 L_+ 之交简单地称为 Lorentz 群 (Lorentz group)．

一般 Lorentz 群包括下列这样一些变换的组合：空间反射，时间反演，空间旋转，以及从物理观点来看是从一个惯性坐标系到相对于它以速度 V 运动的另一个坐标系的变换，而从数学观点来看是在具有伪 Euclid 度规的平面内通过角度 ψ 的双曲旋转这样的变换．后一类型变换的存在是 Lorentz 变换群的具体特色．

对于从 Galileo 坐标系 x', y', z', t' 向相对于该坐标系以平行于 x' 轴的速度 V 运动的 Galileo 坐标系 x, y, z, t 的转变，这些变换具有形式：

$$x = \frac{x' - Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z',$$

$$t = \frac{t' - Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

如果通过公式

$$\sinh\psi = \frac{-V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

引进双曲旋转角 ψ，则 Lorentz 变换取下列形式：

$$x = x'\cosh\psi + ct'\sinh\psi,$$
$$ct = x'\sinh\psi + ct'\cosh\psi,$$
$$y = y',$$
$$z = z'.$$

这些变换通常简单地称为 Lorentz 变换．它们并不形成一个群：具有非平行速度向量的三个双曲旋转的作用可给出寻常空间旋转，所谓 Thomas 旋进 (Thomas precession)．

人们经常对一般 Lorentz 变换补充以原点的位移，从而获得所谓 Poincaré 变换 (Poincaré transformation)，它们形成 Poincaré 群 (Poincaré group)．

Lorentz 变换群的性质类似于**正交群** (orthogonal group) 的性质．差别在于存在空间反射和时间反演两种类型变换，以及 Lorentz 变换群的非紧性（因为伪 Euclid 空间中的单位球，即直到原点的间隔的模数等于 1 的点集，是非紧的）这样的事实．

Lorentz 变换的物理应用与 Einstein 的**相对性原理** (relativity principle) 相联系．根据这个原理，除引力定律外的一切物理定律，在 Lorentz 变换下是不变的．在许多情况下，例如在公理式量子场论中，这个假设和其他同等普遍的假设的应用，使得对各种物理量之间函数依存关系的形式作出深远推论成为可能．

在物理学各个分支中（尤其是在基本粒子理论中），齐次 Lorentz 群和 Poincaré 群两者的表示都有广泛应用．根据 Einstein 相对性原理，具有不同变换性质的物理量——向量、旋量、张量——是按 Lorentz 群的各种不同表示进行变换的．结果弄清楚的是，Poin-

caré 群的有关酉表示可以由两个不变量来表征，这两个不变量可认为是粒子的质量和自旋，它们的量子力学态按所述酉表示变换．

无穷小 Lorentz 变换，即通过无穷小角度的转动，经常用于获得各种各样守恒律．

Lorentz 变换还有在伪 Riemann 空间的切空间中的应用；这些变换与所谓局域时空对称性（local space-time symmetries）有关．

Lorentz 变换的名称来源于 H．Lorentz 在电子论中的工作，它们在这个理论的表述中曾起过重要作用．

参考文献

[1] Ландау，Л．Д．，Лифшиц，Е．М．，Теория поля，6 изд．，т．2．，М．，1973（中译本：Л．Д．朗道，Е．М．栗弗席茨，场论，人民教育出版社，1959）．

[2] Наймарк，М．А．，Линейные представления группы Лоренца，М．，1958．

[3] Физический энциклопедический словарь，т．3，М．，1963．

Д．Д．Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wigner，E．P．，Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections，in Istambul Summer School of Theoretical Physics，1962，Gordon & Breach，1964，37－80．

[A2] Wightman，A．S．，L'invariance dans la mécanique quantique relativiste，in Ecole d'Eté de physique Théorique：LesHouches，1960，Hermann & Wiley，1960，159－226．

[A3] Ruhl，W．，The Lorentz group and harmonic analysis，Benjamin，1970．

[A4] Saxl，R．U．and Urbantke H．K．，Relativität，Gruppen，Teilchen，Springer，1976．

徐锡申 译

Lorenz 吸引子 [Lorenz attractor；Лоренца аттрактор]

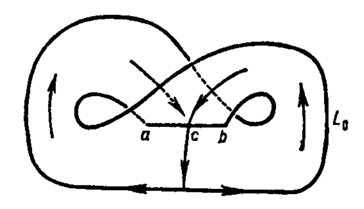
某个光滑流$\{S_t\}$的三维相空间的一个紧不变集L，它有下述复杂的拓扑构造而且是渐近稳定的（即为 Ляпунов 稳定的，而且L的某个邻域中的一切轨道当$t\to\infty$时都趋向L）．吸引子（即一个吸引集）的概念时常只包含这两个性质中的后一个；然而 Lorenz 吸引子和其他有实际重要性的吸引子都同时具有这两个性质．

Lorenz 吸引子最初出现在 E．Lorenz 的数值试验中（[1]）．他对参数σ,r,b的特定值研究了以下方程组的轨道的性态：

$$\dot{x}=-\sigma x+\sigma y,\dot{y}=rx-y-xz,\dot{z}=-bz+xy,\qquad(*)$$

（这个方程组是作为一个流体力学问题的第一个非平凡的 Галёркин 近似引入的；由此也启发了对参数取以下值：$\sigma=10$，$r=28$，$b=8/3$，但它也出现在其他物理问题中，见[2]，[3]）．在[4]中将[1]的结果和数值试验的新数据与光滑动力系统理论的理论概念以很一般的方式来加以比较．在[5]中，[1]的结果被解释为：它指明方程组（*）有吸引子存在（称为 Lorenz 吸引子（Lorenz attractor）)，它在许多方面类似于**双曲集**（hyperbolic set），但又不是这种集合（主要差别在于 Lorenz 吸引子含有一个具一个正本征值的鞍点型平衡位置；对于方程组（*），原点就是这个平衡位置）．Lorenz 吸引子的存在和它的一些性质都可以从某曲面Π（对于方程组（*），Π可取为平面$z=27$）上的 **Poincaré 返回映射**（Poincaré return map）的特定性质得出，但是这些性质的确切的表述却十分繁冗（见[6]，[9]，[12]，[13]），要对某一特定方程组（包括（*））去验证它，必须求助于数值积分．相应于此，关于 Lorenz 吸引子的研究分两种类型．

1）在理论性质的研究中，从一开始就要假设所考虑的流在某曲面Π上有适当的 Poincaré 返回映射，由此导出 Lorenz 吸引子的种种性质．它的构造可描述如下（[8]）．考虑一个"分支流形"L_0，在其上对$t\geqslant0$定



义了一个流φ_t（如图所示）．设在分支线ab上 Poincaré 返回映射是（一致）扩张的，即是说在其各点上（c点除外，它在c点是不连续的）其导数均大于某个$\lambda>1$（任一个这样的λ都行，但若取$\lambda>\sqrt{2}$研究会得到简化，$\lambda>\sqrt{2}$与上述的（*）的参数σ,r,b的计算数据是相容的）．偶$\{(L_0,\varphi_t)\}$自然地构成拓扑空间和映射的逆谱（见**空间的谱**（spectrum of spaces））；它的极限是$(L,S_t|_L)$．（关于 Lorenz 吸引子的构造的进一步的研究都依赖于这个描述（[8]，[11]），所以就自然地把这个描述归入 Lorenz 吸引子的定义中了．特别在不把其定义与 Poincaré 映射的特殊性质联系起来时是这样）．Lorenz 吸引子具有**拓扑传递性**（topological transitivity），而且其周期轨道的集合在L中稠密．对这样一个具有适当 Poincaré 映射的流作一（C^1意义下的）小扰动，则扰动后的流仍有一个 Lorenz 吸引子，它与原来的流的 Lorenz 吸引子很接近，但一般说来并不同胚于它．在这个意义下，Lorenz 吸引子在小扰动下被保存（在光滑动力系统理论中其构造在某种程度上研究得较好的紧不变集，只有（1982）两类（即 Lorenz 吸引子和局部极大**双曲集**（hyperbolic set））有此性质，但 Lorenz 吸引子（与后一情况相对照）没有**局部结构稳定性**（local structural stability）．Lorenz 吸引子相对于某个"自然的"不变测度的遍历性质在[7]和[14]中研究过．

2) 为了在一个(*)类型的特定系统中找到一个Lorenz吸引子，并且更精确地确定它的性质，必须要应用数值积分加上各种理论论证(见[7],[9])．按这种方式研究过在(*)中当r和σ变化时分歧的产生并导致Lorenz吸引子的出现([9])．自然，数值积分本身也给出关于吸引子的某些信息(因为轨道随着时间接近吸引子，所以在图中当计算出轨道与Π的各个交点后，这些点的位置分布在接近于吸引子的地方显著地比远离它的地方"稠密得多"，这一点是很引人注目的)．

这方面的材料很多；例如找到了使(*)有Lorenz吸引子的新的参数值的范围([10])．然而，这里拓扑结构的细节，可能与"标准的"Lorenz吸引子不同，尚未弄清楚．

对阶数高于三的系统所作的数值试验，迄今还没有对其数据作过理论解释．

参考文献

[1] Lorenz, E. N., Deterministic non-periodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), 2, 130 – 141.

[2] Монин, А.С., 《Успехи физич. наук》, **125** (1978), 1, 97 – 122.

[3] Рабинович, М.И., 《Успехи физич. наук》, **125** (1978), 1, 123 – 168.

[4A] McLughlin, J. B. and Martin, P.C., Trnasition to turbulence of a statically stressed fluid system, *Phys. Rev. Letters*, **33** (1974), 1189 – 1192.

[4B] McLughlin, J.B. and Martin, P.C., Transition to turbulence of a statically stressed fluid system, *Phys. Rev. Ser. A*, **12** (1975), 186 – 203.

[5] Ruelle, D., The Lorentz attractor and the problem of turbulence, in R. Temam (ed.): Turbulence and Navier-Stokes equations, Lecture notes in math., Vol. 565, Springer, 1976, 146 – 158.

[6] Marsden, J. E., MacCracken, M. and Oster, G. F., The Hopf bifurcation and its applications, Springer, 1976(俄译本(Mir (1980) 出版)中有一个关于 Lorenz 吸引子的附录).

[7A] Синай, Я.Г., Стохастичность динамических систем, в кн.: Нелинейные волны, М., 1979, 176 – 212.

[7B] Бунимович, З.А. и Синай, Я.Г., Стохастичность аттрактора в моделе Лоренза, в кн., Нелинейные волны, М, 1979, 212 – 226.

[8A] Williams, R. F., The structure of Lorenz attractors, in R. Temam (ed.): Turbulence and Navier–Stokes equations, Lecture notes in math., Vol. 565, Springer, 1976, 146 – 158.

[8B] Williams, R. F., The structure of Lorenz attractors, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 73 – 100.

[9] Афраймович, В.С., Быков, В.В. и Шильников, Л.П., 《Докл. АН СССР》, **234** (1977), 2, 336–339.

[10] Morioka, N. and Shimizu, T., Transition between turbulent and periodic states in the Lorenz model, *Phys. Letters* **66A** (1978), 6, 447 – 449.

[11] Rand, D., The topological classification of Lorenz attractors, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **83** (1978), 3, 451 – 460.

[12] Афраймович, В. С., Быков, В. В. и Шильников, Л. П., 《Труды моск. матем. общ.》, **44** (1982), 150 – 212.

[13] Guckenheimer, J. and Williams, R.F., Structural stability of Lorenz attractors, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 59 – 72.

[14] Pesin, Ya., Ergodic properties and dimensionlike characteristics of strange attractors that are close to hyperbolic, in *Proc. Internat. Congress Mathematics, Berkely 1986*, Amer. Math. Soc., 1987, 1195 – 1209.

Д.В. Аносов 撰 齐民友 译

损失函数[loss function; потерь функция]

统计判定问题中，对于试验的每一种可能结局表示试验者损失(成本)的非负函数．设X是在样本空间$(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathrm{P}_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$中取值的随机变量；$D=\{d\}$是根据X的实现关于参数θ可以作出的一切可能判决的空间．在决策函数理论中，定义在$\Theta\times D$上的任一非负函数L称为损失函数．当参数的真值为θ时$(\theta\in\Theta)$，损失函数L在任一点$(\theta,d)\in\Theta\times D$的值表示作出判决$d(d\in D)$所造成的损失．

参考文献

[1] Wald, A., Statistical decision functions, Wiley, 1950 (中译本: A. 瓦尔特，统计决策函数，上海科学技术出版社，1960).

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

М.С.Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, J., Statistical decision theory and Bayesian analysis, Springer, 1985.

周概容 译

Löwenheim-Skolem 定理[Löwenheim-Skolem theorem; Лёвенхейма-Сколема теорема]

见 **Gödel 完全性定理**(Gödel completeness theorem).

下界[lower bound; нижняя грань]，集合的

见**上界和下界**(upper and lower bounds).

拓扑族 F 的下界[lower bound of a family of topologies; нижняя грань семейства топологий]，在单个集合 X 上给出的

拓扑族 F 的集合论交 $\bigcap F$，通常记为 $\wedge F$，它总是 X 上的一个拓扑结构．若 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两

个拓扑结构，且 $\mathscr{T}_1$（作为集合）含于 $\mathscr{T}_2$，则记为 $\mathscr{T}_1 \leqslant \mathscr{T}_2$.

拓扑结构 $\wedge F$ 具有下述性质：若 $\mathscr{T}_1$ 是 X 上的拓扑结构，并且对所有 $\mathscr{T}\in F$ 有 $\mathscr{T}_1 \leqslant \mathscr{T}$，则有 $\mathscr{T}_1 \leqslant \wedge F$. 把 F 中所有的拓扑结构逐个赋予 X 而得的那些空间的自由和可以典范地映成空间（X, $\wedge F$）. 这个映射有一个重要的性质，即它是一个**商映射**（quotient mapping）. 据此可以证明与在拓扑交运算下保持的一系列性质有关的某些一般的定理.

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974（英译本：Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1989）.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 上文实际上定义的是拓扑族的下确界（infimum of the family of topologies），它是该族的一个特殊的（最大的）下界：F 的任何下界（拓扑结构）$\leqslant$ 这个下确界.

胡师度、白苏华 译

下极限 [lower limit; нижний предел]，拓扑空间 X 中集合序列 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的

满足下列条件的点 $p\in X$ 的集合：点 p 的每个邻域都与该序列自某个 N 起的所有元素相交.

数列的下极限见**上极限与下极限**（upper and lower limits）.

А. А. Мальцев 撰

【补注】 $\{A_i\}_i$ 的下极限记为 $\mathrm{Li}\, A_n$.

参考文献

[A1] Kuratowski, C., Topology, I, PWN & Acad. Press, 1966（译自法文）.

胡师度、白苏华 译

Löwner 方程 [Löwner equation; Лёвнера уравнение]

形如

$$\frac{dw}{dt} = -w\,\frac{1+e^{i\alpha(t)}w}{1-e^{i\alpha(t)}w}$$

的微分方程，其中 $\alpha(t)$ 是区间 $-\infty < t < \infty$ 上的实值连续函数. Löwner 方程的推广是 Куфарев-Löwner 方程（Kufarev-Löwner equation）

$$\frac{dw}{dt} = -wP(w, t),$$

其中 $P(w, t)$, $|w|<1$, $-\infty < t < \infty$，对固定的 w 是 t 的可测函数，又是具有正实部的 w 的正则函数，且由条件 $P(0, t)=1$ 作了标准化. 在单叶函数论中提出的 Löwner 方程与 Куфарев-Löwner 方程是研究共形映射极值问题的**变分参数法**（variation-parametric method）的基础.

Куфарев-Löwner 方程的解 $w(t, z, \tau)$, $w(\tau, z, \tau)=z$ 可视为初始值 z 的函数，对于任何 $t>\tau$，它把圆盘 $|z|<1$ 共形映射为属于圆盘 $|w|<1$ 的单叶单连通区域. 通过适当选取 Куфарев-Löwner 方程中的 $P(w, t)$ 和复常数 a, b，由公式

$$f(z) = a + b\lim_{t\to\infty} e^t w(t, z, 0)$$

可以得到圆盘 $|z|<1$ 中的任一正则单叶函数. 特别地，用这一方法，Löwner 方程产生该圆盘到从全平面沿某条 Jordan 弧作出一条裂纹而得的区域的共形映射（见[1]－[4]）.

函数

$$f(z, \tau) = \lim_{t\to\infty} e^t w(t, z, \tau)$$

所满足的偏微分方程

$$\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} = z\,\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial z}\,P(z, \tau)$$

也称为 Куфарев-Löwner 方程.

Löwner 方程是 K. Löwner（[1]）建立的；Куфарев-Löwner 方程则由 П. П. Куфарев（见[5]）得到.

参考文献

[1] Löwner, K., Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I, *Math. Ann.*, **89** (1923), 103－121.

[2] Куфарев, П. П.,《Ученые зап. Томск. ун-та》, **5** (1947), 20－21.

[3] Pommerenke, C., Ueber die Subordination analytischer Funktionen, *J. Reine Angew. Math.*, **218** (1965), 159－173.

[4] Гутлянский, В. Я.,《Докл. АН СССР》, **194** (1970), 4, 750－753.

[5] Куфарев, П. П.,《Матем. сб.》, **13** (1943), 1, 87－118.

[6] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（英译本：Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969）.

В. Я. Гутлянский 撰

【补注】 更多的信息亦见 **Löwner 法**（Löwner method）.

杨维奇 译

Löwner 法 [Löwner method; Лёвнера метод]，亦称单叶函数的 Löwner 参数表示法（Löwner method of parametric representation of univalent functions），Löwner 参数法（Löwner parametric method）.

单叶函数论中的一种方法是利用 **Löwner 方程**（Löwner equation）求解极值问题. 该方法由 K. Löwner（[1]）提出. 它基于这样一个事实：在圆盘 $E=\{z: |z|<1\}$ 内正则单叶并把 E 映射成（s）型区域（见 **Смирнов 区域**（Smirnov domain）），即从圆盘 $|w|<1$ 沿着自圆周 $|w|=1$ 上一点出发且不过点 $w=0$ 的 Jordan 弧的一部分作出裂纹而得到的区域的函数 $f(z)$

$(f(0)=0)$ 的集合，是 E 内正则单叶且使得 $|f(z)|<1$ 的函数 $f(z)(f(0)=0)$ 的整个函数族中的完全集（关于 E 内函数的一致收敛拓扑）. 把已移动的弧的长度与参数 t 联系起来，便建立了如下结果：单叶映射 E 为 (s) 型区域 D 的函数 $w=f(z), f(0)=0$，是微分方程（见 **Löwner 方程**（Löwner equation））

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t)\frac{1+k(t)f(z, t)}{1-k(t)f(z, t)} \quad (*)$$

满足初始条件 $f(z, 0)=z$ 的解 $f(z, t_0)=f(z)$. 此处 $t\in[0, t_0]$, $k(t)$ 是对应于 D 的区间 $[0, t_0]$ 上的连续复值函数，同时 $|k(t)|=1$. Löwner 曾利用这一方法得到 E 内正则单叶函数 $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$，所组成的 S 类函数的展开式

$$w=f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_n z^n$$

和

$$z=f^{-1}(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_n w^n$$

中系数 c_3 和 $b_n(n=2, 3, \cdots)$ 的精确估计.

利用 Löwner 方法已得到单叶函数论中的一些基本结果（畸变定理，倒数增长定理，旋转定理）（见[3]）. 设 S' 是 S 中函数 $f(z)$ 在 E 内具有表示式

$$f(z)=\lim_{t\to\infty}e^t f(z, t)$$

的所组成的子类，其中 $f(z, t)$ 作为 z 的函数在 E 内正则单叶，$|f(z, t)|<1, f(0, t)=0, f_z'(0, t)>0$，作为 t 的函数，$0<t<\infty$，是方程 $(*)$ 满足初始条件 $f(z, 0)=z$ 的解；$(*)$ 中的 $k(t)$ 是在区间 $[0, \infty)$ 上逐段连续其模为 1 的任一复值函数. 为估计关于类 S 的任何一个量，在子类 S' 中估计它就足够了，因为 S 类的任一函数 $f(z)$ 可以用函数 $f_n(z)$ 逼近，$f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$，其中每一个函数把 E 映射成具有裂纹的 w 平面，裂纹沿着一条从 ∞ 出发且不通过 $w=0$ 的 Jordan 弧，因而可以用函数 $f_n(z)/f_n'(0)\in S'$ 逼近. 在这一逼近下，关于逼近函数的被估计的量收敛于关于函数 $f(z)$ 的同样的量.

Löwner 方法已有效地应用于单叶函数理论的研究（见[3]）；常可导致成功得到明确的估计，但一般地不能保证得到所有极值函数的分类并且不能给出关于其唯一性的完备信息. 为了极值问题的全解，Löwner 方法常与变分方法结合（见[3] 和**变分参数法**（variation-parametric method））. Löwner 方法已推广到二连通区域. 对于多连通区域以及对于自守函数，Löwner 方程型的广义方程已经得到（见[4]）.

参考文献

[1] Löwner, K., Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I, *Math. Ann.*, **89** (1923), 103 – 121.

[2] Peschl, E., Zur Theorie der schlichten Funktionen, *J. Reine Angew. Math.*, **176** (1936), 61 – 94.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[4] Александров, И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】 Löwner 方法已被用于解决 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach conjecture），[A1]；见[A2]. 关于该方法的进一步的参考文献有[A3]－[A6].

参考文献

[A1] de Branges, L., A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154** (1985), 137 – 152.

[A2] FitzGerald, C. H. and Pommerenke, C., The de Branges theorem on univalent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **290** (1985), 683 – 690.

[A3] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

[A4] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本: 单叶函数, 科学出版社, 1987).

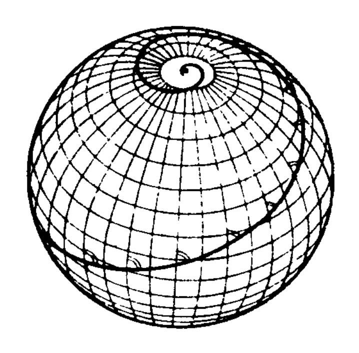
[A5] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

[A6] Brannan, D. A., The Löwner differential equation, in D. A. Brannan and J. G. Clunie (eds.): Aspects of Contemporary Complex Analysis, Acad. Press, 1980, 79 – 95.

杨维奇 译

斜驶线 [loxodrome; локсодрома]

旋转曲面（surface of revolution）上与所有经线交成定角 α 的曲线. 若 α 是锐角或钝角，则斜驶线绕极点无限多圈，且越来越趋近极点.



对于**第一基本形式**（first fundamental form）可写为

$$ds^2=du^2+G(u)dv^2$$

的旋转曲面，斜驶线的方程是

$$v\operatorname{ctg}\alpha=\pm\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

对于第一基本形式为

$$ds^2 = R^2(du^2 + \cos^2 u dv^2)$$

的球面，斜驶线的方程是

$$v \operatorname{ctg} \alpha = R \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R}\right).$$

А.Б.Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Strubecker, K., Differentialgeometrie, 2. Theorie der Flächenmetrik, de Gruyter, 1958.

沈一兵 译

Lüroth 问题 [Lüroth problem; Люрота проблема]

有理函数域的子域的刻画问题.

1876年，J. Lüroth([1])(亦见[2])证明了单变量有理函数域 $k(x)$ 的含 k 又异于 k 的子域都与域 $k(x)$ 同构 (Lüroth 定理 (Lüroth theorem)). 对于域 $k(x_1, \cdots, x_n)(n \geqslant 2)$ 的子域 $R(R \supset k, R \neq k)$，类似的结论是否正确的问题就是有名的 Lüroth 问题.

设 X 是一个**代数簇** (algebraic variety). 它是域 R 的一个模型 (见**极小模型** (minimal model)), 则嵌入 $R = k(X) \subset k(x_1, \cdots, x_n)$ 定义了一个有理映射 $f: P^n \to X$, 它的象在 X 内稠密. 如果从射影空间有这样一个有理映射映到一个簇上，就称这个簇是**单有理簇** (unirational variety). 与 P^m 双有理等价的簇称为**有理簇** (rational variety). 用几何的语言可把 Lüroth 问题表达为：是否单有理簇都是有理的？不失一般性，可以假设 $\dim X = n$，也就是说 R 的超越次数是 n.

在 $n = 1$ 的情形，对于任何基域 k 的 Lüroth 问题的肯定解答已由上面所述的 Lüroth 定理给出. 对于 $n = 2$ 以及特征数 0 的代数闭域 k, G. Castelnuovo 于 1893 年肯定地解决了这个问题. Castelnuovo 有理性判则也蕴含了对任意特征数的代数闭域上的下列曲面 X 的 Lüroth 问题的肯定解答，对于这个曲面 X，有一个**可分映射** (separable mapping) $f: P^2 \to X$ (见[7]). 对于不可分映射 f，已经有例子给出了素特征数的域上的 Lüroth 问题的否定解答. 在代数不封闭域 k 的情形，这样的例子是 P^3 里的具有 k 点的极小三次曲面.

对于三维簇，Lüroth 问题也被否定地解决(见[4], [5], [6]). 在[5]里面证明了三维**三次超曲面** (cubic hypersurface) 不是有理的，而人们已经知道它是单有理的. 在证明中发现了一个新的方法，它以三次超曲面的**中间 Jacobi 簇** (intermediate Jacobian) 与曲线的 Jacobi 簇的比较为基础. [4]已经证明光滑三维二次超曲面不是有理的. 在[6]中，为了构造反例，用到了簇的 **Brauer 群** (Brauer group) (三维上同调群的挠子群) 作为不变量. 这个双有理不变量也被用于所有维数 $n \geqslant 3$ 的反例的构造中.

参考文献

[1] Lüroth, J., *Math. Ann.*, **9** (1876), 163–165.
[2] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1–2, Springer, 1967–1971 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，1–2，科学出版社，1963，1976).
[3] Манин, Ю. И., Кубические формы, М., 1972.
[4] Исковских, В. А., Манин, Ю. И., 《Матем. сб.》, **86** (1971), 140–166.
[5] Clemens, C. H. and Griffiths, P., The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann. of Math.*, **95** (1972), 281–356.
[6] Artin, M. and Mumford, D., Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, *Proc. London Math. Soc.*, **25** (1972), 1, 75–95.
[7] Zariski, O., The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 146–184.

В. А. Исковских 撰 陈志杰 译

Luxemburg 范数 [Luxemburg norm; Люксембурга норма]

函数

$$\|x\|_{(M)} = \inf\{\lambda: \lambda > 0, \int_G M(\lambda^{-1} x(t)) dt \leqslant 1\},$$

这里 $M(u)$ 是关于正的 u 递增的偶凸函数，

$$\lim_{u \to 0} u^{-1} M(u) = \lim_{u \to \infty} u(M(u))^{-1} = 0,$$

对 $u > 0$，$M(u) > 0$，且 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集. 此范数的性质曾由 W. A. J. Luxemberg [1] 作了研究. Luxemburg 范数等价于 Orlicz 范数 (见 **Orlicz 空间** (Orlicz space))，且

$$\|x\|_{(M)} \leqslant \|x\|_M \leqslant 2\|x\|_{(M)}.$$

如果函数 $M(u)$ 和 $N(u)$ 是互补 (或互为对偶) 的 (见 **Orlicz 类** (Orlicz class))，则

$$\|x\|_{(M)} = \sup\left\{\int_G x(t) y(t) dt: \|y\|_{(N)} \leqslant 1\right\}.$$

如果 $\chi_E(t)$ 是可测子集 $E \subset G$ 的特征函数，则

$$\|\chi_E\|_{(M)} = \frac{1}{M^{-1}(1/\operatorname{mes} E)}.$$

参考文献

[1] Luxemburg, W. A. J., Banach function spaces, T. U. Delft, 1955. Thesis.
[2] Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б., Выпуклые функци и пространства Орлича, М., 1958 (英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A. and Rutitskiĭ, Ya. B., Convex functions and Orlicz spaces, Noordhoff, 1961).

Е. М. Семенов 撰 葛显良 译

Лузин C 性质 [Luzin C-property; Лузина C-свойство]

在其定义域上几乎处处有限的**可测函数** (measurable function) 的一特征性质. 一个在[0, 1]上几乎

处处有限的函数 f 在区间 [0, 1] 上有 C 性质，如果对每个 $\varepsilon>0$ 在 [0, 1] 中有测度 $>1-\varepsilon$ 的**完满集** (perfect set) Q，且 f 限制在 Q 上是连续的. C 性质由 Н. Н. Лузин([1]) 引进，他还证明函数具有 C 性质是 [0, 1] 上几乎处处有限的可测函数的充要条件. Лузин 的这一定理 (**Лузин 准则** (Luzin criterion)) 可以推广到多变量函数情形 (见 [3], [4])，并且是函数的度量理论中主要定理之一.

参考文献

[1] Н. Н. Лузин, 《Матем. сб.》, **28** (1912), 2, 266 – 294.

[2] Н. Н. Лузин, Собр. соч., т. 1, М., 1953.

[3] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[4] Kamke, E., Das Lebesgue-Stieltjes integral, Teubner, 1960.

【补注】 关于更多的文献与评注，见 **Лузин 准则** (Лузин criterion).

А. А. Конюшков 撰 郑维行 译 沈祖和 校

Лузин 准则 [Luzin criterion; Лузина критерий]，关于一个实变量函数可测性的

定义在区间 $[a, b]$ 上几乎处处有限的函数为可测的充要条件是，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $[a, b]$ 上连续函数 φ，使集

$$\{x\in[a, b]: f(x)\neq\varphi(x)\}$$

的测度小于 ε. 它由 Н. Н. Лузин([1]) 证明. 换句话说，一个几乎处处有限的函数为可测的，当且仅当略去一个任意小测度的集外此函数成为连续的.

参考文献

[1] Lusin, N. N., Sur les propriétés des fonctions mesurables, C. R. Acad. Sci. Paris, **154** (1912), 1688 – 1690.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной Переменной, 3 изд., М., 1974 (中译本: 那汤松, 实变函数论, 高等教育出版社, 1958).

В. А. Ефимов 撰

【补注】 在西方，Лузин 准则称为 Лузин 定理 (Luzin theorem) (虽然有些含糊; 见 **Лузин 定理** (Luzin theorem)), 并且很像 **Лузин *C* 性质** (Luzin *C*-property) 那样 (但用紧集代替完满集)，在叙述上一般都稍有差异. 测度的紧密性与空间的正规性使得所有这些叙述等价.

如果将区间 $[a, b]$ 换为任何**完全正则空间** (completely regular space)，且将 Lebesgue 测度 (的限制) 换为 Borel σ 域上紧密有界测度，那么 Лузин 准则仍然正确. 在此一般设置下，Лузин 性质可用来给出可测性概念的另一定义 (见 [A1])，或者在新近的工作中，当 f 不再是实值函数而例如是 Banach 值函数时，给出此概念的更合适的定义.

Лузин 准则与 Егоров **定理** (Egorov theorem) 密切相关，并且依 **Carathéodory 测度** (Carathéodory measure) 与可测性概念密切相关.

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6 – 8 (译自法文).

[A2] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: 哈尔姆斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

[A3] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966 (中译本: 鲁丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1982).

[A4] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

郑维行 译 沈祖和 校

Лузин-Denjoy 定理 [Luzin-Denjoy theorem; Лузина-Данжуа теорема]

见 **Denjoy-Лузин 定理** (Denjoy-Luzin theorem).

Лузин 例 [Luzin examples; Лузина примеры]，复变函数论中的

刻画解析函数边界唯一性性态的例子 (见 [1], [2]).

1) 对于单位圆周 $\Gamma=\{z: |z|=1\}$ 上任一零测度集 E, Н. Н. Лузин 构造出 (1919年, 见 [1]) 一个函数 $f(z)$，它在单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 内正则解析并有界，而 $f(z)$ 沿每条终点为 E 中的点的半径没有径向边界值.

Лузин 和 И. И. Привалов 的一个类似例子 (1925 年, 见 [2], [3]) 与上述例子差别不大.

2) Лузин 还构造出 (1925年, 见 [2]) D 中正则解析函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)\not\equiv 0$，它们沿所有终点在 Γ 上某个测度为 2π 的集合 E 中的半径分别趋向于无穷和零; 而集合 E 在 Γ 上是第一 Baire 范畴的 (见 **Baire 类** (Baire classes)).

亦见**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions); **Лузин-Привалов 定理** (Luzin-Privalov theorem); **聚值集** (cluster set).

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1953, 267 – 269.

[2] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1953, 280 – 318.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М. - Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[4] Ловатер, А., в сб., Итоги науки и техники. Мате-

матический анализ, т. 10, М., 1973, 99 – 259.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

沈永欢 译

Лузин 假设 [**Luzin hypothesis**; **Лузина гипотеза**], 集合论中的

连续统的**基数** (cardinality) $\aleph$ 是可数序数的所有子集的集合的基数, 即 $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. Лузин 假设和 Zermelo-Fraenkel 集合论公理系统加选择公理是相容的. H, H. Лузин ([1]) 用这一假设代替**连续统假设** (continuum hypothesis), 即 $2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1}$. Martin 公理 (见 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis)) 加上连续统假设的否定蕴涵 Лузин 假设. Лузин 假设的否定 $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ 有时也称为 Лузин 假设. Лузин 假设记为 (HL), 而它的否定则记为 (LH), 二者被用来证明一般拓扑中的许多定理. 例如 (LH) 等价于下列每一条断言: 基数不超过连续统的基数的紧空间有一个处处稠密的满足**第一可数性公理** (first axiom of countability) 的子空间; 基数不超过连续统的基数的二进紧 Hausdorff 空间是可度量化的. 由 (LH) 可以推出下列命题: 满足第一可数性公理和 **Суслин 条件** (Suslin condition) 的**正规空间** (normal space) 是族正规的; 可分的正规 **Moore 空间** (Moore space) 是可度量化的.

参考文献

[1] Luzin, N. N., Sur les ensembles analytiques nuls, *Fund. Math.*, **25** (1935), 109 – 131.

[2] Mostowski, A., Constructible sets and applications, North-Holland, 1969.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 关于 Лузин 假设的相容性亦见 [A1].

参考文献

[A1] Kunen, K., Set theory, North-Holland, 1980.

朱建平 译

Лузин *N* 性质 [**Luzin *N*-property**; **Лузина *N*-свойство**], 零性质 (null-property), 区间 $[a, b]$ 上连续函数 f 的

对区间 $[a, b]$ 中任何测度为零的集合 E, 它的象 $f(E)$ 的测度也是零. 这是由 H. H. Лузин 于 1915 年引进的 (见 [1]). 下列论断成立.

1) 区间 $[a, b]$ 上几乎处处有 $f'(x) = 0$ 的非常数函数 f 没有 Лузин N 性质.

2) 若 f 没有 Лузин N 性质, 则在 $[a, b]$ 中有测度为零的**完满集** (perfect set) P 使 $\operatorname{mes} f(P) > 0$.

3) 绝对连续函数有 Лузин N 性质.

4) 若 f 有 Лузин N 性质并且在 $[a, b]$ 上有有界变分 (以及在 $[a, b]$ 上连续), 则 f 在 $[a, b]$ 上为绝对连续 (Banach-Zaretskiĭ 定理 (Banach-Zaretskiĭ theorem).

5) 若 f 在 $[a, b]$ 上不减且 f' 在 $[a, b]$ 上为有限, 则 f 有 Лузин N 性质.

6) 对每个可测集 $E \subset [a, b]$ 象 $f(E)$ 为可测的充要条件是 f 在 $[a, b]$ 上有 Лузин N 性质.

7) 一个有 Лузин N 性质的函数 f 在任何非空**部分** (portion) 有正测度的集 A 上恒有导数 f' 存在.

8) 对任何完满的无处稠密集 $P \subset [a, b]$, 恒存在函数 f, 它在 $[a, b]$ 上有 Лузин N 性质, 并且 f' 在 P 的任一点不存在.

Лузин N 性质概念能推广到多变量函数与定义在测度空间上的更一般性质的函数上去.

参考文献

[1] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., М.-Л., 1951.

А. А. Конюшков 撰

【补注】 有另一性质与 Лузин N 性质内在相关. 区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f 称为有 Banach S 性质 (Banach S-property), 如果对一切 Lebesgue 可测集 $E \subset [a, b]$ 与一切 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使

$$\operatorname{mes}(E) < \delta \Rightarrow \operatorname{mes}(f(E)) < \varepsilon.$$

此性质显然较 N 性质为强. S. Banach 证明, 函数 f 有 S 性质 (对应地 N 性质), 当且仅当 (对应地, 仅当; 关于丢掉"当"的部分, 见下文) 逆象 $f^{-1}(\{x\})$ 对几乎所有 $x \in f([a, b])$ 是有限的 (对应地, 至多可数的). 关于 N 性质与 S 性质的经典结果, 见 [A3].

近来这些结果的一个很强的推广为 G. Mokobodzki 给出 (见 [A1], [A2]), 它能使人们去证明位势理论中深刻的结果. 设 Ω 与 T 为两个紧可距离化空间且对 Ω 赋予概率测度 P. 设 F 为 $\Omega \times T$ 的 Borel 子集并对 Ω 的任何 Borel 子集 E, 用 $F(E) = \{t \in T$: 存在 $\omega \in \Omega$ 使 $(\omega, t) \in F\}$ (若 F 为映射 $f: \Omega \to T$ 的图象, 则 $F(E) = f(E)$) 定义 T 的子集 $F(E)$. 集 F 称为有性质 (N) (对应地, 性质 (S)), 如果存在 T 上的测度 λ (这里依赖于 F), 使对一切 $E \in \mathscr{B}(\Omega)$,

$$P(E) = 0 \Rightarrow \lambda(F(E)) = 0$$

(对应地, 对一切 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对一切 $E \in \mathscr{B}(E)$ 有

$$P(E) < \delta \Rightarrow \lambda(F(E)) < \varepsilon).$$

现在 F 有性质 (N) (对应地, 性质 (S)), 当且仅当 F 的截口 $F(\omega)$ 为关于几乎所有 $\omega \in \Omega$ 至多可数 (对应地, 有限).

参考文献

[A1] Dellacherie, C., Feyel, D. and Mokobodzki, G., Inté-

grales de capacités fortement sous-additives, in Sem. Probab. Strasbourg XVI, Lecture notes in math., Vol. 920, Springer, 1982, 8-28.

[A2] Louveau, A., Minceur et continuité séquentielle des sous-measures analytiques fortement sous-additives, Sem. Initiation à l'Analyse, 66, Univ. P. et M. Curie, 1983-1984.

[A3] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[A4] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965. 郑维行 译 沈祖和 校

Лузин-Привалов定理 [Luzin-Privalov theorems; Лузина-Привалова теоремы]，复变函数论中的

Н. Н. Лузин 和 И. И. Привалов 的经典结果，它们澄清了解析函数边界唯一性性质(见**解析函数的唯一性**(uniqueness properties of analytic functions))的特征(见[1]).

1) 设 $f(z)$ 是具有可求长边界 Γ 的单连通域 D 中复变量 z 的亚纯函数，如果 $f(z)$ 在 Γ 上具有正 Lebesgue 测度的集合 $E\subset\Gamma$ 上所取的角边界值为零，则在 D 内 $f(z)\equiv 0$. 不存在 D 内的亚纯函数，使它在一个正测度集 $E\subset\Gamma$ 上所取的角边界值为无穷.

2) 设 $w=f(z)$ 是单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 中的非常值亚纯函数，它在位于单位圆周 $\Gamma=\{z: |z|=1\}$ 的弧 σ 上的一个度量稠密且第二 Baire 范畴(见 **Baire 类**(Baire classes))的集合 E 上具有(有限或无穷)径向边界值，则它在 E 上的径向边界值构成的集合 W 至少有两个不同的点. E 在 σ 上的度量稠密性(metric density)是指 E 在 σ 上的任何部分(portion)都有正测度. 由此推出，如果 $f(z)$ 在给定类型的集合 E 上的径向边界值等于零，则在 D 中 $f(z)\equiv 0$. 此外，不存在单位圆盘内的亚纯函数，使它在给定类型的一个集合 E 上所取的径向边界值为无穷.

Лузин 和 Привалов(见[1], [2])构造出例子表明，单是度量稠密性或第二 Baire 范畴性本身对于使得断言2)成立都不是充分的.

亦见**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions); **Лузин 例子** (Luzin examples); **聚值集** (cluster set); **Привалов 定理** (Privalov theorem); **Riesz 定理**(Riesz theorem).

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Привалов, И. И., *Ann. sci. École norm. supér.*, **42** (1925), 143-191.

[2] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[3] Ловатер, А., в сб., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99-259.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

沈永欢 译

Лузин 问题 [Luzin problem; Лузина проблема]

1) **三角级数**(trigonometric series)理论中的一个问题，在于证明 Лузин 猜想(Luzin conjecture): 设 f 是在区间 $[0, 2\pi]$ 上定义的 Lebesgue 可测函数且积分

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$$

有穷，则它的 Fourier 级数

$$a_0(f)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx) \quad (*)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处收敛. 这一猜想是 Н. Н. Лузин 于 1915 年在他的学位论文中提出来的(见[1], p. 219). Лузин 问题在 1966 年被 L. Carleson 在肯定的意义下解决了(见 **Carleson 定理**(Carleson theorem)). 但在 Carleson 的文章([2])发表之前，甚至还不知道区间 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数的 Fourier 级数是否至少在一个点上收敛.

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., М.-Л., 1951.

[2] Carleson, L., Convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.*, **116** (1966), 135-157.

Б. С. Кашин 撰

2) 由 Н. Н. Лузин 提出的集合论中若干基本问题之一，为解此问题他提出了预解式法(method of resolvents). 即，集合论中的一个问题 P 是预解地提出来的，如果能指出一个使得 P 有肯定解答的点集 E，则总能指出 E 中的一个点，而且若能证明 E 是空集，则 P 一定有否定的解答. 集合 E 本身被称为问题 P 的预解集(resolvent set).

问题1. 是否所有的解析余集(见 $C\mathscr{A}$ 集($C\mathscr{A}$-set))或者是可数的，或者具有连续统的基数? 这个问题的预解集 E 是类至多为 3 的 **Лузин 集**(Luzin set); 即，如果能找到 E 的一个点，则存在一个没有完备子集的不可数解析余集; 如果 E 是空集，则不存在这样的解析余集.

问题2. 是否存在 Lebesgue 不可测的 Лузин 集?

问题3. 是否存在一个没有 **Baire 性质**(Baire property)的 Лузин 集?

Лузин 猜想问题 1, 2 和 3 是不可判定的. 这一猜想已被证实(见[3], [4]). 这几个问题之间的联

系已被建立起来．例如，从 A_2 类型的不可测集的存在性可推得不包含完备子集的 $C\mathscr{A}$ 型的不可数集的存在性．从**连续统假设**（continuum hypothesis）或 **Лузин 假设**（Luzin hypothesis）的否定出发，I．Novak（[5]）得到了关于自然数子集的 Лузин 问题的肯定解答．

参考文献

[1] Lusin, N. N. (N. N. Luzin), Sur le problème de M. Emile Borel et la méthode des résolvants, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **181** (1925), 279 – 281.

[2] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958.

[3] Новиков, П. С., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **38** (1951), 279 – 316.

[4] Solovay, R., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 1, 1 – 56.

[5] Novak, I., On some problems of Luzin concerning the subsets of natural numbers, *Czechoslovak Math. J.*, **3** (1953), 385 – 395.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 一般的术语见 **Лузин 集**（Luzin set）．有关 Лузин 的其他问题见 **Лузин 定理**（Luzin theorem）．

参考文献

[A1] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A2] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North-Holland, 1980.

朱学贤 译 潘文杰 校

Лузин 分离原理 [Luzin separability principles; Лузина принципы отделимости]

描述集合论（descriptive set theory）中的两个定理，由 Лузин 1930 年（见[1]）证明．令 E 及 E_1 为 Euclid 空间中任意两个集合，无共同点，称 E 与 E_1 是 B 可分的（B-separable）（或者 Borel 可分的（Borel separable）），如果存在两个无共同点的 Borel 集 H 及 H_1，分别包含 E 及 E_1．Лузин 第一分离原理是说：任意两个不相交的解析集（参见 $\mathscr{A}$ 集（$\mathscr{A}$-set）；**解析集**（analytic set））总是 B 可分的．由于已经知道，存在两个解析余集（参见 **C$\mathscr{A}$集**（C$\mathscr{A}$-set）），它们是 B 不可分的，于是可作如下定义：任意两集合 E_1 及 E_2 无共同点，如果存在不相交的两个解析余集 H_1 及 H_2，分别包含 E_1 跟 E_2，则称 E_1 跟 E_2 是解析余集可分的．Лузин 第二分离原理是说：任给两个解析集，舍弃它们的共同部分，则余下的二部分总是解析余集可分的．

参考文献

[1] Luzin, N. N., Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1930.

Б. А. Ефимов 译

【补注】 该两原理在波兰空间中仍然成立．实际上，M. Ya. Suslin 1917 年证明：一个集合 H 是 Borel 的，当且仅当 H 及其余集都是解析的．他的结果早就直接蕴涵第一分离原理．第一分离原理在分析中有大量的应用．由 C. Kuratowski 起，人们通常将第二分离原理叙述为如下的形式，而称其为关于解析余集的归约定理：如果 C_1 及 C_2 是两个解析余集，那么存在两个不相交的解析余集 $D_1\subset C_1$，$D_2\subset C_2$，使得 $D_1\cup D_2=C_1\cup C_2$．该定理与描叙集合论中可数序数的使用有关；它在分析中有一些很深刻的应用．读者可从**描述集合论**（descriptive set theory）中得到更多的详细情况和参考文献．

时至今天，人们在各种集合论的假设（Gödel 的可构成公理，大基数公理，特别是，决定性公理）之下，又得到了更多的在投影分层中关于分离原理的性质．参见[A3]，[A4]．

参考文献

[A1] Luzin, N. N., Sur les ensembles analytiques, *Fund. Math.*, **10** (1927), 1 – 92.

[A2] Kuratowski, C., Topology, 1, PWN & Acad. Press, 1966（译自法文）.

[A3] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A4] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North-Holland, 1980.

王 驹 译

Лузин 集 [Luzin set; Лузина множество]，射影集（projective set）

完全可分度量空间的一个子集，可归纳地定义如下．0 类 Лузин 集是 **Borel 集**（Borel set）．$2n+1$ 类 Лузин 集是 $2n$ 类 Лузин 集的连续象．$2n$ 类 Лузин 集是 $2n-1$ 类 Лузин 集的余集．特别地，1类 Лузин 集，即 Borel 集的连续象，称为解析集（analytic set）或 $\mathscr{A}$ 集（$\mathscr{A}$-set）或 Суслин 集（suslin set）（见 **$\mathscr{A}$ 集**（$\mathscr{A}$-set）；**解析集**（analytic set））．Лузин 集的概念是 Н. Н. Лузин 引入的（[1]）．如果集合 P_i 是 n 类 Лузин 集，那么 $\bigcup_{i=1}^{k}P_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{k}P_i$ 也是 n 类 Лузин 集．如果集合 $P_i\subset X_i$ 是完全可分度量空间 X_i 中的 n 类 Лузин 集，那么（有限或可数）直积 $\prod_i P_i$ 是空间 $\prod_i X_i$ 中的 n 类 Лузин 集．空间 X 中的奇数 n 类的 Лузин 集和 $X\times X$ 中的一个 $n-1$ 类集的射影是一致的．对任一 $n>0$，区间[0, 1]中的无理数的空间 X 包含一个 n 类但非 $<n$ 类的 Лузин 集；空间 X 也包含非 Лузин 集的集合．

参考文献

[1] Luzin, N. N., Sur un problèm de M. Emile Borel et les ensemble projectifs de M. Henri Lebesgue, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **180** (1925), 1318 – 1320.

[2] Лузин, Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953（中译本：Н. Н. 鲁辛，解析集合论及其应用，科学出版社，1960）.

[3] Kuratowski, C., Topology, 1, PWN & Acad. Press, 1966（译自法文）.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 在西方，“Лузин 集”这个词普通用来表示实直线的和每一个无处稠密集有可数交的子集．见 **Лузин 空间**(Luzin space)．上述正文中讨论的集合通常称为**射影集**(projective set)．$2n+1$ 类集合一般称为 $\sum_n^1$ 集，而 $2n$ 类集合则称为 $\prod_n^1$ 集．见**描述集合论**(descriptive set theory)．

在最近的 30 年中，射影集的所有问题得到了满意的答案．见**描述集合论**(descriptive set theory)和 **Лузин 问题**(Luzin problem)．

参考文献

[A1] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North-Holland, 1980.

[A2] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.

朱建平 译

Лузин 筛 [Luzin sieve; Лузина решето]

任意映射 $W: \mathbf{Q}_0 \to 2^X$，使得每个二进分数 $r \in \mathbf{Q}_0$ 对应于 X 的子集 $W_r \subset X$．通常假设 X 是完全的可分**度量空间**(metric space)．这是由 Н. Н. Лузин 引入的([1])．所有满足下述条件的点 $x \in X$ 的集合 A 称为由 Лузин 筛 W 筛过的(sifted)：存在无穷序列 $r_1 < r_2 < \cdots$，使得 $x \in W_{r_1} \cap W_{r_2} \cap \cdots$．对于每个 $\mathscr{A}$ **运算**($\mathscr{A}$-operation)，存在一个 Лузин 筛 W，使得此 $\mathscr{A}$ 运算的结果是 W 筛选过的．关于 Лузин 筛的主要结果是 n 类 **Лузин 集**(Luzin set)(或射影类 L_n)当 $0 \neq n \neq 2$ 时在 Лузин 筛的筛选下不变．

参考文献

[1] Luzin, N. N., Sur les ensembles analytiques, *Fund. Math.*, **10** (1927), 1 – 95.

[2] Kuratowski, C., Topology, 1, PWN & Acad. Press, 1966(译自法文).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 本条目意义下的 Лузин 集在西方一律称为**射影集**(projective set)．Лузин 筛是描述集合论中的非常有力的工具；它和其他技巧一起产生了在该理论中可数序数的现代用法．详细的情况和参考文献见**描述集合论**(descriptive set theory)．

这个概念和 N. Bourbaki 在证明 Лузин 的一个定理时使用的筛的概念没有关系([A1])．Bourbaki 筛(Bourbaki sieve)只是书写不相交的 Суслин 概形的一种方法．

如果 A 是**解析集**(analytic set)，$W = \{W_r : r \in \mathbf{Q}\}$ 是由闭集组成的 A 的 Лузин 筛，那么容易看出，$X \setminus A = \{x : M_x$ 被 $\geqslant$ 良序化$\}$，其中 $M_x = \{r : x \in W_r\}$．集合 $A_\alpha = \{x \in X \setminus A : M_x$ 的序型是 $\alpha\}$ $(\alpha < \omega_1)$ 称为由筛 W 决定的集合 $X \setminus A$ 的组成成分(constituent)．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966, Chapt. 10 (译自法文).

朱建平 译

Лузин 空间 [Luzin space; Лузина пространство]

没有孤立点的不可数 T_1 拓扑空间，它的所有疏子集都是可数的．实直线上 Лузин 空间的存在性由**连续统假设**(continuum hypothesis)得出．同时否定连续统假设和 Martin 公理(见 **Суслин 假设**(Suslin hypothesis))可证明，这时 Лузин 空间不存在．特别地，这与 Zermelo-Fraenkel 的集论公理体系和**选择公理**(axiom of choice)是相容的．在关于连续统的**基数**(cardinality)在 $\aleph$ 标度中的位置的很一般的假定下，已证明了可度量化 Лузин 空间的存在性．位于可分度量空间 Y 中的任意 Лузин 空间都具有下列性质：对任意正数数列 $\{\lambda_n\}$，存在一个集合序列 $\{A_n\}$，使得 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\delta(A_n) < \lambda_n$，这里 $\delta(A)$ 是集合 A 的直径．此性质在连续映射之下不变．位于 Y 中的 Лузин 空间的任一连续象都具有 Lebesgue 零测度和零维数．此外，它还是全不完满的，即它不包含 Cantor 集．连续统假设蕴涵着，存在一个正则遗传可分的、遗传 Lindelöf 的、极端不连通的可数 π 权 Лузин 空间且具有连续统基数．

参考文献

[1] Lusin, N. N., Sur un problème de M. Baire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914), 1258 – 1261.

[2] Kuratowski, C., Topology, 1, PWN & Acad. Press, 1966(译自法文).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 Лузин 空间还有三个略有不同的定义在使用着(除了它们必须是 T_1，T_2 或 T_3 外)：一个不可数空间，其所有疏子集都是可数的，且 1) 没有孤立点；2)至多有 ω 个孤立点；或 3) 有任意多个孤立点．

参考文献

[A1] Kunen, K, Luzin spaces, *Topology Proceedings*, **1** (1977), 191 – 199.

[A2] Roitman, J., Basic S and L, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 295 – 326.

[A3] Weiss, W., Versions of Martin's axiom, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 827 – 886.

[A4] Miller, A. W., Special subsets of the real line, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 201 – 233.

白苏华、胡师度 译

Лузин 定理 [Luzin theorem; Лузина теорема]

1) 单复变量函数论中的 Лузин 定理(局部有限面积原理(local principle of finite area))是 Н. Н. Лузин 得到的一个结果，它揭示了单位圆盘内解析函数的边界性质与该函数把单位圆盘映射于其上的 Riemann 曲面的度量之间的联系(见[1]，[2])．

设 V 是复 z 平面单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 中的任一区域，它与单位圆周 $\Gamma=\{z: |z|=1\}$ 上的一条弧 σ 相毗连，

$$w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

是 D 内的正则解析函数. 如果作为 V 在映射 $w=f(z)$ 下的象的 Riemann 曲面的面积为有限，则级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 在 σ 上几乎处处收敛.

与上述定理相联系，Лузин 提出了一个猜想，也称为 Лузин 问题 (Luzin problem). 点 $e^{i\theta_0}\in\Gamma$ 称为函数 $w=f(z)$ 的 Лузин 点 (Luzin point)，如果 $w=f(z)$ 把每个在单位圆盘内与 Γ 切于点 $e^{i\theta_0}$ 的圆盘映为 $w=f(z)$ 的 Riemann 曲面上无限面积的区域. Лузин 猜想 (Luzin conjecture) 是指: 存在 D 内的一些有界解析函数，使得 Γ 的每个点是这些函数的 Лузин 点. Лузин 猜想于 1955 年首次得到完全肯定的解答 (见[3]).

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., 《Докл. АН СССР》, **56** (1947), 5, 447 – 450.

[2] Лузин, Н. Н., Собр. соч. т. 1, М., 1953, 318 – 330.

[3] Ловатер, А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99 – 259.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 [A1] 是关于 Лузин 问题的解的参考文献.

参考文献

[A1] Lohwater, A. J., Piranian, G., On a conjecture of Luzin, *Michigan Math. J.*, **3** (1955), 63 – 68.

沈永欢 译

2) 描叙集合论中 Лузин 的若干定理，通常被归为三部分. 第一部分，也是主要的部分，直接与所谓“有效集”的研究有关. 所谓“有效集”指的是解析集 Borel 集，Лузин 集 (也称为投影集). 此部分包括若干 **Лузин 分离原理** (Luzin separability principles) 以及一个关于任意类的 **Лузин 集** (Luzin set) 的存在定理. 第二部分研究连续统假设的解决办法以及 **$C\mathscr{A}$ 集** ($C\mathscr{A}$-set) 的基数问题. 其中最受重视的是，Luzin-Sierpinski 定理: 任一实数区间可被划分为 $\aleph_1$ 个 Borel 集，这些 Borel 集是由相应的 **Лузин 筛** (Luzin sieve) 所决定的; 以及 Лузин 覆盖定理: 令 E 及 A 是不相交的解析集 (参见 **$\mathscr{A}$ 集** ($\mathscr{A}$-set); **解析集** (analytic set))，又令

$$E\subset X\setminus A=\bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$$

是集合 $X\setminus A$ 的一个分解，则存在一个下标 $\alpha_0<\omega_1$ 使得

$$E\subset\bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha.$$

第三部分包括若干使用**选择公理** (axiom of choice) 所得到的结果. 这些都与集合论中的哲学问题有关. 其中一个重要的 Лузин 定理是: 在任何**完满集** (perfect set) 中，存在一个不可数的第一范畴的子集 (参见**集合的范畴** (category of a set)); 任一实数区间，可划分为不可数个不可测的集合. 此部分还包括另一 Лузин 定理，该定理是关于自然数集的子集的，它揭示了 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) $\beta\mathbf{N}$ 的余部 $\beta\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}$ 的一些性质. 这里 $\mathbf{N}$ 是自然数序列.

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Собр. соч. т. 2, М., 1958.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 参见 Лузин 筛，读者可找到关于上面分解的定义.

与自然数集的子集有关的 Лузин 定理是说: 存在 $\mathbf{N}$ 的无穷子集的一个族 $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 使 $\alpha\neq\beta$，则 $A_\alpha\cap A_\beta$ 有穷而且对 ω_1 的任意两个不可数又不相交的子集 E 及 F，不存在 $\mathbf{N}$ 的一个子集 C 使对所有的 $\alpha\in E$，$A_\alpha\setminus C$ 是有穷的，同时对所有的 $\alpha\in F$，$A_\alpha\setminus C$ 也是有穷的. 这样的一个族通常称为 Лузин 族 (Luzin family). 见 [A2].

在西方，“Лузин 定理”几乎总是指测度论中的一个结果; 见 **Лузин 准则** (Luzin criterion). 但有时也指 Лузин 在描述集合论中的一个结果: 如果 P 是一波兰空间，Q 是一个可分度量空间. 又令 f 是由 P 到 Q 里的一个一一 Borel 映射，则任一 P 的 Borel 子集 B 的直接象 $f(B)$ 也是 Q 的一个 Borel 子集. 描述集合论中的 Лузин 覆盖定理在西方通常被称为 (古典) 有界定理; 由该定理，导致产生了 Лузин-Sierpinski 定理，Лузин 筛，等等; 也导致产生了近代描述集合集中对可数序数的使用. 亦参见**描述集合论**.

参考文献

[A1] Kuratowski, C., Topology. PWN & Acad. Press, 1966 (译自法文).

[A2] Douwen, E. K. VAN, The integers and topology, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds): Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, 1984, 111 – 167.

[A3] Engelking, R., Hausdorff's gaps and limits and compactifications, in Theory of Sets and Topology (in honour of F. Hausdorff), Deutch. Verlag Wissensch-aft., 1972, 89 – 94.

王 驹 译

Ляпунов 特征指数 [**Lyapunov characteristic exponent**; **Ляпунова характеристический показатель**]，线性方程组的解的

上极限

$$\lambda_{x(t)} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t)|,$$

这里 $x(t)\neq 0$ 是线性常微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (1)$$

的解；其中 $x\in \mathbf{R}^n$, $A(\cdot)$ 为映射 $\mathbf{R}\to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$，它在每个区间上可和．用坐标表示，

$$x(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t)),$$

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i(t)x^j,\ i = 1, \cdots, n,$$

这里 $a_j^i(t)$ 是在每个区间上可和的函数，且

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x^i|^2}$$

（或任何其他等价的范数；$\lambda_{x(t)}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中的范数选取无关）．

Ляпунов 定理（Lyapunov theorem），假设

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \|A(\tau)\|d\tau < \infty;$$

等价地，

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t |a_j^i(\tau)|d\tau < +\infty,\ i, j = 1, \cdots, n.$$

这时，对于方程组（1）的任意解 $x(t)\neq 0$, Ляпунов 特征指数 $\lambda_{x(t)}$ 为实数（即 $\neq +\infty$）．对于（1）的非零解的 Ляпунов 特征指数，下列论断成立：

1) $\lambda_{\alpha x(t)} = \lambda_{x(t)}$, $\alpha\neq 0$;

2) $\lambda_{x_1(t)+x_2(t)} \leqslant \max(\lambda_{x_1(t)}, \lambda_{x_2(t)})$;

3) 存在（1）的线性无关解组，记为$\{x_i(t)\}_{i=1}^n$，使得对（1）的任意按 Ляпунов 特征指数降序排列的 n 个线性无关的解 $\hat{x}_i(t)$, $i=1, \cdots, n$（即 $\lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \lambda_{\hat{x}_j(t)}$，对 $i\leqslant j$），下列不等式成立：

$$\lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \lambda_{x_i(t)},\ i = 1, \cdots, n.$$

具有此性质的**基本解组**（fundamental system of solutions）$\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ 称为正规的（normal）．这样的正规解组有如下性质：

a) 数族 $\lambda_i(A) = \lambda_{x_i(t)}$, $i = 1, \cdots, n$，与正规基本解组的选取无关；

b) 对（1）的任意解 $x(t)\neq 0$，其 Ляпунов 特征指数 $\lambda_{x(t)}$ 与某个 $\lambda_i(A)$ 相等；

c) $\lambda_i(A)\geqslant \lambda_j(A)$, $i\leqslant j$.

数 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$ 称为系统（1）的 Ляпунов 特征指数；数 $\lambda_1(A)$ 常称为（1）的首项 Ляпунов 特征指数（leading Lyapunov characteristic exponent）．

（1）的所有非零解的 Ляпунов 特征指数的集合称为谱（spectrum）．

特殊情形．1）常系数系统（即 $A(t)\equiv A(0)$）．在这种情形下，$\lambda_i(A)$ 与算子 $A(0)$（矩阵 $\|a_j^i\|$）的本征值的实部相等．

2）具有周期系数的系统（即 $A(t+T) = A(t)$, $T>0$）．在这种情形下，

$$\lambda_i(A) = \frac{1}{T}\ln|\mu_i|,$$

这里 μ_i 是系统（1）的**乘子**（multipliers），按照它们模的不增序排列（每个取其重数次）．

Ляпунов 特征指数在 Ляпунов 稳定性理论中的作用以下列断语为基础：如果 $\lambda_1(A)<0$ (>0)，则（1）的解渐近稳定（相应地，不稳定，见**渐近稳定解**（asymptotically-stable solution））．不能从 $\lambda_1(A)<0$ 推出系统

$$\dot{x} = A(t)x + O(|x|^2)$$

的零解 Ляпунов 稳定；但如果还知道系统（1）为**正则线性系统**（regular linear system），则此结论成立（Ляпунов 定理）．

假设系统 $\dot{x} = B(t)x$ 是由满足条件

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \|A(t)\| < +\infty$$

的系统（1）经过一个小扰动得到的；即它们之间由式

$$d(A, B) = \sup_{t\in\mathbf{R}} \|A(t) - B(t)\|, \qquad (2)$$

定义的距离很小．对 $n>1$，这并不意味着量

$$|\lambda_1(A) - \lambda_1(B)|$$

很小（如果系统（1）具有常系数或周期系数，及对于某些其他系统，这是成立的）；换句话说，泛函 $\lambda_i(A)$ 在系统（1）（$\sup_{t\in\mathbf{R}}\|A(t)\| < +\infty$）的赋予度量（2）的空间中不是处处连续的．

Ляпунов 特征指数是由 А．М．Ляпунов 引进的，它不仅适用于系统（1）的解，还适用于 $\mathbf{R}^+$ 上的任意函数（见[1]）．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956, 7 – 263（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[2] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 71 – 146.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 现在，Ляпунов（特征）指数可以用于更广的范围，见综述[A6]．首先，矩阵 A 可以是与时间

有关的随机函数．Ляпунов 指数也应用于以**奇怪吸引子**(strange attractor)(或排斥子) $s(t)$ 为极限解的非线性微分方程组

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x^1(t),\ \cdots,\ x^n(t))$$

的有关问题，见[A7]．对 $s(t)$ 线性化的系统具有形式(1)，其中

$$A(t)=\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(S(t))\right\}_{(n\times n)},$$

这里有一个指数为 0．若出现一个或更多正指数，则表明 $s(t)$ 为奇怪吸引子．对于保守系统来说，Ляпунов 指数之和为 0，而对耗散系统则为负．奇怪吸引子的容量(capacity of strange attractor) D 是一个与 Hausdorff 维数有关的分数．J. L. Kaplan 和 J. H. Yorke 作了如下猜想：

$$D=j-\frac{1}{\lambda_{j+1}}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i,$$

其中 $0<\sum_{i=1}^{j}\lambda_i<-\lambda_{j+1}$ $(\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n)$.

Ляпунов 指数的概念可以推广到非线性随机系统，以及迭代映射

$$x(t+1)=A(t)x(t),$$

见[A6]和[A7].

对于更一般的确定性系统，设 X 为 Hilbert 空间 H 的紧子集，$f\colon X\to H$ 为满足 $f(X)=X$ 的映射．假定映射 f 满足下述一致可微性条件：对每个 $x\in X$，存在一个紧线性算子 $L(x)\colon H\to H$，使得当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\sup_{x,\,y}\frac{\|f(y)-f(x)-L(x)(y-x)\|}{\|y-x\|}\to 0,$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 H 中的范数，且对于满足 $0<\|x-y\|\leqslant\varepsilon$ 的所有 x,y 取上界．

对紧线性算子 L，设 $\alpha_1(L)\geqslant\alpha_2(L)\geqslant\cdots$ 为 $(L^*L)^{1/2}$ 的本征值．对每个正整数 d，设 $\omega_d(L)=\alpha_1(L)\cdots\alpha_d(L)$，而对非整的正实数 $d=n+s$，$0<s<1$，则定义 $\omega_d(L)=\omega_n(L)(a_{n+1}(L))^s$.

假设 f 和 L 使得 $\sup_{x\in X}\|L(x)\|<\infty$.

对每个 $x\in X$，设 $L_p(x)=L(f^{p-1}(x))\cdot\cdots\cdot L(f(x))\cdot L(x)$，这里 f^r 表示 f 的 r 次迭代．定义(局部)Ляпунов 数(Lyapunov number)和 Ляпунов 指数(Lyapunov exponent)为：

$$\Lambda_j(x)=\limsup_{p\to\infty}\{\alpha_j(L_p(x))\}^{1/p},$$

$$\mu_j(x)=\ln\Lambda_j(x).$$

在这类系统中一致 Ляпунов 指数(unifom Lyapunov exponents) μ_j 和一致 Ляпунов 数(uniform Lyapunov numbers) Λ_j 定义如下：

$$\bar{\omega}_j(p)=\sup_{x\in X}\omega_j(L_p(x)),$$

$$\Pi_j=\lim_{p\to\infty}(\bar{\omega}_j(p))^{1/p},$$

$$\Lambda_1\cdots\Lambda_j=\Pi_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,$$

$$\mu_j=\ln\Lambda_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots.$$

设 n 为满足 $\mu_1+\cdots+\mu_n\geqslant 0$ 和 $\mu_1+\cdots+\mu_n+\mu_{n+1}<0$ 的最小整数．数 $d_L(X)=n+|\mu_{n+1}|^{-1}(\mu_1+\cdots+\mu_{n+1})$ 则称为 X 的 Ляпунов 维数(Lyapunov dimension)．有 $d_H(X)\leqslant d_L(X)$ (见[A2])，这里 $d_H(X)$ 为 X 的 **Hausdorff 维数**(Hausdorff dimension).

参考文献

[A1] Kliemann, W., Analysis of nonlinear stochastic systems, in W. Schiehlen and W. Wedig (eds.): Analysis and estimation of stochastic mechanical systems, Springer (Wien), 1988, 43 – 102.

[A2] Constantin, P., Foias, C. and Teman, R., Attractors representing turbulent flows, Amer. Math. Soc., 1985.

[A3] Young, L. S., Capacity of attractors, *Ergod. Th. Dynam. Systems*, **1** (1981), 381 – 383.

[A4] Young, L. S., Dimension, entropy, and Lyapunov exponents, *Ergod. Th. Dynam. Systems*, **2** (1982), 109 – 124.

[A5] Fredrickson, P., Kaplan, J. L., Yorke, E. D. and Yorke, J. A., The Lyapunov dimension of strange attractors, *J. Diff. Eq.*, **49** (1983), 185 – 207.

[A6] Arnold, L. and Wihstutz, V. (eds.), Lyapunov exponents, Lecture notes in math., 1186, Springer, 1986.

[A7] Schuster, H. G., Deterministic chaos, Physik-Verlag, 1988.

[A8] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[A9] Guckenheimer, J. and Holmes, Ph., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

唐　云　译

Ляпунов 函数[Lyapunov function; Ляпунова функция]

如下定义的函数：设 x_0 是微分方程组

$$\dot{x}=f(x,\ t)$$

的不动点(fixed point)，即 $f(x_0,\ t)\equiv 0$，其中映射 $f(x,\ t)\colon U\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$ 是连续的，且关于 x 连续可微(其中 U 是 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个邻域)．该方程组按坐标可写成下列形式：

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\ \cdots,\ x^n,\ t),\ i=1,\ \cdots,\ n.$$

一个可微函数 $V(x): U \to \mathbf{R}$ 称为 Ляпунов 函数，如果它具有下列性质：

1) 当 $x \neq x_0$ 时，$V(x) > 0$；

2) $V(x_0) = 0$；

3) $0 \geqslant \frac{dV(x)}{dx} f(x, t) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^i} f^i(x^1, \cdots, x^n, t).$$

函数 $V(x)$ 是由 A. M. Ляпунов 引入的（见[1]）.

Ляпунов 引理（Lyapunov lemma）成立：如果 Ляпунов 函数存在，则不动点是 Ляпунов 稳定的（见 **Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)）. 这个引理是一种研究稳定性理论的方法（所谓 Ляпунов 第二方法(second method of Lyapunov)）的基础.

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956, 7 - 263（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[2] Барбашин, Е. А., Функции Ляпунова, М., 1979.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 其他文献见 **Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability).

唐 云 译

Ляпунов-Schmidt 方程 [Lyapunov-Schmidt equation; Ляпунова-Шмидта уравнение]

形如

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x, s) u(s) ds =$$

$$= U_{01}\binom{x}{v} + \sum_{m+n \geqslant 2} U_{mn}\binom{x}{u, v}, \ x \in \Omega \qquad (1)$$

的非线性积分方程，其中

$$U_{01}\binom{x}{v} = K_0(x) v(x) + \int_{\Omega} K_1(x, s) v(s) ds,$$

$$U_{mn}\binom{x}{u, v} = \sum_{v=1}^{n} \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} K^{(v)}(x, s_1, \cdots, s_i) \times$$

$$\times u^{\alpha_0}(x) u^{\alpha_1}(s_1) \cdots u^{\alpha_i}(s_i) v^{\beta_0}(x) v^{\beta_1}(s_1) \cdots$$

$$\cdots v^{\beta_i}(s_i) ds_1 \cdots ds_i,$$

$\alpha_0, \cdots, \alpha_i, \beta_0, \cdots, \beta_i$ 是非负整数，

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_i = m, \ \beta_0 + \cdots + \beta_i = n,$$

Ω 是有限维 Euclid 空间中的有界闭集，v 和 K 是给定的各自的自变量的连续函数，$s_1, \cdots, s_i \in \Omega$，$u$ 是未知函数.（1）右边的和可以是有限和，也可以表示一个无穷级数. 在后一情形此级数称为两个函数变元的积分幂级数(integro-power series). 假定此级数绝对并一致收敛.

如果 1 不是核 $K(x, s)$ 的特征数，则对充分小的 $|v(x)|$ 方程（1）在连续函数类中具有唯一的小的解. 此解可表示为积分幂级数. 1 是核 K 的特征数的情形比较复杂. 此时可构造一个方程组——分支方程组(branching equations)或分歧方程组(bifurcation equation)：

$$\omega_k(\xi_1, \cdots, \xi_n, v) = 0, \ k = 1, \cdots, n, \qquad (2)$$

其中 ω_k 是已知的幂级数，n 是特征数 1 的重数. 对于一般情形，方程组(2)具有非唯一解. 对于任何固定的充分小的函数 v，(2) 的每个连续小解（(2) 的连续解称为小的，如果 $\xi_i(0) = 0$）都对应（1）的一个能表示为积分幂级数的小解.

(1) 型方程首次为 A. M. Ляпунов 于 1906 年考虑，稍后 E. Schmidt 于 1908 年考察了比较一般的形式.

参考文献

[1] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969（英译本：Vaĭnberg, M. M., Trenogin, V. A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff, 1974）.

[2] Смирнов, Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, Л.-М., 1936.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chow, S., Hale, J., Methods of bifurcation theory, Springer, 1982.

沈永欢 译

Ляпунов 稳定性 [Lyapunov stability; устойчивость по Ляпунову]

一点关于某空间 E 上的映射族

$$\{f_t\}_{t \in G^+}: E \to E \qquad (1)$$

的 Ляпунов 稳定性是该映射族在此点的等度连续性(equicontinuity)（G^+ 是 G 中的非负数集；例如，实数集 $G = \mathbf{R}$ 或整数集 $G = \mathbf{Z}$）. 一点关于映射族（1）的 Ляпунов 稳定性等价于此点的一个邻域到函数集 $x(\cdot)$ 的映射 $x \mapsto x(\cdot)$ 在此点的连续性，这些函数由公式 $x(t) = f_t(x)$ 定义，且在 G^+ 上赋予该函数集 $x(\cdot)$ 一致收敛拓扑. 一点关于映射的 Ляпунов 稳定性定义为关于此映射的非负幂族的 Ляпунов 稳定性. 一点关于动力系统 f^t 的 Ляпунов 稳定性是指此点关于族 $\{f^t\}_{t \in G^+}$ 的 Ляпунов 稳定性. 在 $t_0 + \mathbf{Z}^+$ 上给定的方程 $x(t+1) = g_t(t)$ 的解 $x_0(\cdot)$ 的 Ляпунов 稳定性是指点 $x_0(t_0)$ 关于映射族 $\{f_t = g_{t_0+t} \cdots g_{t_0}\}_{t \in \mathbf{Z}^+}$ 的 Ляпунов 稳定性.

微分方程 $\dot{x} = f(x, t)$ 在 $t_0 + \mathbf{R}^+$ 上给定的解

$x_0(\cdot)$ 的 Ляпунов 稳定性是点 $x_0(t_0)$ 关于映射族 $\{X(t_0+t,\ t_0)\}_{t\in\mathbf{R}^+}$ 的 Ляпунов 稳定性，这里 $X(\theta,\ \tau)$ 是此方程的 **Cauchy 算子**（Cauchy operator）. m 阶微分方程

$$y^{(m)} = g(y,\ \dot{y},\ \cdots,\ y^{(m-1)},\ t)$$

在 $t_0+\mathbf{R}^+$ 上的解 $y(\cdot)$ 的 Ляпунов 稳定性是相应的一阶微分方程 $\dot{x}=f(x,\ t)$ 在 $t_0+\mathbf{R}^+$上给定的解 $x(\cdot)=(y(\cdot),\ \dot{y}(\cdot),\ \cdots,\ y^{(m-1)}(\cdot))$ 的Ляпунов 稳定性，这里

$$x=(x_1,\ \cdots,\ x_m),$$

$$f(x,\ t)=(x_2,\ \cdots,\ x_m,\ g(x_1,\ \cdots,\ x_m,\ t)).$$

下列定义 1－7 是上述定义及相关定义的一些具体实例．

1. 设给定微分方程 $\dot{x}=f(x,\ t)$，这里 x 位于 n 维赋范空间 E 中．该方程的解 $x_0(\cdot)$: $t_0+\mathbf{R}^+\to E$ 称为 Ляпунов 稳定的（Lyapunov stable），如果对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对每个满足不等式 $|x-x_0(t_0)|<\delta$ 的点 $x\in E$, Cauchy 问题

$$\dot{x}=f(x,\ t),\ x(t_0)=x$$

在 $t_0+\mathbf{R}^+$上确定的解 $x(\cdot)$ 是唯一的，且对每个 $t\in t_0+\mathbf{R}^+$，满足不等式 $|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon$．进而，如果还可以找到 $\delta_0>0$，使得对于方程 $\dot{x}=f(x,\ t)$ 的其初始值满足不等式

$$|x(t_0)-x_0(t_0)|<\delta_0$$

的每个解 $x(\cdot)$，等式

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0$$

成立（相应地，不等式

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\ \ln|x(t)-x_0(t)|<0$$

成立；这里以及别处均令 $\ln 0=\infty$），则解 $x_0(\cdot)$ 称为渐近稳定的（asymptotically stable）（相应地，指数稳定的（exponentially stable））．

方程

$$\dot{x}=f(x,\ t) \tag{2}$$

的解，这里 $x\in\mathbf{R}^n$ 或 $x\in\mathbf{C}^n$，称为 Ляпунов 稳定的（渐近稳定的，指数稳定的），如果它在赋予范数的空间 $\mathbf{R}^n$（或 $\mathbf{C}^n$）上满足上述条件．解的这个性质与范数的选取无关．

2. 设给定映射 f: $S\to S$，这里 $(S,\ d)$ 是度量空间．点 $x_0\in S$ 称为关于映射 f 是 Ляпунов 稳定的，如果对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对满足不等式 $d(x,\ x_0)<\delta$ 的任意 $x\in S$，不等式

$$d(f^t x,\ f^t x_0)<\varepsilon$$

对每个 $t\in\mathbf{N}$ 成立．进而，如果可以找到 $\delta_0>0$，使得对每个满足 $d(x,\ x_0)<\delta_0$ 的 $x\in S$，等式

$$\lim_{t\to+\infty}d(f^t x,\ f^t x_0)=0$$

成立（相应地，不等式

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\ \ln d(f^t x,\ f^t x_0)<0$$

成立），则点 x_0 称为关于 f 渐近（相应地，指数）稳定的．

设 f 为紧拓扑空间 S 到自身的映射．点 $x_0\in S$ 称为关于 f 是 Ляпунов 稳定的（渐近稳定的），如果它在赋予度量的 S 上满足上述条件．点的这个性质与度量的选取无关．

若 S 是紧可微流形，则点 $x_0\in S$ 称为关于映射 f: $S\to S$ 指数稳定的，如果在 S 上赋予某个 Riemann 度量后它满足上述条件．点的这个性质与 Riemann 度量的选取无关．

3．设给定微分方程（2），这里 x 位于拓扑向量空间 E 中．该方程的解 $x_0(\cdot)$: $t_0+\mathbf{R}^+\to E$ 称为 Ляпунов 稳定的，如果对于原点的每个邻域 $U\subset E$，存在 E 中 $x_0(t_0)$ 的邻域 V，使得对每个 $x\in E$, Cauchy 问题（2）（$x(t_0)=x$）的解 $x(\cdot)$ 在 $t_0+\mathbf{R}^+$ 上唯一确定，且对所有的 $t\in t_0+\mathbf{R}^+$，满足关系式 $x(t)-x_0(t)\in U$．进而如果可以找到点 $x_0(t_0)$ 的邻域 $V_0\subset E$，使得对（2）的满足 $x(t_0)\in V_0$ 每个解 $x(\cdot)$，等式

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t)-x_0(t))=0$$

（相应地，

$$\lim_{t\to+\infty}e^{at}(x(t)-x_0(t))=0$$

对某个 $a>0$）成立，则解 $x_0(\cdot)$ 称为渐近（相应地，指数）稳定的．若 E 是赋范空间，则此定义可以表示成上述 1 中的形式，只要取与 E 上拓扑相容的任何范数作为范数 $|\cdot|$.

4．设微分方程（2）定义在 Riemann 流形 U（可取 Euclid 空间或 Hilbert 空间作为模型）上，或更一般的情形，定义在 Finsler 流形 U（可取赋范空间作为模型）上；U 中的距离函数记为 $d(\cdot,\ \cdot)$．此方程的解 $x_0(\cdot)$: $t_0+\mathbf{R}^+\to U$ 称为 Ляпунов 稳定的，如果对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对每个满足 $d(x,\ x_0(t_0))<\delta$ 的 $x\in U$, Cauchy 问题（2）（$x(t_0)=x$）的解 $x(\cdot)$ 在 $t_0+\mathbf{R}^+$上唯一确定，且对所有的 $t\in t_0+\mathbf{R}^+$，不等式 $d(x(t),\ x_0(t))<\varepsilon$ 成

立．进而如果还能找到 $\delta_0>0$，使得对于（2）的每个其初始值满足不等式 $d(x(t_0), x_0(t_0))<\delta_0$ 的解 $x(\cdot)$，等式

$$\lim_{t\to+\infty} d(x(t), x_0(t))=0$$

（相应地，不等式

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln d(x(t), x_0(t))<0)$$

成立，则解 $x_0(\cdot)$ 称为渐近（相应地，指数）稳定的．

假定微分方程（2）定义在紧微分流形 V^n 上．此方程的解称为 Ляпунов 稳定的（渐近，指数稳定的），如果在流形 V^n 上赋予某个 Riemann 度量时，它满足上述条件．解的这个性质与 Riemann 度量的选择无关．

5．设 E 为**一致空间**（uniform space）．设

$$f_t: U\to E, t\in G^+ \ (G=\mathbf{R} \text{ 或 } =\mathbf{Z})$$

为定义在开集 $U\subset E$ 上的映射．点 $x_0\in U$ 称为关于映射族 $\{f_t\}_{t\in G^+}$ 是 Ляпунов 稳定的，如果对每个周域（entourage）W，存在点 x_0 的邻域 V，使得对每个 $t\in G^+$，满足 $(f_tx, f_tx_0)\in W$ 的所有 $x\in U$ 的集合为 x_0 的邻域．进而如果还存在 x_0 的邻域 V_0，使得对每个 $x\in V_0$ 和每个周域 W，能够找到 $t(x, W)\in G^+$，满足对所有的 $t\in t(x, W)+\mathbf{R}^+$ 有 $(f_tx, f_tx_0)\in W$，则点 x_0 称为渐近稳定的．

如果 E 是紧拓扑空间且 $f_t: U\in E, t\in G^+$，为定义在某个开集 $U\subset E$ 上的映射，则点 $x_0\in U$ 称为关于映射族 $\{f_t\}_{t\in G^+}$ 是 Ляпунов 稳定的（渐近稳定的），如果在空间 E 赋予与 E 上拓扑相容的唯一的一致结构后，它满足上述条件．

6．设 E 为拓扑空间，U 为其中的开子空间．设 $f_t: U\to E, t\in G^+$（这里 G 为 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$）是以 x_0 为不动点的映射．不动点 x_0 称为关于映射族 $\{f_t\}_{t\in G^+}$ 是 Ляпунов 稳定的，如果对 x_0 的每个邻域 V，存在 x_0 的邻域 W，使得对所有的 $t\in G^+$，有 $f_tW\subset V$．进而，如果还存在 x_0 的邻域 V_0，使得对每个 $x\in V_0$，$\lim_{t\to+\infty} f_tx=x_0$，则点 x_0 称为关于映射族 $\{f_t\}_{t\in G^+}$ 是渐近稳定的．

7．任意阶方程 $y^{(m)}=g(y, \dot y, \cdots, y^{(m-1)}, t)$ 的解 $y_0(\cdot)$ 的 Ляпунов 稳定性（渐近稳定性，指数稳定性）可以理解为相应的一阶方程（2）的解 $x_0(\cdot)=(y_0(\cdot), \dot y_0(\cdot), \cdots, y_0^{(m-1)}(\cdot))$ 的 Ляпунов 稳定性（相应地，渐近，指数稳定性），这里 $x=(x_1, \cdots, x_m)$, $f(x, t)=(x_2, \cdots, x_m, g(x_1, \cdots, x_m, t))$．

定义 1, 2, 4, 6, 7 中包括了具有有限自由度系统的稳定运动（这里，当考虑有约束的力学系统时，自然会出现流形上的方程）．定义 2－7 包括连续介质力学和物理学中其他方面中的稳定运动，算子方程、函数微分方程（特别是具有滞后自变量的方程）以及其他方程的稳定解．

自治系统平衡位置的稳定性研究．设 $\dot x=f(x)$ 为定义在点 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 的邻域上的自治微分方程，这里的函数 $f(\cdot)$ 连续可微且在此点为零．如果导数 df_{x_0} 的所有本征值的实部都为负，则 $\dot x=f(x)$ 的不动点 x_0 为指数稳定的（关于首次逼近稳定性的 Ляпунов 定理（Lyapunov theorem on stability in a first approximation））；为便于验证本定理的条件，可利用稳定性准则．如果在这些条件下，导数 df_{x_0} 至少有一个本征值其有正实部（可以不求出本征值本身来验证此条件，见**稳定性准则**（stability criterion）），则微分方程 $\dot x=f(x)$ 的不动点不稳定．

例　具有摩擦的摆的振动方程为

$$\ddot y+a\dot y+b\sin y=0, a, b>0.$$

较低的平衡位置 $y=\dot y=0$ 是指数稳定的，因为**变分方程**（variational equation）的特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的根有负实部．较高的平衡位置 $y=\pi$, $\dot y=0$ 不稳定，因为变分方程 $\ddot y+a\dot y-by=0$ 的特征方程 $\lambda^2+a\lambda-b=0$ 有一个正根．这种不稳定性即使在没有摩擦时（$a=0$）也会出现．无摩擦的摆的较低平衡位置是一个所谓临界情况（critical case），这时导数 df_{x_0} 的所有本征值都在左半复平面上，并且至少有一个位于虚轴上．

为了研究临界情况的稳定性，A. M. Ляпунов 提出了研究稳定性的所谓第二方法（second method）（见 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function））．对于无摩擦的摆运动，

$$\ddot y+b\sin y=0, b>0,$$

较低平衡位置是 Ляпунов 稳定的，因为存在着 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function）

$$V(y, \dot y)=\frac{1}{2}\dot y^2+b(1-\cos y),$$

它是摆的总能量；这个函数导数的非正性条件是能量守恒定律的推论．

可微映射 $f: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不动点 x_0 关于 f 是指数稳定的，如果导数 df_{x_0} 的所有本征值的模都小于 1，而若它们至少有一个的模大于 1 则不稳定．

可微映射周期点稳定性的研究可化简为不动点关于这些映射的幂的稳定性研究．自治微分方程的周期解不是渐近稳定的（见**轨道稳定性**（orbit stability）；**Андронов-Witt 定理**（Andronov-Witt theorem））．

不能认为由自治微分方程 $\dot{x}=f(x)$ 沿着解 $x(\cdot)$ 的变分方程零解的指数稳定性就能推出解的稳定性．Perron 例子（Perron example）说明了这一点（见[2]，[3]）：

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-au,\\ \dot{v}&=(\sin\ln t+\cos\ln t-2a)v+u^2;\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

对 $a>1/2$，系统（3）（沿零解）的变分方程组

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-au,\\ \dot{v}&=(\sin\ln t+\cos\ln t-2a)v\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

的零解是指数稳定的（系统（4）的 Ляпунов 特征指数为 $-a, 1-2a$，见 **Ляпунов 特征指数**（Lyapunov characteristic exponent）），但对 $a\in(1/2,(2+e^{-\pi})/4)$，系统（3）的零解不稳定．然而，按照下面的解释，首次逼近的稳定性是典型的．

设 S 为 Euclid 空间 E^n 到自身的微分同胚 f 的集合，它具有满足不等式

$$\sup_{x\in E^n}\max\{\|df_x\|,\ \|(df_x^{-1})\|\}<+\infty$$

的一致连续导数．对每个微分同胚 $j\in S$，记 S_j 为所有满足不等式

$$\sup_{x\in E^n}|fx-jx|<+\infty$$

的 $f\in S$ 的集合，对 S_j 所赋予的距离函数为

$$d(f,g)=\sup_{x\in E^n}(|fx-gx|+\|df_x-dg_x\|).$$

对每个 $j\in S$，在 $S_j\times E^n$ 中存在具有下列性质的 G_δ 型处处稠密集 D_j：如果 $(f,x)\in D_j$ 使得对每个 $g\in T_xE^n$，不等式

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{1}{m}\ln|df^m g|<0$$

成立，则在 $S_j\times E^n$ 中存在 (f,x) 的邻域 U，使得对每个 $(g,y)\in U$，点 y 关于微分同胚 g 是指数稳定的．

对于定义在紧可微流形上的动力系统，类似的定理可叙述得更简单，它并可表成微分拓扑不变量．设 V^n 为闭的可微流形．对于 V^n 到 V^n 的 C^1 类映射的所有微分同胚 f 的集合 S，可赋予 C^1 拓扑．在空间 $S\times V^n$ 中，存在具有下列性质的 G_δ 型的处处稠密集 D：如果对 $(f,x)\in D$，不等式

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\ln|df^m g|<0$$

对所有 $g\in T_xV^n$ 成立，则在 $S\times V^n$ 中存在 (f,x) 的邻域 U，使得对每个 $(g,y)\in U$，点 y 关于微分同胚 g 是指数稳定的．

Ляпунов 稳定性，渐近稳定性和指数稳定性的概念是 Ляпунов（[1]）为了发展研究这些定义意义下的稳定性的方法而提出的（见 **Ляпунов 稳定性理论**（Lyapunov stability theory））．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[2] Perron, O., Ueber Stabilitat und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, *Math. Z.*, **29** (1928), 129 – 160.

[3] Bellman, R., Stability theory of differential equations, Dover, reprint, 1969.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 关于右边不连续的微分方程的稳定性问题，见[A6].

参考文献

[A1] Lasalle, J. P. and Lefschetz, S., Stability by Lyapunov's direct method with applications, Acad. Press, 1961.

[A2] Hirsch, M. W. and Smale, S., Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Acad. Press, 1974.

[A3] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1967.

[A4] Bhatia, N. P. and Szegö, G. P., Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970.

[A5] Rabinovich, M. I. and Trubetskov, D. I., Oscillations and waves, Kluwer, 1989, Chapt. 6 – 7（译自俄文）.

[A6] Filippov, A. F., Differential equations with discontinuous righthand sides, Kluwer, 1989, § 15（译自俄文）.

唐 云 译

Ляпунов 稳定性理论 [Lyapunov stability theory; Ляпунова теория устойчивости]

А. М. Ляпунов 在 19 世纪末和 20 世纪初建立的运动稳定性理论（见[1]）．其基础是 Ляпунов 引入的 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability）概念和渐近稳定性概念（见**渐近稳定解**（asymptotically-stable solution）），首次近似中的 Ляпунов 稳定性定理（研究稳定性的 Ляпунов 第一方法的基础）和 Ляпунов 第二方法（见 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function））．为建立稳定性理论而发展的 Ляпунов 的方法和结果，在数学、力学和工程技术中有着重要的、多种应用．亦见**稳定性理论**（stability theory）．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М. -Л., 1956（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

В. М. Миллионщиков 撰　张鸿林 译

Ляпунов 随机函数 [Lyapunov stochastic function; Ляпун-

ова стохастическая функция]

一个非负函数 $V(t,x)$，使得 $(V(t,X(t)),F_t)$ 是与某个随机过程 X 相联系的上鞅（见**鞅**（martingale）），其中 F_t 是过程 X 到时刻 t 为止生成的 σ 代数．如果 X 是 **Марков 过程**（Markov process），则 Ляпунов 随机函数是一个函数，使得作用于它的 Ляпунов 随机算子

$$LV(t,x)= =\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathsf{E}[V(t+h,X(t+h))+ -V(t,X(t))|X(t)=x]$$

是非正的．算子 L 是过程 $(t,X(t))$ 的**无穷小算子**（infinitesimal operator），于是在一些特殊情形下容易检验条件 $LV\leqslant 0$ 是否成立．当过程 X 是决定性的且用一个微分方程系统描述时，算子 L 就成为通常的 Ляпунов 算子 $dV(t,X(t))/dt$．利用 Ляпунов 随机函数，可以检验 $X(t)$ 的许多定性的轨道性质，它在随机过程论中的作用相当于在微分方程系统论中 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function）的作用．

当函数 $V(t,x)$ 即便使 $(V(t,X(t)),F_t)$ 不是上鞅，但由它很容易形成一个上鞅时，有时也称其为 Ляпунов 随机函数．下面是利用 Ляпунов 随机函数研究 Марков 过程轨道定性性质的典型结果．

1）若 $X(t)$ 是取值于 $\mathbf{R}^k$ 的右连续强 Марков 过程，直到首次离开某个任意紧集的时刻 τ 以前有定义，如果存在一个 Ляпунов 函数 $V(t,x)(t>0,x\in\mathbf{R}^k)$，且有一常数 c，使得

$$\inf_{t,|x|>R}V(t,x)\to\infty,\text{当}R\to\infty, LV\leqslant cV,$$

则

$$\mathsf{P}\{\tau<\infty|X(0)=x\}=1$$

对一切 $x\in\mathbf{R}^k$ 成立，即过程 X 对一切 $t>0$ 有定义（可无限地扩展）．

2）$\mathbf{R}^k$ 上与**转移函数**（transition function）$P(t,x,A)$ 相应的平稳 Марков 过程存在的一个充分条件是，有一函数 $V(x)\geqslant 0$，使当 $R\to\infty$ 时

$$\sup_{|x|>R}LV(x)\to-\infty.$$

借助 Ляпунов 随机函数，可以将直接 Ляпунов 方法的主要定理移植到 Марков 过程上来．这些函数在离散时间过程的研究中也找到了应用．

参考文献

[1] Kushner, H. J., Stochastic stability and control, Acad. Press, 1967.

[2] Хасьминский, Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969（英译本：Has'minskii, R. Z. [R. Z. Has'minskii], Stochastic stability of differential equations, Sythoff & Noordhoff, 1980).

[3] Калашников, В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978.

Р. З. Хасьминский 撰

【补注】术语随机 Ляпунов 函数（stochastic Lypunov function）比"Ляпунов 随机函数"用得更普遍．

近来，随机 Ляпунов 函数用来证明被随机过程驱动的递归算法的收敛性．这种类型的收敛问题出现在系统识别（system identification）和适应控制（adaptive control）中．

参考文献

[A1] Goodwin, G. C., Ramagadge, P. J. and Caines, P. E., Discrete time stochastic adaptive control, *SIAM J. Control Optim.*, **19** (1981), 829 – 853.

[A2] Metivier, M. and Priouret, P., Applications of a Kushner and Clark lemma to general classes of stochastic algorithms, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **30** (1984), 140 – 151.

[A3] Solo, V., The convergence of AML, *IEEE Trans. Autom. Control*, **24** (1979), 958 – 962.

[A4] Schuppen, J. H. van., Convergence results for continuous-time stochastic filtering algorithms, *J. Math. Anal. Appl.*, **96** (1983), 209 – 225.

刘秀芳 译

Ляпунов 曲面和曲线[**Lyapunov surfaces and curves**; **Ляпунова поверхности и кривые**]

一类具有相当好的光滑性质的曲面和曲线；А. М. Ляпунов 在 20 世纪初将它们引入位势理论．

三维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面 S 称为 Ляпунов 曲面（Lyapunov surface），如果它满足如下三个条件（Ляпунов 条件（Lyapunov conditions））：1）在 S 的每一点，存在切平面和相应的法线；2）存在一个不依赖于 S 的点的数 $r>0$，使得如果取 Σ 为 S 在具有中心在任意一点 $y_0\in S$ 和半径为 r 的 Ляпунов 球面（Lyapunov sphere）$B(y_0,r)$ 内部的部分，那么平行于 S 在 y_0 的法线的诸直线最多交于 Σ 一次；3）存在不依赖于 S 的点的两个数 $A>0$ 和 λ，$0<\lambda\leqslant 1$，使得对于任意两点 $y_1,y_2\in S$，

$$|\theta|<A|y_1-y_2|^\lambda, \qquad (*)$$

其中 θ 是 S 在 y_1 和 y_2 的法线之间的夹角．有时还补充要求，S 是闭的且 S 的任意部分 σ 对任意一点 $x\in\mathbf{R}^3$ 所张的立体角是一致有界的．

Ляпунов 条件可以推广到 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 的超曲面．

类似地，平面 $\mathbf{R}^2$ 的一条简单连续曲线 L 称为是 Ляпунов 曲线（Lyapunov curve），如果它满足如下条件：1′）在 L 的每一点，存在切线和相应的法线；3′）存在对整个 L 相同的两个数 $A>0$ 和 λ，$0<\lambda\leqslant 1$，

使得对于任意两点 $y_1, y_2 \in L$, 不等式 (*) 成立，其中 θ 是 L 在 y_1 和 y_2 的切线或者法线之间的夹角. 这里 Ляпунов 条件 (2) 可由 1′) 和 3′) 推出. Ляпунов 曲线类是简单光滑曲线的子类.

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., О некоторых вопросах, связанных с задачей дирихле, в его кн.: Собр. соч., т. 1, М., 1954, 45-47; 48-100.

[2] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966 (中译本: С. Л. 索波列夫, 数学物理方程, 人民教育出版社, 1958).

[3] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971, гл. 5 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984, Chapt. 5).

[4] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968, гл. 1. (中译本: Н. И. 穆斯海里维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966). Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Ляпунов 曲面必是 C^1 类, 另一方面, 紧 C^2 类曲面是 Ляпунов 曲面. Ляпунов 曲面用来研究单层和双层位势. 高琪仁、吴炯圻 译

Ляпунов 定理 [Lyapunov theorem; Ляпунова теорема]

1) 概率论中的 Ляпунов 定理

建立一个很一般的充分条件使得独立随机变量之和的分布收敛于**正态分布** (normal distribution) 的一个定理. Ляпунов 定理的精确陈述如下: 设独立随机变量 $X_1, X_2, \cdots$, 具有有限的平均数 $\mathsf{E}X_k$、方差 $\mathsf{D}X_k$ 和绝对矩 $\mathsf{E}|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta}$, $\delta > 0$, 又设 $B_n = \sum_{k=1}^n \mathsf{D}X_k$ 是 $X_1, \cdots, X_n$ 之和的方差. 如果对于某个 $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta}}{B_n^{1+\delta/2}} = 0, \tag{1}$$

那么当 $n \to \infty$, 不等式

$$x_1 < \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathsf{E}X_k)}{\sqrt{B_n}} < x_2 \tag{2}$$

的概率关于 x_1 和 x_2 的所有值一致收敛于极限

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx. \tag{3}$$

条件 (1) 称为 Ляпунов 条件 (Lyapunov condition). Ляпунов 定理于 1901 年由 А. М. Ляпунов 提出且证明, 是 П. Л. Чебышев, А. А. Марков 和 А. М. Ляпунов 研究概率论中心极限定理的适用条件所得到的最后结果. 随后, 建立了推广的 Ляпунов 条件, 以及不仅是充分的而且是必要的条件. 这方面问题的最后解决由 С. Н. Бернштейн, J. Lindeberg 和 W. Feller 所得到. 特征函数的方法首次在 Ляпунов 定理中显示其威力.

Ляпунов 还给出 (2) 的概率与它的近似值 (3) 之差 Δ 的绝对值的一个上界 (当 $\delta \leq 1$ 时). 这个界可表示为如下形式: 当 $\delta < 1$ 时,

$$|\Delta| \leq C_1 L_{n,\delta},$$

当 $\delta = 1$ 时,

$$|\Delta| \leq C_2 L_{n,1} \left| \log \frac{1}{L_{n,1}} \right|,$$

其中 C_1 与 C_2 是绝对常数, $L_{n,\delta}$ 是式 (1) 中极限号下的分式 (Ляпунов 分式 (Lyapunov fraction)). 亦见 **Berry-Esseen 不等式** (Berry-Esseen inequality).

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, 157 - 176.

[2] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.

[3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1966. А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Laha, R. G. and Rohatgi, V. K., Probability theory, Wiley, 1979.

2) 位势论中的 Ляпунов 定理

А. М. Ляпунов 在 1886-1902 年所得到的, 涉及位势的性质和 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的解的若干定理.

最大位势物体定理 (theorem on the body of greatest potential): 如果在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中存在一个均匀物体 T, 当体积给定时, 其 **Newton 位势** (Newton potential) 的能量, 即积分

$$E(T) = \iint_{TT} \frac{dx\, dy}{|x-y|}, \tag{1}$$

达到它的最大值, 则这个物体是一个球体.

积分 (1) 是以密度 1 均匀分布在物体 T 上的质量的能量 (energy). 后来, T. Carleman (1919) 证明了, 对于给定的体积, 确实存在一个物体 T 使其能量 $E(T)$ 达到它的最大值.

双层位势的法向导数第一定理 (first theorem on the normal derivatives of a double-layer potential): 令 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个闭 Ляпунов 曲面, $f(y)$ 是分布在 S 上质量的密度, 假设如下两个条件之一满足: a) $f(y)$ 在 S 上连续, 关于 S 在两点 $y_1, y_2 \in S$ 的法线之间夹角 θ, Ляпунов 条件中的指数 $\lambda = 1$, 即 $|\theta| < A|y_1 - y_2|$ (见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)); 或者 b) $f(y)$ 是带指数 1 Hölder 连续的, 即

$|f(y_1)-f(y_2)|<A|y_1-y_2|$；则，如果**双层位势**(double-layer potential)

$$W(x)=\int_S f(y)\frac{\cos(y-x,n_y)}{|x-y|^2}dy \qquad (2)$$

在点 $y_0 \in S$ 的内法向导数 dW_i/dn_{y_0} 或者外法向导数 dW_e/dn_{y_0} 之一存在，那么另一个也存在且相等.

双层位势的法向导数第二定理(second theorem on the normal derivatives of a double-layer potential)：在前面定理的假定下，还假设密度 $f(y)$ 满足 Ляпунов 条件(Lyapunov condition)

$$\int_0^{2\pi}|f(\rho,\varphi)-f(y_0)|d\varphi<a\rho^{1+\nu},\quad a,\nu>0,$$

其中 (ρ,φ,z) 是原点在 $y_0\in S$ 和 z 轴沿法线 n_{y_0} 方向，在 Ляпунов 球面内部的柱面坐标(见 **Ляпунов 曲面和曲线**(Lyapunov surfaces and curves))，则双层位势(2)在 y_0 点的两种法向导数存在.

单层位势的一阶导数定理(theorem on the first derivatives of a simple-layer potential)：令 S 是一个闭 Ляпунов 曲面和假设密度 $f(y)$ 是 Hölder 连续的，即

$$|f(y_1)-f(y_2)|<A|y_1-y_2|^\lambda,\ 0<\lambda<1.$$

则**单层位势**(simple-layer potential)

$$V(x)=\int_S f(y)\frac{dy}{|x-y|}$$

的一阶偏导数 $\partial V/\partial x_i$, $i=1,2,3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ 在闭内部区域 $\overline{D}_i$ 和闭外部区域 $\overline{D}_e$ 是带相同指数 λ Hölder 连续的.

在这个定理中，Ляпунов 只陈述了 Hölder 连续性，其证明由 N.M.Gunther 完成(见[2]).

Ляпунов 所提供的这些定理，作为用积分方程的方法建立 Dirichlet 问题可解性严格理论的基础. Gunther 的专著着重发展 Ляпунов 的思想(见[2])；推广到更一般形式的位势见[3].

参考文献

[1A] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, 26 - 32.

[1B] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, 33 - 34.

[1C] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, 45 - 100.

[1D] Ляпунов, А. М., Собр. соч. т. 1, М., 1954, 101 - 122.

[2] Gunther, N. M., Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F. Ungar, 1967 (译自法文).

[3] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Král, J., Integral operators in potential theory, Lecture notes in math., 823, Springer, 1980.

高琪仁、吴炯圻 译

Ляпунов 变换 [Lyapunov transformation; Ляпунова преобразование]

非退化的线性变换 $L(t)$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ (或 $L(t)$: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$)，它光滑地依赖于参数 $t\in\mathbf{R}$，且满足条件

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}[\|L(t)\|+\|L^{-1}(t)\|+\|\dot{L}(t)\|]<+\infty.$$

这是由 А.М.Ляпунов 于 1892 年提出的(见[1]). Ляпунов 变换广泛应用于线性常微分方程理论中. 在很多情况下，要求

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\|\dot{L}(t)\|<+\infty$$

可以去掉.

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956, 7 - 263(英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966).

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1967.

唐 云 译

M

m 相依过程 [m-dependent process]

【补注】 离散时间随机过程（stochastic process）$(X_n)_{n\in Z}$ 称为 m 相依的，如果对所有 k，联合随机变量 $(X_n)_{n\leqslant k}$ 独立于联合随机变量 $(X_n)_{n\geqslant k+m+1}$.

这类过程是作为尺度变换（重正规化）的极限，因而也是作为具有尺度对称性过程的例子自然产生的（[A1]）. m 相依过程的例子由（$m+1$）分块因子（block factors）给出，其定义如下：设 $(Z_n)_{n\in Z}$ 是一独立过程，f 为 $m+1$ 个变元的函数，$X_n=f(Z_n,\cdots,Z_{n+m})$，则（$m+1$）分块因子 X_n 是一 m 相依过程.

但存在并非 2 分块因子的 1 相依过程（one-dependent process）（[A2]）.

参考文献

[A1] O'Brien, G. L., Scaling transformations for {[0, 1]}-valued sequences, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, **53** (1980), 35 − 49.

[A2] Aaronson, J., Gilat, D., Keane, M., Valk, V. de, An algebraic construction of a class of one-dependent processes, *Ann. Probab.*, **17** (1988), 128 − 143.

[A3] Janson, S., Runs in m-dependent sequences, *Ann. Probab.*, **12** (1984), 805 − 818.

[A4] Haiman, G., Valeurs extrémales de suites stationaires de variable aléatoires m-dépendants, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N. S.)*, **17** (1981), 309 − 330.

潘一民 译

Macdonald 函数 [Macdonald function; Макдональда функция]，变形柱函数（modified cylinder function），虚变元的 Bessel 函数（Bessel function of imaginary argument）

函数

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\ \frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi},$$

其中 ν 是任意非整实数，而

$$I_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{z}{2}\right]^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

是具有纯虚变元的**柱函数**（cylinder functions）. H. M. Macdonald（[1]）曾讨论过这类函数，如果 n 是整数，则

$$K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z).$$

Macdonald 函数 $K_\nu(z)$ 是微分方程

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-(z^2+\nu^2)y=0$$

的解，当 $z\to\infty$ 时它按指数方式趋向于零，并且取正值. 函数 $I_\nu(z)$ 和 $K_\nu(z)$ 构成（*）的**基本解组**（fundamental system of solutions）.

对于 $\nu\geqslant0$，仅当 $\operatorname{Re}z<0$ 时 $K_\nu(z)$ 具有根. 如果 $\pi/2<|\arg z|<\pi$，则在这两个扇形中根的个数等于最接近 $\nu-1/2$ 的偶数，只要 $\nu-1/2$ 不是整数；而在后一种情况下，根的个数等于 $\nu-1/2$. 对于 $\arg z=\pm\pi$，如果 $\nu-1/2$ 不是整数，则不存在根.

一些级数和渐近表示式为：

$$K_{n+1/2}(z)=\left[\frac{\pi}{2z}\right]^{1/2}e^{-z}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!(n-r)!(2z)^r},$$

其中 n 是非负整数；

$$K_0(z)=-\ln\left[\frac{z}{2}\right]I_0(z)+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{z}{2}\right]^{2m}\frac{1}{(m!)^2}\,\psi(m+1),$$

$$\psi(1) = -C, \psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - C,$$

其中 $C = 0.5772157\cdots$ 是 Euler 常数;

$$K_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!(z/2)^{n-2m}} +$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!}\left\{\ln\left[\frac{z}{2}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi(m+1) - \psi(n+m+1)}{2}\right\},$$

其中 $n \geqslant 1$ 是整数; 对于大的 z 和 $|\arg z| < \pi/2$, 有

$$K_\nu \sim$$

$$\sim \left[\frac{\pi}{2z}\right]^{1/2} e^{-z}\left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2} + \cdots\right].$$

递推公式

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2\frac{dK_\nu(z)}{dz}.$$

参考文献

[1] Macdonald, H. M., Zeroes of the Bessel functions, *Proc. London Math. Soc.*, **30** (1899), 165 – 179.

[2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1–2, Cambridge Univ. Press, 1952.

В. И. Пагурова 撰　张鸿林 译

Mach 数 [Mach number; Маха число]

空气动力学相似性的基本准则之一, 如果气体的粘性是不可忽略的. Mach 数 $M = v/a$ 是气流中同一点上的气流速度与声速之比 (或气体中物体的速度与该介质中的声速之比). 这一名称是为了记念 E. Mach.

根据 БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Howarth, L. (ed.), Modern developments in fluid dynamics, high speed flow, 1–2, Oxford Univ. Press, 1953.

张鸿林 译

Mach 原理 [Mach principle; Маха принцип]

关于每一自然界的物体的惯性性质是由宇宙中所有其他物体所决定的论断. 在经典力学中, 则相反, 认为物体的惯性性质, 如其质量, 与其他物体的存在与否无关. Mach 原理是 Mach 在对经典力学进行批判性分析时提出的 (见文献 [1]), 但是他没有给出这一原理的精确数学提法. 这一原理有几个互相不等价的数学提法.

参考文献

[1] Mach, E., The science of mechanics, Open Court, 1893.

[2] Einstein, A., Ernst Mach, *Phys. Zeitscher*, **17** (1916), 7, 101 – 104.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wheeler, J. A., Geometrodynamics and the issue of the final state, in C. DeWitt and B. DeWitt (eds.), Relativité, Groupes and Topologie, Gordon & Breach, 1964, 315 – 520.

沈 青 译

机器 [machine; машина], 数学中的

一种实现**信息** (information) 处理的抽象装置, 也称为抽象机器 (abstract machine) 或自动机 (automaton). 抽象机器是**控制系统** (control system) 的特例. 伴随着算法概念的分析 (始于 20 世纪 30 年代中期)、计算机的发展以及生物系统的数学模型构造而产生了抽象机器. 现在, 这种处理离散信息的机器已经十分普及了. 其典型的代表是**有限自动机** (automaton, finite) 和 **Turing 机** (Turing machine). 不难想象, 抽象机器可以用多种简易的方法组合, 并且有简单的操作步骤. 最初, 机器的研究没有脱离**算法理论** (algorithms, theory of) 和数学**控制论** (cybernetics) 的框架, 研究目的在于算法概念的分析与形式化, 以及用一种数学方法对于实际装置及过程建立模型. 抽象机器与实际计算机之间有许多富有成果的联系, 构造计算机和编写它的程序在很大程度上要依靠算法和数学控制论的理论, 使用计算机的实践也不断地提出新的问题并且给出解决这些问题的机器模型.

所有抽象机器的共同点是具有一个有限控制装置, 这个装置能够处于状态 $q_1, \cdots, q_k$ 之一. 机器有一个潜在无限的外存并能把信息读写入外存. 通常, 信息的读写是被局部执行的. 机器的操作是由形如 $q_i a \to q_j b$ 的指令组成的程序所决定的, 这里 q_i, q_j 是控制装置的状态, a 表示来自外存的局部字段的有序信息, 而 b 是表示外存内容和读头位置改变的记号. 机器是离散地动作的, 在步骤 t, 机器读头把信息 a 从外存读入控制装置. 如果此时机器的控制装置处于状态 q_i, 并且程序中含有指令 $q_i a \to q_j b$, 则在下一步骤 $t+1$, 控制装置处于状态 q_j, 外存的内容和读头的位置则根据 b 来变化. 通常, 需要从控制装置的状态中定出一个或几个开始状态或终止状态. 在动作开始之前, 控制装置处于一个开始状态, 而动作的结束则由终止状态 (一个或几个) 确定.

在许多情况下, 抽象机器用于计算数值 (文字) 函数和谓词. 用机器 M 计算函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是如下进行的. 对自变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的任一组值,

指明 M 的一个初始格局 $K_1(x_1, \cdots, x_n)$，它表示对应于 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的外存内容和读头位置．这个格局决定了 M 的终止格局，即何时 f 在 M 上的计算结束．同时也就决定了所计算的 f 的值．根据机器 M 的程序，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 的值的计算是由从初始状态 $K_1(x_1, \cdots, x_n)$ 到下一个状态 $K_2(x_1, \cdots, x_n)$，一直到终止状态的状态转移序列所构成的．如果 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的值没有定义，则从 $K_1(x_1, \cdots, x_n)$ 开始，M 永远不能到达终止格局，此时，计算过程会无休止的进行．

在抽象机器的定义中经常使用一种常规 Turing 机，其区别只是在 Turing 机上附加一些新的功能或限制．Turing 机的修改常常按照下列三种方式进行．

1．外部存储器的构造．最常见的办法是引入几条带（多带 Turing 机）．也常研究具有单向带的或多维带的，并具有一种无限**图**（graph）形式（例如无限二叉**树**（tree）的形式）外部存储器的机器．另一种方式是用寄存器或计算构架来替代 Turing 机的带，这种寄存器或计算构架可以含有自然数（整数）或任意长的字．这就是 Shepherdson-Sturgis 机器（Shepherdson-Sturgis machine）（[6]），Minsky 机器（Minsky machine）（[3]）和随机存取机器（random-access machine）.

2．信息的存储、变换以及从外存的获取．考虑一种机器，如果其外存信息的一部分在某段时间里（依赖于输入）没有读取，则在以后的时间里就变为完全不可读取了．具有存储类型带的 Turing 机的定义就是建立在一个与之紧密相关的想法上的（下推自动机（pushdown automata））．

对于从外存中一个符号接一个符号地取出或变换信息的机器来说，典型的限制是在某些符号后不能打印一些符号．例如，非抹除的 Turing 机和等价于有限自动机的双向自动机就是这样的．重要的有限自动机也属于这种类型．然而，更为常见的是对存储器大小，运行时间等方面的限制．例如，一个线性界限自动机是一个在计算中所使用的带子长度由输入的长度的线性函数来界限的 Turing 机．

从外存中来的信息往往是使用多个读头得到的．但更为普遍的方法是在外存上定义一般递归谓词．这些谓词的集合确定到达机器控制装置的信息．这样一种想法被用于 Shepherdson-Sturgis 机器中，在此，进入外存的信息的加成是由任意的一般递归函数实现的．

3. 运作的方式．这里，要区分确定性的、非确定性的和概率的机器．对于确定性机器（deterministic machine），其每个操作步骤都是被控制装置的状态和由读头得到的来自外存的信息所唯一确定的．非确定性机器的程序中可以包含具有相同左端的不同的指令．因此，对非确定性机器来说，对于一个给定的输入，考虑的不是一个而是与程序相容的所有计算的集合．一个概率机器（probabilistic machine）是这样一种机器，它具有生成随机数的功能，或者具有按给定概率实现从一条指令转移到另一条指令的程序．

在非确定性机器的情况下，常常考虑谓词的计算．如果一个非确定性机器 M 计算谓词 $p(x_1, \cdots, x_n)$，则当且仅当 M 从格局 $K_1(x_1, \cdots, x_n)$ 开始的所有可能计算中有一个计算含有终止格局时，$p(x_1, \cdots, x_n)$ 真确．

一般说来，确定性的，非确定性的和概率的机器的计算能力是相同的，然而，在小范围的机器类中可以证明非确定性机器和概率机器比确定性机器更为有力．对许多在外存容量或运算时间有限制的抽象机器类型来说，非确定性机器的"确定化"是一个有兴趣的仍未解决的问题．

亦见**抽象计算机**（computer, abstract）.

参考文献

[1] Shannon, C. E. and McCarthy, J. (eds.), Automata studies, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965（英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970）.

[3] Minsky, M., Computation: finite and infinite machines, Prentice-Hall, 1967.

[4] Проблемы математической логики. Сб. переводов, М., 1970.

[5] Сложность вычислений и алгоритмов. Сб. переводов, М., 1974.

[6] Shepherdson, J. C. and Sturgis, H. E., Computability and recursive functions, *J. Assoc. Comp. Math.*, **10** (1963), 2, 217 – 255.

S. S. Marchenko 撰

【补注】 必须指出，当前机器模型间的基本区别是串行机器与并行机器（papallel machine）的区别．

在一个串行机器（sequential machine）模型中，有一个作用于某个潜在无穷存储结构上的单独的控制单元．对 Turing 机来说，其存储结构是被读写头存取的线性有序带．各种 Turing 机模型的不同在于带的数目，一条带上读头的数目以及工作带的维数．某些特殊的带可以在使用上有限制，如作为只读输入带，只写输出带等等．

在随机存取机器（RAM）（random access machine）中，存储器是由（计算机）字长的无限集合组成，每个字长的长度没有限定，因此它具有存储任意整数的能力．存储器用直接或间接读取和存储指令进行存取．从存取器中取出的数据进入中央处理器根据算术指令进行处理，像加法，减法，比较等等．更强

的模型也包括乘法指令以及基于数值的二进制表示的按位操作．

还有一类串型模型通过产生结点和重新定向结点间的指针而作用于有向图或无向图上．这类模型中最早的是 Колмогоров-Успенский 机器（Kolmogorov-Uspenskiĭ machine）（作用于无向图），作用于有向图上的机器常称为指针机器（pointer machine）或存储修改机器（storage modification machine）．

并行机模型具有潜在无穷多个的处理单元，它们借助通讯或共享存储来互相联系．并行模型间的差异甚至比串行模型更大．细胞阵列模型（cellular array model）由联成网络的有限状态处理器组成．虽然其组成部分是有限状态装置，但由于形成了网络便具有了广泛的计算能力．另一类模型，每个处理器都有一个自己的存储结构，处理器间通过信息交换联系．在与之相反的模型中，大量的处理器共享一个（潜在无穷）存储结构．在这样的模型中，至关要紧的事情是对于写冲突的形式处理（禁写，竞争，排序等等）．有些模型采取局部存储和全局存储的组合．

在一个计算过程中，仅有有限个处理器运作，不同的模型用不同的方式控制处理器的运作．某些消息传送模型（message passing model）用图形的内部联结方式动态地产生处理器．对于每一条指令，机器的中央存储器（central memory）指明在这条指令中运作的处理器个数．再有一种控制方式是建立在递归子程序上的，这种方式在递归子程序被调用时，一些递归的计算分支在调用时所产生的处理器上被并行执行．当答案已经返回到调用的处理器后，这些调用时产生的处理器被消除．

复杂性方面的考虑．在定义诸如运行时间或空间消耗这样一些计算复杂性的基本概念时，机器模型起着至关重要的作用．因为运行时间和空间消耗最终必须根据在某种理想化的机器上的计算来表达．因此研究如此得到的复杂度概念依赖于模型的程度是非常重要的．这是一件与不同模型之间互相模拟的效率问题密切相关的事情，因为所有这些模型都具有广泛的计算能力，这种互相模拟是存在的．

能够证明，所有基本的串行模型都能够互相模拟，并且在时间上相差一个多项式，而空间只相差一个常数因子（只要空间的度量被正确定义）．作为一个推论，对数空间以及多项式时间的概念成为一个数学上适当的而且与机器无关的概念．然而二次多项式时间可计算的概念本质上是依赖于模型的．这种相对于模型保持不变的性质被用来作为确定串行模型分类的标准．

对于许许多多种类的并行模型，已经知道存在并行机器多项式时间与串行机器多项式空间的等价性．但是对于各种文献中提出的所有并行模型之间，这种等价性是不成立的．某些退化的并行模型能在常数时间里计算任意复杂的函数．另一方面，由于某些串行模型能在单位时间内对指数函数这样的对象进行运算，所以它们能够多项式等价于并行模型．再强调一下，这个传统上被称为并行计算论题的等价性问题应该认为是并行处理的某些基本模型的特征．

关于串行模型一个基本的未解决问题是不确定计算的效能问题．著名的 $\mathscr{P}=\mathscr{NP}$？问题（在基本串行模型研究中该问题是与机器无关的）可以理解为把一个非确定串行装置在多项式时间等价意义上的确定化是一种过高的要求．类似地，尚未解决的 $\mathscr{P}=\mathscr{PSPACE}$？问题是相关于作为计算资源的时间与空间的关系问题，同时从并行计算论题（parallel computation thesis）的角度看，该问题也相关于并行处理的效能问题．

一种称为交错型（alternation）的以交错方式进行计算的模型是在 1976 年由 A．K．Chandra，D．C．Kozen 和 L．J．Stockmeyer 发明的．串行交错机器（sequential alternative machine）等价于标准的并行机器模型．但是交错模型还有另外的特点，它的对数空间等价于串行模型中的确定多项式时间．类似地、交错计算的多项式空间等价于串行的确定指数时间．

参考文献

[A1] Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., The design and analysis of computer algorithms, Addison-Wesley, 1974.

[A2] Chandra, A. K., Kozen, D. C. and Stockmeyer, L. J., Alternation, *J. Assoc. Comp. Math.*, **28** (1981), 114 − 133.

[A3] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979.

[A4] Kolmogorov, A. N. and Uspenkiĭ, V. A., On the definition of an algorithm, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **29** (1963), 217 − 245 (*Uspehi Mat. Nauk*, **13** (1958), 3 − 28).

[A5] Wagner, K. and Wechsung, G., Computational complexity, Reidel, 1986.

[A6] van Emde Boas, P., Machine models and simulations, in J. van Leeumen (ed.), Handbook of theoretical Computer Science, North-Holland, 1990.

[A7] Harrison, M. A., Introduction to switching and automata theory, McGraw-Hill, 1965.

[A8] Arbib, M. A., Theories of abstract automata, Prentice-Hall, 1969.

[A9] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical system theory, McGraw-Hill, 1969.

[A10] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Formal lan-

guages and their relation to automata, Addison-Wesley, 1969(中译本：J. E. 霍普克罗夫等，形式语言及其与自动机的关系，科学出版社，1979).

王水汀 译 李 廉 校

面向机器的语言[machine-oriented language; машинно-ориентированный язык]

一种程序语言，当编程时允许考虑宿主计算机中指令系统与信息表示的各种特性．面向机器的语言与通常的**面向问题的语言**(problem-oriented language)相比，后者将输入程序集 P 映入机器程序集 M 的一个子集，而前者将 P 映到 M 的全体．

最简单的面向机器的语言是汇编语言(assemblers)，它在完全保持机器程序结构的同时，允许人们使用指令与存储地址的符号记法，以及从分开描述的程序部件来组装程序．为了宏汇编(macro-assembler)的需要，还增加了在编译程序文本时文本替代和其他简单变换的可能性．更高水平的面向机器的语言，例如通用语言，具有短语结构，以供复合对象和定义运算操作使用．该结构也包含根据机器结构来描述初级对象及基本运算的手段．

参考文献

[1] Struble, G., Assembler language programming: the IBM system/360, Addison-Wesley, 1969.

[2] Brown, P., Macro processors and techniques for portable software, Wiley, 1974.

[3] Katkov, V. L. and Rar, A. F., Programming in Epsilon, Novosibirsk, 1972 (俄文).

А. П. Ершов 撰

【补注】 当前一个典型的高水平程序设计语言的例子是 C 语言，它支持直接利用机器一级的特性．它广泛用于 UNIX 环境下的通用程序设计．

参考文献

[A1] Kernighan, B. W. and Ritchie, D. M., The C programming language, Prentice-Hall, 1978.

曹为理 译 王继民 校

Mackey-Borel 结构[Mackey-Borel structure; Макки Борелевская структура]

可分 **C^* 代数**(C^*-algebra) A 的谱 $\hat{A}$(亦见 **C^* 代数的谱**(spectrum of a C^*-algebra))上的 Borel 结构(即 **Borel 集系**(Borel system of sets))定义如下．设 H_n, $n=1,2,\cdots$, 是 n 维 Hilbert 空间，且设 $\mathrm{Irr}_n(A)$ 是 C^* 代数 A 在 H_n 上的非零不可约表示的集合，赋予弱拓扑中的逐点收敛拓扑．设在 $\mathrm{Irr}_n(A)$ 上给定了由其拓扑产生的 Borel 结构(即相对于这种结构，所有映射 $\pi\to(\pi(x)\xi,\eta)$, $x\in A$, $\xi,\eta\in H_n$, $\pi\in\mathrm{Irr}_n(A)$, 都是 Borel 函数的最小 Borel 结构)，且令 $\mathrm{Irr}(A)$ 是这种子空间 $\mathrm{Irr}_n(A)$, $n=1,2,\cdots$, 的并，装备了 Borel 结构使得 $\mathrm{Irr}(A)$ 的子集是 Borel 集当且仅当它与每一个 $\mathrm{Irr}_n(A)$ 的交属于 $\mathrm{Irr}_n(A)$ 的 Borel 结构．设 φ 是这个 Borel 空间 $\mathrm{Irr}(A)$ 到 A 的谱 $\hat{A}$ 中的映射，它把一个表示映成它的酉等价类．$\hat{A}$ 中使 φ 下逆象为 $\mathrm{Irr}(A)$ 中 Borel 集的集合生成的 $\hat{A}$ 上的 Borel 结构称为 $\hat{A}$ 上的 Mackey-Borel 结构．Mackey-Borel 结构包含由 $\hat{A}$ 的拓扑生成的 Borel 结构中的所有集合；$\hat{A}$ 的每一点是此 Mackey-Borel 结构中的一个 Borel 集．以下诸条件等价．1) 此 Mackey-Borel 结构是标准的(即它作为 Borel 结构与某完全可分度量空间生成的 Borel 结构同构)；2) 此 Mackey-Borel 结构与 $\hat{A}$ 上拓扑生成的 Borel 结构一致；3) $\hat{A}$ 上的这个 Mackey-Borel 结构是可数分离的；4) 如果 A 是 CGR 代数，则一个 Mackey-Borel 结构也可在一个可分 C^* 代数的拟谱上导出．

参考文献

[1] Dixmier, J., C^*-algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

[2] Gardner, L. T., On the Mackey Borel structure, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 4, 674－678.

[3] Halpern, H., Mackey Borel structure for the quasi-dual of a seperable C^*-algebra, *Canad. J. Math.*, **26** (1974), 3, 621－628.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arveson, W., An invitation to C^*-algebras, Springer, 1976, Chapts, 3－4.

葛显良 译 鲁世杰 校

Mackey 交结数定理[Mackey intertwining number theorem]，交结数定理(intertwining number theorem)

【补注】 设 G 为一有限群．根据定义，两个表示 $\pi_i: G\to\mathrm{Aut}(E_i)$ $(i=1,2)$ 之间的交结数(intertwining number)是 G 同态 $E_1\to E_2$ 构成的空间之维数：$i(\pi_1,\pi_2)=\dim(\mathrm{Hom}_G(E_1,E_2))$.

现令 H_1, H_2 为 G 的子群，D 是 G 中一个 (H_2, H_1) 双陪集(double coset)(即有某个 $x\in G$, 使 D 是形如 H_2xH_1 的集合)．对于 $i=1,2$, 令 π_i 为 H_i 的酉表示，$\mathrm{Ind}_{H_i}^G(\pi_i)$ 为 G 的相应的**诱导表示**(induced representation)．对某个 $x\in D$, 考虑子群 $H_1\cap x^{-1}H_2x$ 的酉表示 $g\mapsto\pi_1(g)$ 和 $g\mapsto\pi_2(xgx^{-1})$ 之间的交结数，则这个数仅依赖于 D(以及 π_1,π_2)，将其记为 $i(\pi_1,\pi_2,D)$.

对于 G 的诱导表示 $\mathrm{Ind}_{H_i}^G(\pi_i)$ $(i=1,2)$ 之间的交结数，有交结数公式(intertwining number formula)

$$i(\mathrm{Ind}_{H_1}^G(\pi_1),\ \mathrm{Ind}_{H_2}^G(\pi_2))=\sum_D i(\pi_1,\pi_2,D),$$

其中的求和遍取所有的 (H_2, H_1) 双陪集．

关于 G 的表示 π 与 G 的子群 H 的表示 σ 的

Frobenius 互反定理(Frobenius reciprocity theorem): $i(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) = i(\mathrm{Res}_H^G(\pi), \sigma)$ (见**诱导表示** (induced representation)) 是一个直接推论.

关于局部紧群交结数定理的讨论见[A2].

参考文献

[A1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962, §44.

[A2] Warner, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I, Springer, 1972, Chapt. V.

王 杰 译 石生明 校

Mackey 拓扑 [**Mackey topology**; **Макки топология**], 与(同一域上的)空间 G 对偶的空间 F 上的拓扑 $\tau(F, G)$

在 G 的按弱拓扑 $\sigma(F, G)$ 紧的凸平衡子集上一致收敛的拓扑($\sigma(F, G)$ 由 F 和 G 之间的对偶性定义). 它是由 G. W. Mackey ([1])引进的. Mackey 拓扑是与 F 和 G 间对偶性相容的最强的分离**局部凸拓扑**(locally convex topology) (即 F 上分离局部凸拓扑 $\mathscr{T}$ 使得 F 上按拓扑 $\mathscr{T}$ 所有连续线性泛函的集合与 G 重合). F 中按 Mackey 拓扑有界和按弱拓扑有界的集族重合. 当 F 赋予 Mackey 拓扑时, G 的一个凸子集是等度连续的, 当且仅当它按弱拓扑是相对紧的. 如果分离的**局部凸空间** (locally convex space) E 是桶型的或囿的(特别是可度量化的)且 E' 是其对偶, 则 E(与 E' 对偶)上的 Mackey 拓扑与 E 上的原拓扑重合. 对于对偶的一对空间 (F, G), 其 Mackey 拓扑 $\mathscr{T}$ 不必是桶型或可度量化的. 分离局部凸空间 E 到分离局部凸空间 F 中的弱连续线性映射按 Mackey 拓扑 $\tau(E, E')$ 和 $\tau(F, F')$ 是连续的. 局部凸空间 E 称为 Mackey 空间 (Mackey space), 如果 E 上的拓扑是 $\tau(E, E')$. Mackey 空间族的完全化、商空间与可度量化子空间、积、局部凸直和以及归纳极限仍是 Mackey 空间. 如果 E 是 Mackey 空间而 φ 是 E 到局部凸空间 F 中的弱连续线性映射, 则 φ 是 E 到 F 中的连续线性映射. 如果 E 是拟完全的 Mackey 空间且对偶于 E 的空间赋予强 E 拓扑后成为半自反的, 则 E 是自反的.

参考文献

[1] Mackey, G. W., On convex topological linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 519 – 537.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).

[3] Schaeffer, H., Topological vector spaces, Springer, 1971.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981 (译自德文).

葛显良 译 鲁世杰 校

MacLaurin 公式 [**MacLaurin formula**; **Маклорена формула**]

Taylor 公式(Taylor formula)的一种特殊情形. 设函数 f 在 $x=0$ 有 n 个导数. 那么在这个点的某个邻域 U 内, f 可以表示成这样的形式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \ x \in U,$$

其中, $r_n(x)$ 是 n 阶余项, 可以表示成某种形式.

术语"MacLaurin 公式"也用于多变量 $x=(x_1, \cdots, x_m)$ 的函数. 在这种情形下, MacLaurin 公式里的 k 取作多重指标 $k=(k_1, \cdots, k_m)$ (见 **MacLaurin 级数** (MacLaurin series)). 这个公式是以 MacLaurin 命名的.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 关于余项 $r_n(x)$ 的表示和估计见 **Taylor 公式** (Taylor formula).

参考文献

[A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976.

陈怀惠 译

MacLaurin 级数 [**MacLaurin series**; **Маклорена ряд**], 对于函数 $f(z)$ 的

幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k .$$

这是 C. MacLaurin 所研究的([1]). 若在零点解析的函数 $f(z)$ 在零点附近被展开成一个**幂级数**(power series), 则这个级数就是 MacLaurin 级数. 当函数依赖于 m 个变量时, MacLaurin 级数是一个多重幂级数:

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{f^{(k_1)}(0) \cdots f^{(k_m)}(0)}{k_1! \cdots k_m!} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m},$$

其中求和是对于多重指标 $k=(k_1, \cdots, k_m)$ 进行的, $|k| = |k_1| + \cdots |k_m|$, 而 k_i 是非负整数. MacLaurin 级数是 **Taylor 级数**(Taylor series)的特殊情形.

参考文献

[1] MacLaurin, C., A treatise of fluxions, 1 – 2, Edinburgh, 1742.

Л. Д. Кудрявцев 撰 陈怀惠 译

幻方 [**magic square**; **магический квадрат**]

由整数 1 到 n^2 组成的, 满足下列条件的 $n \times n$ 方形阵列 $\|a_{ij}\|$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i, n+1-i} = s, \quad (*)$$

其中 $s = n(n^2+1)/2$. 也有更广泛的幻方, 对它不要求 $1 \leqslant a_{ij} \leqslant n^2$.

任何一个数 a, $1\leqslant a\leqslant n^2$, 都可被一对余数 $(\alpha,\beta)\bmod n$ 所唯一刻画（即 $a-1$ 在 n 进制下的两个位上的数字），这就是说，用模 n 的余数环 $\mathbf{Z}/n$ 的二维空间 $(\mathbf{Z}/n)^2$ 的点来刻画．由于方形阵列位置元的坐标 (i,j) 也可以当作 $(\mathbf{Z}/n)^2$ 的元素，可见从 1 到 n^2 中的数在阵列 $\|a_{ij}\|$ 中的任何一种分布，可以由一个映射

$$(\mathbf{Z}/n)^2\rightarrow(\mathbf{Z}/n)^2$$

来给出．这就是说，由一对函数 $\alpha=\alpha(i,j)\in\mathbf{Z}/n$, $\beta=\beta(i,j)\in\mathbf{Z}/n$ 给出，其中 $i,j\in\mathbf{Z}/n$. 问题就是去研究给出幻方的那些函数对．通常只在补充假定 α 及 β 是线性时作这种研究（见[1]）．特别是，已经弄明白，对于具有线性的 α 及 β 的幻方，只在 n 是奇数时才存在．

在中世纪就已经发现了一些构作阶 n 为奇数的幻方的算法．每个这种算法都用六个余数 $i_0,j_0,p,q,\overline{p},\overline{q}$ 刻画，并且用下列规则描述：1) 把数 1 放到位置 (i_0,j_0)；并且 2) 如果 a 放入 (i,j) 且 $(i+p,j+q)$ 处仍空着则把 $a+1$ 放入该处，否则，把 $a+1$ 放入 $(i+\overline{p},j+\overline{q})$．

余数 $i_0,j_0,p,q,\overline{p},\overline{q}$ 不是任意的，它们必须满足一定的条件才保证不仅 (*) 成立，而且算法可行，这就是说，当 $(i+p,j+q)$ 处已被占据时，$(i+\overline{p},j+\overline{q})$ 是空的．容易找到这些条件（见[1]）．此外，现已知道，可以用这种类型的算法构作的幻方，必须且只须用以描述它的函数 α 及 β 都是线性的．

已经知道了许多其他的构作（用非线性的 α 及 β 来描述的）幻方的算法，但没有关于它们的任何一般理论（1982）．即使 n 阶幻方的数目也不知道（对于 $n\geqslant5$；$n=3$ 时，如果不重复计算由明显的对称性导致的结果，只有一个幻方，而 $n=4$ 时，有 880 个幻方）．

具有附加的对称性的幻方，也只在十分特殊的状况下（例如，$n\leqslant5$；见[2]），有过研究．

参考文献

[1] Постников, М. М., Магические квадраты, М., 1964.

[2] Гуревич, Е. Я., Тайна древнего талисмана, М., 1969.

М. М. Постников 撰

【补注】 幻方是从古代起就被研究的课题，例如在公元前 2000 年左右，在中国已经知道 3 阶幻方．Dürer 的名作《忧郁》(Melancholy) 中便画有一个 4 阶幻方．

在（正交的）拉丁方（偶）（见**拉丁方**（Latin square）；**正交拉丁方**（orthogonal Latin squares））与幻方之间有一种紧密的联系，这从 L. Euler（见[A1]与[A2]）开始一直有研究．亦见[A3]和那里给出的参考文献．

参考文献

[A1] Euler, L., De quadratis magicis, in Opera Omnia, Sér. 1, Vol. 7, Teubner, 1923, 441 – 457.

[A2] Euler, L., Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques, in Opera Omnia, Sér. 1, Vol. 7, Teubner, 1923, 291 – 392.

[A3] Dénes, J. and Keedwell, A. D., Latin squares and their applications, English Univ. Press, 1974.

【译注】 中国南宋数学家杨辉在《续古摘奇算法》(1275) 中系统研究了幻方，他把幻方称为“纵横图”．杨辉所介绍的幻方构作方法可推广来构作任意奇数阶幻方．

一个 n 阶幻方如果进一步满足要求

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2=\sum_{i=1}^{n}a_{i,n+1-i}^2=$$
$$=\frac{n(n^2+1)(2n^2+1)}{6}\qquad(**)$$

就称为一个 n 阶的两次幻方．现已有了借助于正交拉丁方构作 2^m 阶及 $(2m+1)^2$ 阶两次幻方的方法（[B1]）．

对幻方的近期研究情况可参看[B2]．

参考文献

[B1] 李 立，用正交拉丁方构造两次幻方，*Chinese Quart. J. of Math.*, **5** (1990), 4, 95 – 101.

[B2] Gakuho Abe, Unsolved problems on magic squares, *Discrete Math.*, **127** (1994), 3 – 13.

陶懋颀 译 李 乔 校

磁流体动力学中的数学问题 [magneto-hydrodynamics, mathematical problem in; магнитной гидродинамики математические задачи]

与研究导电流体和气体在磁场中的运动有关的问题．

【补注】

参考文献

[A1] Cowling, T. G., Magnetohydrodynamics, Interscience, 1957.

[A2] Chandrasekhar, S., Hydrodynamics and hydrodynamic stability, Dover, reprint, 1981.

[A3] Alfvèn, H. and Falthammer, C. G., Cosmical electrodynamics, Clarendon Press, 1963.

张鸿林 译

Mahalanobis 距离 [Mahalanobis distance; Махаланобиса расстояние]

量

$$\rho(X,Y|A)=\{(X-Y)^TA(X-Y)\}^{1/2},$$

其中 X 和 Y 是向量，A 是矩阵（而 ^{T} 表示转置）．Mahalanobis 距离用于**多维统计分析** (multi-dimensional statis-

tical analysis)，其中包括假设检验和观测结果的分类，它是由 P.Mahalanobis ([1]) 引进的，他利用量

$$\rho(\mu_1, \mu_2 | \Sigma^{-1})$$

作为数学期望为 μ_1 和 μ_2、公共协方差矩阵为 Σ 的两个正态分布之间的距离．(来自具有相同协方差矩阵的分布的)两个样本间或样本和分布间的 Mahalanobis 距离，由用样本矩替换相应的理论矩来定义．作为分布间 Mahalanobis 距离的估计，利用来自这些分布的样本间的 Mahalanobis 距离；而在使用线性判别函数的场合([5])，利用统计量 $\Phi^{-1}(\alpha)+\Phi^{-1}(\beta)$，其中 α 和 β 相应为在第一和第二个总体中正确分类的频率，Φ 是数学期望为 0 和方差为 1 的正态分布函数．

参考文献

[1] Mahalanobis, P., On tests and measures of group divergence I. Theoretical formulae, *J. and Proc. Asiat. Soc. of Bengal*, **26** (1930), 541 – 588.

[2] Mahalanobis, P., On the generalized distance in statistics, *Proc. Nat. Inst. Sci. India* (Calcutta), **2** (1936), 49 – 55.

[3] Anderson, T. W., Introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958.

[4] Айвазян, С. А., Бежаева, З. И., Староверов, О.В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974.

[5] Orlov, A.I., On the comparison of algorithms for classifying by results observations of actual data, *Dokl. Moskov. Obshch. Isp. Prirod.* 1985, *Otdel. Biol.* (1987), 79–82 (俄文).

А.И.Орлов 撰 周概容 译

Mahler 问题 [Mahler problem; Малера проблема]

Mahler ([1]) 提出 **Diophantine 逼近的度量理论** (Diophantine approximation, metric theory of) 中的一个猜想：对几乎所有（在 Lebesgue 测度意义下）的数 $\omega \in \mathbf{R}$，不等式

$$|P(\omega)| < |H(P)|^{-n-\varepsilon}$$

只有有限多个次数不超过 n 的多项式解 $P \in \mathbf{Z}[x]$，此处 $\varepsilon > 0$, n 是自然数，$H(P)$ 是 P 的系数绝对值的最大值．一个等价的叙述是：对于几乎所有的 $\omega \in \mathbf{R}$，不等式

$$\max(\|\omega q\|, \cdots, \|\omega^n q\|) < q^{-1/n-\varepsilon}$$

只有有限多个整数解 q，此处 $\|\alpha\|$ 是 α 到最近整数的距离．

Mahler 问题是 В.Г.Спринджук ([2]) 于 1964 年肯定地解决的．他还对复数、p 进数以及有限域上的幂级数证明了类似的结果．

参考文献

[1] Mahler, K., Über das Mass der Menge aller S-Zahlen, *Math. Ann.*, **106** (1932), 131 – 139.

[2] Спринджук, В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967 (英译本: Sprindzhuk, V. G., Mahler's problem in metric number theory, Amer. Math. Soc., 1969).

Ю. В. Нестеренко 撰

【补注】Спринджук 的原始论文是 [A1].

参考文献

[A1] Спринджук, В. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **29** (1965), 379 – 436.

朱尧辰 译

强函数和弱函数 [majorant and minorant; мажоранта и миноранта]，亦称强元和弱元

1) 两个函数，第一个函数（强函数）的值不小于而第二个函数（弱函数）的值不大于一个给定函数的相应值（对自变数的所有容许值）．

2) 对用幂级数表示的函数，一个强函数是一个幂级数的和，这个幂级数的系数是正的，且不小于给定级数的相应系数的绝对值．

3) 序集 E 的子集 X 的一个强元（弱元）是一个元素 $y \in E$，使得对每一个 $x \in X, y \geqslant x \ (x \geqslant y)$.

4) 在积分和微分方程理论中，对某函数 f 的强函数 (majorant 或 majorant function)(弱函数 (minorant 或 minorant function)) 是一个连续函数，其 **Dini 导数** (Dini derivative) 在每一点 t 不小于（不大于）$f(t)$ 且异于 $-\infty$ ($+\infty$). 任何强函数与任何弱函数之差是一非减函数．在一个区间上的任何可和函数有任意接近于其不定 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral) 的绝对连续的强函数和弱函数．强函数和弱函数的概念能推广到加性集函数的情形，也能推广到当导数是在某种广义意义下取的情形．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets, Addison-Wesley, 1968 (译自法文).

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

В.А.Скворцов 撰

【补注】术语“强元”和“弱元”在英语中很少用于意义 3)；代替这两术语，常用“上界”(upper bound) 和“下界”(lower bound).

亦见**下界** (lower bound)；**上界和下界** (upper and lower bounds).

葛显良 译 李慧陵 校

优化序 [majorization ordering; мажорирования упорядочивание]

【补注】 设 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 和 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ 为 l_1 范数相等的非负实数的 n 元组，即

$$|p| = p_1 + \cdots + p_n = |q| = q_1 + \cdots + q_n,$$

则 p 称为被 q 所优超的 (majorized)，当且仅当 $\overline{p}_1 \leqslant \overline{q}_1$, $\overline{p}_1 + \overline{p}_2 \leqslant \overline{q}_1 + \overline{q}_2$, $\cdots$, $\overline{p}_1 + \cdots + \overline{p}_{n-1} \leqslant \overline{q}_1 + \cdots + \overline{q}_{n-1}$，其中 $(\overline{p}_1, \cdots, \overline{p}_n)$ 是 n 元组 $(p_1, \cdots,$

p_n)重新排序使得 $\overline{p}_1 \geqslant \cdots \geqslant \overline{p}_n$ 后所得．这样就定义一个**偏序**(partial order)，它以各种名称出现于数学的各个分支：优化序(majority ordering, majorization ordering)、特殊化序(specialization ordering)、Snapper 序(Snapper ordering)、Ehresmann 序(Ehresmann ordering)、支配序(dominance ordering)、混合序(mixing ordering)、自然序(natural ordering)，…….

用符号 $p \prec q$ 代表 q 优超 p．关于优化序的若干结论列举如下．

如果 $p \prec q$，则对于任意一元连续凸函数 φ，有 $\sum \varphi(p_i) \leqslant \sum \varphi(q_i)$.

一个非负实数矩阵 Q 称为双随机的(doubly stochastic)，如果它的所有行和与列和全等于 1：即对所有的 $k = 1, \cdots, n$, $\sum_i q_{ik} = 1$, $\sum_j q_{kj} = 1$．于是，$p \prec q$ 当且仅当存在双随机矩阵 Q 使得 $p = Qq$.

令 A 为一 Hermite $(n \times n)$ 矩阵，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为其本征值的 n 元组，$a = (a_{11}, \cdots, a_{nn})$ 为其对角线上元素的 n 元组．则 $a \prec \lambda$ ([A1])．反之，如果 $a \prec \lambda$，则存在一个实对称 $(n \times n)$ 矩阵，具有本征值 λ 和对角线元素 a([A2], [A3])．Schur 的结果([A1])可重新表述为：a 属于 $S_n \lambda = \{\sigma\lambda : \sigma$ 为置换(矩阵)$\}$ 的凸包．这一形式的结果可推广如下．设 G 为一紧 **Lie 群**(Lie group)，$\mathfrak{g}$ 为其 **Lie 代数**(Lie algebra)；令 T 为 G 中一个极大环面，W 是相应的 **Weyl 群**(Weyl group)．考虑 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用．则 $\mathrm{Lie}(T) \subset \mathfrak{g}$ 中的 W 轨道对应于 $\mathfrak{g}$ 中的 G 轨道．在 $\mathfrak{g}$ 上取定一个 G 不变度量．则一条 G 轨道到 $\mathrm{Lie}(T)$ 的正交投射是相应的 W 轨道的凸包([A18])．在辛几何框架内更为一般的结果见[A19]．

设 I 是 $[0, \infty)$ 中的一个开区间，函数 $f: I^n \to \mathbf{R}$ 称为 Schur 凸的(Schur convex)，若对 $p, q \in I^n$，由 $p \prec q$ 可推出 $f(p) \leqslant f(q)$．于是，f 是 Schur 凸的当且仅当它是对称的，即对一切置换 σ 有 $f(\sigma p) = f(p)$，且对一切 $i \neq j$ 有

$$(p_i - p_j)\left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\right) \geqslant 0.$$

这一条件常称为 Schur 条件(Schur condition).

对于每个非负实数的 n 元组 p，定义函数 $[p](x)$：

$$[p](x) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} x_1^{p_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{p_{\sigma(n)}},$$

其中的求和遍取所有 $\{1, \cdots, n\}$ 的置换 σ．Muirhead 不等式(Muirhead inequality)说：$p \prec q$ 当且仅当对一切非负实数的 n 元组 x 有 $[p](x) \leqslant [q](x)$．算术平均几何平均不等式(arithmetic-mean geometric-mean inequality)对应于 $(n^{-1}, \cdots, n^{-1}) \prec (1, 0, \cdots, 0)$ 的特例．

设 α 是 n 的一个划分．对称群 S_n 中相应的 Young 子群为 $S_\alpha = S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_k} \subset S_n$，其中 S_{α_j} 置换 α_j 个元素 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + 1, \cdots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-1} + \alpha_j$．令 ρ_0 为 S_α 的平凡表示，ρ_1 为交错表示(alternating representation)或符号表示(sign representation)，它对每个置换 $\sigma \in S_\alpha$ 赋予其符号 $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{+1, -1\}$，即若 σ 可写成 t 个对换之积，则 $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^t = \rho_1(\sigma)$.

令 α 和 β 为 n 的两个划分，必要时添零使之成为长度等于 n 的向量．

Snapper-Liebler-Vitale-Lam-Young 定理(Snapper-Liebler-Vitale-Lam-Young theorem)说：表示 $\mathrm{Ind}_{S_\alpha}^{S_n}(\rho_0)$ 是 $\mathrm{Ind}_{S_\beta}^{S_n}(\rho_0)$ 的一个子表示，当且仅当 $\alpha \succ \beta$([A13]).

Rugh-Schönhofer 定理(Rugh-Schönhofer theorem)说：**交结数**(intertwining number) i ($\mathrm{Ind}_{S_\alpha}^{S_n}(\rho_0)$, $\mathrm{Ind}_{S_\beta}^{S_n}(\rho_1)$)不等于零，当且仅当 $\alpha \prec \beta^*$．这里的 β^* 是 β 的对偶划分(dual partition)(共轭划分(conjugate partition))，即 β_j^* 等于 $\{j : \beta_j \geqslant j\}$ 中元素的个数([A10]).

Gale-Ryser 定理(Gale-Ryser theorem)说：存在一个 0-1 矩阵满足其行和构成向量 α、列和构成向量 β 的充分必要条件是 $\beta \prec \alpha^*$(或者等价地，$\alpha \prec \beta^*$)([A12]).

考虑全体复幂零 $(n \times n)$ 矩阵的空间 $\mathscr{N}_n$．令 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 相似地作用在 $\mathscr{N}_n$ 上．对于 n 的每个划分 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，令 $Q(\alpha)$ 为包含 α_j 级 Jordan 块且本征值等于 0 的 Jordan 阵所在的轨道．则 Gerstenhaber-Hesselink 定理(Gerstenhaber-Hesselink theorem)说：轨道 $Q(\alpha)$ 的闭包包含一条轨道 $Q(\beta)$，$\overline{Q(\alpha)} \supset Q(\beta)$，当且仅当 $\beta \prec \alpha$([A6]).

设 (A, B) 为由 $(n \times n)$ 矩阵 A 和 $(n \times m)$ 矩阵 B 组成的偶．偶 (A, B) 称为完全可达的(completely reachable)，如果矩阵 $A^i B$, $i = 0, \cdots, n-1$ 的列向量张成全空间 $\mathbf{R}^n$．这等价于下述性质：在线性控制系统(linear control system) $x = Ax + Bu$ 中，原点可被适当的控制 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 操纵至 $\mathbf{R}^n$ 中任意点．一个完全可达偶 (A, B) 的 Kronecker 指数(Kronecker indices)或称可控性指数(controllability indices)定义如下：令 λ_j 为由 $A^i B$, $i = 0, \cdots, j$ 的列向量张成之空间的维数．令 $\mu_{j+1} = \lambda_j - \lambda_{j-1}$, $j = 0, \cdots, n-1$, $\lambda_{-1} = 0$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$，则 (A, B) 的 Kronecker 指数 $\kappa_i(A, B)$ 是 μ 的对偶划分 $\kappa = \mu^*$ 的元素．(不要将这里的 Kronecker 指数的概念与函数在一点处的 Kronecker 指数相混淆，见 **Lefschetz 公式**(Lefschetz formula))．划分 $\kappa(A, B)$ 在 (A, B) 的下述变换下不变：$(A, B) \to (A + BK, B)$，其中 K 是任意 $(m \times n)$ 矩阵；$(A, B) \to (SAS^{-1}, SB)$，其

中 S 是可逆的 $(n \times n)$ 矩阵；$(A, B) \mapsto (A, BT^{-1})$，其中 T 是可逆的 $(m \times m)$ 矩阵. 所有这些变换构成（控制系统 $x = Ax + Bu$ 的）反馈群（feedback group）. Brunowski-Kalman-Morse-Wonham 定理（Brunowski-Kalman-Morse-Wonham theorem）说：$\kappa(A, B)$ 是反馈群作用的一个复形不变量，即作用的轨道被 n 的划分所标定. 进一步地，被 k 所标定的轨道之闭包 $\overline{U(k)}$ 包含轨道 $U(\lambda)$，当且仅当 $k \prec \lambda$ ([A6]).

设 E 为 Riemann 球面 $S^2 = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ 上的一个全纯**向量丛**（vector bundle）（亦见**解析向量丛**（vector bundle, analytic））. 根据 Grothendieck 定理（Grothendieck theorem），E 分裂成为复线丛的直和 $E = L(\kappa_1) \oplus \cdots \oplus L(\kappa_m)$，其中 $L(i)$ 是第一陈数为 i 的（在同构意义下）唯一的复线丛. 现在考虑 S^2 上复向量丛 E_t 的一个全纯族. 则根据 Shatz 定理（Shatz theorem），对于足够小的 t，$\kappa(E_t) \prec \kappa(E_0)$. 反之，如果 $\lambda \prec k$，则存在一个全纯族使得对于足够小的 $t \neq 0$ 有 $\kappa(E_t) = \lambda$ 且 $\kappa(E_0) = \kappa$.

所有这些关于优化序的表述远非互不相关的，见 [A4], [A6], [A9]. 上述定理中有些可以推广到（非 S_n 的）其他 Weyl 群以及关于 Wely 群上的 Bruhat 序（Bruhat ordering）的情形，这种序定义为单 Lie 群的 **Bruhat 分解**（Bruhat decomposition）$G = \bigcup_w BwB$ 中各部分的闭包的包含关系 $\overline{BwB} \supset Bw'B$([A5], [A7]).

设 Γ 为一**有向图**（graph, oriented）. 对一顶点 x，其出度（out-degree）（外向半度（demi-degree outwards））$d_\Gamma^+(x)$ 定义为由 x 出发的弧的数目，入度（in-degree）（内向半度（demi-degree inwards））$d_\Gamma^-(x)$ 为终止于 x 的弧的数目. x 处的度（degree）$d_\Gamma(x)$ 定义为 $d_\Gamma(x) = d_\Gamma^+(x) + d_\Gamma^-(x)$. 一个 k 图（k-graph）是对其所有顶点 x 均有 $d_\Gamma^+(x) \leqslant k$ 的图. 设 $(r_1, s_1), \cdots, (r_n, s_n)$ 为 $\mathbf{N} \cup \{0\}$ 中的元素偶，$k_j \in \mathbf{N}$. 定义 $t_j = \sum_{i=1}^n \min(k_j, r_i)$. 则存在图 Γ 满足 $(d_\Gamma^+(x_i), d_\Gamma^-(x_i)) = (r_i, s_i)$ 的充分必要条件是：$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n s_i$，且在优化序中 $t \succ s$ ([A17]).

参考文献

[A1] Schur, I., Ueber ein Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf der Determinantentheorie, *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.*, **22** (1923), 9 – 20.

[A2] Horn, A., Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 620 – 630.

[A3] Mirsky, L., Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 14 – 21.

[A4] Marshall, A. W. and Olkin, J., Inequalities: majorization and its applications, Aca. Press, 1979.

[A5] Kraft, H.-P., Conjugacy classes and Weyl group representations, *Asterisque*, **87/88** (1981), 191 – 206.

[A6] Hazewinkel, M. and Martin, C. F., Representations of the symmetric group, the specialization order, systems, and Grassmann manifolds, *Enseign. Math.*, **29** (1983), 53 – 87.

[A7] Cocini, C. de and Procesi, C., Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.*, **64** (1981), 203 – 220.

[A8] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1952.

[A9] Kerber, A., The diagram lattice as structural principle in mathematics, in P. Kramer and A. Rieckers (eds.), Group Theoretical Methods in Physics (Tübingen 1977), Springer, 1978, pp. 53 – 71.

[A10] Mead, A., Ruch, E. and Schönhofer, A., Theory of chirality functions, generalized for molecules with chiral ligands, *Theor. Chin. Acta*, **29** (1973), 269–304.

[A11] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E. and Volenec, V., Recent advances in geometric inequalities, Kluwer, 1989.

[A12] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Math. Assoc. Amer., 1963（中译本：H. J. 赖瑟，组合数学（附：组合矩阵论），科学出版社，1983）.

[A13] Liebler, R. A. and Vitale, M. R., Ordering the partition characters of the symmetric group, *J. of Algebra*, **25** (1973), 487 – 489.

[A14] Macdonald, J. G., Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Univ. Press, 1979.

[A15] Bulien, P. S., Mitrinović, D. S. and Vasić, P. M., Means and their inequalities, Reidel, 1988.

[A16] Brylawski, T., The lattice of integer partitions, *Discrete Math.*, **6** (1973), 201 – 209.

[A17] Berge, C., Graphs et hypergraphes, Dunod, 1970, Chapt. 6.

[A18] Kostant, B., On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **6** (1973), 413 – 455.

[A19] Atiyah, M. F., Convexity and commuting Hamiltonians, *Bull, London Math. Soc.*, **14** (1982), 1 – 15.

王 杰 译 石生明 校

Мальцев 代数 [Mal'tsev algebra; Мальцева алгебра], Moufang-Lie 代数（Moufang-Lie algebra）

一个域上满足下列恒等式的代数：

$$x^2=0, \quad J(x,y,xz)=J(x,y,z)x,$$

其中 $J(x,y,z)=(xy)z+(zx)y+(yz)x$ 是 x, y, z 的 Jacobi 式. Мальцев 代数是 Lie 代数的自然推广. 任一Мальцев 代数都是一个**二元 Lie 代数**（binary Lie algebra）.

Мальцев 代数是由 А. И. Мальцев ([1]) 引入的，他称之为 Moufang-Lie 代数，是因为其同解析 **Moufang**

幺拟群(Moufang loop)的联系．局部解析 Moufang 幺拟群的切代数是 Мальцев 代数．其逆也是正确的：特征零的完全正规域上的有限维 Мальцев 代数均为某局部解析 Moufang 幺拟群的切代数．

Мальцев 代数与交错代数(见**交错环和交错代数**(alternative rings and algebras))有密切的联系．任一交错代数的换位子代数，即用换位子运算

$$[x,y]=xy-yx$$

代替原乘法得到的代数，是 Мальцев 代数．

每个特征 $p\neq 2$ 的单 Мальцев 代数(见**单代数**(simple algebra))或为一个 Lie 代数，或为其形心上一个 7 维代数．每个准素 Мальцев 代数($p\neq 2$，见**准素环**(primary ring))或为一个 Lie 代数，或可作为子环嵌入到某个域上一个适宜的 7 维单代数．任一半准素 Мальцев 代数($p\neq 2$)可作为子代数同构地嵌入到一个交错代数的换位子代数内．将任一 Мальцев 代数嵌入到一个交错代数的换位子代数内的问题是一个公开问题(1989)．

设 $Z(A)$ 是一个 Мальцев 代数 A 的 Lie 中心：

$$Z(A)=\{n\in A:J(n,a,b)=0 \text{ 对所有 } a,b\in A\}.$$

对一个半准素 Мальцев 代数 A 的任一理想 $I(p\neq 2)$，$Z(I)=Z(A)\cap I$．

代数的 Мальцев 代数(见**代数的代数**(algebraic algebra))的性质类似于**代数的 Lie 代数**(Lie algebra, algebraic)的性质．在任意一个代数的 Мальцев 代数($p\neq 2$)中有一个局部有限根，即一个极大局部有限理想，使得关于它的商代数不含局部有限理想．满足第 n 个 Engel 条件(见 **Engel 代数**(Engel algebra))的特征 $p\geqslant n$ 或 $p=0$ 的 Мальцев 代数是局部幂零的(见**局部幂零代数**(locally nilpotent algebra))．Мальцев 代数与 Lie 代数的区别表现在从局部幂零到整体幂零的过程中．例如，有一个满足第三 Engel 条件的指数 2 的可解的 Мальцев 代数($p=0$)却不是幂零的(见**幂零代数**(nilpotent algebra))．

Мальцев 代数中有 Engel 定理的一个仿本，它在 Lie 代数结构理论中起着较重要的作用：满足 Engel 条件和子代数极大条件的 Мальцев 代数是幂零的．此结果在二元 Lie 代数的更为一般的情形下也是成立的．

在每个自由 Мальцев 代数($p\neq 2$)中都有一个非零 Lie 中心．带三个或更多生成元的自由 Мальцев 代数($p\neq 2$)不是准素代数．带九个或更多生成元的自由 Мальцев ($p\neq 2$)代数含平凡理想．

如果 R_n 是由 n 个生成元的自由 Мальцев 代数生成的 Мальцев 代数簇，且 $p=0$，那么，簇链

$$R_1\subseteq R_2\subseteq\cdots$$

不能在任一有限阶段稳定．

有限维 Мальцев 代数及其表示理论得到了完善的发展．基本结果与 Lie 代数理论中的结果相似．存在 Lie 的经典定理的仿本：如果 ρ 是一个特征零的可解 Мальцев 代数的一个可裂表示，则所有矩阵 $\rho(x)$ 可被同时化简为三角形式；如果 ρ 是幂零 Мальцев 代数在空间 V 上的可裂表示，则 V 可分解为权子空间 V_α 的一个直和，而 V_α 中的有界算子 $\rho(x)$ 的矩阵可被同时化简为主对角线上为 $\alpha(x)$ 的三角形式(见 **Lie 代数的表示**(representation of a Lie algebra))．

下述结果与 Lie 代数的 Cartan 可解性准则及半单性相似：如果 ρ 是 Мальцев 代数 $A(p=0)$ 的一个**忠实的表示**(faithful representation)且 A 上相应于 ρ 的双线性型是平凡的，则 A 是可解的；如果 ρ 是半单 Мальцев 代数的一个表示，则相应于 ρ 的迹形式是非退化的．如果 A 的 **Killing 型**(Killing form)是非退化的，则 A 是半单的．

$p=0$ 情形下的半单 Мальцев 代数的任一表示都是完全可约的(见**可约表示**(reducible representation))．如果 S 是 Мальцев 代数 A 的根(radical)(极大可解理想)，N 是诣零根(nil radical)(极大幂零理想)，则对 A 上任一导子 D(见**环中的导子**(derivation in a ring))，$SD\subseteq N$．

任一特征零的有限维 Мальцев 代数 A 都是其根 S 与一同构于 A 关于 S 的商代数的半单子代数 B 的(作为线性空间的)直和．两个半单因子是关于内自同构共轭的(类似于 Lie 代数的 Levi-Мальцев-Harish-Chandra 定理)．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., 《Матем. сб.》, **36** (1955), 3, 569－576.

[2] Sagle, A., Malcev algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **101** (1961), 3, 426－458.

[3] Kuz'min, E. N., Algebraic sets in Mal'tsev algebras, *Algebra and Logic*, 7 (1968), 2, 95－97.

[4] Kuz'min, E. N., Mal'tsev algebras and their representations, *Algebra and Logic*, 7 (1968), 4, 233－244.

[5] Kuz'min, E. N., On the relation between Mal'tsev algebras and analytic Mufang loops, *Algebra and Logic*, **10** (1971), 1, 1－14.

[6] Kuz'min, E. N., Levi's theorem for Mal'tsev algebras, *Algebra and Logic*, **16** (1977), 4, 286－291.

[7] Filippov, V. T., On Engelian Mal'tsev algebras, *Algebra and Logic*, **15** (1976), 1, 57－71.

[8] Filippov, V. T., Mal'tsev algerbras, *Algebra and Logic*, **16** (1977), 1, 70－74.

[9] Grishkov, A. N., Analogues of Levi's theorem for Mal'tsev algebras, *Algebra and Logic*, **16** (1977), 4, 260－265.

[10] Shestakov, I. P., A problem of Shirshov, *Algebra and*

Logic, **16** (1977), 2, 153-166. В.Т.Филиппов 撰

【补注】 对域 F 上的任一代数 A, A 的形心(centroid) E 是 A 在 F 的模自同态环 $\mathrm{Hom}_F(A, A)$ 中对任意 $x, y \in A$ 均可与左乘和右乘变换 L_x, R_y 交换的元素的集合. 如果 A 在 F 上是单的, 则 E 是 F 的一个扩域([A3]).

参考文献

[A1] Sagle, A. A., Simple Malčev algebras over a field of characteristic zero, *Pacific J.Math*, **12** (1962), 1057-1078.

[A2] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962, 291 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964). 郭元春 译 牛凤文 校

Мальцев 局部定理 [Mal'tsev local theorems; Мальцева локальные теоремы]

А. И. Мальцев 建立的一类定理, 是在**模型(逻辑中的)**(model (in logic)) 中能把局部性质转移到整个模型上的一类定理. 一个集合的子集合系统 $\{M_i: i \in I\}$ 称为这个集合的局部覆盖, 如果这个集合中的每个元素都在某个 M_i 中, 而且任意两个 M_i, M_j 都被包含于某第三个集合 M_k 之中. 局部覆盖的例子有: 一个集合的所有有限子集的系统, 一个群的所有有限生成的子群的系统. 一个模型 M 称为局部地具有性质 σ, 如果 M 有一个由子模型构成的局部覆盖, 并且这些子模型都有性质 σ. 局部定理对一个性质 σ (和某一类模型)成立, 如果每个局部地具有性质 σ 的模型其本身也具有性质 σ.

有一大类局部定理来源于 Мальцев 基本局部定理(fundamental local theorem)(也叫狭义谓词演算的紧性定理)([1]): 狭义谓词演算的一个无限公理系统, 如果其任意有限子系统都和谐, 那么整个系统就和谐. Мальцев ([2]) 给出一个一般方法, 用它可以在群论中由基本局部定理得到各种具体的局部定理, 从而为**模型论**(model theory) 做出了很大贡献. 后来他又改进了这一方法, 在[3]中证明了一条对任何能用所谓拟全称公理描述的性质都成立的局部定理. 对某一性质 σ 的局部定理是否成立的问题, 从前要对每个 σ 分别进行研究, 现在用上述结果就化为一个一般的相当"语法化"的问题: 只要问 σ 能不能用拟全称公理来描述.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., 《Матем. сб.》, 1 (1936), 3, 323-336.

[2] Мальцев, А. И., 《Уч. записки Ивановского гос. пед. ин-та》, **1** (1941), 1, 3-9.

[3] Мальцев, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23** (1959), 3, 313-336.

[4] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzljakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979). Ю. И. Мерзляков 撰

【补注】 文献[1], [2]和[3]的英译可以在[A1]的第1, 2 和 11 章中找到.

参考文献

[A1] Mal'tsev, A. I., the metamathematics of algebraic systems, North-Holland, 1971. Collection of articles translated from the Russian.

[A2] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model theory, North-Holland, 1973. 沈复兴 译

Мальцев 积 [Mal'tsev product; Мальцевское произведение]

所有群组成的类上的一种可遗传给因子的子群的运算(用 ○ 表示); 亦即如果

$$G=\prod_{i\in I}^{\circ} G_i$$

且如果在每一个因子 G_i 中选择一个子群 H_i, 则子群 H_i $(i\in I)$ 生成 G 的子群 H, 它与 H_i 的积

$$H=\prod_{i\in I}^{\circ} H_i$$

是一样的. 群的直和与自由积是 Мальцев 积. 存在其他的 Мальцев 积, 但关于满足结合律和某些其他自然条件的 Мальцев 积(不是直和或自由积)的存在性的 Мальцев 问题(Mal'tsev problem) 仍未解决 (1989). (Мальцев 积这一术语的起源与这个问题有关.)

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上下册, 高等教育出版社, 1982-1987). А. Л. Шмелькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Golovin, O.N. and Bronshteĭn, M.A., An axiomatic classification of exact operations, in Selected Questions of Algebra and Logic, Novosibirsk, 1973, 40-96 (俄文). 陈公宁 译

Mangoldt 函数 [Mangoldt function; Мангольдта функция]

由下式

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & 若\ n=p^m, p\ 是素数,\ m\geqslant 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

定义的**算术函数**(arithmetic function). 函数 $\Lambda(n)$ 具有下列性质:

$$\sum_{d|n}\Lambda(n)=\ln n,$$

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\ln\frac{n}{d},$$

此处求和遍历 n 的所有除数 d.Mangoldt 函数与 Riemann ζ **函数**(zeta-function) $\zeta(s)$ 密切相关.事实上，$\Lambda(n)$ 的生成级数就是 $\zeta(s)$ 的对数导数:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum\frac{\Lambda(n)}{n^s}\quad(\mathrm{Re}\,s>1).$$

Mangoldt 函数是由 H. Mangoldt 于 1894年提出的.

C. A. Степанов 撰

【补注】上文中的 μ 表示 **Möbius 函数**(Möbius function).

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979, Sect. 17.7.

戚鸣皋 译　朱尧辰 校

流形 [**manifold**; **многообразие**]

局部地有 $\mathbf{R}^n$ 或某个其他向量空间的结构(拓扑的、光滑的、同调的等等)的几何对象.数学中的这个基本思想加细和推广了直线和曲面的概念到任意维数的情形.该思想的引进受到数学本身和其他科学的各种需要的影响.在数学中，流形首先作为方程的非退化系统的解的集合出现.也作为几何的各种集合和允许局部参数化的其他对象(见下面)出现.例如，$\mathbf{R}^n$ 中 k 维平面的集合.它们也出现在多维变分问题(皂膜)的解、Pfaff 系统和动力系统的积分流形、几何变换群和它们的齐性空间中等等.物理学中，它们起了时空模型的作用，力学中，它们起了相空间、能量水平面等等的作用，经济学中，作为无差别曲面，心理学中是感觉(例如，颜色)空间，等等.

虽然构成流形定义的最初思想是局部结构("很像 $\mathbf{R}^n$")的思想，但是，这个思想允许流形的一系列整体性质:(不)可定向性，同调 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)，定义一个流形到另一个同维数流形上的**映射度**(degree of a mapping)的可能性，等等.特别有效的是**切丛**(tangent bundle)及和它的有关不变量的引入.

流形的局部结构也允许几何技巧的使用:放到**一般位置**(general position)，**Morse 函数**(Morse function)的构造等等，它们用于流形整体结构的几何研究，并且，粗粗地讲，流形，作为单片的并，由它的可能较简单的象组成;例如，单形或环柄.

为使用流形的思想，通常采用从局部到整体观点的转变.第一步是参数化(parametrization)的引进.即作为数空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一区域的所给问题的"状态空间"的表达.这就给出了用数的集合来描述相应点的坐标(坐标方法)的可能性.一般地，状态空间不允许类似的描述，即它不必同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域.假如不借助于有退化的参数化(像在极坐标和它们的推广中)，则两条路是可能的:或者从一开始就引进比参数所需的数目多的参数，并且随后找出用一组方程("状态方程")蕴含的实在空间，或者局部地将空间("小规模")参数化，例如，平面中直线的集合用两个子集来覆盖:$\prod_1$，具有形如方程 $y=kx+b$ 的直线所组成，及 $\prod_2$，具有形如方程 $x=\bar{k}y+\bar{b}$ 的直线所组成;这两者都分别用偶对 (k,b) 和 $(\bar{k},\bar{b})$ 参数化而同胚于 $\mathbf{R}^2$.然而，一般地，这个集合同胚于开 **Möbius 带**(Möbius strip)，因此，不像 $\mathbf{R}^2$.

当流形自然地出现在某个区域或其他中时，它们必定带来一些附加的结构，这也是在区域中研究的一个课题.然而、限制先验的可能性，拓扑结构起了主要作用.反过来，在拓扑学中，考虑用外加的结构(例如、光滑)作为工具，研究了流形的局部和整体性质.

流形的一般思想的基础是作为拓扑空间的拓扑流形的定义，在该拓扑空间中，每一个点有一个邻域 $\mathfrak{X}$ 和到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域上或到半空间 $\mathbf{R}^n_+=\{x\in R^n: x_n\geqslant 0\}$ 中的一个同胚 $\varphi:\mathfrak{X}\to U$;该同胚 φ 称为 $\mathfrak{X}$ 中的局部参数化(local parametrization)，或坐标卡(chart).对连通流形 M，维数 $n=\dim M$ 是不变量.对不连通流形，分支通常取相同的维数.流形分成内部(interior) $\mathrm{Int}\,M$ 和边界(boundary) ∂M(也称为边(edge)):边界点在图中对应于 $\mathbf{R}^n$ 中的 $\mathbf{R}^n_+$ 的边界点.边界是无边的 $n-1$ 维流形且不必是空集.一个无边界的连通流形，如果它不是紧的，则称为开的(open)，如果它是紧的，则称为闭的(closed).流形的四种可能类型最简单的例子是 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n_+$，球体 B^n 和它的边界 S^{n-1}.虽然在某些情形会出现非 Hausdorff 流形(例如，层的全空间)，但通常假设流形是 Hausdorff 的，仿紧的，有可数基的，并且特别地是可度量的.

流形的整体说明是用图册即覆盖流形的坐标卡的集合来完成的.为在数学分析中使用流形，从一个坐标卡到另一个坐标卡之间的坐标变换是可微的条件是必要的.所以最常考虑的是**微分流形**(differentiable manifold).更一般的形式由给定了图册 $\{\varphi_i:\mathfrak{X}_i\to U_i\}$ 的流形上的一个 Γ 结构的思想引入，在该图册中，坐标变换 $h_{ij}=\varphi_j\varphi_i^{-1}$ 是与复合密切相关的 $\mathbf{R}^n_+$ 中区域的映射的系统 Γ 中的同胚.如果 Γ 由 r 次连续可微的映射组成，则称流形的光滑类是 C^r.用类似的方法定义**解析流形**(analytic manifold)，分片线性，Lipschitz 等等流形的类型.如果两个 Γ 图册的并是 Γ 图，则它们给出一单个 Γ 结构(Γ-structure).Γ 结构的分类是流形的几何学中最重要的问题.从一个 Γ 流形到另一个上的映射 $f:M\to N$，如果局部地它有"坐标表示" $f_{ij}=\varphi_j f\varphi_i^{-1}$，就称为 Γ 映射(Γ-mapping)其中 φ_j,φ_i 是 M 和 N 中的坐标卡，且 $f_{ij}\in\Gamma$.特别

地，有 Γ 同胚 (Γ-homeomorphism) (如果 $\Gamma = C^r, C^r$ 微分同胚 (C^r-diffeomorphism)) 的概念.

因为在数学分析中，流形作为微分映射的承载子是重要的，有时，这些映射用定义在点的邻域 (见**层** (sheaf)) 内的光滑函数的集合来定义 (见 [12]). 这个思想的发展已导致了准流形或**戴环空间** (ringed space) (在空间上面的一层环) 的思想，更进一步是导致了**概形** (scheme) 的概念. 用向量或其他空间代替 $\mathbf{R}^n$, 可以得到流形的各种推广，例如，复解析流形. 无限维流形 (infinite-dimensional manifolds) 出现在数学分析中和出现在作为映射和丛的截面的空间，作为同胚的空间，作为闭子集的空间等等的拓扑学中. 它们的局部模型是向量空间 (Banach 空间等) 和像 **Hilbert 立方体** (Hilbert cube) 的空间. 在无限维空间上的光滑和其他结构的概念还没有充分地研究. 出现在这儿的困难是因为缺乏逼近的技术定理，单位分解 (一批小的光滑函数) 的存在性、隐函数等等.

由方程组 (在非空边界的情形中是不等式) 的解集所隐涵地给出的流形作为 $\mathbf{R}^n$ 中的子集而出现. 这些流形立即被给出了一切，不破碎，而具有指定的图册. 然而，必要条件是非退化的，否则，每一个闭集能由一个方程给出. 局部参数化的存在性由从方程组的 **Jacobi 矩阵** (Jacobi matrix) 的最大秩的条件通过隐函数定理提供. 方程通过数学分析作为一种语言来表达流形的性质，并且习惯于用它来定义流形. 例如，$(n \times n)$ 矩阵的正交性质由关系到矩阵元素的 $n(n+1)/2$ 个方程的方程组给出. 结果表明此方程组是非退化的，正交矩阵群是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的光滑子流形.

在给定了坐标的数学系统中，用等式或不等式表示限制或"约束"，并选择一个较小的系统，如果对系统 $F_i = 0$ 的非退化条件在流形的所有点都成立，那么，函数 F_i 的梯度形成了标架 (framing 或 frame) (一个正交于流形的点处的切平面和连续依赖于点的 k 框架). 允许框架的流形形成稳定可平行流形 (stably-parallelizable manifolds) 的较窄的类 (例如，它们有**定向** (orientation)). 但是局部地，$\mathbf{R}^n$ 中的任何一个可微流形可以由一个非退化组给出，而且，利用单位分解，可以构造一个定义流形的常 (但不是最大的) 秩组.

对于用图册给出的流形，作为 $\mathbf{R}^n$ 中关于某个 Γ 结构的子流形而实现它的问题被提出来了. 任何拓扑的、光滑的或分片线性的流形 M 是可嵌入的 (imbeddable), 即是 Γ 同胚于 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的子流形，而在 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中，嵌入的集合在所有连续映射的空间中是稠密的. 关于另一些类型，问题显得更复杂. 已经深入细致地研究过，例如 Riemann 流形、实现在复射影空间 (这儿代替了 $\mathbf{R}^n$) 中的**代数簇** (algebraic variety), 构成一个非常特殊的类 (**Hodge 簇** (Hodge variety)). 如果允许退化的方程组，则产生了具有奇点的流形 (manifold with singularities). 在代数几何学中，两者思想相结合: **代数空间** (algebraic space) 是通过将退化多项式组局部给出的片连接起来所定义的. 在**配边** (cobordism) 理论中，在拓扑学中，在具有奇点的流形的名义下，讨论作为流形上的锥的积而局部构造出的空间. 后来的推广与流形的连续族的思想有关 (见**纤维空间** (fibre space); **纤维化** (fibration); **分层** (stratification)).

在纯拓扑意义下的流形的研究是很复杂的，直到最近，才限定到局部性质，那就是 $\mathbf{R}^n$ 的假性 (**连续分解** (continuous decomposition); **非驯嵌入** (wild imbedding); 等等). 流形整体的研究必须要求使用或者代数拓扑学中的同调或其他的工具，或者光滑、分片线性或其他结构. 流形的基本的同调性质是 Poincaré 对偶，它也为**同调流形** (homology manifold) 所保持，并用于流形概念的推广，例如 Poincaré 复形. 映射的度实际上是同调的，这也是定义成伪流形 (pseudo-manifolds) 的基本思想，. 即具有开连通稠密子集 (就是流形) 的空间 (通常是复形).

基于各种结构的使用，流形的几何研究首先来自流形与 $\mathbf{R}^n$ 的局部等价性和来自用光滑或分片线性映射逼近一个映射置它们于一般位置的可能性，等等. 这里的第一个问题是作为由单片造出来的空间的流形的表示. 最初的思想是**三角剖分** (triangulation) 思想，然后发展成**复形** (complex) 的一般思想. 三角剖分性和三角剖分等价性的难题在 19 世纪 60 年代和 70 年代已解决了 (见**流形的拓扑学** (topology of manifolds)). 一个更灵活的工具已产生出流形的环柄分解，等价于考虑 Morse 函数. 应用这个分解的逐次简化的技巧、基本定理 (关于 h **配边** (h-cobordisim), 推广的 **Poincaré 猜想** (Poincaré conjecture), 等等) 得到了证明. 这个技巧也为流形的给定的同伦型中有关光滑和分片线性的分类定理起了几何基础的作用. 然而，这些定理需要使用与流形切丛 (见下面) 有关的精巧不变量. 特别显著的也是新的同调理论的发现: **K 理论** (K-theory) 和**配边** (cobordism) 理论. 如果两个流形共同为第三个流形的边界，则称它们是配边的. 这里考虑了各种结构. 当闭链首次被当作分片光滑流形时，这个等价关系是基于最初的同调的定义. 在配边理论中，这种思想被恢复了，但子流形被流形的映射代替了. 基本群在有关流形上的结构的分类的问题中起了特殊的作用，由于这个作用，这些问题与**代数 K 理论** (algebraic K-theory) 的联系建立起来了.

光滑流形 M 的最重要的不变量是它的切丛 τM. 流形上的分析的主题是 τM 和与之有关的各种丛的截面的研究. 从拓扑学的观点来看，τM 由**指数映射** (exponential mapping) $\exp: \tau M \to M$ 的存在性所刻画.

这个映射将纤维 $\tau_x M$ 中的小球微分同胚地映到相应点 $x \in M$ 的一个邻域上. 它可以描述为 $M \times M$ 中的对角线的**管状邻域** (tubular neighbourhood) 到 $M \times M$ 的一个因子上的射影. 在这个形式中, τM 的定义可以转换为拓扑的, 分片线性的等等情形 (见**微丛** (micro-bundle)).

切丛的结构群的不同的简化称为流形上的结构 (structures on the manifold). 如果能选择图册使得它的坐标变换的 Jacobi 矩阵属于简化结构群, 并且就此决定这个简化, 那么这样的结构称为可积的 (integrable). 结构的分类问题和它们的可积性关系到**流形的微分几何学** (differential geometry of manifolds) 的基本问题. 在流形的拓扑学中, 关于光滑, 分片线性和其他构造的分类问题主要地简化为切丛上相应结构的分类问题, 并通过相同的选取, 导致了同调的问题.

切丛主要的作用与这样的事实相联系: 在某个同调理论中, 存在与它不变地相联的上同调类 (见**示性类** (characteristic class)), 该同调论具有关于流形的整体结构的最基本的信息和与它的拓扑性质相联系的 M 上的不同的构造和结构的性质.

一直到 20 世纪 70 年代, 在这个方向上流形的拓扑的研究基本上采用流形上的光滑和分片线性结构 (更精确地说, 流形的**同伦型** (homotopy type)). 只有在又难又深的定理证明之后, 转入纯拓扑结果才成为可能, 这开始于 (有理) 示性类的拓扑不变量的证明 (见**流形的拓扑学** (topology of manifolds)). 20 世纪 70 年代末, 这个方向与上述流形的纯拓扑的研究合并了. 一个生动的例子是三维同调球面上的对**偶纬垂** (suspension) 是流形 (球面) 这个猜测的证明. 这些就允许给出流形的拓扑分类 (已知直到那时, 仅对一维和二维流形, 见**二维流形** (two-dimensional manifold)), 阐明关于多面体是流形的问题 (这儿仅有的障碍是四维 **Poincaré 猜想** (Poincaré conjecture), 然而还未证明 (1990)) 和其他问题 (见**流形的拓扑学** (topology of manifolds) 和 [19]).

历史概况. 流形研究的第一阶段关系到与物理世界 (地球的表面) 和几何公理的研究有关的多维参数思想的分析. 为详细说明 $\mathbf{R}^n$ 中的流形的两种方法 (局部参数化和方程组), C. F. Gauss 首先考虑了 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 (见 [1], p. 127), 而在多维的情形是由 H. Poincaré (见 [3]) 研究的. J. Plucker ([5]) 研究了由曲线、曲面等形成的流形中的局部坐标. H. Grassmann 在 [6] 中得到了"多维扩张"的一般思想. 在"流形"的名义下, 由 B. Riemann 在他的著名讲义 Über die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen (见 [2]) 中将这个思想引入数学. 各种特殊坐标的性质被 C. G. J. Jacobi、G. Lamé 和其他学者所研究 (见 [8]).

Gauss (见 [1], p. 123) 与他自己关于大地测量学的工作相联系, 开始了曲面的系统的研究, 引进了内蕴几何学的概念, 这样, 流形的概念, 事实上是流形上的构造的概念, 它不依赖于环绕空间. 这个思想只在 20 世纪中期构造的示性类理论中完全被理解. Riemann 将 Gauss 的思想转变到多维流形. 在 Riemann 几何的基础上, 张量分析由 G. Ricci, T. Levi-Civita, E. B. Christoffel 和其他人所创建. 张量的进一步的发展与相对论密切相连. 流形概念的发展的另一条几何线索最初出现在**非 Euclid 几何学** (non-Euclidean geometries) 的可能性的发现中, 出现在运动概念的基础上的几何构造学中 (H. Helmholtz, 见 [1], p.366). 这个思想被 F. Klein 变成了几何学的群论结构的一般程序 (见 [1], p. 399 和 [8]), 并导致了 S. Lie 在连续群理论上的深奥微妙的工作. Helmholtz-Klein-Lie 这条线撇开了 Gauss-Riemann-Ricci 这一条线持续了很长时间. 它从后者借鉴了曲率的概念, 但只对 **Klein 空间** (Klein space) 有兴趣. 然而, 重要的问题产生于 Lie 群和它们的齐性空间的整体结构, 并且这引起对流形的整体构造的注意. 产生深刻影响的一个重要事实是 Klein 发现了**椭圆几何学** (elliptic geometry), 它局部等价于球面几何学, 但是整体上有根本不同的性质. 也由 A. F. Möbius 和 Klein 发现了不可定向的现象.

两个方向的综合出现在 E. Cartan 的文章中 (见 [1], p. 483). 开始于 G. Darboux 关于曲面理论的研究, 他考虑了 $\mathbf{R}^n$ 中的任何流形的**活动标架法** (moving-frame method) 并归结了结构方程理论, 包括 Lie 的工作的 Darboux 理论的非邻近的距离关系. 在 Cartan 的方法中, G 结构的概念统一了 Riemann 几何学的思想和 Lie 群理论, 实质上, Cartan 引进了切丛和它的结构群的概念, 它最终成形只在 20 世纪 40 年代 (见 [13]). 这个思想也导出了流形上的数学分析和流形上的拓扑研究的统一. 该基础由 de Rham 同构 (见 **de Rham 定理** (de Rham theorem))——实上同调和微分形式两者之间相联系的 Poincaré 思想 (见 [3]) 的最后形式——所提供. 最重要的后继阶段是示性类的引入和它们的作为形式的积分的表示 (这里的一个例子是最初归功于 W. van Dyck 的 **Gauss-Bonnet 定理** (Gauss-Bonnet theorem) 中的 Euler 示性数的表示, 见 [14]).

流形的拓扑研究创始于 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 的发现, 它与复解析函数表示为积分、作为将它从这些函数的多值性中脱离出来的一种尝试有关. 积分的 "周期" 导致于连通数的概念, 到最后, 导致同调. 这个思想的多维推广的概念和流形的整体同调研究的思想归功于 Riemann (见 [2]). 这个研究开始于 Poincaré, 他取得了一些重要发现, 并证明了 **Poincaré**

对偶性(Poincaré duality). 继 Riemann 的发现，2维流形的研究(由 Möbius 和 C. Jordan 占第一位，见[14])起了一个促进作用，从而导致了它们的完全分类. 最后，只在阐明了“纯”同胚的思想之后才证明了进展的可能性(例如，Poincaré 实质上使用了分片光滑同胚). 这个阐述是 19 世纪末开始进行的数值连续统的分析结果之一. 在这方面有重大意义的是 Hilbert 的第五问题的提出和 L. E. J. Brouwer([9])的工作，他证明了允许 H. Wey([4])系统地叙述拓扑流形的概念的定理(关于区域不变性和维数不变性). 然而，在高维数的情形，很长时间内，在光滑和分片线性结构的限制下才引进流形的拓扑研究. [20] 中引进的光滑结构主要被 H. Whitney([21])，还有 G. Whitehead 和其他人所分析. 分片线性结构由 Brouwer 引进和被 J. W. Alexander([22])、还有 M. Newman 和 Whitehead 所分析. 长期以来，它们只被当作流形的拓扑研究的辅助工具. 直到 20 世纪 50 年代，甚至在球面上，发现了可微结构的不唯一性，以及在 20 世纪 60 年代末，发现了分片线性结构(例如，在环面上)的不唯一性. 从 20 世纪 50 年代起，流形的研究，首先基于示性类的思想，已转向拓扑和分析思想的综合(见[7]).

参考文献

[1] Об основаниях геометрии, M., 1956.

[2A] Riemann, B., Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zuGrunde liegen, in Das *Kontinuum und andere Monographien*, Chelsea, reprint, 1973.

[2B] Riemann, B., Gesammelte mathematische *Werke-Nachträge*, Teubner, 1892 – 1902 (translated from the German).

[3A] Poincaré, H., Oeuvres de Henri Poincaré, Vol. 3, Gauthier-Villars, 1916 – 1965.

[3B] Poincaré, H., Oeuvres de Henri Poincaré, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1916 – 1965.

[4] Weyl, H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1955.

[5] Plücher, J., Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, 1-2, Teubner, 1868 – 1869.

[6] Grassman, H., Die Ausdehnungslehre von 1844, in *Gesammelte Werke*, Vol. 1, Springer, 1 – 319.

[7] Kronecker, L., Ueber Systeme von Functionen mehrere Variabeln 1, *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss.*, (1869), 159 – 193.

[8] Klein, F., Vorlesungen uber hohere Geometrie, Springer, 1926.

[9A] Brouwer, L. E. J., Beweis der Invarianz der Dimensionszahl *Math. Ann.*, **70** (1911), 161 – 165.

[9B] Brouwer, L. E. J., Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **71** (1911), 97 – 115.

[9C] Brouwer, L. E. J., Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, *Math. Ann.*, **72** (1912), 55 – 56.

[10] Weyl, H., Mathematische Analyse des Raumprobleme, Springer, 1923.

[11] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[12] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

[13] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976 (translated from the French).

[14] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.

[15] Milnor, J. and Stashef, J., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

[16] Nuenhuis, A., Theory of the geometric object, Univ. of Amsterdam: 1952, Thesis.

[17] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978 (translated from the German).

[18] Sullivan, D., Geometric topology, M. I. T., 1971.

[19] Cannon, J. W., The recognition problem: what is a topological manifold?, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 5, 832 – 866.

[20] Veblen, O. and Whitehead, G., The foundations of differential geometry, Cambridge Univ. Press, 1953.

[21] Whitney, H., Differentiable manifolds, *Ann. of Math.*, **37** (1936), 645 – 680.

[22] Alexander, J. W., Combinatorial analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28** (1926), 301 – 329.

也可参看条目: **流形的微分几何学**(differential geometry of manifolds); **微分拓扑学**(differential topology); **微分流形**(differentiable manifold).

A. B. Чернавский 撰

【补注】四维 Poincaré 猜想于 1984 年得到解决. 见 **Poincaré 猜想**(Poincaré conjecture).

对于无限维流形，亦见[A1].

参考文献

[A1] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

薛春华 译

图形(线、曲面、球面，…)的流形 [manifold of figures (lines, surfaces, spheres, …); фигур многообразие]

以某个**齐性空间**(homogeneous space)的各种图形为构成元素的流形. 从分析观点来看，最简单的图形是代数曲线和曲面. 所以，已被研究的流形(一般在 Euclid 空间、仿射空间或射影空间中)的构成元素主要是点、直线、平面、圆、球面、圆锥曲线、二次曲面，以及它们的多维类似.

一个秩 N 的图形 F 的 m 维流形 $\mathfrak{M}_m$ 由下列微分方程的封闭组所定义:

$$\Omega^a = \lambda_i^a \Omega^i, \Delta \lambda_i^a \wedge \Omega^i = 0, i, j = 1, \cdots, m; \quad (1)$$

$$a, b = m + 1, \cdots, N,$$

其中 $\Omega^J(J = 1, \cdots, N)$ 是图形 F 的迷向方程的左边，满足 $\Omega^1 \wedge \cdots \wedge \Omega^m \neq 0$，$\Delta\lambda_i^a$ 是将 (1) 的 **Pfaff 方程** (Pfaffian equation) 封闭时产生的 **Pfaff 形式** (Pfaffian form). 方程组 (1) 经过一系列延拓后便得 $\mathfrak{M}_m$ 的基本对象序列，从中可选取流形的一个基对象，进而得出流形的微分几何的不变结构.

直纹流形的微分几何已有深刻的发展. 具非线性构成元素的最简单流形是圆锥曲线的流形. 对于三维空间 (Euclid、仿射或射影) 中圆锥曲线的每个 1 维流形 C_1^2，都有一伴随的可展曲面 (torse) T，它是圆锥曲线的平面族的包络. 一个流形 C_1^2 被称为焦 (focal) 流形或非焦 (non-focal) 流形，取决于可展曲面的母线是否与圆锥曲线相切. 三维空间中圆锥曲线的二维流形 (线汇 (congruence)) 一般有六张焦曲面和六个焦族. 线汇中的所有圆锥曲线都与这些曲面相切. 具不定焦族的圆锥曲线汇 (其中每两邻接圆锥曲线均二阶相交) 的特征是线汇中所有的圆锥曲线均属于同一二焦族，与之对应的是属于数族的圆锥曲线汇有一四重次曲面. 平面族构成单参同一平面的两邻接圆锥曲线之交的四个焦点. 另两个焦点是圆锥曲线与其平面的特征线的交点.

P_3 中的二次曲面汇 K_2 一般有八张焦曲面，面汇中的所有二次曲面均与它们相切. 在面汇 K_2 的二次曲面 $F = 0$ 上，沿任一方向由方程组 $F = 0, dF = 0, \cdots, d^m F = 0$ 确定的点称为该二次曲面的 m 阶焦点. 二阶焦点是一阶焦点的四重点；三阶焦点也是任意 $m(>3)$ 阶焦点. 在圆锥曲线的三维流形 (线丛 (complex)) 的每条圆锥曲线 C 上，一般有六个不变点 (圆锥曲线的 t 阶焦点 (t-focal points)). 对于其所在平面构成双参数族的线丛的每条圆锥曲线 C，存在唯一的一条圆锥曲线 C^*，它通过 C 的平面的特征点和 C 与位于同一平面的邻接圆锥曲线的四个交点. 圆锥曲线的多参数族的几何性质本质上依赖于刻画这些族的圆锥曲线的平面族的参数个数.

P_3 中圆锥曲线的直接推广是二次元素 —— P_n $(n > 3)$ 中 $(n-2)$ 维非蜕化二次曲面. P_n 中其超平面构成 h 参数族的二次元素的 m 参数族称为 P_n 中的 $(h, m, n)^2$ 流形. 对于 $h = 1, 2, 3$, P_3 中的 $(h, h, 3)^2$ 流形是 P_3 中最一般的单参数圆锥曲线族, (双参数) 圆锥曲线汇和 (三参数) 圆锥曲线丛. 对于 $h < n$ 的 $(h, h, n)^2$ 流形的每个局部二次元素，都伴随一个 $(n - h - 1)$ 维特征子空间和一个 $(h-1)$ 维极子空间. 一个 $(h, h, n)^2$ 流形的秩 (rank) R 等于 $n - h - 1 - \nu$，其中 ν 是特征子空间与它的极子空间相交的子空间的维数. 一个 $(n, n, n)^2$ 流形的微分几何学可以看作 $(n+1)$ 维中心投影空间 P_0^{n+1} 的某一正则超曲面的几何学，其中原 n 维空间起着不定点的作用.

P_n 中维数 $p \leqslant n-2$ 的二次曲面总是位于一个 $(p+1)$ 维子空间中. $k(>2)$ 阶代数曲面一般没有此性质. 在研究代数曲面的流形时，选择位于高一维平面内的代数曲面族是明智的. 属于 P_n 的超平面 P_{n-1} 的一个非蜕化的 $(n-2)$ 维 k 阶代数曲面称为 k 阶平面代数元 (plane algebraic element). 其超平面构成 h 参数族的 k 阶平面代数元的 m 维流形称为 $(h, m, n)^k$ 流形. 一阶基本对象是 $(h, m, n)^k$ 流形的基本对象.

当几何学应用于流体力学、场论和微分方程时，就会用到线和曲面的流形，它们一般不是代数的. 对几何学本身而言，这些流形的研究是有趣味的. 三维空间中的一个曲线汇 (curvilinear congruence) 是一个 2 维曲线族 $\Gamma_t: x = x(t, u, v)$，使得过空间每点，一般有族中的唯一曲线通过. 对于固定的 u 和 v，就给出族 Γ_t 的一条曲线 C_t；固定 t 而变动 u 和 v 时就给出一张曲面 S_{uv}，它称为线汇 Γ_t 的横截曲面 (transversal surface). C_t 上使 $(x\, x_t\, x_u\, x_v) = 0$ 的点称为焦点 (focal point). Γ_t 的曲线 C_t 的焦点集称为线汇的焦曲面 (focal surface). Γ_t 的一张曲面 $v = v(u)$ 称为 Γ_t 的主曲面 (principal surface)，如果在此曲面上的曲线 C_t 有包络.

参考文献

[1] Малаховский, В. С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Итоги науки и техники, Проблем геометрии, 12 (1981), 31 – 60.

В. С. Малаховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grffiths, P. and Harris, S.. Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

沈一兵 译

Mann 定理 [Mann theorem; Манна теорема]

给出两个序列的和的密度估计的一个定理 (见**序列的密度** (density of a sequence)). 设 $A = \{0, a_1, \cdots, a_j, \cdots\}$ 是递增的整数序列，并设

$$A(n) = \sum_{\substack{0 < a_j \leqslant n \\ a_j \in A}} 1 .$$

序列 A 的密度 (density) 是值

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n} .$$

两个序列 A 和 B 的算术和 (arithmetic sum) 是所有可能的和 $c = a + b$ 组成的序列 $C = A + B$，这里 $a \in A$，而 $b \in B$. Mann 定理断言:

$$d(A + B) \geqslant \min\{d(A) + d(B), 1\}.$$

由 Mann 定理可知，若 A 是具有小于 1 的正密度的序列，B 是另一个正密度序列，则 A 和 B 相加后密度将增加. Mann 定理的另一重要结果是: 每一正密度

序列是自然数序列的基(basis). Mann 定理本质上加强了Shnirel'man 的类似的定理(见 **Шнирельман 法**(Shnirel'man method)). 这是由 H.B.Mann([1])证明的.

参考文献

[1] Mann, H. B., A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, *Ann. of Math.*, **43**(1942), 523 – 527.

[2] Ostmann, H. H., Additive Zahlentheorie, Springer, 1956.

[3] Гельфонд, А. О., Линник, Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962 (英译本: Gel'fond, A. O. and Linnik, Yu. V., Elementary methods in the analytic theory of numbers, M. I. T., 1966).

Б. М. Бредихин 撰　戚鸣皋 译　朱尧辰 校

Mann-Whitney 检验 [Mann-Whitney test; Манна-Уитни критерий]

检验关于两个样本 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 之齐一性的假设 H_0 的统计检验, 其中 $m+n$ 个元素相互独立且服从连续型分布. 由 H.B.Mann 和 D.R.Whitney([1])提出的这一检验基于统计量

$$U = W - \frac{1}{2}m(m+1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\delta_{ij},$$

其中 W 是用于检验同一假设 H_0 的 **Wilcoxon 检验**(Wilcoxon test)的统计量, 数值上等于合并**顺序统计量**(order statistic)中第二个样本各元素的秩之和, 而

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 若\ X_i < Y_j, \\ 0, & 若不然. \end{cases}$$

于是, 统计量 U 是第二个样本的元素大于第一个样本的元素的情形之总数. 由统计量 U 的定义可知, 如果假设 H_0 成立, 则

$$\mathrm{E}U = \frac{nm}{2}, \quad \mathrm{D}U = \frac{nm(n+m+1)}{2}. \qquad (*)$$

除此之外, 统计量 U 具有 Wilcoxon 统计量 W 的一切性质, 其中包括以(*)为参数的渐近正态性. 实际中应用 Mann-Whitney 检验时, 只要 $\min\{n, m\} > 25$, 即可利用这一性质.

参考文献

[1] Mann, H.B., Whitney, D.R., On a test whether one of two random variables is statistically larger than the other, *Ann. Math. Stat.*, **18**(1947), 50 – 60.

М.С.Никулин 撰

【补注】 Mann-Whitney 检验亦称做 U 检验.

周概容 译

多值逻辑 [many-valued logic; многозначная логика]

数理逻辑(mathematical logic)中研究**命题逻辑**(propositional logic)的数学模型的分支. 这些模型反映命题逻辑的两个基本特性: 命题真值的多值性; 从给定的命题运用逻辑运算来构造新的更复杂的命题且由初始命题的真值来确定复合命题的真值的可能性. 多值命题的例子是带有模态结果("是","否","或许")的陈述和具有概率特征的陈述; 逻辑运算的例子是形如"和","或","如果 …, 则 …"的逻辑连接词. 一般地说, 多值逻辑的模型是**逻辑代数**(algebra of logic)的推广. 必须注意的是在逻辑代数中命题只取两个值("是","否"); 于是, 它们通常不能反映在实际中遇到的逻辑结构的全部复杂性. 广义的多值逻辑有时也包括**逻辑演算**(logic calculus).

历史上最初的多值逻辑的模型是 19 世纪中叶 G. Boole 的二值逻辑, 也称为逻辑代数, J. Łucasiewicz(1920)的三值逻辑以及 E. Post(1921)的 m 值逻辑. 对这些模型的研究是多值逻辑理论发展的重要阶段.

多值逻辑的基本模型. 多值逻辑具有一种特有的显著的特点, 它用数理逻辑、控制论和代数的观点讨论在研究多值逻辑时所遇到的问题和方法. 因此, 按照控制论的观点, 多值逻辑的模型被看成描述复合控制系统的功能的语言, 此系统的组成部分可能处于某些不同的状态, 而按照代数的观点, 多值逻辑的模型则是既具实用意义又具理论意义的**代数系统**(algebraic system).

多值逻辑模型的构造类似于二值逻辑的构造. 被划分成具有相同真值的类的逻辑的个体命题导致集合 E 的概念, E 是模型的一个常元并且如果用个体命题对应的真值代替个体命题, 那么这个常元实际上代表所有的个体命题; 于是, 可变命题成了在 E 中取值的变量 $x_1, x_2, \cdots$; 逻辑连接词成了集合 M 的元素, M 是由自变量在 E 中取值的初等函数(运算)组成的. 由个体和可变命题以及逻辑连接词构造出的复合命题成了 M 上的公式集 $\langle M \rangle$ 的元素. 复合命题在 E 中所取的真值是给定的复合命题中出现的命题对应的真值的函数. 在模型中, 为该函数指定一个与给定的复合命题相对应的公式; 称这个公式实现(realise)该函数. 把 E 的元素的**多元组**(tuple)映到 E 中的函数称为 m 值逻辑的函数(function of m-valued logic), 这里 m 表示 E 的基数. 所有 m 值逻辑的函数的集合记为 P_m. 公式集 $\langle M \rangle$ 引出集合 $[M]$, $[M]$ 是由实现 $\langle M \rangle$ 中的公式的函数组成的, 这些函数称为 M 上的叠加(superposition)或合成(composition). 集合 $[M]$ 称为集合 M 的闭包(closure of the set). 叙述多值逻辑 M_F 的具体模型与指明集合 E, M, $\langle M \rangle$ 和 $[M]$ 被看成是等价的; 此时的模型称为是由 M 生成的; 如果 M 是有限的, 则称此模型是有限生成的(finitely generated). 这里的模型称为公式模型(formula model), 也称为一个 m 值逻辑(m-valued logic).

控制论中对多值逻辑的处理方式与众不同，把多值逻辑的模型看成是控制系统．这里的初等函数是展示运算的元素，同时公式被解释为由元素构造出的概形，它们也将输入信息变成输出．这种在控制论中熟知的（不分叉的）功能元图（diagram of functional elements）的控制系统，被广泛地应用于控制论的理论和实际问题．

同时，逻辑和控制论中一些问题与研究集合 M 和 $[M]$ 之间的关系有联系，$\langle M\rangle$ 作为从第一个集合定义出第二个集合的工具在其中的作用有点儿处于隐蔽的地位．这种情形就引出了多值逻辑作为一种代数的另一种模型，它的元素是自变量在 E 中变化且在 E 中取值的函数．通常用一个特殊的运算集作为此代数中的各种运算，这个运算集，用 M 和 $[M]$ 的关系来解释，等价于从 M 上的函数构造出的公式集；也就是，复合函数是从自变量是其他函数的单个函数得到的．这些代数称为 m 值逻辑代数（algebras of m-valued logic）．它们也可以具体地构造，譬如通过引入如下的一元运算：ζ，τ，Δ，∇，和二元运算 $\star$．如果假定 P_E 中的每一个函数依赖于 $x_1, \cdots, x_n$，这里 n 是由 f 决定的并且允许有虚构的变量，则这些运算可以如下给出：

若 $n>1$，则

$$(\zeta f)(x_1, \cdots, x_n)=f(x_2, \cdots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, \cdots, x_n)=f(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, \cdots, x_{n-1})=f(x_1, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}),$$

若 $n=1$，则 $\zeta f=\tau f=\Delta f=f$；

$$(\nabla f)(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=f(x_2, x_3, \cdots, x_{n+1})$$

并且对于 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $g(x_1, \cdots, x_m)$，

$$(f\star g)(x_1, \cdots, x_{n+m-1})$$
$$=f(g(x_1, \cdots, x_m), x_{m+1}, \cdots, x_{m+n-1}).$$

代数 $M_E=\langle M, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \star\rangle$ 有时称为 Post 代数（Post algebras）．

多值逻辑中的问题．在诸多的问题中，多值逻辑公式模型的特征问题是“描述”问题．也就是，对于已知的集合 $M_2\subseteq[M_1]$，求出 $\langle M_1\rangle$ 的所有实现 M_2 中的函数的公式的问题．此问题的特殊情况是数理逻辑中求出所有实现给定的常元的公式的重要问题．例如，在命题演算中，这就等价于构造所有永真的命题．

在数理逻辑与代数之间的和描述问题有关的一个问题是恒等变换问题（problem of identical transformation）．这里，对于给定的 M，要求选出在某种意义下最简单的 $\langle M\rangle$（恒等式）中等价（即实现相同的函数）公式偶的子集，由此可以通过用一个公式替代另一个公式从任何一个公式得到所有与之等价的公式（一个恒等式的完全系统）．

与此类似的是所谓的完全性问题（completeness problem），它是要求出一个已知闭（即等于它的闭包）集 M 的所有满足 $[M_1]=M$ 的子集 M_1；即 M_1 在 M 中的完全性（completeness property）或函数完全性（functional completeness property）成立．与此密切相关的是基问题（basis problem），它是要求出 M 中每一个没有 M 中的完全的真子集的完全子集；完全独立函数系（complete independent system of functions）也称为基．完全性问题的解决有两种方案——算术的和代数的．第一种方案中有建立某种语言描述的函数系统的完全性和不完全性的算法的存在性问题；在第二种方案中，人们转而研究已知的 m 值逻辑代数的子代数格的性质并用这些性质来解决完全性问题．代数方案中的一个重要的思想是子代数系统的标准系统．代数 $M=\langle M, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \star\rangle$ 的一个子代数系统 N 称为标准的（criterial），如果下列性质成立：集合 $M'\subseteq M$ 是完全的，当且仅当它不是 N 中的任一个子代数的子集．例如，代数 M 的所有真子代数的集合是标准的．一般地说，上述的标准系统太大了．每一个标准的系统包含代数 M 的所有的极大子代数（所有的准完全类（pre-complete class）），这就使人们可以转而考虑更加经济的不包含极大子代数的子代数的标准系统．因此，对于完全性问题可以只使用形式 $N=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 的标准系统，其中 Σ_1 是所有的极大子代数的集合，Σ_2 是由一些子代数组成的，它们不是任何极大子代数的子代数．如果 Σ_2 是空集，那么完全性问题就化为描述代数 N 的所有的极大子代数．

多值逻辑中的一个综合性问题是描述已知多值逻辑模型的闭类的格．

控制系统的复杂性理论的特征性问题自然地与多值逻辑中的公式和函数有关．对此典型的是下列实现的复杂性问题（problem on complexity of realization）．运用某些方法在所有原始公式集合上引入一种数值测度，即公式的复杂性（complexity of a formula）；然后，例如通过把给定的公式中的所有原始公式的测度加起来的方法，扩展到所有公式的集合上．对于一个给定的函数要求求出实现这个函数的具有最低复杂性的（最简单的）公式，同时还要指明这个复杂性如何由所考虑的函数的性质来决定．这一问题的各种各样的推广已得到研究．

与用具有设定的性质的公式来实现函数有关的问题分布很广．有用**析取范式**（disjunctive normal form）来实现逻辑代数的函数的问题和有关的极小化问题；也有用有界深度（bounded depth）公式来实现函数的问题（即用那些一个替换一个的公式链的长度是有界的公式，这个界与实现和计算的速度有关），分解问

题(decomposition problem),也就是用实现具有更少的自变量的函数的原始公式构造出的公式来实现具有更多自变量的函数以及其他一些问题.

上述所有问题的解决本质上依赖于生成多值逻辑已知模型的集合 E 和 M 的基数.

多值逻辑的最重要的例子.多值逻辑最重要的例子是有限值逻辑(即 m 值逻辑,这里 m 是有限的).为此,通常假设 $E=E_m=\{0,\cdots,m-1\}$,并且 m 值逻辑 M_E 记为 M_m. $m=2$ 的情况是研究得最深入的;此时的函数也称为**布尔函数**(Boolean function).最重要的结果是 Post 的关于闭类格的完全的描述([1]).它们的集合是可数的,而每一个类和以包含关系为序的类的格可以能行地构造.这些类称为 Post 类(Post class).每一个闭类有一个基数不超过 4 的有限基.这些结果导致了关于描述、完全性和基的问题的解决,同时也解决了恒等变换的问题.至于完全的有限系统,对于几乎所有的函数,实现这些函数的最简单的公式的复杂性的测度的性质都已被弄清楚了,相应的公式的合成法的算法也已构造了出来([2]).在复杂性和可靠地充分快地实现函数方面最优的公式的构造问题以及实现大量的特殊的函数和个体函数类的复杂性问题都已有了研究.

已得到深入研究的二值逻辑的问题之一是极小化问题(minimization problem).这里研究了一种说明二值逻辑的函数的特殊语言——析取范式语言.引入了析取范式的复杂性(complexity of a disjunctive normal form)(即其中字母的数目)的概念,并且研究了与实现给定的公式并且在这种测度意义下"最简单的"析取范式的寻找和构造及其度量性质有关的问题([3]).布尔函数的分解问题是弄清在什么条件下一个给定的 n 元函数可以被一个由更少的自变元的函数构造出来的公式来实现,其中在构造公式的过程中所有的相互替换的函数与公共变量无关.这种公式称为非迭代的(non-iterative).已经证明不存在每个函数可以被自身系统上的非迭代公式实现的有限函数系统,即使"几乎"所有的函数不被非迭代公式实现这样的系统也不存在.总而言之,二值逻辑因其特殊性是讨论问题的一般形式的主要对象.

因为任意一个 $m>2$ 的有限值逻辑与二值逻辑有本质的不同,有关于有限系统的描述问题的能行解.已经证明对于 $m\geqslant 3$ 存在具有有限基而不具有有限的完全的恒等式系统的 m 值逻辑([4]),然而在二值逻辑中每一个闭类都有有限的完全的恒等式系统([5]).对于具有有限基的有限值逻辑,存在完全性问题的能行解.可用下述方法求得.如果对于集合 $K=\{g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_s(x_1,\cdots,x_n)\}$ 中任意一组元素 $g_{i1},\cdots,g_{ik}$,函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $f(g_{i1},\cdots,g_{in})\in K$,则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 保持(preserve)集合 K.集合 K 称为正则的(regular),如果对于所有的 j,$1\leqslant j\leqslant n$,K 包含选择函数 $g_j(x_1,\cdots,x_n)=x_j$ 并且 K 中的每一个函数保持 K.如果 $M=[K]$,则在 M 中选取所有具有下述性质的系统 K':包括只依赖于 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数;外加上所有的选择函数以使这些系统正则;它们不包含 K 为子集.这种选取所有正则集 $K_1,\cdots,K_t$,$t\leqslant 2^{m^n}$ 的过程是能行的.系统 $\{U(K_1),\cdots,U(K_t)\}$ 是标准的,其中 $U(K_i)(1\leqslant i\leqslant t)$($K_i$ 的保持类)是由 M 中所有保持 K_i 的函数组成的.也可以能行地验证让 M 的有限子集 K 包含在每一个 $U(K_i)$ 类中.每一个准完全的类都是一个保持类,同时,所有的准完全类的集合形成一个标准系统.已经证明对于 $m\geqslant 3$ 在 P_m 中存在闭类连续统,且存在这样的闭类,它的基的基数可以是任意一个给定的基数(有限的或无限的),也存在没有基的类;这里没有基或具有可数基的类的族具有连续统的基数.没有基或具有可数基的例子有 $[\{f_0,\cdots,f_n,\cdots\}]$ 或 $[\{g_1,\cdots,g_n,\cdots\}]$,其中当 $n=0$ 时,$f_n\equiv 0$,当 $n>0$ 时,$f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 除了在 $(2,\cdots,2)$ 处取值 1 外,其他情况都等于 0;$g_n(x_1,\cdots,x_n)$ 除了在 $(2,\cdots,2,1,2,\cdots,2)$ 处取值 1 外,其他情况都等于 0(见[6]).

m 值逻辑 P_m 中的完全性问题特别有趣.在 P_m 中存在有限的完全系统;这就允许人们为每一个完全系统选取一个有限的完全子系统并将问题转化为研究有限的完全系统.也存在由单个函数组成的完全系统;这种函数称为 Sheffer 函数(Sheffer function).Wenn 函数(Wenn function)$\max(x_1,x_2)+1(\mathrm{mod}\,m)$ 就是一个例子.由于是有限生成的,P_m 中的完全性问题可以能行地解决.

在 P_m 中,可以能行地构造所有的准完全类,它们是特殊谓词的保持类.求出这些谓词就是有限值逻辑的完全性定理的内容(见[7]).称函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 保持谓词 $R:(E_m)^h\to\{0,1\}$,如果对于自变量 $z_{ij}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant h)$ 的所有值,公式

$$R(z_{11},\cdots,z_{1h})\&\cdots\&R(z_{n1},\cdots,z_{nh})\to$$
$$\to R(f(z_{11},\cdots,z_{n1}),\cdots,f(z_{1h},\cdots,z_{nh}))$$

恒等于 1.所有保持谓词 R 的函数的类 $U(R)$ 称为谓词 R 的保持类(preservation class of the predicate).已经证明对于每一个准完全类 N,可以选取一个至多依赖于 $m+2$ 个变元的并且当 $m\geqslant 3$ 时至多依赖于 m 个变元的谓词 R 使得 $N=U(R)$.这些谓词可以划分为六组:H,S,E,L,Z,U.H,S 和 E 族由所有的二元谓词或 E_m 上的序关系组成的.第一种情况,这些序关系具有一个极大和一个极小元;第二种情况,这些序关系给出 E_m 的一些排列,这些排列

可以分解成相同素数长度的循环（没有变元）；第三种情况，这些序关系给出 E_m 上的非恒等非万有的等价关系．当 $m=p^k$，p 为素数时，族 L 非空且由所有的形如 $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 的四元谓词组成，这里 G 是一个交换群，G 的每一个非零元的阶为 p 并且 $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)=1$ 等价于 $y_1+y_2=y_3+y_4$．谓词 $R(y_1, \cdots, y_h)(1\leqslant h\leqslant m)$ 是自反的，如果 $a_1, \cdots, a_h$ 不是互不相同蕴涵 $R(a_1, \cdots, a_h)=1$．它是对称的，如果对于 $1, \cdots, h$ 的任何一个排列 s 都有 $R(y_1, \cdots, y_h)=R(y_{s(1)}, \cdots, y_{s(h)})$；集合 $\{c\in E_m$ 对于任意的 $a_1, \cdots, a_{h-1}, R(a_1, \cdots, a_{h-1}, c)=1\}$ 称为对称谓词 R 的中心（centre of the symmetric predicate）．如果谓词 R 是自反的，对称的且有中心 c 满足 $\emptyset\subset c\subset E_m$，则称 R 为中心的．族 Z 是由所有 h 元中心谓词组成的 $(1\leqslant h\leqslant m)$．对于 E_{h^k} 中的 a，令 $a=\sum_{l=0}^{k-1}[a]_l\cdot h^l$，其中 $[a]_l\in E_k$．族 U 是由所有满足下列条件的谓词 $R(y_1, \cdots, y_n)(3\leqslant h\leqslant m, h^k\leqslant m, k\geqslant 1)$ 组成的：对于某个满射 $\varphi: E_m\to E_{h^k}$，$R(a_1, \cdots, a_h)=1$ 等价于对于所有的 $l=0, \cdots, k-1, ([\varphi(a_1)]_l, \cdots, [\varphi(a_n)]_l)$ 是相同的．已经证明不同族中的谓词给出不同的准完全类，而且已经找到了同一族中的谓词给出相同类的条件．已经证明准完全类的数目渐近地等于 $\delta(m)\cdot m\cdot 2^{a(m)}$，$a(m)=\binom{m-1}{[(m-1)/2]}$，其中当 m 为偶数时，$\delta(m)=1$，当 m 为奇数时，$\delta(m)=2$（即这个数增加的相当快），它是标准系统的琐细而实际的能行性的一个指标（见 [8]）．完全性问题的各种各样的修正也已得到了讨论，这就导致对具有某些事先已知性质的系统的研究；例如，包含所有一元函数的集合 P_m^1 或所有排列的集合 S_m 的系统．在第一种情况下对于 $m>2$，在第二种情况下对于 $m>4$，系统是完全的，当且仅当它包含一个本质函数（essential function），即依赖于一个以上变元且取所有 m 个值的函数（见 [9]，[10]）．与此相关的是给出 P_m^1 和 S_m 的所有这样的子集的问题，每一个这种子集加上任一本质函数都是一个完全系统．已经证明所有至少不取一个值的一元函数的子集 $T\subseteq P_m^1$ 是这样的子集，而所有至少不取两个值的一元函数的子集 $T\subseteq P_m^1$ 一般来说不是这样的子集．当 $m>4$ 时，这些子集正好是满足下列性质的子集 T：若 $m=2^k$，则为 4 传递的；若 $m=p^k$，其中 $p\neq 2$ 为素数，则为 3 传递的；对于其余的 m，则为 2 传递的，这些条件附带一种传递性的自然推广对于任意的取所有 m 个值的函数系统成立（见 [11]）．

对于由一个函数组成的系统，完全性准则是 2 传递性条件．当 $m>2$ 时，一个函数集是完全的，当且仅当它是 m 传递的且传递性度不能降低．

通过迭合可以把有限完全系统转化为更简单的完全系统类，它称为简单基（simple basis）．所谓简单基是指一个有限的完全系统，若把系统中的任一函数的一双本质变元叠合起来，那么系统的完全性就不复存在了．只存在有限 q 个简单基并且 $\log q\sim m^{m^{m-1}-(m-1)!}$（见 [12]）．简单基中的函数的变元数不超过 m^{m-1}，同时在简单基中存在本质上依赖于 m^{m-1} 个变元的函数．多值逻辑 P_k 在 P_m 中的表示，即 P_k 到 P_m 的同态，已在 [13] 中给出；对于任意的有限值逻辑也已建立某些类似于极小化理论的理论．

有限值逻辑的最初的例子是由函数 $1-x$，$\min(1, 1-x_1-x_2)$ 生成的 Łucasiewicz 的三值逻辑（3-valued logic of Łucasiewicz），其中 x_1，x_2 在 0，1/2，1 中取值；由函数 $x_1+1(\mathrm{mod}\, m)$，$\max(x_1, x_2)$ 生成的 Post 的 m 值逻辑（m-valued logic of Post），其中 x_1，x_2 在 0，…，$m-1$ 中取值．与有限值逻辑相近的是多值函数代数，在很大程度上多值逻辑所研究的问题和方法都被移植到这个论题上．

其他多值逻辑的例子是可数值逻辑和连续统值逻辑（即 m 值逻辑，这里的基数 m 分别是可数或连续统的基数）．这些模型在数理逻辑、模型论和数学分析中起重要作用．对于可数值逻辑已经证明所有准完全闭类的集合（因此，所有闭类的集合）的基数超过连续统基数，而且关于包含所有一元函数的集合 $P_{\aleph_0}^1$ 的系统的完全性问题的解答也已经发现（见 [14]）．与有限值逻辑 $P_m(m>2)$ 相反，那里只存在一个包含所有一元函数的准完全类，而在 $P_{\aleph_0}$ 中存在两个这样的准完全类，并且一个给定的函数系统是完全的当且仅当它不包含在它些类中．如果将本质函数推广为加上 $P_{\aleph_0}^1$ 就形成一个完全系统的函数，那么正如有限值逻辑一样，有描述 $P_{\aleph_0}^1$ 的所有具有下列性质的子集的问题，这些子集包含 $P_{\aleph_0}$ 中排列的集合 $S_{\aleph_0}$ 并且加上本原函数形成一个完全系统．已经证明所有这些闭子集的交本身具有这种性质．这个交与 $S_{\aleph_0}$ 不同，它已被用集论术语能行地描述出来了．

在可数值和连续统值逻辑中，各种各样的子类起着特殊的作用．在第一种情况下是极限逻辑，在第二种情况下是连续函数的多值逻辑．极限逻辑（limit logic）是多值逻辑 $P_{\aleph_0}$ 的函数的可数闭类，它们包含所有有限值逻辑的同态逆象．存在互不相同，甚至是有限生成的，互不同构的极限逻辑的一个连续统．已经发现极限逻辑的完全性问题一般地不等价于寻找所有的准完全类．极限逻辑的准完全类的集合的基数可以是任何自然数，也可以是可数或连续统的基数（见 [15]）．关于连续函数的多值逻辑（many-valued logic of continuous functions），所有二元函数的完全性已被证明，由一元和多元函数组成的系统的完全性的类似的定理也已被得到．也已发现每一个连续函数可以表示成特殊选取的连续的一元函数的和．已经证明 k 次

可微的 n 元函数一般地不能用具有相同光滑度但依赖于更少变元的函数的复合来表示（见 [16]）.

可以将函数代数看成是多值逻辑，这些代数中的运算族和上述的有点不同. 这些代数有非齐性的有限值函数的代数（这些函数的自变量在定义域中取有限个值），递归和部分递归函数的代数，自动机映射的代数和其他一些代数.

参考文献

[1] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

[2] Лупанов, О. Б.,《Проблемы кибернетики》, 1965, 14, 31 – 110.

[3] Журавлев, Ю. И.,《Проблемы кибернетики》, 1962, 8, 5 – 44.

[4] Линдон, Р. К.,《Кибернетич. сб.》, 1960, 1, 234 – 245.

[5] Мурский, В. Л.,《Локл. АН СССР》, **163**(1965), 4, 815 – 818.

[6] Янов, Ю. И., Мучник, А. А.,《Локл. АН СССР》, **127** (1959), 1, 44 – 46.

[7] Rosenberg, I., Ueber die funktionale vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Chechoslovak. Akad., 1970.

[8] Захарова, Е. Ю., Кудрявцев, В. Б., Яблонский, С. В.,《Локл. АН СССР》, **186** (1969), 3, 509 – 512.

[9] Яблонский, С. В.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **51** (1958), 5 – 142.

[10] Саломаа. А.,《Кибернетич. сб.》, 1964, 8, 7–32.

[11] Кудрявцев, В. Б., *Elektronische Informations verarbeitung und Kybernetik (EIK)*, 9(1973), 1–2, 81–105.

[12] Алексеев, В. Б.,《Дискретный анализ》, 1971, 19, 3 –10.

[13] Мальцев, А. И.,《Алгебра и логика》, **5** (1966), 2, 5 – 24.

[14] Гаврклов, Г. П.,《Проблемы кибернетики》, 1965, 15, 5 – 64.

[15] Деметрович, Я.,《Проблемы кибернетики》, 1975, 30, 5 – 42.

[16] Витушкин, А. Г., в кн.: Тр. Межлународного конгресса математиков, М., 1968, 322 – 328.

В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Urquhart, A., Many-valued logic, in D. Gabby and F. Guenthner (eds.): Handbook of Philosophical Logic, Vol. Ⅲ, Reidel, 1986, pp. 71 – 116.

[A2] Rescher, N., Many-valued logic, MacGraw-Hill, 1969.

朱建平 译

多值逻辑函数 [many-valued logic, functions of; многозначной погики функции]

一类函数，连同其上的相应运算形成一个**多值逻辑** (many-valued logic). 多值逻辑的函数及其变元在同一个由多值逻辑常元组成的集合中取值.

【补注】

参考文献

[1] Rescher, N., Many-valued logic, McGraw-Hill, 1969.

В. Б. Кудрявцев 撰 孙智伟 译

映射 [mapping; отображение]，单值的

一个规则，根据这个规则，对给定集合 X 的每个元素，指定了另一给定集合 Y 的一个完全确定的元素（X 与 Y 可以相同）. 元素 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 之间的这种关系被表示为形式 $y=f(x)$, $y=fx$ 或 $y=y(x)$. 也可写成 $f: X\to Y$，并称映射 f 从 X 映射到 Y 中. 集合 X 称为映射的定义域 (domain (of definition) of the mapping)，而集合 $\{f(x): x\in X\}\subset Y$ 称为映射的值域 (range (of values) of the mapping). 映射 $f: X\to Y$ 也称为集合 X 到集合 Y 中的映射（或到集合 Y 上的映射，若 $\{f(x): x\in X\}=Y$）. 在逻辑上，“映射”的概念与**函数** (function)，**算子** (operator) 或**变换** (transformation) 的概念是相同的.

映射 $f: X\to Y$ 产生了集合 $\mathrm{Gr}_f=\{(x, f(x)): x\in X\}\subset X\times Y$，它称为映射的图 (graph of the mapping). 另一方面，集合 $M\subset X\times Y$ 定义了具有图 M 的单值映射 f_M，当且仅当对所有的 $u\in X$，有一个且仅有一个 $v\in Y$ 存在，使得 $(u, v)\in M$；这时 $f_M(u)=v$.

两个映射 f 和 g 称为相等的 (equal)，如果它们的定义域相同，并且对每个 $x\in X$，都有 $f(x)=g(x)$. 在这种情况下，两个映射的值域也相同. 定义在 X 上的映射 f 是常数映射 (constant mapping)，如果存在一个 a，使得对每个 $x\in X$，都有 $f(x)=a$. 在 X 的子集 A 上由等式 $\varphi(x)=f(x)$ $(x\in A)$ 定义的映射 φ，称为映射 $f: X\to Y$ 对 A 的限制 (restriction of the mapping)；这个限制常常用 f_A 表示. 在集合 $E\supset X$ 上定义的、并对所有的 $x\in X$ 满足等式 $F(x)=f(x)$ 的映射 F，称为映射 f 在 E 上的扩张（或延拓） (extension of the mapping 或 continuation of the mapping). 若给定三个集合 X, Y, Z，映射 f 在 X 上定义在 Y 中取值，映射 g 在 Y 上定义在 Z 中取值，则存在映射 h，它具有定义域 X 而在 Z 中取值，并且由等式 $h(x)=g[f(x)]$ 定义. 这个映射称为映射 f 和 g 的复合 (composite of the mapping)，而 f 和 g 称为分量（因子）映射 (component (factor) mappings). 映射 h 也称为复合映射 (compound mapping, composite mapping, composed mapping)，由内映射 f 和外映射 g 组成. 复合映射记为 $g\circ f$，这里书写的次序起重要作用.（对于实变量的函数，也用叠加 (superposi-

tion)一词.)复合映射的概念能够推广到含任意有限多个映射的情况.

在 X 上定义、在 Y 中取值的映射 f,产生了一个新的映射,它定义在 X 的子集上,取 Y 的子集作为值.事实上,若 $A\subset X$,则

$$f(A)=\{f(x): x\in A\}.$$

集合 $f(A)$ 称为 A 的象(image).若 $A=\{x\}$,则得到原来的映射 $f(x)$;因而 $f(A)$ 是 $f(x)$ 的从集合 X 到 X 的所有子集的集合 $\mathfrak{P}(X)$ 的扩张,如果认为单元素集与它包含的元素一致.当 $Y=X$ 时,集合 A 称为关于 f 的不变子集(invariant subset),若 $f(A)\subset A$;而 x 称为关于 f 的不动点(fixed point),若 $f(x)=x$.不变集和不动点在解形如 $f(x)=a$ 或 $x-f(x)=a$ 的函数方程时是很重要的.

每个映射 f: $X\to Y$ 产生另一个映射,它定义在集合 $f(X)$ 即 Y 的子集上,并取集合 X 的子集作为值.事实上,对每个 $B\subset f(x)$(或 $\subset Y$),集合 $\{x: f(x)\in B\}$ 记为 $f^{-1}(B)$,称为 B 的完全逆象(complete inverse image)(完全原象(complete pre-image)).若对每个 $y\in f(X)$, $f^{-1}(y)$ 是由单元素组成的,则 $f^{-1}(y)$ 是元素的映射,定义在 $f(x)$ 上,在 X 中取值.它也称为 f 的逆映射(inverse mapping).逆映射的存在等价于方程 $f(x)=y\,(y\in f(X))$ 的可解.

如果集合 X 和 Y 有某些性质,则可在从 X 到 Y 的所有映射的集合 $F(X,Y)$ 中区分出一些感兴趣的类.例如,对于偏序集 X 和 Y,映射 f 是保序的(isotone),若 $x<y$ 蕴涵 $f(x)\leqslant f(y)$(见**保序映射**(isotone mapping)).对于复平面 X 和 Y,可选择全纯映射类.对于拓扑空间 X 和 Y,自然地区分出这两个空间之间的连续映射类;已经建立**映射的微分法**(differentiation of a mapping)的广泛理论.对于标量变元的映射,而且在最一般的情况下,对于定义在**测度空间**(measure space)上的映射,可以引入(弱或强)可测性的概念,可以构造各种 Lebesgue 型积分.(例如,**Bochner积分**(Bochner integral)和**Daniell 积分**(Daniell integral).)

一个映射称为多值映射(multi-valued mapping),若对由多于一个元素组成的子集 $Y_x\subset Y$ 指定 x 的某些值.这种类型映射的例子包括复变量的多叶函数,拓扑空间的多值映射,等等.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets, Addison-Wesley, 1968(译自法文).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966(译自法文).

[3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975(中译本: J. L. 凯莱,一般拓扑学,科学出版社,1982).

В. И. Соболев 撰 杜小杨 译

映射锥构造法 [**mapping-cone construction**; **коническая конструкция**]

对应于拓扑空间的每个连续映射 $f: X\to Y$ 的拓扑空间 $C_f\supset Y$ 的构造法,拓扑空间 C_f 是由拓扑和(不相交并) $CX\oplus Y$ 而得到的,其中 $CX=(X\times[0,1])/(X-\{0\})$ 是 X 上的**锥**(cone),这里视 $x\times\{1\}=f(x)$, $x\in X$.空间 C_f 称为 f 的映射锥(mapping cone).若 X 和 Y 是具有特异点 $x\in X$, $y\in Y$ 的示点空间,则 CX 的母线 $x\times[0,1]$ 收缩成一点,C_f 称为 f 的坍缩映射锥(collapsed mapping cone).对任意示点拓扑空间 K,序列 $X\xrightarrow{f} Y\subset C_f$ 诱导出示点集的一个正合序列

$$[X,K]\leftarrow[Y,K]\leftarrow[C_f, K].$$

映射 f 同伦于映到特异点的常值映射,当且仅当 Y 是 C_f 的一个收缩核(见**拓扑空间的收缩核**(retract of a topological space)).

参考文献

[1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[2] Mosher, R. E. and Tangora, M. K., Cohomology operations and their applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 映射锥构造法的代数类似如下所述:

设 $u: K\to L$ 是复形的态射,即 $u=(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 且 $u_{n-1}\partial_n=\partial_n u_n$,这里 $\partial_n^k: K_n\to K_{n-1}$. u 的映射锥是由

$$C(u)_n=K_{n-1}\oplus L_n,\ \partial(k,l)=(-\partial k,\ \partial l+uk)$$

定义的复形 $C(u)$.内射 $L_n\to C(u)_n$ 定义复形的一个态射,且若 $K[-1]$ 表示满足 $K[-1]_n=K_{n-1}$ 和 $\partial_n^{K[-1]}=-\partial_{n-1}^K$ 的复形,则投影 $C(u)_n\to K_{n-1}$ 带来

$$O\to L_n\to C(u)_n\to K[-1]_n\to 0,$$

它同时定义一个短正合复形序列

$$O\to L.\xrightarrow{\iota} C(u).\xrightarrow{p} K[-1].\to 0,$$

且得到一个长正合序列

$$\cdots\to H_n(L.)\xrightarrow{\iota} H_n(C(u).)\xrightarrow{p} H_{n-1}(K.)\xrightarrow{u_*} H_{n-1}(L.)\to\cdots.$$

把复形 $K.$ 换成"余复形" $K^{\cdot}$, $K^n=K_{-n}$,则得到上同调背景下的类似构造法和结果.

复形 $K[-1]$ 称为复形 K 的纬垂(suspension of the complex).

参考文献

[A1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963, Sect. 11, 4.

白苏华、胡师度 译

映射柱 [**mapping cylinder**; **цилиндрическая конструкция**]

对拓扑空间之间的每个连续映射 $f: X \to Y$ 造一个如下的拓扑空间 $I_f \supset Y$: 它由叠合拓扑和（不交并）$X \times [0, 1] \coprod Y$ 中的 $x \times \{1\} = f(x)$ $(x \in X)$ 而得. 空间 I_f 称为 f 的映射柱, 子空间 Y 是 I_f 的**形变收缩核**（deformation retract）. 嵌入 $i: X = X \times \{0\} \subset I_f$ 有以下性质: 复合映射 $\pi \circ i: X \to Y$ 与 f 一致（这里 π 为 I_f 到 Y 的自然收缩）. 映射 $\pi: I_f \to Y$ 为同伦等价, 因此从同伦的观点看, 每个连续映射都可视为嵌入, 甚而为**上纤维化**（cofibration）. 类似地, 每个映射也可视为 **Serre 纤维化**（Serre fibration）. 对任意的连续映射 $f: X \to Y$, 其纤维与上纤维在同伦等价的范围里被唯一决定.

参考文献

[1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[2] Mosher, R. E. and Tangora, M. C., Cohomology operations and their application in homotopy theory, Harper & Row, 1968.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 本条名按俄文直译, 应为“柱形构造法”, 这个词组在翻译中也时有出现.

参考文献

[A1] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978, p. 22, 23.

沈信耀 译 余建明 校

映射法 [**mapping method**; **изображений метод**], 象法（method of images）

位势理论中, 在区域 D 里解偏微分方程的某些边值问题的一种方法, 利用选取位于 D 外部的附加场源, 称为象源（image sources）, 使得在边界 $\partial D = \Gamma$ 上满足边界条件.

映射法最常用于静电学. 例如, 假设要在半平面 $D = \{(x, y): y > 0, -\infty < x < +\infty\}$ 上求关于 **Poisson 方程**（Poisson equation）$\Delta u = -2\pi\rho(x, y)$ 的 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的解, 使其在边界 $\Gamma = \{(x, y): y = 0, -\infty < x < +\infty\}$ 上取给定的函数 $\psi(x)$ 的值, 这就是说, 要寻求一个在 D 内以 $\rho(x, y)$ 为电荷密度的位势使得在 Γ 上的位势值 $\psi(x)$ 是已确定的. 众所周知, 为了解这个问题, 只须知道 **Green 函数**（Green function）$G(x, y; x_0, y_0)$, 它是在点 $(x_0, y_0) \in D$ 的单位点电荷当边界 Γ 接地, 即 $G(x, 0; x_0, y_0) = 0$ 时的位势. 原问题的解 $u(x, y)$ 可用 $G(x, y; x_0, y_0)$ 表示成:

$$u(x, y) = \iint_D \rho(x_0, y_0) G(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \psi(x_0) \frac{\partial G(x, y; x_0, 0)}{\partial y_0} dx_0. \quad (1)$$

当不存在边界时, 点电荷的位势是 **Laplace 方程**（Laplace equation）的一个基本解 $\ln(1/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$. 在点 $(x_0, -y_0)$ 添加一个负单位电荷象源, 且作这两个电荷的位势之和, 就得到所要的 Green 函数:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}. \quad (2)$$

在带形域 $D = \{(x, y): 0 < y < b, -\infty < x < +\infty\}$ 的情况下, 点 $(x_0, y_0) \in D$ 的单位电荷关于直线 $y = 0$ 和 $y = b$ 反射后, 得到在点 $(x_0, -y_0)$, $(x_0, 2b - y_0)$, $(x_0, -2b + y_0)$, $(x_0, 2b + y_0)$, $\cdots$, 其电荷分别是 $-1, -1, +1, +1, \cdots$ 的一个无穷列. 这时 Green 函数可以表示成点电荷位势的一个无穷级数.

当区域 D 是一个圆盘时, $D = \{(\rho, \varphi): 0 \leqslant \rho < a, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, 在点 (ρ_0, φ_0) 的单位电荷的象是在点 $(a^2/\rho_0, \varphi_0)$ 的负单位电荷, 该点是点 (ρ_0, φ_0) 相对于圆周 $\rho = a$ **反演**（inversion）的象.

边界由直线和圆组成的其他形状的区域, 也可能应用上述方法, 其解用构造相应的电荷的象序列得到.

对于半空间

$$D = \{(x, y, z): z > 0, -\infty < x, y < +\infty\}$$

里 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z)$ 的 Dirichlet 问题的解, 经点 $(x_0, y_0, z_0) \in D$ 的单位电荷关于平面 $z = 0$ 的反射后, 代替式 (2), 得到公式

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.$$

在球体 $D = \{(r, \theta, \varphi): 0 \leqslant r < a, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ 的情况下, 必须应用 **Kelvin 变换**（Kelvin transformation）, 且在点 $(r_0, \theta_0, \varphi_0) \in D$ 的单位电荷的象是在点 $(a^2/r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 的电荷量为 $-a/r_0$ 的电荷, 该点是 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 关于球面 $r = a$ 反演的象. 由此得到, 如果知道某一个区域 D 里 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\rho(r, \theta, \varphi)$ 的一个解, 那么函数 $v(r, \theta, \varphi) = (a/r)u(a^2/r, \theta, \varphi)$ 是区域 D' 里 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\rho'(r, \theta, \varphi)$ 的解, 其中密度 $\rho'(r, \theta, \varphi) = (a/r)^5 \rho(a^2/r, \theta, \varphi)$, D' 是 D 关于球面 $r = a$ 反演的象. 这种形式的映射方法有时也称为反演法（method of inversion）, 应用反演法时必须注意到边界条件也要变换.

对于边界是由若干平面或球面组成的更复杂的空间区域，也可能应用电荷的象的无穷序列．若有一个或几个源变成无穷，可结合求极限，这种映射法使得有可能解复杂的问题，例如确定这样一种静电场的位势，即把导电球放置在一个在无穷远处是均匀的场中．

在 **Helmholtz 方程**（Helmholtz equation）$\Delta u + k^2 u = 0$ 的情况下，映射法只适用于由直线所界定的平面区域或者由平面界定的空间区域，且要利用其相应的基本解 $H_0^{(1)}(k\rho)$, $H_0^{(2)}(k\rho)$ 或者 e^{ikr}/r, e^{-ikr}/r.

参考文献

[1] Гринберг, Г. А., Избр. вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л., 1948.

[2] Jackson, J. D., Classical electrodynamics, Wiley, 1962.

[3] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. 1, М.-Л., 1963 (英译本: Kochin, N. E., Kibel', I. A. and Roze, N. V., Theoretical hydrodynamics, Interscience 1964).

[4] Smythe, W. R., Static and dynamic electricity, McGraw-Hill, 1950.

Е. Д. Соломенцев 撰　高琪仁、吴炯圻 译

映射的主网［mapping, principal net of a; отображения главная сеть］ 映射的区域上的

在 n 维流形（manifold）M（特别，M 可以是 Euclid 空间）的区域 G 内的一个**正交网**（orthogonal net），它被**微分同胚**（diffeomorphism）$f: G \to G'$ 映到 G' 的一个正交网上，这里 G' 是同一流形或另一 Riemann 流形 M' 中的区域．在点 $x \in G$，映射主网的曲线的切方向是切空间 T_x 到切空间 $T'_{f(x)}$ 上的诱导映射 $f_*: T_x \to T'_{f(x)}$ 的形变椭球的主方向．一般说，映射的主网不是完整的．若映射 f 是共形的，则区域 G 内的任何正交网都可作为主网．

参考文献

[1] Рыжков, В. В., в сб., Итоги науки, Серия Математика, 3 геометрия, 1963, М., 1965.

В. Т. Базылев 撰　沈一兵 译

映射类［mappings, classes of; отображений классы］

最重要的映射类是一般拓扑学及其应用中考虑的**连续映射**（continuous mapping）类．与此有关的有**开映射**（open mapping）（任何开集的象是开集），**闭映射**（closed mapping）（任何闭集的象是闭集），**紧映射**（compact mapping）（任何点的逆象是紧集），**完满映射**（perfect mapping）（闭的紧映射）．**商映射**（quotient mapping）由下述要求定义：其象空间中一个集合是开集的充要条件是，它的完全逆象是开集．另一些重要的映射是紧开映射、伪开映射（pseudo-open mapping）、压缩映射（contraction mapping）和凝聚映射（condensing mapping）．后者定义为一一连续满映射．因此，在一般拓扑学的映射分类问题中，或者对开集或闭集（过渡到象空间时）的性态加以限制，或者对集合逆象的性质加以限制．第二种处理导致下列映射类：单调映射（monotone mapping）（任何点的逆象是连通集）；有限对一映射（finite-to-one mapping），其特性是任何一点的逆象都是有限集；k 映射（k-mapping），其特点是任何紧集的逆象是紧集，把第一种和第二种限制结合起来，可以选出一般拓扑学中某些基本的连续映射类．按照这些映射类的定义，它们可以自然地排成某种等级，这一事实可以成为拓扑空间系统分类的基础（[1]）．这种分类是由于下述两种问题的解决而产生的．让 $\mathscr{A}$ 是给定的便于区分的空间类，$\mathscr{B}$ 是原来等级中的映射类．问题就是要求借助于内蕴拓扑不变量来刻画 $\mathscr{A}$ 中的空间在 $\mathscr{B}$ 中所有可能的映射下的象．第二种问题是类似的，要求刻画 $\mathscr{A}$ 中的空间在 $\mathscr{B}$ 中的映射下的逆象．

在解决上述两种问题的过程中得到一些很不明显但具有一般性质的定理．例如，满足**第一可数公理**（first axiom of countability）的空间，并且只有这些空间，才是**度量空间**（metric space）在连续开映射下的象．具有一致基（见**一致拓扑**（uniform topology））的空间，并且只有这些空间，才是度量空间在紧开映射下的象．Fréchet-Урысон 空间是度量空间的伪开象，而**序列空间**（sequential space）则是度量空间的商空间．此外，度量空间在完满映射下的逆象是仿紧羽状空间（见**羽状空间**（feathered space）；**仿紧空间**（paracompact space）），而**完全度量空间**（complete metric space）的逆象则是 Čech 完全的仿紧空间．具有可数基的空间的连续象是具有可数网的空间．在这一领域的系统研究中，已得到了空间和映射的一个统一的相互分类法则．

商映射类是一类特别重要的连续映射．商映射最重要的特性是可以用来作为构造新拓扑空间的工具．例如，如果映射 f 把拓扑空间 X 映成集合 Y（比如考虑自然映射 π，把空间 X 映成该空间的某个划分的所有元素的集合），则总可以在集合 Y 上引进自然的拓扑结构，只须要求映射 f 是商映射：集合 $V \subset Y$ 是开集，当且仅当其完全逆象 $f^{-1}(V)$ 是空间 X 中的开集．除了已经提到的那些映射外，例如，在**绝对形**（absolute）理论中，最重要的是**不可约映射**（irreducible mapping）．亦见**双因子映射**（bifactorial mapping）；**多值映射**（multi-valued mapping）．

参考文献

[1] Архангельский, А. В., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 4, 133 – 184. А. В. Архангельский 撰

【补注】 与单调映射（点的逆象是连通集）有关的是**零维映射**（zero-dimensional mapping）（点的逆象是零维

空间）以及松散映射（light mapping）（点的逆象是遗传不连通的）. 商映射（商空间）有时称为因子映射（factorial mapping）（因子空间（factor space））.

连续映射 $f: X \to Y$ 称为伪开映射，如果对每个 $y \in Y$ 以及集合 $f^{-1}(y)$ 在 X 中的每个开邻域 U，点 y 均属于集合 $f(U) \subset Y$ 的内部.

参考文献

[A1] Michael, E. A., A quintuple quotient quest, *Gen. Topol. Appl.*, **2** (1972), 91 – 138.

[A2] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984（译自俄文）.

胡师度、白苏华 译

Marcinkiewicz 空间 [Marcinkiewicz space; Марцинкевича пространство]

所有在半直线 $(0, \infty)$ 可测且有有限范数

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0<h<\infty} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(s)ds, \qquad (1)$$

的函数 x（的类）所组成的 **Banach 空间**（Banach space）M_ψ，这里 $x^*(s)$ 是 $x(t)$ 的重排，即是与 $|x(t)|$ 等度可测的非增左连续函数，且 $\psi(t)$ 是一个 $(0, \infty)$ 上正非减函数而 $\psi(t)/t$ 不增（特别地，$\psi(t)$ 是一非减凹函数. 空间 M_ψ 是由 J. Marcinkiewicz（[1]）引入的.

如果 $\psi(t)$ 有正数作为上界和下界，则 M_ψ 同构于 L_1. 在所有其他的情况，它不是可分的. 空间 M_ψ 是 L_1 与 L_∞ 之间的插值空间（见**算子的插值**（interpolation of operators）），带有插值常数 1.

在 M_ψ 上定义泛函

$$F(x) = \sup_{0<t<\infty} \frac{t}{\psi(t)} x^*(t);$$

其范数不超过 $\|x\|_{M_\psi}$. 泛函 $F(x)$ 不具有范数的性质；它等价于范数 $\|x\|_{M_\psi}$，当且仅当对 $s > 1$，

$$\inf_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} > 1.$$

（特别是对 $\psi(t) = t^\alpha$，如 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.）

空间 M_ψ 最初在 Marcinkiewicz 插值定理中出现（与泛函 $F(x)$ 一起），且与弱型的**算子的插值**相联系. 它有以下的极值性质：在其基本函数与 $h/\psi(h)$ 重合，即 $\|\chi_{(0,h)}\|_E = h/\psi(h)$ 的对称空间中，它是最广的，这里 $x_{(0,h)}$ 是区间 $(0, h)$ 的特征函数. 如果

$$\psi(+0) = 0, \ \psi(\infty) = \infty, \qquad (2)$$

则 M_ψ 是同构（等距如 ψ 是凹的）于带有范数

$$\|y\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty y^*(s)d\widetilde{\psi}(s)$$

的 Lorentz 空间的对偶空间，这里 $\widetilde{\psi}(s)$ 是 $\psi(s)$ 的最小凹优函数. 在条件（2）下，有一 M_ψ 中的特殊的子空间 M_ψ^0，由 M_ψ 中满足条件

$$\lim_{h\to 0,\infty} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(t)dt = 0$$

的所有函数组成. 如果还有 $\lim_{t\to 0}\psi(t)/t = \infty$，则 M_ψ^0 是所有紧支有界函数在 M_ψ 中的闭包. 在这种情况下，M_ψ^0 的对偶同构于 Lorentz 空间，且因而 M_ψ 同构于 M_ψ^0 的第二对偶空间.

如果 $\mathfrak{M}$ 是具有定义在其可测集的 σ 代数上的 σ 有限测度 μ 的空间，则对每一可测函数 $x(m)$，它的重排 $x^*(s)$，$0 < s < \infty$，是有定义的，这使得有可能引入带有范数（1）的 Marcinkiewicz 空间 $M_\psi(\mathfrak{M}, \mu)$.

参考文献

[1] Marcinkiewicz, J., Sur l'interpolation d'opérations, *C. R. Acad. Paris*, **208** (1939), 1272 – 1273.

[2] Крейн, С. Г., Петунин, Ю. И., Семенов, Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978（英译本：Krein, S. G., Petunin, Yu. I. and Semenov, E. M., Interpolation of linear operators, Amer. Math. Soc., 1982）.

[3] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975.

С. Г. Крейн 撰

【补注】 设 f 是 $[0, 1]$ 上连续函数. f 的左连续递减重排（rearrangement）f^* 由以下性质定义：

i) f^* 是递减的（即非增的）；

ii) f^* 是左连续的；

iii) $\{x: f(x) > s\}$ 和 $\{x: f^*(x) > s\}$ 对所有 s 有同样的测度.

人们可以选择地考虑左连续或右连续减（或增）重排. 右连续减重排可描述如后. 设 $m(y)$ 是集合 $\{u: f(u) > y\}$ 的测度. 则

$$f^*(x) = \sup\{y: m(y) > x\}.$$

这概念是把实数的有限序列按递减（递增）次序重排的连续类似. 后面这样结构在**优化排序**（majorization ordering）方面是重要的，且事实上有各种不同的与那种排序有关联的结果的连续类似，如 Murihead 不等式（Murihead inequalities）以及联系着优化排序和二重随机矩阵（double-stochastic matrices）的结果，见 [A1] – [A3].

上面藉助于函数 ψ 定义的 Lorentz 空间（Lorentz space）是满足条件

$$\|f\|_\psi = \int_0^\infty f^*(t)d\widetilde{\psi}(t) < \infty$$

的所有可测函数 f 的空间，这里 f^* 是 $|f|$ 的减重排且 $\widetilde{\psi}$ 是 ψ 的最小凹优函数. 更一般地可考虑在 L_p 范数基础上的 Lorentz 空间（取代以上的 L_1）.

类似的 Lorentz 序列空间 (Lorentz sequence space) 定义如下. 对每一正数的非增序列 $w=(w_n)_{n=1}^{\infty}$ 和每一 $p\geqslant 1$, 令 $d(w,p)$ 是所有满足以下条件的标量序列 $x=(a_j)$ 组成的空间

$$\|x\|_{(w,p)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|a_{\pi(n)}|^p w_n\right]^{1/p}<\infty,$$

这里 π 是 $\{1,2,\cdots\}$ 的一个置换使得 $(|a_{\pi(n)}|)_{n=1}^{\infty}$ 是一非增序列. 如果 $\inf w_n>0$, 则 $d(w,p)$ 同构于 l_p, 而且如果 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n<\infty$, 则 $d(w,p)\simeq l_{\infty}$. 这两种'平凡'的情况有时是排除的. 关于 Lorentz 序列空间的大量材料见 [A4].

参考文献

[A1] Marshall, A. W. and Olkin, J., Inequalities: theory of majorization and its applications, Acad. Press, 1979.

[A2] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S. and Vasić, P. M., Means and their inequalities, Reidel, 1988.

[A3] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1952 (中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚, 不等式, 科学出版社, 1965).

[A4] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, I: Sequence spaces, Springer, 1977.

葛显良 译　鲁世杰 校

边缘分布 [marginal distribution; маргинальное распределение или частное распределение]

作为具有给定分布的某随机向量(见**多维分布** (multidimensional distribution))之分量或分量子集的, 一个随机变量或随机变量组的分布. 因此, 边缘分布是随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布在任一轴 x_i 或在变量 $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}$ 所决定的子空间上的投影, 并且完全决定于此向量的分布. 例如, 如果 $F(x_1,x_2)$ 是随机向量 $X=(X_1,X_2)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中的分布函数, 则 X_1 的分布函数为 $F_1(x_1)=F(x_1,+\infty)$; 如果此二维分布绝对连续, 其密度为 $p(x_1,x_2)$, 则 X_1 的边缘分布密度为

$$p_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x_1,x_2)dx_2.$$

对于任意 n, 类似可以计算向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的任何一个分量或分量的子集的边缘分布. 如果 X 的分布是正态的, 则一切边缘分布也是正态的. 假如随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 则由向量 X 之分量 $X_1,\cdots,X_n$ 的边缘分布唯一决定它的分布:

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i),$$

而

$$p(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p_i(x_i).$$

对于比数轴更一般的乘积空间上的概率分布, 可以类似地计算边缘分布.

参考文献

[1] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 科学出版社, 1966).

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

А. В. Прохоров 撰　周概容 译

Марков 链 [Markov chain; Маркова цепь]

具有有限或可数状态空间的 **Марков 过程** (Markov process). Марков 链的理论是由 А. А. Марков 在 1907 年开始研究相依试验序列及与其相关的随机变量和时创立的 ([1]).

设状态空间是自然数集 $\mathbf{N}$ 或其有限子集. 设 $\xi(t)$ 是 Марков 链在时刻 t 的状态. Марков 链的基本性质是 **Марков 性质** (Markov property), 对离散时间 Марков 链 (即当 t 只取非负整数值时) 其定义如下: 对任意 $i,j\in\mathbf{N}$, 任意非负整数 $t_1<\cdots<t_k<t$ 和任意自然数 $i_1,\cdots,i_k$, 等式

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=j\,|\,\xi(t_1)=i_1,\cdots,\xi(t_k)=i_k\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi(t)=j\,|\,\xi(t_k)=i_k\}\qquad(1)$$

成立.

Марков 性质 (1) 可以阐述如下: 若把时刻 t 及形如 $\{\xi(t)=j\}$ 的事件称为过程的"现在"; 把用值 $\xi(u)(u<t)$ 决定的事件称为过程的"过去"; 而把由 $\xi(u)(u>t)$ 决定的事件称为过程的"将来", 则 (1) 等价于: 对任意的 $t\in\mathbf{N}$ 和固定的"现在" $\xi(t)=j$, 任意"过去"的事件 A 和"将来"的事件 B 对给定的"现在"是条件独立的, 即

$$\mathsf{P}\{A\cap B\,|\,\xi(t)=j\}=$$
$$=\mathsf{P}\{A\,|\,\xi(t)=j\}\mathsf{P}\{B\,|\,\xi(t)=j\}.$$

在 Марков 链 $\xi(t)$ 的概率表述中, **转移概率** (transition probabilities)

$$\mathsf{P}\{\xi(t+1)=j\,|\,\xi(t)=i\}\qquad(2)$$

起着重要的作用. 当 (2) 不依赖于 t 时, 称该 Марков 链为 (时间) 齐次的 (homogeneous), 否则称为非齐次的 (non-homogeneous). 下面只考虑齐次 Марков 链. 设

$$p_{ij}=\mathsf{P}\{\xi(t+1)=j\,|\,\xi(t)=i\}.$$

称具有表列值 p_{ij} 的矩阵 $\mathsf{P}=\|p_{ij}\|$ 为转移概率矩阵 (matrix of transition probabilities). 任意一个轨道 $\xi(k)=i_k\,(k=0,\cdots,t)$ 的概率由转移概率 p_{ij} 和初始

分布 $\mathrm{P}\{\xi(0)=i\}$ 决定如下:

$$\mathrm{P}\{\xi(k)=i_k, k=0,\cdots,t\}= =\mathrm{P}\{\xi(0)=i_0\}\prod_{k=1}^{t}p_{i_{k-1}i_k}.$$

与转移概率 p_{ij} 一起，在 Марков 链中也讨论 t 步转移概率 $p_{ij}(t)$:

$$p_{ij}(t)=\mathrm{P}\{\xi(t_0+t)=j\mid\xi(t_0)=i\}.$$

这些转移概率满足 **Колмогоров-Chapman 方程**(Kolmogorov-Chapman equation)

$$p_{ij}(t_1+t_2)=\sum_k p_{ik}(t_1)p_{kj}(t_2),\ \forall t_1,t_2\geqslant 0.$$

用转移概率可以把状态分类. 如果存在 $t_1,t_2>0$, 使得 $p_{ij}(t_1)>0$ 和 $P_{ji}(t_2)>0$，则两个状态 i 和 j 称为互通的(communicating)；如果存在状态 l，使得对某个 $t_1\geqslant 1, p_{kl}(t_1)>0$，而对一切 $t\in\mathbf{N}, p_{lk}(t)\equiv 0$，则称状态 k 为非本质的(inessential)，称所有其余的状态为本质的(essential). 于是把一个 Марков 链的整个状态空间分解成非本质的和本质的状态. 所有本质的状态集又分成若干个不交的互通状态类，使得同一类中的两个状态彼此互通，而对不同类中的任意两个状态 i,j 有 $p_{ij}(t)\equiv 0$, $p_{ji}(t)\equiv 0$. 所有状态都属于同一个互通状态类的 Марков 链称为不可分解的(non-decomposable)(见**不可分解 Марков 链**(Markov chain, non-decomposable))，否则称为可分解的(decomposable)(见**可分解 Марков 链**(Markov chain, decomposable)). 如果状态空间是有限的，则它的这种分类在很大程度上决定了这个 Марков 链的渐近性质. 例如，对有限不可分解 Марков 链，极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}p_{ij}(t)=p_j \tag{3}$$

总存在，其中 $\sum_j p_j=1$. 此外，如果该 Марков 链还是非周期的(aperiodic)，即存在 t_0，对所有的 $t\geqslant t_0$ 及所有的状态 i 和 j, $p_{ij}(t)>0$ (见**周期 Марков 链**(Markov chain, periodic))，则有更强的结果:

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j \tag{4}$$

(见**遍历 Марков 链**(Markov chain, ergodic)).

如果一个 Марков 链的状态空间是可数的，那么它的渐近性质依赖于互通状态类的更精细的性质. 对于一个给定的类的所有状态，级数

$$\sum_t p_{ii}(t) \tag{5}$$

同时发散或收敛. 如果对一个状态类中的任一状态 i 级数(5)发散，则称这个状态类是常返的(recurrent)；如果(5)收敛，则称为非常返的. 在一个常返类中，Марков 链以概率 1 返回到它的任一状态，在非常返类中返回概率小于 1. 如果在一个常返类中平均返回时间有限，则称该类是正(positive)状态类，否则称为零(zero)状态类(见 **Марков 链的正状态类**(Markov chain, class of positive states of a), **Марков 链的零状态类**(Markov chain, class of zero states of a)). 如果 i 和 j 属于同一个正状态类，则极限(3)存在，且在非周期情形下极限(4)也存在. 如果 j 属于零状态类或者是非本质的，则当 $t\to\infty$ 时，$p_{ij}(t)\to 0$.

设 $f(\cdot)$ 是定义在 Марков 链 $\xi(t)$ 的状态空间上的实值函数. 如果 Марков 链是不可约的且它的状态空间形成一个正类，则对于和

$$\eta_t=\sum_{u=0}^{t}f(\xi(u)),$$

中心极限定理(central limit theorem)成立: 对于某一 A 和 $B>0$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\left\{\frac{\eta_t-At}{\sqrt{Bt}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du. \tag{6}$$

为使(6)成立，只需补充要求 $\mathrm{Var}\,\eta_t\sim Bt(t\to\infty)$ 且 $B>0$.

如果 t 在 $[0,\infty)$ 上取任意值，则用类似方式由 Марков 性质(1)所定义的链称为连续时间 Марков 链. 对连续时间 Марков 链，通常还要求有限右导数 $dp_{ij}(t)/dt|_{t=0}=q_{ij}$ 存在，称为转移概率密度(transition probability density). 对有限状态连续时间 Марков 链，由 Колмогоров-Chapman 方程可以得到 Колмогоров 微分方程(Kolmogorov differential equations)

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k p_{ik}(t)q_{kj} \tag{7}$$

和

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k q_{ik}p_{kj}(t), \tag{8}$$

带有初始条件 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号. 在某些附加假定之下，(7)和(8)对可数 Марков 链也成立.

如果连续时间 Марков 链具有**平稳分布**(stationary distribution) $\mathrm{P}\{\xi(t)=i\}=p_i$ (即 $\xi(t)$ 的分布不依赖于时间 t)，则 $\{p_i\}$ 满足线性方程组

$$\left.\begin{aligned}\sum p_i&=1,\\ \sum_i p_i q_{ij}&=0,\ j=1,2,\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Марков 链已经被广泛地用来解决各种应用问题. 例如，在**排队论**(queueing theory)中，为了计算一个损失制 $M|M|n$ 系统(即在一系统中包含 n 条线路，顾客的到来是一 Poisson 流，服务时间服从指数分布)中忙线数的分布，就使用具有状态 $0,\cdots,n$ 和下述转移概率密度的有限 Марков 链:

$$q_{i,i+1}=\lambda, 0\leqslant i<n; q_{i,i-1}=i\mu, 1\leqslant i\leqslant n;$$
$$q_{ii}=-(\lambda+i\mu), 0\leqslant i\leqslant n; q_{nn}=-n\mu;$$
$$q_{ij}=0, \quad |i-j|>1,$$

(其中 λ 是顾客到来的 Poisson 流的强度，μ^{-1} 是平均服务时间）. 在这种情形下，可以用 (9) 来确定忙线数的平稳分布：

$$p_i=\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^i\frac{1}{i!}}{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^k\frac{1}{k!}}, \quad i=0,\cdots,n,$$
$$p_i=0, i>n,$$

称之为 **Erlang 分布** (Erlang distribution).

亦见**广义 Марков 链** (Markov chain, generalized), **常返 Марков 链** (Markov chain, recurrent), **吸收状态** (absorbing state), **随机矩阵** (stochastic matrix), **带禁止的转移** (transition with prohibitions).

参考文献

[1] Марков, А. А., 《Изв. Петерб. АН》(6), 1 (1907), 3, 61 - 80.
[2] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.
[3] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1967.
[4] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957 - 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷上、下册, 科学出版社, 1964, 1979).

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Freedman, D., Markov chains, Holden-Day, 1975.
[A2] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.
[A3] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite Markov chains, v. Nostrand, 1960.
[A4] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W., Denumerable Markov chains, Springer, 1976.
[A5] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.
[A6] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949 (英译本: Romanovsky, V. I., Discrete Markov chains, Wolters-Noordhoff, 1970).
[A7] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981.

刘秀芳 译

Марков 链的正状态类 [Markov chain, class of positive states of a; Марков цепи положительный класс состояний]

具有状态空间 S 的齐次 **Марков 链** (Markov chain) $\xi(t)$ 的状态集 K，使得 $\xi(t)$ 的转移概率

$$p_{ij}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t)=j|\xi(0)=i\}$$

满足

$$\sup_t p_{ij}(t)>0, \ \forall i,j\in K,$$

$$p_{il}(t)=0, \forall i\in K, l\in S\setminus K, t>0, 且$$
$$\mathsf{E}\tau_{ii}<\infty, \ \forall i\in K,$$

其中 τ_{ii} 是状态 i 的返回时间：对离散时间 Марков 链，

$$\tau_{ii}=\min\{t>0:\xi(t)=i|\xi(0)=i\};$$

对连续时间 Марков 链，

$$\tau_{ii}=\inf\{t>0:\xi(t)=i|\xi(0)=i,\xi(0+)\neq i\}.$$

当 $\mathsf{E}\tau_{ii}=\infty$ 时，称 K 为零状态类.

在同一个正类 K 中的状态有许多共同的性质. 例如，在离散时间情形下，对任意 $i,j\in K$，极限关系

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}p_{ij}(t)=p_j^*>0$$

成立；如果

$$d_i=\max\{d:\mathsf{P}\{\tau_{ii}被 d 整除\}=1\}$$

是状态 i 的周期，则对于任意 $i,j\in K, d_i=d_j$，并且称 d 为类 K 的周期；对于任意 $i\in K$，极限关系

$$\lim_{t\to\infty}p_{ii}(td)=dp_i^*>0$$

成立. 全体状态组成周期为 1 的单一正类的离散时间 Марков 链可以作为**遍历 Марков 链** (Markov chain, ergodic) 的一个例子.

参考文献

[1] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1967.
[2] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

А. М. Зубков 撰

【补注】亦见 **Марков 链的零状态类** (Markov chain, class of zero states of a) 的补充参考文献. 刘秀芳 译

Марков 链的零状态类 [Markov chain, class of zero states of a; Маркова цепи нулевой класс состояний]

具有状态空间 S 的齐次 **Марков 链** (Markov chain) $\xi(t)$ 的状态集 K，使得对任意 $i, j\in K$，

$$\mathsf{P}\{\exists t>0:\xi(t)=j|\xi(0)=i\}=1;$$

对任意 $i\in K, l\in S\setminus K, t>0$，

$$p_{il}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t)=l|\xi(0)=i\}=0,$$

并且对任意 $i\in K$，

$$\mathsf{E}\tau_{ii}=\infty, \qquad (*)$$

其中 τ_{ii} 是状态 i 的返回时间：对离散时间 Марков

链,

$$\tau_{ii} = \min\{t > 0 : \xi(t) = i \mid \xi(0) = i\};$$

对连续时间 Марков 链,

$$\tau_{ii} = \inf\{t > 0 : \xi(t) = i \mid \xi(0) = i, \xi(0+) \neq i\}.$$

如同正状态类(在正类的定义中 (*) 用 $\mathrm{E}\tau_{ii} < \infty$ 代替)的情形一样，属于同一个零类的状态有许多共同的性质. 例如，对零类 K 中的任意状态 i, j,

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = 0 .$$

全体状态组成单一零类的 Марков 链的例子，是整数集上的对称随机游动:

$$\xi(0) = 0, \xi(t) = \xi(t-1) + \eta(t), t = 1, 2, \cdots,$$

其中 $\eta(1), \eta(2), \cdots$, 是独立随机变量,

$$\mathrm{P}\{\eta(i) = 1\} = \mathrm{P}\{\eta(i) = -1\} = 1/2, i = 1, 2, \cdots.$$

参考文献

[1] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1967. А. М. Зубков 撰

【补注】亦见 **Марков 链的正状态类** (Markov chain, class of positive states of a).

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957 - 1971 (中译本: W. 费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964, 1979).
[A2] Freedman, D., Markov chains, Holden-Day, 1975.
[A3] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.
[A4] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite Markov chains, v. Nostrand, 1960.
[A5] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W., Denumerable Markov chains, Springer, 1976.
[A6] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.
[A7] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949 (英译本: Romanovsky, V. I., Discrete Markov chains, Wolters-Noordhoff, 1970).
[A8] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981. 刘秀芳 译

可分解 Марков 链 [Markov chain, decomposable; Маркова цепь разложимая]

转移概率 (transition probabilities) $p_{ij}(t)$ 具有以下性质的 **Марков 链**(Markov chain): 存在状态 $i \neq j$, 使得对一切 $t \geqslant 0$, 有 $p_{ij}(t) = 0$. 对离散时间 Марков 链，可分解性等价于它的转移概率矩阵 $\mathrm{P} = \| p_{ij} \|$ 的可分解性; 而对于连续时间 Марков 链，可分解性则等价于它的转移概率密度矩阵 $Q = \| q_{ij} \| (q_{ij} = d p_{ij}(t) / dt|_{t=0})$ 的可分解性. 可分解 Марков 链的状态空间由非本质状态或多于一个的互通状态类组成 (见 **Марков 链** (Markov chain)). В. А. Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957 - 1971 (中译本: W. 费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964, 1979).
[A2] Freedman, D., Markov chains, Holden-Day, 1975.
[A3] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.
[A4] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite Markov chains, v. Nostrand, 1960.
[A5] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W., Denumerable Markov chains, Springer, 1976.
[A6] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.
[A7] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949 (英译本: Romanovsky, V. I., Discrete Markov chains, Wolters-Noordhoff, 1970).
[A8] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981. 刘秀芳 译

遍历 Марков 链 [Markov chain, ergodic; Маркова цепь эргодическая]

具有下述性质的齐次 **Марков 链** (Markov chain) $\xi(t)$: 存在(与 i 无关)的量

$$p_j = \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t), \sum_j p_j = 1, \tag{1}$$

其中

$$p_{ij}(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$$

是**转移概率** (transition probabilities). 链 $\xi(t)$ 的状态空间上的分布 $\{p_j\}$ 称为平稳分布 (stationary distribution): 如果 $\mathrm{P}\{\xi(0) = j\} = p_j$, $\forall j$, 则对一切 j 和 $t \geqslant 0$ 有 $\mathrm{P}\{\xi(t) = j\} = p_j$. Марков 链的一个基本性质

$$\mathrm{P}\{\xi(t) = j\} = \sum_i \mathrm{P}\{\xi(0) = i\} p_{ij}(t),$$

使得我们可以不通过计算 (1) 中的极限即可求得 $\{p_j\}$.

设

$$\tau_{jj} = \min\{t \geqslant 1 : \xi(t) = j \mid \xi(0) = j\}$$

(对离散时间 Марков 链) 是首次返回状态 j 的时刻，则

$$\mathrm{E}\tau_{jj} = p_j^{-1} .$$

对连续时间 Марков 链，类似的(更复杂的)关系式成立.

遍历 Марков 链的轨道满足遍历定理：如果 $f(\cdot)$ 是链 $\xi(t)$ 的状态空间上的函数，则在离散时间情形下，

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n}f(\xi(t))=\sum_j p_j f(j)\right\}=1,$$

而在连续时间情形下，左端的求和用积分代替. 如果存在 $\rho<1$ 和 $C_{ij}<\infty$，使得对一切 i,j,t，有

$$|p_{ij}(t)-p_j|\leqslant C_{ij}\rho^t, \tag{2}$$

则称此 Марков 链是几何遍历的 (geometrically ergodic). 遍历 Марков 链具有几何遍历性的一个充分条件是 Doeblin 条件 (Doeblin condition) (例如，见 [1]), 对离散时间 (有限或可数) Марков 链，这个条件可以叙述为：存在 $n<\infty$ 和状态 j，使得 $\inf_i p_{ij}(n)=\delta>0$. 如果 Doeblin 条件满足，则对 (2) 中的常数，关系式 $\sup_{ij}C_{ij}=C<\infty$ 成立.

对于可数离散时间 Марков 链的几何遍历性，一个必要和充分条件 (见 [3]) 如下：存在数 $f(j)$, $q<1$ 和有限状态集 B，使得

$$\mathsf{E}\{f(\xi(1))\,|\,\xi(0)=i\}\leqslant qf(i),\ i\notin B,$$
$$\max_{i\in B}\mathsf{E}\{f(\xi(1))\,|\,\xi(0)=i\}<\infty.$$

参考文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes. Wiley, 1953.

[2] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1967.

[3] Попов, Н. Н., 《Докл. АН СССР》, **234** (1977), 2, 316 – 319.

А. М. Зубков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Freedman, D., Markov chains, Hoiden-Day, 1975.

[A2] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.

[A3] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite Markov chains, v. Nostrand, 1960.

[A4] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W., Denumerable Markov chains, Springer, 1976.

[A5] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.

[A6] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949 (英译本: Romanovsky, V. I., Discrete Markov chains, Wolters-Noordhoff, 1970).

[A7] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981.

刘秀芳 译

广义 Марков 链 [Markov chain, generalized; Маркова цепь сложная]

具有以下性质的随机变量序列 ξ_n:

1) 每个 ξ_n 的值的集合是有限或可数集；

2) 对任意 n 和任意 $i_0,\cdots,i_n$,

$$\mathsf{P}\{\xi_n=i_n\,|\,\xi_0=i_0,\cdots,\xi_{n-s}=i_{n-s},\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1}\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi_n=i_n\,|\,\xi_{n-s}=i_{n-s},\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1}\}. \quad (*)$$

满足 (*) 的广义 Марков 链称为 s 广义的 (s-generalized). 如果 $s=1$, (*) 就是通常的 **Марков 性质** (Markov property). s 广义 Марков 链可以归结为通常的 Марков 链. 考虑随机变量序列 η_n，它的值与向量

$$(\xi_{n-s+1},\xi_{n-s+2},\cdots,\xi_n)$$

的值一一对应，则序列 η_n 形成一个通常的 **Марков 链** (Markov chain).

参考文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

В. П. Чистяков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Freedman, D., Markov chains, Holden-Day, 1975.

[A2] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite Markov chains, v. Nostrand, 1960.

[A3] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.

[A4] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949 (英译本: Romanovsky, V. I., Discrete Markov chains, Wolters-Noordhoff, 1970).

[A5] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981.

[A6] Blanc-Lapierre, A. and Fortet, R., Theory of random functions, 1 – 2, Gondon & Breach, 1965 – 1968 (译自法文).

【译注】广义 Марков 链亦称多重 Марков 链 (multiple Markov chain).

参考文献

[B1] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

刘秀芳 译

不可分解 Марков 链 [Markov chain, non-decomposable; Маркова цепь неразложимая]

转移概率 $p_{ij}(t)$ 具有以下性质的 **Марков 链** (Markov chain)：对任意状态 i 和 j，存在时刻 t_{ij}，使得 $p_{ij}(t_{ij})>0$. 离散时间 Марков 链的不可分解性等价于它的转移概率矩阵 $\mathsf{P}=\|p_{ij}\|$ 的不可分解性；而连续时间 Марков 链的不可分解性则等价于它的密度矩阵 $Q=\|q_{ij}\|(q_{ij}=dp_{ij}(t)/dt|_{t=0})$ 的不可分解性. 不可分解 Марков 链的状态空间由单一互通状态类组成 (见 **Марков 链** (Markov chain)).

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】亦见 **Марков 链** (Markov chain) 和 **可分解 Марков 链** (Markov chain, decomposable) 的参考文献.

刘秀芳 译

周期 Марков 链 [Markov chain, periodic; Маркова цепь, периодическая]

不可分解齐次 **Марков 链** (Markov chain) $\xi(n)$ $(n=1,2,\cdots)$，它的每一个状态 i 具有大于 1 的周期，即

$$d_i = \text{g.c.d.}\{n: \mathrm{P}\{\xi(n)=i \mid \xi(0)=i\}>0\}>1.$$

在**不可分解 Марков 链** (Markov chain, non-decomposable) 中，所有状态具有同样的周期．如果 $d_i=1$，则称此 Марков 链为非周期的 (aperiodic).

В. П. Чистяков 撰

【补注】亦见 **Марков 链** (Markov chain) 和**不可分解 Марков 链** (Markov chain, non-decomposable) 的参考文献．

刘秀芳 译

常返 Марков 链 [Markov chain, recurrent; Маркова цепь возвратная]

一种 **Марков 链** (Markov chain)，它的始于任何状态 $\xi(0)=i$ 的随机轨道 $\xi(t)$，以概率 1 返回到这个状态．用**转移概率** (transition probabilities) $p_{ij}(t)$ 的术语，离散时间 Марков 链的常返性等价于对任意状态 i 级数

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_{ii}(t)$$

发散．在常返 Марков 链中，轨道 $\xi(t)(0\leqslant t<\infty)$，$\xi(0)=i$，以概率 1 无穷次返回到状态 i．在常返 Марков 链中没有非本质状态，且本质状态分解成若干个常返类．在直线或平面的整数格点上的对称随机游动是常返 Марков 链的例子．在直线上的对称游动中，质点由 x 出发，以概率各 $1/2$ 移动到 $x\pm1$；在平面上的对称游动中，质点由 (x,y) 以概率各 $1/4$ 移动到四个点 $(x\pm1,y),(x,y\pm1)$ 之一．在这些例子中，从任意点开始游动的质点，以概率 1 返回到该点．三维空间整数格点上的对称游动，当从 (x,y,z) 到邻点 $(x\pm1,y,z)$，$(x,y\pm1,z)$，$(x,y,z\pm1)$ 之一的转移概率各等于 $1/6$ 时，不是常返的．在这一情形下，质点返回到它的初始位置的概率大约是 0.35．

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1966 (中译本: W．费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964，1979).

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Freeman, D., Markov chains, Holden-Day, 1975.

[A2] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.

[A3] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite Markov chains, v. Nostrand, 1960.

[A4] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W., Denumerable Markov chains, Springer, 1976.

[A5] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1975.

[A6] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949 (英译本: Romanovsky, V. I., Discrete Markov chains, Wolters-Noordhoff, 1970).

[A7] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981.

[A8] Spitzer, V., Principles of random walk, v. Nostrand, 1964.

刘秀芳 译

Марков 准则 [Markov criterion; Маркова критерий]，最佳积分逼近的

在某些情形下能使人们有效地给出函数 f 的最佳积分逼近多项式及其误差的一个定理．它是由 A. A. Марков 于 1898 年建立的 (见 [1])．令 $\{\varphi_k(x)\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 为区间 $[a,b]$ 上的一组线性无关的连续函数，且设连续函数 ψ 在 (a,b) 内的点 $x_1<\cdots<x_r$ 处变号，并满足

$$\int_a^b \varphi_k(x)\operatorname{sgn}\psi(x)\,dx=0,\ k=1,2,\cdots,n.$$

如果多项式

$$P_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k^*\varphi_k(x)$$

使得 $f-P_n^*$ 在且仅在点 $x_1,\cdots,x_r$ 处变号，则 P_n^* 是 f 的最佳积分逼近多项式，且

$$\inf_{(c_k)}\int_a^b \Big|f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\Big|\,dx=$$

$$=\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|\,dx=\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sgn}\psi(x)\,dx\right|.$$

对 $[0,\pi]$ 上的函数组 $\{1,\cos x,\cdots,\cos nx\}$，$\psi$ 可取为 $\cos(n+1)x$；对函数组 $\{\sin x,\cdots,\sin nx\}(0\leqslant x\leqslant\pi)$，$\psi$ 可取为 $\sin(n+1)x$；对函数组 $\{1,x,\cdots,x^n\}(-1\leqslant x\leqslant1)$，可取 $\psi(x)=\sin((n+2)\arccos x)$．

参考文献

[1] Марков, А. А., Избр. труды, М.-Л., 1948.

[2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本: Н. И. 阿赫慈尔，逼近论讲义，科学出版社，1957).

[3] Даугавет, И. К., Введение в теорию приближения функций, Л., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theo-

ry, Chelsea, reprint, 1982.
[A2] Müller, M. W., Approximationstheorie, Akad. Verlagsgesellschaft. 1978.
[A3] Rice, J. R., The approximation of functions, I, Addison-Wesley, 1964.
王仁宏、檀结庆 译

Марков 形式 [Markov form; Маркова форма]

Марков 常数 $\mu(f)<3$ 的不定**二元二次型**(binary quadratic form) $f=f(x,y)$，见 **Марков 谱问题**(Markov spectrum problem).

А. В. Малышев 撰 张明尧 译 朱尧辰 校

Марков 函数系 [Markov function system; Маркова система функций]

定义在有限区间上的一组线性无关的实值连续函数 $\{\varphi_v(x)\}_{v=1}^n (n\leqslant\infty)$，且满足条件：对任何有限的 $k\leqslant n$，函数 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_k(x)$ 形成区间 (a,b) 上的 **Чебышев 系**(Chebyshev system).

Марков 函数系的例子有：

a) $1, x, x^2,\cdots$，在任何区间 $[a,b]$ 上；

b) $1, \cos x, \cos 2x,\cdots$，在 $[0,\pi]$ 上；

c) $\sin x, \sin 2x,\cdots$，在 $[0,\pi]$ 上.

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965. (中译本：Н. И. 阿赫葸尔，逼近论讲义，科学出版社，1957).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.
[A2] Karlin, S. J. and Studden, W. J., Tschebycheff systems: with applications in analysis and statistics, Wiley, 1966.
[A3] Shapiro, H. S., Topics in approximation theory, Springer, 1971.
[A4] Singer, I. M., Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, Springer, 1970.
王仁宏、檀结庆 译

Марков 不等式 [Markov inequality; Маркова неравенство]，关于代数多项式的导数的

借用多项式自身的一致范来估计导数的一致范的一个不等式. 设 $P_n(x)$ 为次数不超过 n 的一个代数多项式，并令

$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P_n(x)|.$$

那么对任何 $x\in[a,b]$ 有

$$|P_n'(x)|\leqslant\frac{2Mn^2}{b-a}. \qquad (*)$$

不等式 (*) 是 А. А. Марков 于 1889 年获得的 (见 [1]). Марков 不等式是精确的. 其实，若 $a=-1$, $b=1$, $P_n(x)=\cos\{n\arccos x\}$，则 $M=1$, $P_n'(1)=n^2$，因而不等式 (*) 成为等式.

对任意 r 阶 $(r\leqslant n)$ 导数，Марков 不等式蕴含

$$|P_n^{(r)}(x)|\leqslant\frac{M2^r}{(b-a)^r}n^2\cdots(n-r+1)^2,\ a\leqslant x\leqslant b,$$

它对 $r\geqslant 2$ 已不再是精确的了. 关于 $P_n^{(r)}(x)$ 的一个精确不等式是由 В. А. Марков ([2]) 得到的：

$$|P_n^{(r)}(x)|\leqslant\frac{M2^rn^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(r-1)^2)}{(b-a)^r(2r-1)!!},$$

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

参考文献

[1] Марков, А. А., Избр. Труды, М.-Л., 1948.
[2] Markoff, W. A. [V. A. Markov], Über die Funktionen, die in einem gegebenen Intervall moglichst wenig von Null abweichen, *Math. Ann.*, 77 (1916), 213-258.
[3] Натансон, И. П., Конструктивная теория функций, М.-Л., 1949 (英译本：Natanson, I. P., Constructive theory of functions, 1-2, F. Ungar, 1964-1965).
Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.
[A2] Duffin, R. J. and Schaeffer, A. C., A refinement of an inequality of the brothers Markoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **50** (1941), 517-528.
[A3] Schönhage, A., Approximationstheorie, de Gruyter, 1971.
郑维行 译 沈祖和 校

Марков 时 [Markov moment 或 Markov time; Марковский момент]

概率论中常用的概念，用来表示与"将来"无关的随机变量. 确切地说，设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是**一可测空间**(measurable space)，具有 $\mathscr{F}$ 的非减子 σ 域族 $(\mathscr{F}_t)$ $(t\in T)$ (在连续时间情形下 $T=[0,\infty]$，在离散时间情形下 $T=\{0,1,\cdots\}$). 在 $T\cup\{+\infty\}$ 中取值的**随机变量**(random variable) $\tau=\tau(\omega)$ 称为关于 $(\mathscr{F}_t)$ $(t\in T)$ 的 Марков 时 (Markov moment 或 Markov time)，如果对一切 $t\in T$，事件 $\{\tau(\omega)\leqslant t\}$ 属于 $\mathscr{F}_t$. 在离散时间情形下，这等价于对任何 $n\in\{0,1,\cdots\}$，事件 $\{\tau(\omega)=n\}$ 属于 $\mathscr{F}_n$.

例 1) 设 $X(t)(t\in T)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上给定的实值右连续随机过程，令 $\mathscr{F}_t=\sigma\{\omega: X(s), s\leqslant t\}$，则随机变量

$$\tau(\omega)=\inf\{t\geqslant 0: X(t)\in B\}$$

和

$$\sigma(\omega)=\inf\{t>0: X(t)\in B\},$$

即首中 Borel 集 B 的时间（前者从 0 时刻算起，后者是 0 时刻以后），都是 Марков 时（在 $\{\cdot\}=\phi$ 的情形下，约定 $\inf\phi=\infty$）.

2) 若 $w(t)$, $t\geqslant 0$ 是标准 **Wiener 过程**（Wiener process），则 Марков 时

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0:w(t)\geqslant a\},\ a>0,$$

有概率密度

$$P(t)=\frac{a}{t^{3/2}\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2t},$$

其中 $\mathrm{P}\{\tau<\infty\}=1$，但 $\mathrm{E}\tau=\infty$.

3) 随机变量

$$\gamma=\inf\{t>0:X(s)\in B,s\geqslant t\},$$

即在其后 X_t 永远保持在 B 中的起始时刻，就是一个非 Марков 时（依赖于"将来"的随机变量）的例子.

用 Марков 时的思想，可以阐述 **Марков 过程**（Markov process）的强 **Марков 性质**（Markov property）. Марков 时和停时（stopping times）(即有限 Марков 时) 在随机过程的一般理论和统计**序贯分析**（sequential analysis）中起着重要的作用.

参考文献

[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (中译本：И. И. 基赫曼，随机过程论，科学出版社，1986).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K., Markov processes and potential theory, Acad. Press, 1968.

[A2] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

[A3] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Chapt. 3, Springer, 1965, Sect. 5. 26).

[A4] 英译本: Wentzell, A. D., A course in the theory of stochastic processes, McGraw-Hill, 1981.

[A5] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.

【译注】

参考文献

[B1] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981.

刘秀芳 译

Марков 过程[**Markov process**; **Марковский процесс**]，无后效过程（process without after-effects）

一种**随机过程**（stochastic process），在给定时刻 t 过程的值已确定的条件下，它在 t 以后的演化不依赖于 t 以前的历史（简言之：已知"现在"，过程的"将来"和"过去"彼此独立）.

Марков 过程的定义性质通常称为 **Марков 性质**（Markov property），首先由 А. А. Марков（[1]）陈述. 可是，在 L. Bachelier 的著作（[2]）中，已经可以找到作为 Марков 过程讨论 **Brown 运动**（Brownian motion）的尝试，这种尝试后来在 N. Wiener (1923) 的研究中被证明是正确的. 连续时间 Марков 过程的一般理论的基础是由 А. Н. Колмогоров 建立的.

Марков 性质（Markov property）. 有几种本质上不同的 Марков 过程的定义. 较广泛使用的一种是：在**概率空间**（probability space）(Ω,F,P) 上，假设给定了一个在**可测空间**（measurable space）$(E,\mathscr{B})$ 中取值的随机过程 $X(t)(t\in T)$，其中 T 是实轴 $\mathbf{R}$ 的子集. 用 N_t (相应地 N^t) 表示在 Ω 中由变量 $X(s)(s\leqslant t(s\geqslant t)$ 且 $s\in T)$ 生成的 σ 代数. 换言之，N_t (相应地，N^t) 是同直到时间 t（从时间 t 开始）过程的演化相联系的事件类. 如果对一切 $t\in T,\Lambda_1\in N_t,\Lambda_2\in N^t$，Марков 性质（Markov property）

$$\mathrm{P}\{\Lambda_1\Lambda_2|X(t)\}=\mathrm{P}\{\Lambda_1|X(t)\}\mathrm{P}\{\Lambda_2|X(t)\}\quad(1)$$

（几乎必然）成立，或者等价地，若对一切 $t\in T$ 和 $\Lambda\in N^t$，

$$\mathrm{P}\{\Lambda|N_t\}=\mathrm{P}\{\Lambda|X(t)\}\quad(2)$$

（几乎必然）成立，则称 $X(t)$ 为 Марков 过程. 当 T 是自然数集的子集时，Марков 过程称为 **Марков 链**（Markov chain）(可是，后一术语更常用在 E 为至多可数的情形). 若 T 是 $\mathbf{R}$ 中的区间且 E 是至多可数的，则该 Марков 过程称为连续时间 Марков 链（continuous-time Markov chain）. 连续时间 Марков 过程的例子有**扩散过程**（diffusion process）和**独立增量随机过程**（stochastic process with independent increments），包括 **Poisson 过程**（Poisson process）和 **Wiener 过程**（Wiener process）.

为明确起见，以后的讨论中只涉及 $T=[0,\infty)$ 的情形. 公式 (1) 和 (2) 对于"过去"和"将来"的事件的独立性原则（当"现在"已知时）给出了清楚的解释，但是在许多情形下，当我们不得不考虑不只一个而是一族相应于不同的但在某种意义下相容的测度 P 的形如 (1) 或 (2) 的条件时，上述 Марков 过程的定义就显得不够方便了. 基于这种理由，导致如下的定义（见 [9], [11]).

若给定：

a) 可测空间 $(E,\mathscr{B})$，其中 σ 代数 $\mathscr{B}$ 包含所有 E 中的单点集；

b) 可测空间 (Ω,F)，装备着 σ 代数族 $F_t^s\subset F$ $(0\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty)$，使得如果 $[s,t]\subset[u,v]$，则 $F_t^s\subset F_v^u$；

c) 对 $t\in[0,\infty)$ 和 $v\in[0,t]$，一个由 (Ω, F_t^v) 到 $(E,\mathscr{B})$ 的**可测映射**（measurable mapping）定义的函数（"轨道"）$x_t = x_t(\omega)$；

d) 对每个 $s\geq 0$ 和 $x\in E$，一个在 σ 代数 F_∞^s 上的**概率测度**（probability measure）$\mathsf{P}_{s,x}$，使得如果 $s\in[0,t]$ 且 $B\in\mathscr{B}$，则函数 $\mathsf{P}(s,\cdot;t,B)=P_{s,\cdot}\{x_t\in B\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 可测.

如果对任意 $0\leq s\leq t$ 和 $\Lambda\in N^t$，$\mathsf{P}_{s,x}$ 几乎必然有

$$\mathsf{P}_{s,x}\{\Lambda\mid F_t^s\}=\mathsf{P}_{t,x_t}\{\Lambda\},\qquad(3)$$

则三元组 $X(t)=(x_t,F_t^s,\mathsf{P}_{s,x})$ 称为在 $(E,\mathscr{B})$ 上给定的（不中断）Марков 过程（(non-terminating) Markov process）. 其中 Ω 是基本事件空间，$(E,\mathscr{B})$ 是相空间或状态空间，而 $P(s,x;t,B)$ 是 $X(t)$ 的**转移函数**（transition function）或转移概率. 如果 E 被赋予拓扑且 $\mathscr{B}$ 是 E 中的 Borel 集类，则通常称 Марков 过程是在 E 上给定的. 在 Марков 过程的定义中常要求 $P(s,x;s,\{x\})\equiv 1$，这时 $\mathsf{P}_{s,x}\{\Lambda\}$ $(\Lambda\in F_\infty^s)$ 就解释为在条件 $x_s=x$ 之下 Λ 的概率.

下面的问题是：在可测空间 $(E,\mathscr{B})$ 上给定的每一个 Марков 转移函数 $P(s,x;t,B)$，是否都是某一 Марков 过程的转移函数？例如，如果 E 是可分的局部紧空间，且 $\mathscr{B}$ 是 E 中的 Borel 集类，则答案是肯定的. 此外，设 E 是完全距离空间，且对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{h\downarrow 0}\alpha_\varepsilon(h)=0,$$

其中

$$\alpha_\varepsilon(h)=\sup\{P(s,x;t,V_\varepsilon(x)):x\in E,0<t-s<h\},$$

而 $V_\varepsilon(x)$ 是 x 的 ε 邻域的补集，则相应的 Марков 过程还可取成是右连续且具有左极限的（即其轨道可作如此选取）. 连续 Марков 过程的存在性则由条件 $\alpha_\varepsilon(h)=o(h)\,(h\downarrow 0)$ 保证（见[9]，[11]）.

在 Марков 过程理论中最引人注目的是时间齐次的过程. 其相应的定义可以由 a)－d) 给出，不同的是参数 s 和 u 现在都可以取作 0. 甚至记号也可以简化为：

$$\mathsf{P}_x=\mathsf{P}_{0x},F_t=F_t^0,P(t,x,B)=P(0,x;t,B),$$

$$x\in E,t\geq 0,B\in\mathscr{B}.$$

接着，还要假定 Ω 的齐次性，即要求对任意的 $\omega\in\Omega$ 和 $s\geq 0$，存在 $\omega'\in\Omega$，使得 $x_t(\omega')=x_{t+s}(\omega)$ $(t\geq 0)$. 因此，在 Ω 中包含事件族 $\{x_s\in B\}(s\geq 0,B\in\mathscr{B})$ 的最小 σ 代数 N 上定义了时间推移算子 θ_t，它保持集合的并、交与差运算，并且有

$$\theta_t\{\omega:x_s\in B\}=\{\omega:x_{t+s}\in B\},$$

其中 $s,t\geq 0,B\in\mathscr{B}$.

称三元组 $X(t)=(x_t,F_t,\mathsf{P}_x)$ 为在 $(E,\mathscr{B})$ 上给定的（不中断）齐次 Марков 过程（(non-terminating) homogeneous Markov process），如果对 $x\in E,t\geq 0$ 和 $\Lambda\in N$，P_x 几乎必然地有

$$\mathsf{P}_x\{\theta_t\Lambda\mid F_t\}=\mathsf{P}_{x_t}\{\Lambda\}.\qquad(4)$$

$X(t)$ 的转移函数取作 $P(t,x,B)$，如不特别指出，还要求 $P(0,x,\{x\})\equiv 1$. 为了验证(4)是否成立，只需考虑形如 $\Lambda=\{\omega:x_s\in B\}$ 的集合，其中 $s\geq 0$，$B\in\mathscr{B}$，而且在(4)中 F_t 总可以用 σ 代数 $\overline{F}_t$ 代替，它等于 F_t 相对于一切可能的测度 $\mathsf{P}_x\,(x\in E)$ 的完全全的交. 通常固定 $\mathscr{B}$ 上概率测度 μ（"初始分布"），考虑随机 Марков 函数 (x_t,F_t,P_μ)，其中 P_μ 是由

$$\mathsf{P}_\mu\{\cdot\}=\int\mathsf{P}_x\{\cdot\}\,\mu(dx)$$

给定的在 F_∞ 上的测度.

称 Марков 过程 $X(t)=(x_t,F_t,\mathsf{P}_x)$ 是循序可测的（progressively measurable），如果对每一 $t>0$，函数 $x(s,\omega)=x_s(\omega)$ 导出由 $([0,t]\times\Omega,\mathscr{B}_t\times F_t)$ 到 $(E,\mathscr{B})$ 的可测映射，其中 $\mathscr{B}_t$ 是 $[0,t]$ 中 Borel 子集的 σ 代数. 右连续 Марков 过程总是循序可测的. 因为有一种方法可以把非齐次情形归结为齐次情形（见[11]），故以下只讨论齐次 Марков 过程.

强 Марков 性质（strong Markov property）. 假定在可测空间 $(E,\mathscr{B})$ 上给定一 Марков 过程 $X(t)=(x_t,F_t,\mathsf{P}_x)$，称函数 $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ 为 **Марков 时**（Markov moment）（停时（stopping time）），如果对 $t\geq 0,\{\omega:\tau\leq t\}\in F_t$. 一个集合 $\Lambda\subset\Omega_\tau=\{\omega:\tau<\infty\}$ 看作属于 F_τ，如果对一切 $t\geq 0$，$\Lambda\cap\{\omega:\tau\leq t\}\in F_t$（通常把 F_τ 解释为与 $X(t)$ 直到时刻 τ 的演化相联系的事件类）. 对 $\Lambda\in N$，集合

$$\theta_\tau\Lambda=\bigcup_{t\geq 0}[\theta_t\Lambda\cap\{\omega:\tau=t\}].$$

称一个循序可测 Марков 过程 X 为强 Марков 过程，如果对任意 Марков 时 τ 和一切 $t\geq 0,x\in E$，$\Lambda\in N$，在 Ω_τ 中 P_x 几乎必然满足下述关系式（强 Марков 性质（strong Markov property））

$$\mathsf{P}_x\{\theta_\tau\Lambda\mid F_\tau\}=\mathsf{P}_{x_\tau}\{\Lambda\}.\qquad(5)$$

在验证(5)时，只需考虑一切形如 $\Lambda=\{\omega:x_s\in B\}$ 的集合，其中 $s\geq 0,B\in\mathscr{B}$. 在这种情形下，$\theta_\tau\Lambda=\{\omega:x_{s+\tau}\in B\}$. 例如拓扑空间 E 上的任一右连续 Feller-Марков 过程都是强 Марков 过程. 一个 Марков 过程称为 Feller-Марков 过程（Feller-Markov process），如果对一切有界连续函数 f，

$$P^tf(\cdot)=\int f(y)P(t,\cdot,dy)$$

是连续的．

在强 Марков 过程中，还可以区别出各种子类来．设在局部紧度量空间 E 上给定的 Марков 转移函数 $P(t,x,B)$ 是随机连续的，即对每一点 $x\in E$ 的任意邻域 U，有

$$\lim_{t\downarrow 0} P(t,x,U)=1 .$$

如果 P^t 把无穷远处为零的连续函数类映射为它本身，则 $P(t,x,B)$ 对应于一个标准 Марков 过程（standard Markov process）X，即右连续强 Марков 过程，且 1）$\forall t\in[0,\infty)$，$F_t=\overline{F}_t$，且 $F_t=\bigcap_{s>t}F_s$；2）在 $\{\omega:\tau<\infty\}$ 上，P_x 几乎必然有 $\lim_{n\to\infty}x_{\tau_n}=x_\tau$，其中 $\tau=\lim_{n\to\infty}\tau_n$，且 $\tau_n(n\geq 1)$ 是当 n 递增时非减的 Марков 时序列．

中断 Марков 过程（terminating Markov processes）．通常可以用不中断 Марков 过程很好地描述一个物理系统，但只是在一个随机长度的时间区间中．另外，甚至一个 Марков 过程的简单变换都可以导出只在随机区间上给定轨道的过程（见 **Марков 过程的泛函**（functional of a Markov process））．由于这些考虑，引入中断 Марков 过程的概念．

若 $\widetilde{X}(t)=(\widetilde{X}_t,\widetilde{F}_t,\widetilde{\mathsf{P}}_x)$ 是相空间为 $(\widetilde{E},\widetilde{\mathscr{B}})$，转移函数为 $\widetilde{P}(t,x,N)$ 的齐次 Марков 过程，设存在一个点 $e\in\widetilde{E}$ 和一个函数 $\zeta:\Omega\to[0,\infty)$，使得对 $\zeta(\omega)\leq t$，$\tilde{x}_t(\omega)=e$，否则 $\tilde{x}_t\neq e$（除非另有说明，总设 $\zeta>0$）．对 $t\in[0,\zeta(\omega))$ 由等式 $x_t(\omega)=\tilde{x}_t(\omega)$ 给出新的轨道 $x_t(\omega)$，F_t 则用 $\widetilde{F}_t$ 在集合 $\{\omega:\zeta>t\}$ 上的迹来定义．

四元组 $X(t)=(x_t,\zeta,F_t,\widetilde{\mathsf{P}}_x)$，其中 $x\in E=\widetilde{E}\backslash\{e\}$，称为由 $\widetilde{X}(t)$ 在时刻 ζ 被删失（或杀死）的中断 Марков 过程．变量 ζ 称为中断 Марков 过程的删失时（censoring time）或生存时（life time）．新过程的相空间是 $(E,\mathscr{B})$，其中 $\mathscr{B}$ 是 σ 代数 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 在 E 中的迹．中断 Марков 过程的转移函数是 $\widetilde{P}(t,x,B)$ 在集合 $t\geq 0$，$x\in E$，$B\subset\mathscr{B}$ 上的限制．过程 $X(t)$ 称为强 Марков 过程（strong Markov process）或标准 Марков 过程（standard Markov process），如果 $\widetilde{X}(t)$ 具有相应的性质．不中断的 Марков 过程可以看作具有删失时 $\zeta\equiv\infty$ 的中断 Марков 过程．非齐次中断 Марков 过程可以类似定义．

М.Г.Шур 撰

Марков 过程与微分方程．Brown 运动型的 Марков 过程与抛物型偏微分方程有着紧密的联系．扩散过程的转移密度 $p(s,x,t,y)$ 在某些附加条件下满足向后和向前 **Колмогоров 方程**（Kolmogorov equation）．

$$\frac{\partial p}{\partial s}+\sum_{k=1}^{n}a_k(s,x)\frac{\partial p}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}b_{kj}(s,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\partial x_j}=$$

$$=\frac{\partial p}{\partial s}+L(s,x)p=0\ , \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}(a_k(t,y)p)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_j}(b_{kj}(t,y)p)=L^*(t,y)p. \tag{7}$$

函数 $p(s,x,t,y)$ 是方程（6）－（7）的 Green 函数，而构造扩散过程的第一个著名的方法就是基于偏微分方程（6）－（7）的这个函数的存在性定理．对时齐过程，算子 $L(s,x)=L(x)$ 与 Марков 过程的无穷小算子作用在平滑函数上是一致的（见**转移算子半群**（transition-operator semi-group））．

扩散过程各种泛函的期望是微分方程（6）的边值问题的解．设 $\mathsf{E}_{s,x}(\cdot)$ 是关于测度 $\mathsf{P}_{s,x}$ 的期望，则函数 $\mathsf{E}_{s,x}\varphi(X(T))=u_1(s,x)$ 对 $s<T$ 满足（6）且 $u_1(T,x)=\varphi(x)$．

类似地，函数

$$u_2(s,x)=\mathsf{E}_{s,x}\int_s^T f(t,X(t))dt$$

对 $s<T$ 满足

$$\frac{\partial u_2}{\partial s}+L(s,x)u_2=-f(s,x),$$

且 $u_2(T,x)=0$．

设 τ 是过程 $X(t)$ 的轨道首次击中区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 的边界 ∂D 的时刻，再令 $\tau\wedge T=\min(\tau,T)$，则在某些条件下，函数

$$u_3(s,x)=\mathsf{E}_{s,x}\int_s^{\tau\wedge T}f(t,X(t))dt+$$

$$+\mathsf{E}_{s,x}\varphi(\tau\wedge T,X(\tau\wedge T))$$

满足

$$\frac{\partial u}{\partial s}+L(s,x)u=-f\ ,$$

且在集合

$$\Gamma=\{s<T,x\in\partial D\}\cup\{s=T,x\in D\}$$

上取值为 φ．

对一般二阶线性抛物型方程第一边值问题

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s}+L(s,x)u+c(s,x)u=-f(s,x),\\ u|_{\Gamma}=\varphi\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

的解，在十分一般的条件下，可以用

$$u(s,x)=\mathsf{E}_{s,x}\int_s^{\tau\wedge T}\exp\{\int_s^v c(t,X(t))dt\}f(v,X(v))dv+$$

$$+\mathsf{E}_{s,x}\{\exp\{\int_s^{\tau\wedge T}c(t,X(t))dt\}\varphi(\tau\wedge T,X(\tau\wedge T))\} \tag{9}$$

的形式来描述．当算子 L 和函数 c, f 不依赖于 s 时，对于线性椭圆型方程的解也有类似于(9)的表示式．更清楚地说，在某些假定下，函数

$$u(x)=\mathrm{E}_x\int_0^\tau \exp\{\int_0^v c(X(t))dt\} f(X(v))dv + +\mathrm{E}_x\{\exp\{\int_0^\tau c(X(t))dt\}\varphi(X(\tau))\} \quad (10)$$

是方程

$$L(x)u+c(x)u=-f(x),\ u|_{\partial D}=\varphi \quad (11)$$

的解．当 L 退化($\det b(s,x)=0$)或 ∂D 不充分"平滑"时，在个别点或整个集合上边界值不一定取作函数(9)或(10)．对 L 的**正则边界点**(regular boundary point)的概念有一种概率解释：在正则点，边界值可以用(9),(10)达到．人们也可以用(8)和(11)的解来研究相应的扩散过程及其泛函的性质．

也有不依赖(6)和(7)的解来构造 Марков 过程的方法，例如，绝对连续测度变换的**随机微分方程**(stochastic differential equation)方法等．这种解与公式(9)和(10)的解一起，给出了构造和研究(8)的边值问题的性质以及相应地研究椭圆型方程的解的性质的概率方法．

因为随机微分方程的解对于 $b(s,x)$ 的退化不敏感，概率方法可以用来构造退化的椭圆型和抛物型微分方程的解．Н.М.Крылов 和 Н.Н.Боголюбов 的平均原理对随机微分方程的推广，允许我们借助于(9)对椭圆型和抛物型微分方程得到相应的结果．事实表明，在研究最高阶导数前带有小参数的这种类型方程的解的性质中出现的某些困难问题，可以通过概率论证来解决．甚至(6)的第二边值问题的解也有其概率意义．对无界区域边值问题的阐述与相应的扩散过程的常返性有着紧密的联系．

在时齐过程(即 L 与 s 无关)的情形，在某些假定和相差一个常数因子的意义下，$L^* q=0$ 的正解与 Марков 链的分布的平稳密度相符．概率方法甚至对解非线性抛物型方程的边值问题都是很有用的．

Р．З．Хасьминский 撰

参考文献

[1] Марков，А．А．，《Изв．физ．-мат．об-ва Казан．ун-та》，**15**(1906)，4，135－156．

[2] Bachelier，L．，*Ann．Sci．Ecole Norm．Sup*．，**17**(1900)，21－86．

[3] Kolmogorov，A．N．，Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung，*Math．Ann*．，**104**(1931)，415－458．

[4] Chung，K．L．，Markov chains with stationary transition probabilities，Springer，1967．

[5] Feller，W．，The general diffusion operator and positivity-preserving semi-groups in one dimension，*Ann．of Math*．，**60**(1954)．417－436．

[6] Дынкин，Е．Б．，Юшкевич，А．А．，《Теория вероят．и ее примен．》，**1**(1956)，1，149－155．

[7A] Hunt，G．A．，Markov processes and potentials Ⅰ，*Illinois J．Math*．，**1**(1957)，44－93．

[7B] Hunt，G．A．，Markov processes and potentials Ⅱ，*Illinois J．Math*．，**1**(1957)，316－369．

[7C] Hunt，G．A．，Markov processes and potentials Ⅲ，*Illinois J．Math*．，**2**(1958)，151－213．

[8] Dellacherie，C．，Capacités et processus stochastiques，Springer，1972．

[9] Дынкин，Е．Б．，Основания теории марковских процессов，М．，1959(中译本：Е．Б．邓肯，马尔科夫过程论基础，科学出版社，1962)．

[10] Дынкин，Е．Б．，Марковские процессы，М．，1963(英译本：Dynkin，E．B．，Markov processes，1，1965)．

[11] Гихман，И．И．，Скороход，А．В．，Теория случайных процессов，2，М．，1973(中译本：И．И．基赫曼，随机过程论，科学出版社，1986)．

[12] Фрейдлин，М．И．，в кн．，Итоги науки．Теория вероятностей，математическая статистика．-Теоретическая кибернетика，1966，М．，1967，7－58．

[13] Хасьминский，Р．З．，《Теория вероятн．и ее примен．》，**8**(1963)，1，3－25．

[14] Вентцель，А．Д．，Фрейдлин，М．И．，Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений．М．，1979(英译本：Venttsel，A．D．and Freĭdlin，M．I．，Random perturbations of dynamical systems，Springer，1984)．

[15] Blumenthal，R．M．and Getoor，R．K．，Markov processes and potential theory，Acad．Press，1968．

[16] Getoor，R．K．，Markov processes，Ray processes and right processes，Lecture notes in math．，440，Springer，1975．

[17] Кузнецов，С．Е．，《Теория вероятн．и ее примен．》，**25**(1980)，2，389－393．

【补注】

参考文献

[A1] Stroock，D．W．and Varadhan，S．R．S．，Multidimensional diffusion processes，Springer，1979．

[A2] Chung，K．L．，Lectures from Markov processes to Brownian motion，Springer，1982．

[A3] Doob，J．L．，Stochastic processes，Wiley，1953．

[A4] Wentzell，A．D．，A course in the theory of stochastic processes，McGraw-Hill，1981．

[A5] Ethier，S．N．and Kurtz，T．G．，Markov processes，Wiley，1986．

[A6] Feller，W．，An introduction to probability theory and its applications，1－2，Wiley，1957－1971(中译本：W．费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964，1979)．

[A7] Wax，N．(ed．)，Selected papers on noise and sto-

chastic processes, Dover, 1954.
[A8] Kac, M., Probability and related topics in physical sciences, Wiley, 1959, Chapt. 4.
[A9] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.
[A10] Loève, M., Probability theory, II, Springer, 1978.

【译注】

参考文献

[B1] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

刘秀芳 译

平稳 Марков 过程 [Markov process, stationary; Марковский стационарный процесс]

一种 **Марков 过程** (Markov process)，它是**平稳随机过程** (stationary stochastic process). 与齐次 Марков **转移函数** (transition function) 相联系的平稳 Марков 过程存在的充分必要条件是存在一个与此函数相应的平稳初始分布 $\mu(A)$，它满足

$$\mu(A)=\int_X P(t,x,A)\mu(dx).$$

如果相空间 X 是有限的，则无论过程是离散时间的 ($t=0,1,\cdots$) 还是连续时间的，平稳初始分布总存在. 对离散时间且具有可数状态集 X 的过程，平稳分布的存在条件由 А.Н.Колмогоров ([1]) 发现：其必要和充分条件是存在一个互通状态类 $Y\subset X$，使得对任意的 $y_i\in Y(i=1,2)$，从 y_1 到达 y_2 的时间的数学期望是有限的. 这一准则已经被推广到具有任意相空间 X 的强 Марков 过程：此时平稳过程存在的一个充分条件是存在紧集 $K\subset X$，使得对任意 $x\in X$，从 x 到达 K 的时间的期望是有限的. 还有一个用 **Ляпунов 随机函数** (Lyapunov stochastic function) 的术语表达的平稳 Марков 过程存在的充分条件：如果有一函数 $V(x)\geqslant 0$，对一切 $x\notin K$，$LV(x)\leqslant -1$，则存在与 Марков 转移函数 $P(t,x,A)$ 相联系的平稳 Марков 过程. 此处 L 是过程的无穷小母元.

当平稳初始分布唯一时，相应的平稳过程是遍历的. 在这种情形下，转移概率的 Cesàro 平均弱收敛于 μ. 在某些附加条件下，

$$\lim_{t\to\infty} P(t,x,A)=\mu(A) \quad (\text{弱}).$$

平稳初始分布满足 Fokker-Planck (-Колмогоров) 方程 $L^*\mu=0$，其中 L^* 是过程的无穷小母元的伴随算子. 例如，对扩散过程，L^* 是生成过程的微分算子的伴随算子. 在这种情形下，μ 具有相对于 Lebesgue 测度的密度 p，它满足 $L^*p=0$. 在一维情形下，可以用求积分的办法解这个方程.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, М., 1937.
[2] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.
[3] Севастьянов, Б. А., 《Теория вероятн. и ее примен.》 2 (1957), 1, 106－116.

Р. З. Хасьминский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1960.
[A2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1－2, Wiley, 1966 (中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷上、下册，科学出版社，1964，1979).
[A3] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.
[A4] Parzen, E., Stochastic processes, Holden-Day, 1962.
[A5] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本：Rozanov, Yu. A., Stationary random processes, Holden-Day, 1967).

刘秀芳 译

Марков 性质 [Markov property; Марковское свойство]

对一实值**随机过程** (stochastic process) $X(t)$ ($t\in T\subset\mathbf{R}$)，这一性质是指对 T 中时间的任一集合 $t_1<\cdots<t_{n+1}$ 和任一 Borel 集 B，

$$\mathrm{P}\{X(t_{n+1})\in B\mid X(t_n),\cdots,X(t_1)\}=$$
$$=\mathrm{P}\{X(t_{n+1})\in B\mid X(t_n)\} \qquad (*)$$

以概率 1 成立，即在给定 $X(t_n),\cdots,X(t_1)$ 下 $X(t_{n+1})$ 的条件分布与给定 $X(t_n)$ 下 $X(t_{n+1})$ 的条件分布几乎必然相等. 这可以解释为给定确定的"现在" $X(t_n)$，"将来" $X(t_{n+1})$ 和"过去" $X(t_{n-1}),\cdots,X(t_1)$ 独立. 满足性质 (*) 的随机过程称为 **Марков 过程** (Markov process). 在某些附加条件下，Марков 性质有一种较强的型式，叫做"强 Марков 性质". 在离散时间 $T=\{1,2,\cdots\}$ 的情形下，对于满足 (*) 的 Марков 序列，强 Марков 性质 (strong Markov property) 总是成立的，即对于每个关于 σ 域族 ($F_n, n\geqslant 1$)，$F_n=\sigma\{\omega: X(1),\cdots,X(n)\}$ 的停时 τ，以概率 1 有

$$\mathrm{P}\{X(\tau+1)\in B\mid X(\tau),\cdots,X(1)\}=$$
$$=\mathrm{P}\{X(\tau+1)\in B\mid X(\tau)\}.$$

参考文献

[1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973 (中译本：И. И. 基赫曼，Б. В. 斯科罗霍德，随机过程论，科学出版社，1986).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chung, K. L., Markov chains with stationary transi-

tion probabilities, Springer, 1960.
[A2] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.
[A3] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Springer, 1965).
[A4] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G., Markov processes, Wiley, 1986.
[A5] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1966 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷上、下册, 科学出版社, 1964, 1979).
[A6] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.
[A7] Loève, M., Probability theory, II, Springer, 1978.

刘秀芳 译

Марков 求积公式 [Markov quadrature formula; Маркова квадрату]

见**最高代数精确度的求积公式** (quadrature formula of highest algebraic accuracy).

Марков 谱 [Markov spectrum; Марков спектр]

见 **Марков 谱问题** (Markov spectrum problem).

Марков 谱问题 [Markov spectrum problem; Маркова проблема спектра]

与不定**二元二次型** (binary quadratic form) 的正规化的算术极小值之分布有关的一个数论问题. 设

$$f=f(x,y)=\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R},$$

$$\delta(f)=\beta^2-4\alpha\gamma>0,$$

又设

$$m(f)=\inf|f(x,y)|, x,y\in\mathbf{Z}^2, (x,y)\neq(0,0)$$

为型 f 的一致算术极小值. 数

$$\mu=\mu(f)=\frac{\sqrt{\delta(f)}}{m(f)}, \mu\leqslant+\infty$$

称为 f 的 Марков 常数 (Markov constant). 集合 $M=\{\mu(f)\}$ 称为 Марков 谱 (Markov spectrum), 其中 f 取遍一切实的不定二次型. 对 Марков 常数及 Марков 谱曾用各种方式给出过定义. 特别地, 在 [1] 中 A. A. Марков 考虑的是集合 $\{2/\mu(f)\}$. 已知 $\mu(f)$ 是型类束 F 的一个不变量, 即是集合

$$F=\{f':f'\simeq\tau f(\mathbf{Z}),\tau\in\mathbf{R},\tau>0\} \qquad (1)$$

的一个不变量, 这里有 $\mu(f')=\mu(f)=\mu(F)$. 每个类束 F 与双无穷 (在两个方向都是无穷的) 序列

$$I_F=\{\cdots,a_{-1},a_0,a_1,\cdots:a_k\in\mathbf{Z}\}$$

成一一对应, 使得只要令

$$\mu_k(I_F)=[a_k;a_{k+1},a_{k+2},\cdots]+[0;a_{k-1},a_{k-2},\cdots]$$

($[;\cdots]$ 是**连分数** (continued fraction) 记号), 就有

$$\mu(F)=\sup_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k(I_F).$$

Марков 问题可陈述如下: 1) 刻画 Марков 谱 M; 2) 对每个 $\mu\in M$, 刻画适合 $\mu(f)=\mu(F)=\mu$ 的型 $f=f(x,y)$ 之集合 (或者说刻画束 F). 对于由条件 $\mu(f)<3$ 定义的谱 M 的初始部分, 问题已被 Марков 解决. 谱的这一部分是以 3 为唯一极限点 (M 的一个聚点) 的一个离散集合

$$M\cap[0,3)=$$

$$=\left\{\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}:m^2+n^2+p^2=3mnp, m,n,p,\in\mathbf{N}\right\}=$$

$$=\left\{\sqrt{5},\sqrt{8},\frac{\sqrt{221}}{5},\cdots\right\},$$

m, n 和 p 取遍 Марков 的 Diophantus 方程 (Markov Diophantine equation)

$$m^2+n^2+p^2=3mnp, m\geqslant n\geqslant p>0 \qquad (2)$$

的所有正整数解. 在此情形下, 这部分谱的每一点恰与一个束 F_m 相对应, 此束由满足

$$\mu(f_m)=\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}$$

的 Марков 型 $f_m=f_m(x,y)$ 给出. (2) 的一个解 (m,n,p) 称为一个 Марков 三元组 (Markov triple), 数 m 称为一个 Марков 数 (Markov number). Марков 型 f_m 与 Марков 数 $m=\max(m,n,p)$ 的关系如下: 设 r, $s\in\mathbf{Z}$ 由条件

$$nr\equiv p(\operatorname{mod} m), 0\leqslant r<m,$$

$$r^2+1=ms$$

定义, 则根据定义有

$$f_m=f_m(x,y)=x^2+\left[3-\frac{2r}{m}\right]xy+\frac{s-3r}{m}y^2.$$

集合 M 是闭的, 且有一个最小的数 $\mu_0=4.5278\cdots$ 使 $[\mu_0,+\infty]\subset M$, 且 μ_0 构成 M 的连续区间的边界.

Марков 问题与实数 θ 的有理逼近的 Lagrange-Hurwitz 问题 (Lagrange-Hurwitz problem) 密切相关. 量

$$\lambda=\lambda(\theta)=\sup\tau, \lambda\leqslant+\infty$$

称为 Lagrange 常数 (Lagrange constant), 其中最小上界取过所有使

$$\left|\theta-\frac{p}{n}\right|\leqslant\frac{1}{\tau q^2}$$

有无穷组解 $p,q\in\mathbf{Z}(q>0)$ 的 $\tau\in\mathbf{R}(\tau>0)$. 集合 $L=$

$\{\lambda(\theta):\theta\in\mathbf{R}\}$ 称为 Lagrange 谱 (Lagrange spectrum). 把 Lagrange 定理 (Lagrange theorem) 看成 Lagrange 谱理论中的第一个结果是很自然的: θ 的连分数展式中的所有渐近分数都满足

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

如果 $\theta'\sim\theta$, 即如果

$$\theta'=\frac{a\theta+b}{c\theta+d},\ a,b,c,d\in\mathbf{Z},|ad-bc|=1,$$

那么 $\lambda(\theta')=\lambda(\theta)=\lambda(\Theta)$, 其中 $\Theta=\{\theta':\theta'\sim\theta\}$ 是数的一个等价类. 如果 θ 展成连分数 $\theta=[a_0;a_1,a_2,\cdots]$, 那么有

$$\lambda(\theta)=\lim_{k\to\infty}\sup\lambda_k(\theta),$$

$$\lambda_k(\theta)=[0;a_{k+1},a_{k+2},\cdots]+[a_k;a_{k-1},\cdots,a_1],$$

$$k=1,2,\cdots.$$

从而, Lagrange - Hurwitz 问题可表述为: a) 刻画 Lagrange 谱 L; b) 对每个 $\lambda\in L$, 刻画满足 $\lambda(\theta)=\lambda(\Theta)=\lambda$ 的数 θ 之集合 (或者刻画类 Θ).

对 $\lambda(\theta)<3$, 这个问题化为 Марков 问题, 此外,

$$L\cap[0,3)=M\cap[0,3),$$

又对每个 $\lambda\in L(\lambda<3)$, 恰有一个类 Θ 与之对应, 这个类为 Марков 型 f_m 所刻画. 已经证明, L 与 M 一样, 也是闭集, 且 $L\subset M$, 但是 $L\neq M$, 又有

$$L\cap[\mu_0,+\infty]=M\cap[\mu_0,+\infty]=[\mu_0,+\infty],$$

其中 μ_0 构成 L 的连续区间之边界. 关于 L 的构造和 L 与 M 之间关系的研究载于 [6] 中. 有关 Марков 谱问题的推广和类似, 以及 "隔离现象", 见 [2], [3], [7].

参考文献

[1A] Markoff, A., Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Ann.*, **15** (1879), 381 – 406.

[1B] Markoff, A., Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, *Math. Ann.*, **17** (1880), 379 – 400.

[1C] Марков, А. А., 《Успехи матем. наук》, **3** (1948), 5, 7 – 51.

[2] Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957.

[3] Делоне, Б. Н., Петербургская школа теории чисел. М.-Л., 1947.

[4] Горшков, Д. С., 《Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР》, **67** (1977), 39 – 85.

[5] Фрейман, Г. А., Диофантовы приближения и геометрия чисел. (Задача Маркова), Калинин, 1975.

[6] Малышев, А. В., 《Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР》, **67** (1977), 5 – 38.

[7] Венков, Б. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **9** (1945), 429 – 494.

А. В. Малышев 撰

【补注】在上文的 (1) 式中, 记号 $f\simeq f'(\mathbf{Z})$ 称为 $\mathbf{Z}$ 上二元型的等价 (equivalence of binary forms). 更确切地说, $f\simeq f'(\mathbf{Z})$, 当且仅当存在整数 $a,b,c,d,\in\mathbf{Z}$, $\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\pm1$, 使 $f'(x,y)=f(ax+by,cx+dy)$.

M 的 "连续区间" (interval of continuity) 即指完全属于 M 的极大区间 $[\mu_0,\infty]$. 对交集 $M\cap[0,3)$ 与 $(\mu_0,\infty]\cap M$ 已作了很清楚的刻画, 而它们之间的那部分, 即 $M\cap[3,\mu_0]$, 却仍不够清楚 (到 1989 年为止).

参考文献

[A1] Zagier, D., On the number of Markoff numbers below a given bound, *Math. Comp.*, 39 (1982), 709 – 723.

[A2] Cusick, T. W. and Flahive, M. E., The Markoff and Lagrange spectra, Amer. Math. Soc., 1989.

张明尧 译 朱尧辰 校

位势论中的 Martin 边界 [Martin boundary in potential theory; Мартина граница в теории потенциала]

Green 空间 (Green space) Ω 的理想边界 (亦见**边界 (一致代数理论中的)** (boundary (in the theory of uniform algebras))), 由它得以构造 Ω 里正调和函数的特征表示. 令 Ω 是一个局部紧、非紧的拓扑空间, Φ 是一族连续函数 $f:\Omega\to[-\infty,+\infty]$. Constantinescu - Cornea 定理 (Constantinescu - Cornea theorem) ([2]) 断言, 在同胚意义下, 存在唯一的紧空间 $\hat\Omega$ 具有如下性质: 1) Ω 是 $\hat\Omega$ 的处处稠密的子空间; 2) 每一个 $f\in\Phi$ 可扩张成 $\hat\Omega$ 上的连续函数 $\hat f$, 且函数族 $\{\hat f\}$ 分离 Ω 相对于 Φ 的理想边界 $\Delta=\hat\Omega\setminus\Omega$ 上的点; 3) Ω 是 $\hat\Omega$ 的开集.

现在, 令 Ω 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant2)$ 的一个有界区域, 或者更一般地, 一个 Green 空间; 令 $G=G(x,y)$ 是 Ω 上具有极 $y\in\Omega$ 的 **Green 函数** (Green function), 又令 $y_0\in\Omega$ 是固定点. 取函数族 Φ

$$\Phi=\{x\in\Omega\to K(x,y)=\frac{G(x,y)}{G(x,y_0)}:y\in\Omega\},$$

这里, 约定 $K(x_0,y_0)=1$, 由 Constantinescu - Cornea 定理得到 Ω 的 Martin 空间 (Martin space) 或者 Martin 紧化 (Martin compactification) $\hat\Omega$. Martin 边界是相应的理想边界 $\Delta=\hat\Omega\setminus\Omega$. Martin 拓扑 (Martin topology) T 是 Martin 空间 $\hat\Omega$ 的拓扑. 对应于不同点 $y_0',y_0''\in\Omega$ 的 Martin 空间 $\hat\Omega',\hat\Omega''$ 是同胚的. $K(x,y)$ 的扩张函数 $\hat K(\xi,y):\Delta\times\Omega\to[0,+\infty)$ 关于 y 是调和的和关于变元 (ξ,y) 是联合连续的; $\hat\Omega$ 是可距离化空间. Martin 基本定理 (Martin fundamental theorem) ([1]) 断言: Ω 上所有正调和函数 $u(y)\geqslant0$ 可以用 Martin 表示 (Martin representation) 刻画:

$$u(y)=\int\hat K(\xi,y)d\mu(\xi),\qquad(*)$$

其中 μ 是 Δ 上的一个正 **Radon 测度**(Radon measure). 式(*)中的测度 μ 不能由函数 u 唯一确定. Ω 里一个调和函数 $v \geqslant 0$ 称为极小的(minimal),如果每一个在 Ω 里满足 $0 \leqslant w \leqslant v$ 的调和函数 w 与 v 成比例. 每一个极小调和函数 $v \neq 0$ 与某一个 $\hat{K}(\xi, y)$ 成比例,其对应的点 $\xi \in \Delta$ 称为极小点,所有极小点组成的集合 $\Delta_1 \subset \Delta$ 称为极小 Martin 边界(minimal Martin boundary). 如果限制(*)中的测度 μ 是集中在 Δ_1 上,得到典范 Martin 表示(canonical Martin representation):

$$u(y) = \int \hat{K}(\xi, y) d\mu_1(\xi),$$

式中测度 $\mu_1 \geqslant 0$ 由 u 唯一确定.

例 a)如果 $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < R\}$ 是 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 里半径为 R 的球,那么

$$\hat{K}(\xi, y) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |y|^2)}{|\xi - y|^n}$$

是 Poisson 核, $\hat{\Omega}$ 是 Euclid 闭包 $\hat{\Omega} = \overline{\Omega}$、Martin 边界 Δ 是球面 $\{\xi \in \mathbf{R}^n : |\xi| = R\}$,它的每一点都是极小点. 在这种情况下,表示式(*)简化为 Poisson-Herglotz 公式(Poisson-Herglotz formula)(见**解析函数的积分表示**(integral representation of an analytic function); **Poisson 积分**(Poisson integral)).

b)当 Γ 是 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的充分光滑的超曲面时,Martin 边界 Δ 与 Euclid 边界 $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ 相同.

c)如果 Ω 是平面里的单连通区域,那么 Martin 边界 Δ 与**极限元**(limit elements)集,或者 Carathéodory 素端相同. 这样,Martin 边界的元素 $\xi \in \Delta$ 可以认为是素端概念被推广到维数 $n \geqslant 2$ 的情形.

参考文献

[1] Martin, R. S., Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 137-172.

[2] Constantinescu, C. and Cornea, A., Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, p. 1963.

[3] Brelot, M., On topologics and boundaries in potential theory, Springer, 1971.

Е. Д. Солеменцев 撰

【补注】 一个简要论述,亦见[A1]第 12 章. 关于**热传导方程**(thermal-conductance equation)或者概率位势论的 Martin 边界见[A3].

参考文献

[A1] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ., Centre Doc., 1959.

[A2] Brélot, M., Axiomatique des fonctions harmoniques, Presses Univ. de Montréal, 1966.

[A3] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

高琪仁、吴炯圻 译

Martin 边界(Марков 过程论中的) [**Martin boundary in the theory of Markov processes**; **Мартина граница в теории марковских процессов**]

Марков 过程(Markov process)的状态空间或其在某一紧空间中的映象的边界,它是用类似于 Martin 概形(见[1])构造的.

Martin 构造的概率解释首先由 J.L.Doob(见[4])提出,他讨论了离散 Марков 链的情形.

设 $P(t,x,B)$ 是在一可分、局部紧空间 E 上给定的齐次 Марков 过程 $X = (x_t, \zeta, F_t, \mathsf{P}_x)$ 的**转移函数**(transition function),其中 $t \geqslant 0$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$, 而 $\mathscr{B}$ 是 E 中的 Borel 集族. 对 $\alpha \geqslant 0$, $x \in E$, $y \in E$ 定义的,且对固定的 α 为($\mathscr{B} \times \mathscr{B}$)可测的函数 $g_\alpha(x,y) \geqslant 0$ 称为 Green 函数(Green function),如果对每一 $B \in \mathscr{B}$,

$$\int_B g_\alpha(x,y) m(dy) \equiv \int_0^\infty e^{-\alpha t} P(t,x,B) dt,$$

其中 m 是 $\mathscr{B}$ 上的测度,为了避免 Green 函数定义中的多义性,还可以再要求对任意具有紧支撑的连续函数 $f(x)$,函数

$$g_\alpha(\cdot) = \int_E f(x) g_\alpha(x, \cdot) m(dx)$$

是 $\wedge$ 连续的(意指存在一个关于 t 左连续的函数 $F(t, \omega)$,使得

$$\mathsf{P}_x\{F(t, \cdot) \neq g_\alpha(x_t(\cdot))\} \equiv 0, x \in E, t > 0).$$

固定一个 $\mathscr{B}$ 中的测度 γ,假定 Green 函数存在,定义 Martin 核(Martin kernel)为

$$K_y^\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x,y)}{q(y)},$$

其中

$$q(y) = \int_E g_\alpha(x,y) \gamma(dx)$$

(此处必须引入某些限制以保证 $q(y)$ 的正性和 $\wedge$ 连续性). 如果 γ 是集中在某点的单位测度,而 X 是在某个区域的首出时中断的 **Wiener 过程**(Wiener process),则 $K_y^0(x)$ 的定义归结为文献[1]中类似的形式. 在宽广的条件下,存在一个紧集 $\mathscr{E}$("Martin 紧统"),一个在 $\mathscr{B}$ 上的测度 $K_y^\alpha(dx)$ ($x \geqslant 0$, $y \in \mathscr{E}$) 及一个映射 $i: E \to \mathscr{E}$,它们满足条件: a) $i(E)$ 在 $\mathscr{E}$ 中稠; b)当 f 遍历 E 中具紧支撑的连续函数时,函数

$$K_y^\alpha(f) = \int f(x) K_y^\alpha(dx)$$

分离 $\mathscr{E}$ 中的点且在 $\mathscr{E}$ 上连续; c)若 $y \in E$,则测度 $K_{i(y)}^\alpha(dx)$ 与测度 $K_y^\alpha(x) m(dx)$ 相同. 此时,集合 $i(E)$ 在 $\mathscr{E}$ 中的边界称为 Martin 边界(Martin boundary)或流出边界(exit-boundary)(在研究过分测度的分解时,又出现了对偶边界,即流入边界. 见[3],[4]).

为了描述 $\mathscr{E}$ 的性质,引入在 Doob 意义下的 h 过程

是方便的：对每个**过分函数**(excessive function) h，联系一个 $(E^h, \mathscr{B}^h)$ 上的转移函数

$$P^h(t,x,B) = h^{-1}(x)\int_E h(y)P(t,x,dy),$$

其中 $E^h = \{x \in E: 0 < h(x) < \infty\}$，$\mathscr{B}^h = \{A \in \mathscr{B}: A \subset E^h\}$，对应的 Марков 过程是一个 h 过程．所有的 h 过程，同 X 一起，都可以在初等事件空间上实现，使得它们的区别仅仅是测度族 $\{\mathsf{P}_x^h\}$ 的不同．在 $\mathscr{E}$ 中构造 x_t 的一个修正，它是左连续过程 $z_t(0 < t \leqslant \zeta)$，对一切 $h \in L_1(\gamma)$，满足 $\mathsf{P}_x^h(z_t \neq i(x_t)) \equiv 0$．关于 $\mathscr{E}$ 的拓扑，$z_\zeta = \lim_{t \uparrow \zeta} z_t$ 几乎必然存在．

存在一个集合 $U \subset \mathscr{E}$("流出空间")使得：首先，对所有上述形式的 $h(x)$，$\mathsf{P}_x^h(z_\zeta \in U) \equiv 1$；其次，对 $y \in U$，测度 K_y^α 具有相对于 m 的密度 $k_y^\alpha(\cdot)$，其中对 $k_y^0(\cdot)$ 可以取一个过分函数，其谱测度是集中在 y 的单位测度；再次，$h(x)$ 有唯一的积分分解式

$$h(x) = \int_U k_y^0(x)\mu(dy).$$

分解式中的测度 μ 称为函数 h 的谱测度(spectral measure)；它由公式

$$\mu(B) = \int_E h(x)\mathsf{P}_x^h(z_\zeta \in B)\gamma(dx)$$

给定，其中 B 是 $\mathscr{E}$ 中的 Borel 集．

在 Марков 过程论中，也使用其他类型的紧化，特别是那样的紧化，它们使任一形如

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt\int_E f(y)\mathsf{P}(t,x,dy),\ \alpha > 0, x \in E,$$

的函数，对于相当一般的函数 f 的集合，具有连续扩张．

参考文献

[1] Martin, R. S., Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 137 – 172.

[2] Motoo, M., Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes, Lévy's system of U-processes, in Proc. fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. 2, 1967, 75 – 110.

[3] Kunita, H. and Watanabe, T., Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces, in Proc. fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. 2, 1967, 131 – 164.

[4] Doob, J. L., Discrete potential theory and boundaries, *J. Math and Mech.*, **8** (1959), 3, 433 – 458; 993.

[5] Watanabe, T., On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes, *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A.*, **33** (1960), 1, 39 – 108.

[6] Hunt, G. A., Markov chains and Markov boundaries, *Illinois J. Math.*, **4** (1960), 313 – 340.

[7] Hennequin, P. L. and Tortrat, A., Théorie des probabilites et quelques applications, Masson, 1965.

[8] Kunita, H. and Watanabe, T., Markov processes and Martin boundaries I. *Illinois J. Math.*, **9** (1965), 3, 485 – 526.

[9] Шур, М. Г., 《Тр. Моск. ин-та электронного машиностроения》, 1970, в. 5, 192 – 251.

[10] Jeulin, T., Compactification de Martin d'un processus droit, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **42** (1978), 3, 229 – 260.

[11] Дынкин, Е. Б., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 4, 89 – 152.

М. Г. Шур 撰

【补注】用于 Марков 过程论中的另一种紧化是 **Ray-Knight 紧化**(Ray-Knight compactification)．

参考文献

[A1] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilitistic counterpart, Springer, 1984.

刘秀芳 译

鞅[martingale；мартингал]

一种**随机过程**(stochastic process) $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$ $(t \in T \subseteq [0,\infty))$ 定义在一个具有非减 σ 代数族 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ $(\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}, s \leqslant t)$ 的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上，使得 $\mathsf{E}|X_t| < \infty$，X_t 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，且

$$\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s, \tag{1}$$

以概率 1 成立．在离散时间情形下，$T = \{1,2,\cdots\}$；在连续时间情形下，$T = [0,\infty)$，与此概念有关的随机过程是下鞅(submartingale)，如果

$$\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s) \geqslant X_s,$$

或上鞅(supermartingale)，如果

$$\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s) \leqslant X_s.$$

例 1．如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots$，是具有 $\mathsf{E}\xi_j = 0$ 的随机变量序列，则 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$ $(n \geqslant 1)$ 是鞅，其中 $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$，$\mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_1 \cdots \xi_n\}$，它是由 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 生成的 σ 代数．

例 2．设 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅(下鞅)，$V = (V_n, \mathscr{F}_n)$ 是可料序列(即 V_n 不仅是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，而且也是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的，$n \geqslant 1$)，$\mathscr{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$，再令

$$(V \cdot Y)_n = V_1 Y_1 + \sum_{k=2}^n V_k \Delta Y_k, \Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}.$$

如果变量 $(V \cdot Y)_n$ 是可积的，则随机过程 $((V \cdot Y)_n, \mathscr{F}_n)$ 形成一个鞅(若 $V_n \geqslant 0$，则形成下鞅)．特别地，如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是一个相应于 Bernoulli 方案的独立随机变量序列，

$$\mathsf{P}\{\xi_i = \pm 1\} = \frac{1}{2},\ Y_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k,$$

$$\mathscr{F}_k = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_k\},$$

且

$$V_k = \begin{cases} 2^{k-1}, \text{如果}\ \xi_1 = \cdots = \xi_{k-1} = -1, \\ 0\ , \quad \text{其他}, \end{cases} \tag{2}$$

则 $((V\cdot Y)_n,\mathscr{F}_n)$ 是一个鞅，这一随机过程是一个赌博的数学模型，其中如果 $\xi=+1$，表示赌博者赢一个单位资本；如果 $\xi=-1$，则表示赌博者输一个单位资本；而 V_k 是第 k 局赌博中下的赌注．由(2)定义的函数 V_k，意味着当赌博者输的时候，他加倍下赌注，而在他第一次赢的时候停止赌博．在赌博界，这种赌法称为 martingale，这就解释了这一数学术语的来源．

鞅论的一个基本事实是：鞅（下鞅）$(X_t,\mathscr{F}_t)$ 的结构在随机时间变换下仍然保持．这称为可选抽样定理（optional sampling theorem），严格叙述如下：如果 τ_1,τ_2 是两个有限停时（见 **Марков 时**（Markov moment）），如果 $\mathsf{P}\{\tau_1\leqslant\tau_2\}=1$，且

$$\mathsf{E}|X_{\tau_i}|<\infty,\ \liminf_{t\to\infty}\int_{\tau_i>t}|X_t|\,d\mathsf{P}=0,\qquad(3)$$

则 $\mathsf{E}(X_{\tau_2}|\mathscr{F}_{\tau_1})(\geqslant)=X_{\tau_1}$（以概率1），其中

$$\mathscr{F}_{\tau_1}=\{A\in\mathscr{F}:A\cap\{\tau_1\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,\ \forall t\in T\}.$$

其特殊情形即 **Wald 恒等式**（Wald identity）：

$$\mathsf{E}(\xi_1+\cdots+\xi_\tau)=\mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\tau.$$

鞅论的基本结果之一是 Doob 不等式（Doob inequality）：如果 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)$ 是非负下鞅，

$$X_n^*=\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j,$$

$$\|X_n\|_p=(\mathsf{E}|X_n|^p)^{1/p},p\geqslant1,n\geqslant1,$$

则

$$\mathsf{P}\{X_n^*\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}X_n}{\varepsilon},\qquad(4)$$

$$\|X_n\|_p\leqslant\|X_n^*\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|X_n\|_p,\ p>1,\qquad(5)$$

$$\|X_n^*\|_p\leqslant\frac{e}{e-1}[1+\|X_n\ln^+X_n\|_p],\ p=1.\qquad(6)$$

如果 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)$ 是鞅，则对 $p>1$ Burkholder 不等式（Burkholder inequalites）（对独立随机变量和的 Хинчин 和 Марцинкевичь-Zygmund 不等式的推广）成立：

$$A_p\|\sqrt{[X]_n}\|_p\leqslant\|X_n\|_p\leqslant B_p\|\sqrt{[X]_n}\|_p,\qquad(7)$$

其中 A_p，B_p 是两个普适常数（不依赖于 X 和 n），可以取作

$$A_p=\left[\frac{18p^{3/2}}{p-1}\right]^{-1},\ B_p=\frac{18p^{3/2}}{(p-1)^{1/2}},$$

而

$$[X]_n=\sum_{i=1}^n(\Delta X_i)^2,\ X_0=0.$$

考虑到(5)和(7)，当 $p>1$ 时推得

$$A_p\|\sqrt{[X]_n}\|_p\leqslant\|X_n^*\|_p\leqslant\widetilde{B}_p\|\sqrt{[X]_n}\|_p,\qquad(8)$$

其中

$$\widetilde{B}_p=\frac{18p^{5/2}}{(p-1)^{3/2}}.$$

当 $p=1$ 时，不等式(8)可以推广成 Davis 不等式（Davis inequality），即存在普适常数 A 和 B 使得

$$A\|\sqrt{[X]_n}\|_1\leqslant\|X_n^*\|_1\leqslant B\|\sqrt{[X]_n}\|_1.$$

关于下鞅以概率1收敛的各种定理证明中，起关键作用的是下鞅 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)$ 在 n 步中上穿区间 $[a,b]$ 次数 $\beta_n(a,b)$ 的数学期望 $\mathsf{E}\beta_n(a,b)$ 的 Doob 不等式，即

$$\mathsf{E}\beta_n(a,b)\leqslant\frac{\mathsf{E}|X_n|+|a|}{b-a}.\qquad(9)$$

关于下鞅收敛的基本结果是 Doob 定理（Doob theorem）：如果 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)$ 是下鞅，且 $\sup\mathsf{E}|X_n|<\infty$，则以概率1，$\lim_{n\to\infty}X_n(=X_\infty)$ 存在，且 $\mathsf{E}|X_\infty|<\infty$，如果下鞅是一致可积的，则除以概率1收敛外，还是 L_1 收敛的，即

$$\mathsf{E}|X_n-X_\infty|\to0,\ n\to\infty.$$

这个结果的一个推论是关于条件数学期望连续性的 Lévy 定理（Lévy theorem）：如果 $\mathsf{E}|\xi|<\infty$，则

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)\to\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty),$$

其中 $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2\subseteq\cdots,\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_n\mathscr{F}_n)$.

鞅的自然推广是局部鞅（local martingale）的概念，即对随机过程 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)$，存在一个有限停时序列 $(\tau_m)_{m\geqslant1}$，$\tau_m\uparrow\infty$（以概率1），使得对每一 $m\geqslant1$，"停止"过程

$$X^{\tau_m}=(X_{t\wedge\tau_m}I_{\tau_m>0},\mathscr{F}_t)$$

是鞅．在离散时间情形下，每一局部鞅 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)$ 都是一个鞅变换（martingale transform），即可以表示成 $X_n=(V\cdot Y)_n$ 的形式，其中 V 是一个可料过程，Y 是一个鞅．

此外，每一个下鞅 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)$ 具有唯一的 Doob-Meyer 分解 $X_t=M_t+A_t$，其中 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)$ 是一局部鞅，$A=(A_t,\mathscr{F}_t)$ 是一可料非减过程．特别地，若 $m=(m_t,\mathscr{F}_t)$ 是一平方可积鞅，则其平方 $m^2=(m_t^2,\mathscr{F}_t)$ 是下鞅．在它的 Doob-Meyer 分解 $m_t^2=M_t+\langle m\rangle_t$ 之中，过程 $\langle m\rangle=(\langle m\rangle_t,\mathscr{F}_t)$ 称之为鞅 m 的二次特征（quadratic characteristic of the martingale）．对每一平方可积鞅 m 及使 $\int_0^t V_s^2d\langle m\rangle_s<\infty$（以概率1）对一切 $t>0$ 成立的可料过程 $V=(V_t,\mathscr{F}_t)$，

可以定义**随机积分**(stochastic integral)

$$(V \cdot m)_t = \int_0^t V_s d m_s,$$

它是一局部鞅.在 Wiener 过程 $W = (W_t, \mathscr{F}_t)$ 情形下,W 是一平方可积鞅,$\langle m \rangle_t = t$,随机积分 $(V \cdot W)_t$ 正是对 Wiener 过程的 Itô 随机积分.

在连续时间情形下,对右连续且具有左极限的过程,Doob,Burkholder 和 Davis 不等式仍然成立.

参考文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971(中译本:И. И. 基赫曼等,随机过程论,科学出版社,1986).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】停时也称为可选时(optional times),在旧的文献中还称为 Марков 时(Markov times, Markov moments)(见 **Марков 时**(Markov moment)).可选抽样定理也称为停止定理(stopping theorem)或 Doob 停止定理(Doob stopping theorem).

鞅的概念是现代概率论中最重要的概念之一.它是 Марков 过程论和随机积分论的基础,并且用在分析理论的许多部分(如遍历理论的收敛定理,测度论中的导数和提升,奇异积分理论中的不等式等等).更一般地可以定义在 **C**, $\mathbf{R}^n$,Hilbert 或 Banach 空间中取值的鞅.Banach 值的鞅用来研究 Banach 空间中的 Radon-Nikodym 性质等.

参考文献

[A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, 1-3, North-Holland, 1978-1988, Chapts. V - VIII. Theory of martingales(译自法文).

[A2] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilitic counterpart, Springer, 1984.

[A3] Neveu, J., Discrete-parameter martingales, North-Holland, 1975(译自法文).

[A4] Ville, J., Etude critique de la notion de collectif, Gauthier-Villars, 1939.

[A5] Wall, P. and Heyde, C. C., Martingale limit theory and its application, Acad. Press, 1980.

【译注】

参考文献

[B1] 严加安,鞅与随机积分引论,上海科学技术出版社,1981.

[B2] He, S. W., Wang, J. G., Yan, J. A., Semimartingale theory and stochastic calculs, Science Press and CRC Press Inc., 1992.

刘秀芳 译

质量[mass; масса]

确定物质的惯性和引力性质的物理量.在经典力学中,惯性质量(inertial mass)是 Newton 第二定律中力和加速度之间的比例系数;对于给定物体,它是常量(见**力学的 Newton 定律**(Newton laws of mechanics)).引力质量(gravitational mass)定义为万有引力定律中的比例系数.根据等效原理,惯性质量和引力质量相互成比例;而在通常单位制中,它们是相等的.在经典物理学中,质量是加性的:系统的质量等于其各部分质量之和.在狭义相对论中,质量 m_0(所谓静质量(rest mass))可定义为把物体的动量 p 与其速度 v 联系起来的公式中的比例系数,

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

其中 c 是真空中的光速.有时人们引进量

$$m_{\text{mot}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

称为物体的动质量(motion mass).根据这个定义,在相对论中,动量与速度由经典公式 $p = m_{\text{mot}} v$ 相联系,其中质量依赖于速度.物体的质量 m 与其能量 E 由关系式 $E = m_{\text{mot}} c^2$ 相联系.在相对论中,质量不是加性的:稳定系统的质量小于其各部分质量之和,相差的量是 $\Delta m = \Delta E / c^2$,其中 ΔE 是系统的结合能,等于系统形成时所产生的能量.量 Δm 称为质量亏损(mass defect).一切已知物理物体的静质量是非负的(例如,光子的静质量等于零).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jammer, M., Concept of mass in classical and modern physics, Harper & Row, 1964.

[A2] Weyl, H., Philosophy of mathematics and natural science, Princeton Univ. Press, 1949.

【译注】由于引力势能总是负的,在大质量坍缩系统中就会有极大的负的结合能,这会不会导致这类引力束缚系统的总能量或者质量变为负值呢?长期以来,人们一直猜测,在广义相对论中,引力束缚系统的总能量或质量总是正定的.然而,直到 1978,1979 年,丘成桐与 R. Schoen 应用整体微分几何方法,造极小曲面,运用非线性方程的技巧,才证明了这个猜测.他们指出,只要在类空超曲面上进行测量,质量总是正的.这在广义相对论中称为正能定理(见[B2]).

参考文献

[B1] 中国大百科全书:物理 II,1236 页,质量,中国大百科全书出版社,1987.

[B2] 中国大百科全书:物理 I,507 页,广义相对论(郭汉英撰),中国大百科全书出版社,1987.

[B3] 中国大百科全书:数学,536 页,丘成桐(梁宗巨撰),中国大百科全书出版社,1988.

徐锡申 译

质量和余质量[mass and co-mass; масса и комасса]

在某种互为对偶的向量空间中伴随的**范数**(norm).

1) 一个 r 向量 α(即向量空间的 r 重外积)的质量(mass of an r-vector)是数

$$|\alpha|_0=\inf\{\sum_i|\alpha_i|:\alpha=\sum\alpha_i,\ \alpha_i\text{是简单 }r\text{ 向量}\}.$$

一个 r 余向量 ω 的余质量(co-mass of an r-covector)是数

$$|\omega_0|=\sup_\alpha\{|\omega\cdot\alpha|:\alpha\text{是简单 }r\text{ 向量},\ |\alpha|=1\}.$$

这里 $|\cdot|$ 是 r 向量的标准范数而 $\omega\cdot\alpha$ 是一向量与一余向量的标量积.

质量 $|\alpha|_0$ 和余质量 $|\omega|_0$ 分别是 r 向量空间 $V_{[r]}$ 和 r 余向量空间 $V^{[r]}$ 中的伴随的范数. 在这方面:

a) $|\omega|_0=\sup_\alpha\{|\omega\cdot\alpha|:|\alpha|_0=1\}$,
$|\alpha|_0=\sup_\alpha\{|\omega\cdot\alpha|:|\omega|_0=1\}$;

b) $|\alpha|_0\geq|\alpha|$, $|\omega|_0\geq|\omega|$, 且等式成立当且仅当 $\alpha(\omega)$ 是简单 r(余)向量;

c) 对外积 $\vee$, $|\alpha\vee\beta|_0\leq|\alpha|_0|\beta|_0$, $|\omega\vee\zeta|_0\leq B|\omega|_0|\zeta|_0$, 这里对简单多重余向量 ω(或 ζ), $B=1$, 而一般的, 如果 $\omega\in V^{[r]}$ 和 $\zeta\in V^{[s]}$, 则 $B=\binom{r+s}{r}$;

d) 对内积 $\wedge$, $|\omega\wedge\alpha|_0\leq\widetilde{B}|\omega|_0|\alpha|_0$, 这里 $\omega\in V^{[r]}$, $\alpha\in V_{[s]}$, 对 $r\geq s$, $\widetilde{B}=1$, 对 $r\leq s$, $\widetilde{B}=\binom{s}{r}$.

这些定义使得能够对其标准纤维为 $V^{[r]}$ 和 $V_{[r]}$ 的纤维丛的截面定义质量和余质量. 例如, 区域 $G\subset E^n$ 上的形式 ω 的余质量(co-mass of a form)是

$$|\omega|_0=\sup\{|\omega(p)|_0:p\in G\}.$$

2) 多面体链 $A=\sum a_i\sigma_i^r$ 的质量(mass of a polyhedral chain)是

$$|A|=\sum|a_i|\,|\sigma_i^r|,$$

这里 $|\sigma_i^r|$ 是胞腔 σ_i^r 的体积. 对任意链质量(有限或无限)能用各种不同方式定义; 对平坦链(见**平坦范数**(flat norm))和尖锐链(见**尖锐范数**(sharp norm)), 这些方式给出同样的质量的值.

3) 上链(平坦的, 特别是尖锐的) X 的余质量(co-mass of a cochain)按标准方式定义为

$$|X|=\sup_{A\neq0}\frac{|X\cdot A|}{|A|},$$

这里 A 是多面体链且 $X\cdot A$ 是上链 X 在链 A 上的值.

参考文献见**平坦范数**(flat norm).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 简单 r 向量(simple r-vector) α 是**向量空间**(vector space) V 的 r **重外积**(exterior product) $V_{[r]}$ 中形如 $\alpha=\beta_1\vee\cdots\vee\beta_r$ 的元素. 这里"$\vee$"表示外积且 $\beta_1,\cdots,\beta_r\in V$.

参考文献

[A1] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969, Sect. 1.8.

葛显良 译 鲁世杰 校

质量算子 [mass operator; массовый оператор]

考虑到粒子与自场和其他场相互作用的算子. 令系统的态由量

$$\Psi(x)=\psi(x)\Psi_0(x)$$

描述, 其中 $\psi(x)$ 是作用于波函数 $\Psi_0(x)$(态向量)的场算子, x 是四维坐标向量. 如果 $\Psi(x)$ 满足方程

$$[L(x)+M(x)]\Psi(x)=0, \qquad (*)$$

其中算子 $L(x)$ 对应于自由粒子, 而 $M(x)$ 考虑粒子与自场和其他场的相互作用, 因此 $M(x)$ 称为质量算子. 质量算子是带核函数 $M(x,x')$ 的积分算子:

$$M(x)\Psi(x)=\int M(x,x')\Psi(x')dx'.$$

质量算子与单粒子 **Green 函数**(Green function) $G(x,x')$ 密切相关, 后者是下列方程

$$[L(x)+M(x)]\,G(x,x')=\delta(x-x')$$

的解, 其中 $\delta(x-x')$ 是四维 δ **函数**(delta-function); 这个方程类似于方程(*), 但在右边带有 δ 函数形式的源.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957 (英译本: Bogolyubov, N. N. and Shirkov, D. V., Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, 1959).

[2] Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П., Дзялошинский, И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962 (中译本: A. A. 阿布里科索夫, Л. П. 戈尔可夫, И. Е. 加洛辛斯基, 统计物理学中的量子场论方法, 科学出版社, 1963).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 "质量算子"的概念仅在量子场微扰理论这方面来说才能有点意义, 但在该方面也仅起较次要作用.

徐锡申 译

数学分析 [mathematical analysis; математический анализ]

用**极限**(limit)的方法研究**函数**(function)及其推广的一个数学分支. 极限的概念与无穷小量概念有

着密切的联系，因此也可以说，数学分析是用无穷小量方法研究函数及其推广．

“数学分析”一词是这个数学分支的旧名——“无穷小量分析”的简称；后一名称能更充分地描述其内容，虽然它也是一个简称（“通过无穷小量的分析”这个名称才能更确切地表征本学科）．在古典数学分析中，研究（分析）的对象首先和最主要的是函数．之所以说“首先和最主要的”，是因为数学分析的发展导致用这种方法研究比函数更复杂的形式：泛函、算子等等的可能性．

在自然界和技术中处处都会遇到用函数来刻画的运动和过程；自然现象的规律通常也用函数来描述．因此，数学分析的实质的重要性在于它是研究函数的一种工具．

广义地说，数学分析包括数学的很大的一部分内容．它包括：**微分学**（differential calculus）；**积分学**（integral calculus）；**实变函数论**（functions of a real variable, theory of）；**复变函数论**（functions of a complex variable, theory of）；**逼近论**（approximation theory）；**常微分方程**（differential equation, ordinary）论；**偏微分方程**（differential equation, partial）论；**积分方程**（integral equation）论；**微分几何学**（differential geometry）；**变分学**（variational calculus）；**泛函分析**（functional analysis）；**调和分析**（harmonic analysis）；以及其他某些数学分支．现代的**数论**（number theory）和**概率论**（probability theory）应用并发展了数学分析的方法．

然而，“数学分析”一词通常用作数学分析基础的名称，它包括：**实数**（real number）理论，极限理论，**级数**（series）理论，微分学和积分学以及它们的直接应用，例如极大值和极小值理论，**隐函数**（implicit function）理论，**Fourier 级数**（Fourier series）和 **Fourier 积分**（Fourier integral）．

函数．数学分析肇始于 Н. И. Лобачевский 和 P. G. L. Dirichlet 关于函数的定义．如果对于数的集合 F 中的每个数 x，按某种规则，都有一个数 y 与之对应，则定义了单变量 x 的函数

$$y=f(x).$$

也可类似地定义 n 个变量的函数

$$f(x)=f(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 维空间中的一个点；还可考虑无限维空间中的点 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ 的函数

$$f(x)=f(x_1, x_2, \cdots).$$

不过，这种函数通常称为泛函．

初等函数．在数学分析中，**初等函数**（elementary functions）最为重要．实际上，数学分析处理的主要是初等函数，更复杂的函数用初等函数来近似．不仅可以对实变量而且可对复变量 x 来考虑初等函数；于是，在某种意义上来说，初等函数概念变得更加完全．与此相联系，出现了一个重要的数学分支，称为复变函数论，或**解析函数**（analytic function）论．

实数．从根本上来说，函数概念以实数（有理数和无理数）概念为基础．后者只是在 19 世纪末才最终形成．特别是，R. Descartes（17 世纪中叶）在数学中引入了直角坐标系，以及函数的图形表示法，从而建立了数与几何直线上的点之间的逻辑上无瑕疵的联系，这就是 Descartes 思想的形式基础．

极限．在数学分析中，研究函数的工具是极限．可以区分序列的极限和函数的极限之间的差别．这些概念直到 19 世纪才最终形成；然而，古希腊人就已经有了极限的思想．完全有理由说，Archimedes（公元前 3 世纪）就能够用一种可以称为极限过渡的方法来计算抛物线弓形的面积（见**穷竭法**（exhaustion, method of））．

连续函数．数学分析中研究的一类重要的函数就是**连续函数**（continuous function）．这个概念的一种可能的定义是：开区间 (a, b) 中的变量 x 的函数 $y=f(x)$ 称为在点 x 上是连续的，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0.$$

一个函数称为在开区间 (a, b) 上是连续的，如果它在这个区间的每一点上是连续的；这时，函数的图形就是通常所说的一条连续曲线．

导数和微分．在连续函数中必须区分出那些具有**导数**（derivative）的函数．函数

$$y=f(x),\ a<x<b$$

在点 x 上的导数是它在这一点上的变化率，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x). \quad (1)$$

如果 y 是沿坐标轴运动的一点在时刻 x 的坐标，则 $f'(x)$ 是这一点在时刻 x 的瞬时速度．

从 f' 的符号可以判断 f 的变化性质：如果在一个区间 (c, d) 中 $f'>0$ $(f'<0)$，则 f 在这个区间上是递增的（递减的）．如果一个函数在点 x 上达到局部极值（极大值或极小值），并且它在这一点上具有导数，则这个导数等于零，$f'(x)=0$．

等式（1）可由下列等价等式来代替：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x),\ 当\ \Delta x\to 0\ 时,\ \varepsilon(\Delta x)\to 0,$$

或

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x\,\varepsilon(\Delta x),$$

其中当 $\Delta x\to 0$ 时 $\varepsilon(\Delta x)$ 是无穷小量；即如果 f 在点 x 上具有导数，则它在这一点上的增量分解为两

项．第一项

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{2}$$

是 Δx 的线性函数（与 Δx 成正比），第二项比 Δx 更快地趋向于零．

量（2）称为这个函数对应于增量 Δx 的**微分**（differential）．对于微小的 Δx，可以把 Δy 看成近似等于 dy：

$$\Delta y \approx dy.$$

上面对于微分的这些讨论说明了数学分析的特征．它们可以推广到多变量函数以及泛函的情况．

例如，如果 n 个变量的函数

$$z = f(x_1, \cdots, x_n) = f(x)$$

在点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 上具有连续的**偏导数**（partial derivative），那么对应于自变量的增量 $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n$，$f$ 的增量 Δz 可以写成下列形式：

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}\ \varepsilon(\Delta x), \tag{3}$$

其中当 $\Delta x = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n) \to 0$ 时，即当一切 $\Delta x_k \to 0$ 时，$\varepsilon(\Delta x) \to 0$．(3) 中右端的第一项是 f 的微分 dz．它线性地依赖于 Δx、当 $\Delta x \to 0$ 时，第二项比 Δx 更快地趋向于零．

假设给定泛函（见**变分学**（variational calculus））

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x')dt,$$

其中函数 x 遍及在闭区间 $[t_0, t_1]$ 上具有连续导数，并满足边界条件 $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$（这里 x_0 和 x_1 是给定的数）的函数类 $\mathfrak{M}$．进一步设 $\mathfrak{M}_0$ 是在 $[t_0, t_1]$ 上具有连续导数并使得 $h(t_0) = h(t_1) = 0$ 的函数 h 的类．显然，如果 $x \in \mathfrak{M}, h \in \mathfrak{M}_0$，则 $x + h \in \mathfrak{M}$．

在变分学中已经证明，在关于 L 的某些条件下，$J(x)$ 的增量可以写成下列形式：当 $\|h\| \to 0$ 时，

$$J(x+h) - J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right] \right] h(t)dt + o(\|h\|), \tag{4}$$

其中

$$\|h\| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |h(t)| + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |h'(t)|,$$

而 (4) 的右端的第二项比 $\|h\|$ 更快地趋向于零，第一项线性地依赖于 $h \in \mathfrak{M}_0$．(4) 中的第一项称为泛函 $J(x, h)$ 的变分，记作 $\delta J(x, h)$．

积分．除导数以外、积分也是数学分析中的一个基本概念．可以分别考虑不定积分和定积分．

不定积分同原函数有着密切联系．函数 F 称为函数 f 的在区间 (a, b) 上的原函数（primitive function）、如果在这个区间上 $F' = f$.

函数 f 在区间 $[a, b]$ 上的定积分（Riemann 积分）是

$$\lim \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b f(x)dx$$

当 $\max(x_{j+1} - x_j) \to 0$ 时的极限；这里 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$，而 $x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}$ 是任意的．

如果 f 在 $[a, b]$ 上是正的和连续的，则它在这个区间上的定积分等于由曲线 $y = f(x)$，x 轴和直线 $x = a$，$x = b$ 所围成的图形的面积．

Riemann 可积函数类包括 $[a, b]$ 上的一切连续函数，和某些间断函数．但是，它们必须都是有界的．对于缓慢增长的无界函数，以及对于某些无界区间上的函数，引入了所谓**反常积分**（improper），在其定义中要求二重极限过渡．

单变量函数 Riemann 积分的概念可以推广到多变量函数的情况（见**多重积分**（multiple integral）．

另一方面，由于数学分析的需要，导致积分概念在另一个不同方向上的推广，即推广到 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral）形式，更一般地，**Lebesgue - Stieltjes 积分**（Lebesgue - Stieltjes integral）形式．这些积分定义的实质在于对某些所谓可测集合引入它们的测度，并在此基础上引入可测函数的概念．对于可测函数，已引入了 Lebesgue-Stieltjes 积分．与此相关，考虑了大量的不同类型的测度以及相应的可测集合和可测函数类．这就给出了利用某种积分处理某一具体问题的可能性．

Newton - Leibniz 公式．导数和积分之间存在着联系，这由下列 Newton - Leibniz 公式（定理）（Newton-Leibniz formula (theorem)）来表示：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

这里 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数、F 是它的原函数．

Taylor 公式和 Taylor 级数．在数学分析中，除了导数和积分以外，另外两个极其重要的概念（研究工具）是 **Taylor 公式**（Taylor formula）和 **Taylor 级数**（Taylor series）．如果函数 $f(x)$ $(a < x < b)$ 在点 x_0 的邻域内具有直到 n 阶（包括 n 阶）的连续导数，则它在这个邻域内可以由 $x - x_0$ 的幂的多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

来近似，称为它的（n 次）Taylor 多项式（Taylor polynomial）：

$$f(x) \approx P_n(x)$$

(Taylor 公式 (Taylor fomula)); 近似误差

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

当 $x\to x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 更快地趋向于零:

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n), \text{ 当 } x-x_0 \text{ 时}.$$

因此, 在 x_0 的领域内, f 能由非常简单的函数(多项式)来近似, 并达到任何精确度, 为了进行计算, 只要求加、减、乘等算术运算.

特别重要的函数是所谓在 x_0 的一个固定邻域内的解析函数; 在这个邻域内, 它们具有无穷多个导数, 当 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)\to 0$, 它们可以由无穷的 Taylor 级数 (Taylor series) 来表示:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x)}{1!}(x-x_0)+\cdots.$$

在某些条件下, 对于多元函数、泛函和算子, Taylor 展开也是可能的.

历史简况. 在 17 世纪以前, 数学分析是一些孤立的特殊问题解法的汇集; 例如, 在积分学中是一些计算图形的面积、曲面立体的体积、变化力所做的功等问题. 每个问题或一类特殊问题都用其特有的方法来解决, 有时是复杂的、繁琐的, 有时则是相当巧妙的 (关于数学分析的史前状况, 见**无穷小演算** (infinite calculus)). 数学分析作为一个统一的、有系统的整体是在 I. Newton, G. Leibniz, L. Euler, J. L. Lagrange 以及 17 世纪和 18 世纪的其他学者的工作中逐步形成的, 它的基础, 即极限理论, 则是由 19 世纪初的 A. L. Cauchy 奠定的. 数学分析原始思想的深入分析同 19 世纪和 20 世纪集合论、测度论和实变函数论的发展有关, 并导致其各种推广.

参考文献

[1] Valleé-Poussin, Ch. J. de la, Cours d'analyse infinitésimales, 1-2, Libraire Univ. Louvain, 1923 - 1925.

[2] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 2, Mir, 1982.

[3] Ильин, В. А., Садовничий, В. А., Сендов, Б. Х., Математический анализ, М., 1979.

[4] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1-2, М., 1973.

[5] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1-2, М., 1975 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 人民教育出版社, 1982, 第二卷, 高等教育出版社, 1992).

[6] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambrige Univ. Press, 1952.

[7] Fichtenholz, G. M., Differential und Integralrechnung, 1 - 3, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1964.

С. М. Никольский 撰

【补注】 1961 年, A. Robinson 真正提出了分析中具有逻辑基础的无穷小量方法, 从而维护了微积分奠基者特别是 Leibniz 的观点, 反对现在通用的"ε-δ"分析. 这种看待分析的既古老又新鲜的方式近 20 年来得到传播, 并且在近几年内可能会变得更为重要, 见 [A4] 和**非标准分析** (non-standard analysis).

参考文献

[A1] Bishop, E., Foundations of constructive analysis, McGraw-Hill, 1967.

[A2] Shilov, G. E., Mathematical analysis, 1-2, M. I. T., 1974 (译自俄文).

[A3] Courant, R. and Robins, H., What is mathematics? Oxford Univ. Press, 1980 (中译本: R. 柯朗、H. 罗宾, 数学是什么?, 科学出版社, 1985).

[A4] Cutland, N., Nonstandard analysis and its applications, Cambridge Univ. Press, 1988.

[A5] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambrige Univ. Press, 1975.

[A6] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979 (中译本: E. C. 梯其玛希, 函数论, 科学出版社, 1962).

[A7] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

[A8] Stromberg, K. R., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

张鸿林 译

数理经济学 [mathematical economics; математическая экономика]

主题为经济对象和经济过程的模型以及研究它们的方法的数学分支. 然而, 数理经济学的概念、结果和方法照例自然地紧密联系它们的经济起源、解释和实际应用来阐述. 尤为本质的是与经济学的科学与实践的联系.

数理经济学作为数学的一部分, 只是在 20 年代才开始. 在此以前, 仅有一些偶尔的研究, 它们不能在严格意义下被当作数学.

经济数学建模的特色. 经济学建模的特色之一是被建模的对象极为变化多端. 在经济学中, 存在可控性与自发性因素, 严格的确定性与本质的含糊性, 以及选择的自由、技术本性的过程和人类行为处于首要地位的社会过程. 不同层次 (例如企业与国民经济) 的经济学要求本质上不同的描述. 所有这些导致在模型中所用到的数学工具的非常多种多样. 一个微妙的问题是如何考虑社会结构来反映被建模的社会经济系统的类型. 经常发生的是这样那样的经济对象或过程的抽象数学模型可以成功地既应用于资本主义经济, 也应用于社会主义经济. 这些都取决于所利用的

方法与对分析结果的解释．

生产．有效生产．经济学关注财富，或产品，它们在数理经济学中以非常广泛的意义来被理解．对此，人们运用一个一般的术语：要素（ingredient）（货物（goods）或商品（commodity））．要素包括劳务，自然资源，对人类的环境因素的不利影响，所出现的安全系统的舒适特征等等．通常假定要素的个数是有限的，产品空间是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^l$，这里 l 是要素的个数．$\mathbf{R}^l$ 中的点 z 在适当的条件下，可以理解为一种"生产"方法；其正分量代表对应的要素的产出量，而负分量则代表投入．对词"生产"加上引号是因为它是在非常广泛的意义下被理解的．可采用的（给定的，存在的）生产能力的集合是 $Z \subset \mathbf{R}^l$．生产方法 $\overline{z} \in Z$ 是有效的（efficient），如果不存在 $z \in Z$，使得 $z \geqslant \overline{z}$，并且至少对一个分量有严格不等式．揭示有效方法的问题是经济学中最重要的问题之一．通常假定 Z 是紧凸集，这在许多情形与现实相当符合．通过扩充产品空间，有效方法分析问题这时可以归结为 Z 是闭凸锥的情形．

揭示有效方法的一个典型问题是生产计划基本问题（fundamental problem of production planning）．给定生产方法集 $Z \subset \mathbf{R}^l$ 以及一个消费与资源限制向量 $b \in \mathbf{R}^{l-1}$，要求求出方法 $\overline{z} = (b, \overline{\mu}) \in Z$ 使得 $\overline{\mu} \geqslant \mu$ 对于所有 $(b, \mu) \in Z$ 成立．如果 Z 是闭凸锥，那么这是**凸规划**（convex programming）的一般问题．如果 Z 是由有限个生成元（所谓基本方法）给定的，那么这是**线性规划**（linear programming）的一般问题．解 $\overline{z}$ 位于 Z 的边界上．设 π 是对于 Z 在点 $\overline{z}$ 处的支撑超平面的系数，即对于所有 $z \in Z$，有 $\pi z \leqslant 0$，而 $\pi \overline{z} = 0$．凸规划的基本定理给出使得 $\pi_l > 0$ 的条件．例如，一条充分条件是：存在向量 $(b, \mu) \in \operatorname{int} Z$（所谓 Slater 条件（Slater condition））．刻画了有效方法 $\overline{z}$ 的 π 的系数有重要的经济意义．它们可以被解释为与不同的要素的投入与产出的有效性相当的价格．一种方法是有效的当且仅当产出的价值等于投入的价值．所给出的有效生产方法的理论及其运用 π 的特征已经显示出对社会主义经济学的理论与实际计划的一种革命性的影响．它对确定价格与资源的社会估价的客观定量方法打下了牢固的基础，使得在社会主义经济的条件下，有可能选择最有效的经济决策．这种理论自然可推广到无限种要素的情形．这时要素空间是适当选取的函数空间．

有效增长．与不同的时刻或时期有关的要素形式上可以看成不同的要素．因此，动态形式的生产描述原则上包含在上述模式中，这种模式由对象 $\{X, Z, b\}$ 所组成，其中 X 是要素空间，Z 是生产能力空间，b 是对经济的消费与限制的规定．然而，研究生产的真正的动态方面需要生产能力描述的更特殊的形式．

经济动力学的相当一般的模型的生产能力是由点到集映射（多值函数）$a: \mathbf{R}_+^l \to 2^{\mathbf{R}_+^l}$ 来给定的．这里 $\mathbf{R}_+^l$ 是经济的（相）空间，$x \in \mathbf{R}_+^l$ 被解释为经济在某个时刻的经济状态，而 x_k 是在该时刻可采用的产品 k 的量．集合 $a(x)$ 由所有由 x 出发经过单位时期以后可能进入的经济状态所组成．称

$$Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^{2l} : y \in a(x)\}$$

为映射 a 的图象（graph of the mapping a）．点 (x, y) 是可容许的生产过程．

已经考虑过经济发展的可能轨线的不同的规定范本．特别是，人们的消费可以或者是映射 a 本身，或者是用显式表达．例如，在第二种情形下，容许轨线是序列 $(X, C) = (x(t), c(t+1))_{t=0}^{\infty}$，使得 $x(t+1) + c(t+1) \in a(x(t))$，$c(t) \geqslant 0$ 对于所有 t 成立．已经研究过不同的轨线有效性的概念．轨线 $(\overline{X}, \overline{C})$ 是相对于消费有效的（efficient relative to consumption），如果不存在由同样的初始状态出发的另一条容许轨线 (X, C)，使得 $C \geqslant \overline{C}$．轨线 $(\overline{X}, \overline{C})$ 是内在有效的（intrinsically efficient），如果不存在另外的从同样的初始状态出发的容许轨线 (X, C)，时刻 t_0 和数 $\lambda > 1$，使得

$$\lambda \overline{x}(t_0) = x(t_0).$$

轨线的最优性通常定义为依赖于效用函数 $u: \mathbf{R}_+^l \to \mathbf{R}_+^l$ 和效用随时间变化的折扣系数 $\mu \geqslant 1$（有关效用函数的某些论述见下面，也见**效用理论**（utility theory））．轨线 $(\overline{X}, \overline{C})$ 称为 (u, μ)-最优的（(u, μ)-optimal），如果

$$\varliminf_{t \to \infty} \left[\sum_{\tau=0}^{t} u(\overline{c}(\tau)) \mu^{-\tau} - \sum_{\tau=0}^{t} u(c(\tau)) \mu^{-\tau} \right] \geqslant 0$$

对于任何从同样的初始状态出发的容许轨线 (X, C) 成立．存在一些关于相应轨线的十分一般的存在性定理．

在不同的意义下有效的轨线是由一系列价格来刻画的，它们恰好与用价格（支撑超平面的系数）π 来刻画有效方法 $\overline{z}$ 的方式一样．这就是说，如果对于一种有效方法，在最优价格下投入的价值等于产出的价值，那么在一条有效轨线上，状态的价值是不变的与最大的，并且在所有其他容许轨线上它不可能增加．

所有这些定义容易推广到生产映射 a，函数 u 和系数 μ 依赖于时间的情形．时间本身可以是连续的，或者更一般地，参数 t 可以在一个相当任意的集合上变化．

从经济学的观点来看，令人感兴趣的是在轨线上

达到最大可能的经济增长率，并且可以在一个任意长的时期坚持下去．这就导致，对于不随时间变化的 a 和 u，这样的轨线是定常的（stationary），即，有形式

$$x(t)=x(0)\alpha^{t},\ c(t)=c(0)\alpha^{t},$$

这里 α 是经济的增长（发展）率．在某种意义下定常有效的，以至定常最优的轨线称为大道轨线（turnpike trajectories）．

在非常广的假定下，大道轨线定理断言，每一条有效轨线，不管其初始状态如何，随时间增长而近似地趋向于一条大道轨线．存在大量的不同的大道定理，其不同在于有效性与最优性的定义，度量与大道的距离的方法，收敛的类型，以及最后还有所讨论的时间区间是有限的还是无限的．

生产能力是由凸多面锥来给定的经济动力学模型称为 von Neumann 模型（von Neumann model）．von Neumann 模型的特殊情形是封闭 Leont'ev 模型（closed Leont'ev model），或者（用另外的术语）封闭动态部门间平衡模型（closed dynamical interdepartmental balance model）（术语"封闭"在这里用来作为缺乏非再生产产品的经济的特征性质），它是由具有非负项的 $l\times l$ 阶的矩阵 Φ，A 和 B 来给定的．过程 $(x,y)\in Z$，当且仅当向量 v，$w\in\mathbf{R}_{+}^{l}$ 可以如下求得：

$$x\leqslant v\Phi,\ v\geqslant vA+wB,\ y\leqslant v\Phi+w.$$

部门间平衡模型是极为广泛流传的，因为能方便地得到构造它所需要的初始信息．

经济动力学的模型也在连续时间情形下讨论．事实上，最先研究的模型之一就是具有连续时间的模型．特别是，有多项研究是致力于最简单的单生产模型，它由下列方程给定：

$$\dot{x}=f(x)-c,$$

这里 x 是每单位劳动资源的基金量，c 是按人头的消费，f 是生产函数（递增的凹函数）．满足这一方程的非负函数 $(x(t),c(t))_{t=0}^{\infty}$ 刻画了一条容许轨线．对于给定的效用函数 u 和折扣系数 μ，最优轨线可以确定．最优轨线（并且只有它们）满足 Euler 方程的类似：

$$u(x)\dot{x}=u(\overline{c})-u(c),$$

这里 $\overline{c}$ 是满足条件 $f(x)-c=x$ 的最大数．

Leont'ev 模型原先也是按连续时间陈述为微分方程组

$$X=AX+B\dot{X}+C,$$

这里 X 是产品流，A 和 B 分别是流动消耗矩阵与资本消耗矩阵，而 C 是有限消费流．

具有连续时间的模型中的有效与最优轨线是借助于变分学、最优控制和无限维空间上的数学规划的方法来研究的．容许轨线是由形式为 $\dot{x}\in a(x)$（a 是生产映射）的微分包含来给定的模型也已讨论．

消费者的合理行为．决定其合理行为的消费者的口味与目标是以在产品空间中的某个偏好系统的形式来给定的．也就是说，对于每个消费者 i 来说，定义了一个点到集映射 P_i: $Z\to 2^{X}$．这里 Z 是某个形势子集，消费者在其中处于选择过程，X 是对消费者来说可接受的向量集，$X\subset\mathbf{R}_{+}^{l}$．特别是，$Z$ 可以是 $\mathbf{R}^{l}$ 的一个子集．集合 $P_i(z|x)$ 是由所有在形势 z 时（严格）好于向量 x 的向量 $\widetilde{x}\in X$ 所组成．例如，映射 P_i 可以通过效用函数（utility function）u 来给定，这里 $u(x)$ 显示产品组 x 对消费者的效用．这样，

$$Z=\mathbf{R}_{+}^{l},\ P_i(z)=\{\widetilde{x}\in\mathbf{R}_{+}^{l}:u(\widetilde{x})>u(x)\}.$$

在形势 z 的描述中，所有的产品价格 π 与消费者的货币收入 d 都要进入．于是 $B_i(z)=\{x\in X: x\pi\leqslant d\}$ 是消费者在形势 z 时可以选择的产品组的全体．这一集合称为预算集（budget set）．消费者行为的合理性在于由集合 $B_i(z)$ 中选取产品组 x，使得 $P_i(z|x)\cap B_i(z)=\phi$．设 $D_i(z)$ 是消费者在形势 z 时所选择的产品组的全体；D_i 称为需求映射（demand mapping）（或需求函数（demand function），如果 $D_i(z)$ 由单点组成）．有许多研究致力于明确映射 P_i，B_i 和 D_i 的性质．特别是，当 P_i 是函数时，已有相当长时间的研究．使映射 B_i 和 D_i 连续的条件也已确定．有特殊意义的是对需求函数 D_i 的性质的研究．事实上，有时仅把需求函数 D_i 看作首要的，而不是把偏好 P_i 看作首要的，会更为方便，因为前者更容易由所采集的关于消费者行为的信息来构造．例如，在一个（贸易静态）经济中，可以观察到近似于偏导数

$$\frac{\partial D_{ik}(x)}{\partial\pi_{\rho}},\ \frac{\partial D_{ik}(x)}{\partial d}$$

的量，这里 π_{ρ} 是产品 ρ 的价格，而 d 是收入．

环绕消费者合理行为理论的是群体选择（社会选择（social choice））理论；作为一条规则，它是有关离散的备选对象的．通常假定，在一个群体中有有限个参与者，以及有例如有限个备选对象．问题在于，当给定每个参与者对备选对象的偏好时，有关单个中选者的群体决策的选取．群体选择提供了各种选举模式；这里也用公理方法与对策论方法．

利益协议．利益持有者是经济系统的个体部分，而社会则是作为一个整体．可以提出消费者（消费者群体）：企业、政府部门、土地管理机构、计划与财

政机构等等作为这样的部分．对于利益协议的问题要区分两种互相渗透的方法：解析的，或构造的，以及综合的，或描述的．按照第一种方法，开始时有一条总体最优准则（作为整体的全社会的利益的陈述）．问题在于由一般的准则导出局部的（个人的）考虑个人利益的准则．在第二种方法中，恰好只有个人准则，以及问题在于如何把它们统一起来成为单个合成系统，使得它的功能导致从整个社会的观点来看是满意的结果．

直接有关第一种方法的是数学规划中的分解法．例如，假设在经济中有 m 个生产者，并设每个生产者 j 是由生产能力集 Y_j 来给定，这里 $Y_j \subset R^l$ 是紧凸集．又设对于整个社会给定一个目标函数 V，这里 V: $\mathbf{R}_+^l \to \mathbf{R}_+^l$ 是凹函数．经济应该按下列凸规划问题的结果的方式来组织：由条件 $y \geqslant 0$, $y \in \sum_j Y_j$, $V(y) \to \max$，求 $\bar{y}$. 由有效生产方法特征定理，可以断定，存在价格 $p \in \mathbf{R}_+^l$ $(p \neq 0)$ 使得

$$\bar{y}^{(j)} p = \max_{y^{(j)} \in Y_j} y^{(j)} p \text{ 对于所有 } j \text{ 成立;} \quad \bar{y} = \sum_j \bar{y}^{(j)}.$$

量 $y^{(j)} p$ 被解释为第 j 个生产者在价格为 p 时的利润．因此，由此可得，如果执行价格确定为对应的形式，那么对于每个生产者的利润最大化准则并不与公共目标相冲突．第二种方法已经在经济均衡模型的范围内大为发展．

经济均衡．假定经济是由一些有个人利益的个体所组成：生产者以指标 $j = 1, \cdots, m$ 来编号，而消费者以指标 $i = 1, \cdots, n$ 来编号．生产者 j 是由生产能力集 $Y_j \subset \mathbf{R}^l$ 和给出他或她的偏好系统的映射 F_j: $Z \to 2^{Y_j}$ 来描述的．这里 Z 是经济的可能状态集，它将在下面被具体化．消费者 i 是由消费上可接受的产品组全体 $X_i \subset \mathbf{R}^l$，产品的初始供给 $w^{(i)} \subset \mathbf{R}_+^l$，偏好 P_i: $Z \to 2^{X_i}$，以及最后还有收入分布函数 α_i: $Z \to \mathbf{R}$ 来描述的，这里 $\alpha_i(z)$ 指出消费者 i 在状态 z 时可采用的货币量．经济中可能的价格集是 Q．可能状态集是 $Z = \prod_i X_i \times \prod_j Y_j \times Q$．预算映射 B_i 在这里定义为：

$$B_i(z) = \{\tilde{x}^{(i)} \in X_i : \tilde{x}^{(i)} p \leqslant \alpha_i(z) + w^{(i)} p\}.$$

所描述的经济的一个均衡状态是指 $\bar{z} \in Z$ 满足条件

$$\sum_i \bar{x}^{(i)} = \sum_j \bar{y}^{(j)} + \sum_i w^{(i)},$$

$$\bar{x}^{(i)} \in B_i(\bar{z}),\ B_i(\bar{z}) \cap P_i(\bar{z}) = \phi,\ Y_j \cap F_j(\bar{z}) = \phi.$$

在本质上，经济的一个均衡状态是作为一个具有多个局中人的**非合作对策**（non-cooperative game）的在附加关于所有产品达到平衡的条件下的 von Neumann-Nash 意义下的解来确定的．

均衡状态的存在性已经在对原来的经济加上很一般的条件下被证明．为保证均衡状态是最优的，即它是目标函数依赖于消费者利益的某个总体最优化问题的解，加上非常严格的条件是必要的．例如，设 P_i 由凹连续函数 u_i: $\mathbf{R}^l \to \mathbf{R}_+$ 给定，F_j 由函数 $py^{(j)}$ 给定；又设

$$\alpha_i(z) = \sum_i \theta_{ij} y^{(j)} p,\ \theta_{ij} \geqslant 0,\ \sum_i \theta_{ij} = 1,$$

$$Q = \left\{ p \in \mathbf{R}_+^l : \sum_{k=1}^{l} p_k = 1 \right\},$$

这里 Y_j, X_i 是紧凸集，$0 \in Y_j$, $w^{(i)} \in \operatorname{int} X_i$．消费者指标的任何子集 $S = \{i_1, \cdots, i_r\}$ 形成原来的经济的一个子经济，其中 S 中的每个消费者 i_s 对应一个（并且只对应一个）生产者，其生产能力集是

$$\hat{Y}_{i_s} = \sum_{j=1}^{m} \theta_{i_s, j} Y_j.$$

收入分布函数在这里有形式为

$$\alpha_{i_s}(z) = y^{(i_s)} p.$$

一个状态 $z \in Z$ 称为是平衡的（balanced），如果

$$\sum_i x^{(i)} \leqslant \sum_j y^{(j)} + \sum_i w^{(i)}.$$

原来的经济的一个平衡状态被说成是被消费者联盟（也见**联盟**（coalition））S 所阻碍，如果在由联盟 S 所确定的子经济中，存在平衡状态 $\bar{z}^{(s)}$ 使得 $u_{i_s}(\bar{x}^{(i_s)}) \geqslant u_{i_s}(x^{(i_s)})$ 对于 $s = 1, \cdots, r$ 成立，并且不等式至少对于一个指标是严格的．经济的核心（core of the economy）是所有不被任何消费者联盟所阻碍的平衡状态集合．对于具有这些性质的经济，有下列定理：每个均衡状态属于核心．其逆不真；然而，有许多充分条件能使均衡状态集与核心互相接近或者完全重合．特别是，如果消费者个数趋向于无限，并且每个消费者对经济的状态的影响变得越来越小，那么均衡状态集就趋向于核心．核心与均衡状态集重合在具有（连续统）无限多个消费者的经济中成立（Aumann 定理（Aumann theorem））．

设经济是个市场模型（即，没有生产者），其参与者（消费者）集合是单位闭区间 $[0, 1]$，以下表示为 T．经济的状态是 $z = (x, p)$，其中 $p \in \{p \in \mathbf{R}_+^l : \sum_k p_k = 1\}$ 以及 x 是由 T 到 $\mathbf{R}_+^l$ 的函数，其每个分量是区间 T 上的 Lebesgue 可积函数．在参与者之间的产品初始分布是由函数 w 来给定的，$\int_T w > 0$，从而一个平衡状态 z 就是满足 $\int x = \int w$ 的状态．参与者的联盟就是 T 的 Lebesgue 可测子集．如果子集的测度为零，那么对应的联盟就称为零联盟．核心就是不被任何非零联盟所阻碍的平衡状态集．一个状态

$\bar{z}=(\bar{x}, \bar{p})$ 是均衡的，如果对于几乎所有的参与者 t，

$$u_t(\bar{x}(t)) = \max u_t(x(t)),$$

$$x(t) \in \{x: xp \leqslant pw(t)\}.$$

Aumann 定理断言，在这个经济中，核心与均衡状态集重合.

当均衡集特别是有限集或单点集时，其结构问题是很有意义的．这方面有 Debreu 定理．设市场模型集为 $W=\{(w^{(i)}, D_i)_{i=1}^n\}$，其中 $w^{(i)}\in\mathbf{R}_+^l$ 是对于参与者 i 的产品的初始供给，并且 $w=(w^{(1)},\cdots,w^{(n)})$ 是在集合 W 中确定具体模型的参数，$w\in\mathbf{R}_+^{n\cdot l}$. 映射 $D_i: Q\times M\to\mathbf{R}_+^l$ 代表对于参与者 i 的需求函数．函数 $D_1,\cdots,D_n$ 对于整个经济集合 W 是给定（不变）的．设 W_0, $W_0\subset W$，为其均衡状态集是无限集的经济的全体．Debreu 定理（Debreu theorem）断言，如果函数 D_1、$\cdots$, D_n 连续可微，并且至少对于一个参与者不存在饱和点，那么集合 W_0 的闭包在空间 W 中的（Lebesgue）测度为零．

数值方法．数理经济学与计算数学有密切的联系．线性规划与线性经济模型已经对线性代数的计算方法产生巨大的影响．本质上是由于线性规划，使得在计算数学中运用不等式已经变成与运用等式一样频繁．

经济均衡的计算是涉及许多方面的困难问题．例如，已经有许多工作致力于收敛于微分方程组

$$\dot{p}=F(p) \qquad (*)$$

的均衡的条件，这里 p 是价格向量，F 是超需函数，即需求函数与供给函数的差．均衡价格 $\bar{p}$，由定义，使得供需相等：$F(\bar{p})=0$．超需函数 F 或者是直接给定的，或者是由对应的均衡模型的更原始的概念来给定的．S. Smale（[8]）已经研究过比（*）远为一般的应用于市场模型的动力系统；除了价格 p 的随时间变化外，也考虑状态 x 的变化；这里容许轨线 $(p(t), x(t))_{t=0}^{\infty}$ 满足某个形为 $\dot{p}\in K(p)$, $\dot{x}\in C(p)$ 的微分包含，其中 $K(p)$ 和 $C(p)$ 是由市场模型确定的 p 和 x 的可能变化方向集．

经济均衡，对策的解，这样那样的极值问题的解都可以定义为某个适当的点到集映射的不动点．在数理经济学的研究范围内，计算各种各样的映射的不动点的数值方法已经得到发展．最著名的 Scarf 方法（Scarf method）（[6]），它是 **Sperner 引理**（Sperner lemma）和线性规划问题求解的**单纯形法**（simplex method）的思想的一种组合．

有关问题．数理经济学紧密联系着许多数学分支．有时很难确定数理经济学与数理统计，或者凸分析、泛函分析、拓扑学等等之间的界线．这里只需提到，例如，正矩阵、正线性（和齐次）算子和超线性点到集映射的谱性质的理论，都是在数理经济学的需要影响下发展起来的．

参考文献

[1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947（中译本：约翰·冯·诺意曼，奥斯卡·摩根斯特恩，竞赛论与经济行为，科学出版社，1963）.

[2] Канторович, Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959.

[3] Nikaido, H., Convex structures and economic theory, Acad. Press, 1968.

[4] Макаров, В. Л., Рубинов, А. М., Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., 1973.

[5] Миркин, Б. Г., Проблема группового выбора [информации], М., 1974（英译本：Mirkin, B. G., Group choice, Winston, 1979）.

[6] Scarf, H., The computation of economic equilibrium, Yale Univ. Press, 1973.

[7] Dantzig, G. B., Linear programming and extensions, Princeton Univ. Press, 1973.

[8] Smale, S., A convergent process of price adjustment and global Newton methods, *J. Math. Economics*, **2** (1976), 107－120.

Л. В. Конторович, В. Л. Макаров 撰

【补注】 数理经济学的一本经典著作是[A8]，而一本从最优化观点来看很有用的通论书是[A9]．数理经济学方面选论的论文可在[A10]－[A12]中找到．关于进一步论述用于经济学的动态系统，其中包括（最优）控制和变分学，也见[A13]－[A15]．书[A5]－[A7]，[A16]－[A20]是论述价格、效用函数和一般均衡理论的．在[A20]的更高级的版本中，意味深长地应用了测度论．

除了已经提到的领域外，许多其他的数学分支也可富有成效地用于经济学，其中包括分歧理论，Hamilton 动力系统和 Lie 群论[A25]．

社会选择（social choice）和投票体系（voting systems）的数学分析出人意外，其中断言对于社会选择的一个非常合理稳妥的公理集（传递性、独立性或与第三者无关性、一致通过性、无独裁者性）居然会导出矛盾．这类结果（已有许多）称为 Arrow 不可能性定理（Arrow impossibility theorems）（[A21]－[A24]）．它们必须连同 Kendortsev 悖论（Kondortsev paradox）一起来研究，后者对三名备选者和三名投票者情形，在简单多数投票规则下，给出了循环顺序，即三名备选者被三名投票者分别给出的顺序为：$x>y>z$、$y>z>x$, $z>x>y$.

来自 Sperner 引理的对于 Brouwer 不动点的数值计算的 Scarf 方法发展成为解方程的同伦方法（homo-

topy methods for solving equations). 粗略地说，它是把给定的问题不断形变直到求得一个平凡的问题([A26]). 这一观念又进一步发展为解方程组的连续性方法 (continuation methods) (见**连续性方法(对参数族)** (continuation method (to a parametrized family)); **连续性方法(对参数族，对于非线性算子)** (continuation method (to a parametrized family, for non-linear operators))). 许多以前已知的求解方法都变为这些观念的特殊情形. 文献精选是[A26] - [A29].

数学规划的分解法与中心导向的经济系统之间的关系在[A30]中得到广泛讨论.

参考文献

[A1] Handbook of mathematical economics, North-Holland.

[A2] Aumann, R. J., Markets with a continuum of traders, *Econmetrica*, **32** (1964), 39 - 50.

[A3] Debreu, G., Economies with a finite set of equilibria, *Econometrica*, **38** (1970), 387 - 392.

[A4] Hildenbrand, W and Mas-Collell, A. (eds.), Contributions to mathematical economics, in honour of Gérard Debreu, North Holland, 1986.

[A5] Debreu, G., Theory of Value, Wiley, 1959 (中译本: 德布鲁, 价值理论, 北京经济学院出版社, 1989).

[A6] Arrow, K. J. and Hahn, F. H., General competitive analysis, Oliver & Boyd, 1971.

[A7] Hildenbrand, W. and Kirman, A. P., Introduction to equilibrium analysis, North Holland, 1976.

[A8] Samuelson, P. A., Foundations of economic analysis, Havard Univ. Press, 1947.

[A9] Intrilligator, M. D., Mathematical optimization and economic theory, Printice Hall, 1971.

[A10] Newman, P. (ed.), Readings in mathematical economics, 1: Value theory, Johns Hopkins Press, 1968.

[A11] Newman, P. (ed.), Readings in mathematical economics, 2: Capital and growth, Johns Hopkins Press, 1968.

[A12] Reiter, S. (ed.), Studies in mathematical economics, Math. Assoc. Amer., 1986:

[A13] Gandolfo, G., Mathematical models and models in economic dynamics, North-Holland, 1971.

[A14] Chow, G. C., Analysis and control of dynamic economic systems, Wiley, 1975 (中译本: 邹至庄, 动态经济系统的分析与控制, 中国友谊图书公司, 1985).

[A15] Hardley, G. and Kemp, M. C., Variational methods in economics, North-Holland, 1971.

[A16] Levenson, A. M. and Solon, B. S., Outline of price theory, Holt, Rinehart & Winson, 1964.

[A17] Quirk, J. and Saposnik, R., Introduction to general equilibrium theory and welfare economics, McGraw-Hill, 1968.

[A18] Shephard, R. W., Theory of cost and production functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[A19] Negishi, T., General equilibrium theory and international trade, North-Holland, 1972.

[A20] Hildenbrand, W., Core and equilibria of large economy, Princeton Univ. Press, 1974.

[A21] Arrow, K. J., Social choice and individual values, Wiley, 1951 (中译本: 肯尼思·阿罗, 社会选择与个人价值, 四川人民出版社, 1987).

[A22] Sen, A. K., Collective choice and social welfare, Oliver & Boyd, 1970.

[A23] Murakami, Y., Logic and social choice, Routledge, Kegan, Paul, 1968.

[A24] Kelly, J. S., Arrow impossibility theorems, Acad. Press, 1978.

[A25] Sato, R., Theory of technical change and economic invariance, Acad. Press, 1981.

[A26] Eaves, B. C., Homotopies for computation of fixed points, *Math. Progr.*, 3 (1972), 1 - 22.

[A27] Allgower, E. L. and Georg, K., Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations, *SIAM Rev.*, **22** (1980), 28 - 85.

[A28] Allgower, E. L. and Georg, K., Continuation methods for numerically solving nonlinear systems of equations, Springer, 1987.

[A29] Eaves, B. C., Gould, F. J., Peitgen, H.-O. and Todd, M. J. (eds.), Homotopy methods and golobal convergence, Plenum, 1983.

[A30] Razumikhin, B. S., Physical models and equilibrium methods in programming and economics, Reidel, 1984 (译自俄文).

【译注】 这是在前苏联时代撰写的，因而就带有那个时代的特征. 其中最突出的一点是通篇不提"商品(commodity)"而只提"产品(product)". 唯一提到"商品"的一处是英译者加上去的. 实际上，本条目中所有的"产品"在西方文献中都是指"商品".

70年代以后，在Debreu([A3])的先驱工作的影响下，用微分方法来研究一般经济均衡理论成为数理经济学的中心. [B1]和[B2]是这方面的两本总结性的专著. 80年代以后，由于金融经济学的需要，关于非完全资产(asset)市场的一般均衡理论的研究形成热潮，[B3]是这方面的一本专辑.

参考文献

[B1] Mas-Colell, The theory of general economic equilibrium-a differentiable approach, Cambridge Univ. Press, 1985.

[B2] Balasko, Y., Foundations of the theory of general equilibrium, Acad. Press, 1988.

[B3] Geonakoplos, J. D. (ed.), Special issue on equilibrium with incomplete markets, *J. Math. Econ.*, **19** (1990).

史树中 译 韩继业 校

数学期望 [**mathematical expectation**; **математическое ожидание**], 平均值 (mean value)、随机变量的

随机变量的概率分布的一种数字特征. 在最一般的情形下, 给定**概率空间** (probability space) (Ω, $\mathscr{A}$, P) 上的随机变量 $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, 其数学期望是关于**概率测度** (probability measure) P 的 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral):

$$\mathrm{E}\,X = \int_{\Omega} X(\omega)\mathrm{P}(d\omega) \qquad (*)$$

(以积分存在为条件). 实值随机变量的数学期望又可以用 x 关于 X 的概率分布 P_X 的 Lebesgue 积分来计算:

$$\mathrm{E}\,X = \int_{R} x\,\mathrm{P}_X(dx).$$

X 的函数的数学期望可以用其分布 P_X 表示. 例如, 如果 X 是在 $\mathbf{R}$ 中取值的随机变量, $f(x)$ 是 x 的单值 **Borel 函数** (Borel function), 则

$$\mathrm{E}\,f(X) = \int_{\Omega} f(X(\omega))\mathrm{P}(d\omega) = \int_{R} f(x)\mathrm{P}_X(dx).$$

如果 $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则 X 的数学期望可以表示为 Lebesgue-Stieltjes (或 Riemann-Stieltjes) 积分

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x),$$

此处 X 在 (*) 意义下的可积性等价于积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$$

的有限性. 在特殊情形下, 如果 X 具有离散型分布, 其可能取的值为 $x_k (k = 1, 2, \cdots)$, 相应的概率为 $p_k = \mathrm{P}\{\omega : X(\omega) = x_k\}$, 则

$$\mathrm{E}\,X = \sum_k x_k\,p_k;$$

如果 X 具有概率密度为 $p(x)$ 的绝对连续分布, 则

$$\mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx;$$

而数学期望的存在性等价于相应级数或积分的绝对收敛性.

数学期望的主要性质

a) $\mathrm{E}\,X_1 \leqslant \mathrm{E}\,X_2$, 如果 $\forall\,\omega \in \Omega, X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$;

b) $\mathrm{E}\,C = C$, 对每个实常数 C;

c) $\mathrm{E}(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\,\mathrm{E}\,X_1 + \beta\,\mathrm{E}\,X_2$, 对一切实数 α 和 β;

d) $\mathrm{E}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}X_n$, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}|X_n|$ 收敛;

e) $g(\mathrm{E}\,X) \leqslant \mathrm{E}\,g(X)$, 如果 g 是凸函数;

f) 每一有界随机变量具有有限的数学期望;

g) $\mathrm{E}(\prod_{k=1}^{n} X_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}X_k$, 如果随机变量 $X_1, \cdots, X_k$ 相互独立.

可以自然地定义具有无穷数学期望的随机变量的概念. 某些随机游动 (见 **Bernoulli 随机游动** (Bernoulli random walk)) 的返回时间提供了典型的例子.

用数学期望可以定义概率分布的许多数值泛函特征 (作为给定随机变量的适当的函数的数学期望), 例如, **生成函数** (generating function)、**特征函数** (characteristic function) 和各阶**矩** (moment), 特别是**方差** (dispersion) 和**协方差** (covariance).

数学期望是随机变量取值的一种位置特征 (它的分布的均值). 这里, 数学期望作为分布的典型值, 它的作用相当于力学中的静力矩-质量分布的质心坐标. 数学期望不同于用普通术语描述的分布的其他位置特征, 诸如中位数 (见**中位数** (**统计学中的**) (median (in statistics))) 和**众数** (mode), 它以及描述与其相应的散布特征的方差, 在概率论的极限理论中有着重要的作用. 数学期望的意义最完全地体现于**大数律** (law of large numbers) (亦见 **Чебышев 不等式** (Chebyshev inequality)) 及**强大数律** (strong law of large numbers). 特别地, 若 $X_1, \cdots, X_n \cdots$ 是具有有限数学期望 $a = \mathrm{E}X_k$ 的独立同分布的随机变量序列, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right] \to 0.$$

此外, 以概率 1 有

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to a.$$

作为随机变量的期望值的数学期望的概念, 首先在 18 世纪同机会博弈的理论相联系而提出. 最初, "数学期望" 的术语是作为赌博者期望的盈利而引入的. 对于可能的盈利 $x_1, \cdots, x_n$, 若其相应的概率为 $p_1, \cdots, p_n$, 则期望盈利为 $\sum x_k p_k$. 在现代意义下, 数学期望的概念的推广和应用应归功于 П. Л. Чебышев.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H. 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952).

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷上、下册, 科学出版社, 1964, 1979).

[3] Loève, M., Probability theory, Springer, 1978 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 上册, 科学出版社, 1965).

[4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1960).

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译

数学归纳法 [**mathematical induction**; **математическая**

индукция]

一种基于下述数学归纳原理（principle of mathematical induction）的证明数学结果的方法：依赖于自然数 x 的断言 $A(x)$ 被认为证明了，如果 $A(1)$ 已被证明，而且对任何自然数 n，由假定 $A(n)$ 成立可以推出 $A(n+1)$ 也成立.

$A(1)$ 的证明是归纳的基础（induction base）. 由假定 $A(n)$ 成立去证明 $A(n+1)$ 称为归纳步骤（induction step）. 这里 n 称为归纳参数（induction parameter），为证明 $A(n+1)$ 而对 $A(n)$ 所作的假设称为归纳假设（induction hypothesis）. 数学归纳原理也是**归纳定义**（induction assumption 或 inductive definition）的基础. 这种定义最简单的例子是给定的字母表 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ 上长度为 n 的字的定义.

归纳基础为：字母表中每个符号是长度为 1 的字. 归纳步骤为：如果 E 是长度为 n 的一个字，则每个字 Ea_i 是长度为 $n+1$ 的字，这里 $1 \leqslant i \leqslant k$. 归纳也可从第零步开始.

往往出现这种情况：$A(1)$ 和 $A(n+1)$ 可用类似的办法证明. 在这种情况下使用数学归纳原理的下述等价形式更为方便. 如果 $A(1)$ 成立，并且对任何自然数 n，由假定 $A(x)$ 对所有自然数 $x<n$ 成立可以推出 $A(x)$ 对 $x=n$ 也成立，则对任何自然数 x $A(x)$ 都成立. 这种形式的数学归纳原理可用于证明参数 x 遍及一个超穷类型良序集的断言 $A(x)$（**超穷归纳法**（transfinite induction））. 作为超穷归纳的一个简单例子，人们可对遍及给定的字母表上带字典序的所有字的参数进行归纳，还可对给定逻辑数学演算中的构造公式进行归纳.

有时为了对断言 $A(n)$ 进行归纳证明，人们不得不把 $A(n)$ 同一系列其他断言（离开这些断言 $A(n)$ 的归纳便不能顺利进行）放在一起同时进行归纳处理. 在形式算术中，也可给出这样的断言 $A(n)$，使得在所考虑的演算范围内不加入一些依赖于 n 的新的辅助断言归纳就无法实行（见[3]）. 在这些情况下，必须用复合数学归纳法（compound mathematical induction）处理一系列断言的证明. 所有这些断言可形式地统一成一个合取式，但是实际上这只能使讨论复杂化并排除了非形式地合理引用具体归纳假设的可能性.

在一些具体的数学研究中用复合归纳法定义的概念和证明的结果在数目上已达到三位数（见[4]）. 在这种情况下，由于归纳中大量地交叉引用归纳假设，为了在归纳参数取大数值时简捷地（非形式地）理解任何（甚至很简单的）一个定义或结果，读者都必须熟悉归纳参数取小的数值时一切归纳思想的内容及其性质. 显然，处理这一问题循环的唯一的逻辑上正确的做法是对所有这一系列思想进行公理性刻画. 因此，由复合数学归纳法引出的大量思想导致归纳定义和归纳证明中需要应用**公理方法**（axiomatic method）. 这是必须用公理方法解决具体数学问题而不仅是有关数学基础的问题的明显例证.

参考文献

[1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1-2, Springer, 1968 - 1970.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，1984 - 1985).

[3] Цинман, Л. Л., 《Матем. сб.》, 77 (1968), 1, 71 - 104.

[4] Адян, С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975 (英译本：Adyan, S. I., The Burnside problem and identities in groups, Springer, 1979)

С. И. Адян 撰

【补注】 在上文中自然数是 1, 2, …（即不包括 0）.

参考文献

[A1] Maclane, S. and Birkhoff, G., Algebra, Macmillan, 1967.

孙智伟 译

数理语言学 [**mathematical linguistics**; **математическая лингвистика**]

一门数学学科，其目的是发展和研究形成描述自然语言结构（即语言学的元语言）的形式工具的基础的思想. 数理语言学的肇兴大致可追溯到 20 世纪 50 年代，为其注入生命力的首先是理论语言学的内部需要，那时使理论语言学的基本概念精确化的必要性已蕴酿成熟，其次是语言信息自动化处理的问题（见**自动翻译**（automatic translation））. 在数理语言学中，算法、自动机和代数的理论方法被广泛地使用. 数理语言学在保持其应用特色的同时，持续不断地沿转变为纯数学学科的方向发展，本质上已成为数理逻辑的一个分支. 同时，数理语言学的应用范围在扩大；它的方法在程序设计理论中得到应用.

语言学的概念如果着重于语言结构的形式描述则属于**结构语言学**（structural linguistics）的范畴. 这些概念中最重要的是语言作为"纯关系系统"的表示，它使语言接近于数学中研究的抽象系统. 这个表示使语言功能的概念具体化，使之作为某些抽象对象——"意义"到另一类型对象——"文词"的变换或其逆变换. 这导出用数学方法研究这个变换的思想（在"意义"和"文词"这两个概念确立以后）. 如果试图"在整体上"考虑这个变换，这种处理方法的应用是困难的（由于它极端的复杂性，也由于形式化"意义"这个概念的困难）. 但是，清晰的理解提示将该变换分解成几个步骤. 例如，包括从陈述的"意义"到"无线性次序的语法结构"的过程，作为某一阶段最粗糙的分解，而所谓"无线性次序的语法结构"即指一个由

语法联结的陈述的集合，只是尚没有排列成线性序列；在下一阶段就可以得到单词的线性序列，然后变换成音的串．为了更精细的分解、引入几个层次的语法结构，每一层次逐渐远离"意义"、靠近"文词"；"后语法"阶段也加以进一步的分解．这样一个阶段已经较易以数学描述，如果使得中间层次的对象的表示更精确且用能行映射模拟从一个层次到另一层次的转移．无疑这变换是含糊的，所有的或几乎所有的（依赖于分解的方法）中间步骤也是如此．这关系到语言的最重要的特征之一，同义词（synonyms）的出现，即用不同的词表示同一个内容的可能性．因此它并不适合于构造一个确定性的能行系统（算法），但适合于构造非确定性系统（演算），对某层次的一个给定对象它容许枚举下一层次对应的对象或与它同义的（在同一层次的）对象，或者枚举给定层次的"正确"对象（即用某些已知的正确方法可与前一层次的对象相对照的对象）的集合，或者枚举两个给定的相邻层次的对象相互对照的偶对之集合（例如"句子+它的语法结构"）等等．这种类型的演算以**形式文法**（grammar, formal）著称．模拟语言对象变换的形式文法与用于这些相同对象的形式描述的构造同时出现．另外，在同一层次的对象集合中出现分类和关系，很多方面类似于传统文法范畴（如词类、性、格等），并且在许多情形与它们一致．没有这些分类和关系的引入，自然语言的形式文法的现实构造实际上是不可能的．

这样可以将一语言的形式描述分成以下三个方面：不同层次的语言对象的结构的描述，在这些对象集合上的某些特定关系和这些对象集合分类的描述，以及个别对象到其他对象的变换和"正确"对象集合的结构的描述．与这些方面相联系，数理语言学分为三个基本部分：1)词类结构的描述方式的分析和研究；2)语言对象集合上语言学上重要关系和这些对象集合分类的研究（为此目的而构造的形式系统通常称为**语言的解析模型**（analytic model of a language)；3)形式文法理论．

为了描述词类的结构，要用语法结构、它被表示为一个特殊形式的图或有向图，通常具有标号顶点或边．这是关于"表面"层次（即离"意义"最远的层次）描述的最充分发展的理论．在这些层次其结构通常是树．"较深"层次的描述方法也已被深入地研究．为此，特别提出了所谓词函数（lexical function）这工具，它在单词组合的意义的描述中的作用类似于性、格、数等传统范畴在语法组合描述中的作用．还没有严格描述"意义"层次的任何方法，但许多研究似乎表明：对这一目标"逐次逼近"也许会产生意义的形式描述的一个途径．这并不排除其他途径：特别地，大量的研究致力于自然语言中谓词、命题联结词、量词的表示方法、致力于形式逻辑语言到自然语言的翻译及其逆过程．这里也衔接上所谓的语义语言（semantic language）的设计工作，其中意义与文词用简单而严格的形式方法相联系．

语言的解析模型具有重要性，特别是因为它们使得传统语言学的许多概念和范畴的逻辑本质更加精确．这些模型不总是具有能行程序的性质，因为它们可能包含这样的概念，如被视为给定的某语言的文法上正确的句子的（无穷）集合．然而在许多模型中，初始数据表示为有限集和有限性的关系；这些情形中模型中的程序是能行的．与解析模型理论接近的是语言破译（linguistic deciphering）理论；它的目标是构造程序，在适当的解析模型中，应用于语言的'无序'经验数据，这些程序总是能行的，且容许人们不仅获得抽象的定义而且获得具体语言结构的具体信息（例如，除了某些足够长的文词外，不用任何有关该语言的信息而实现将语言音素集合自动划分为元音类和辅音类的算法）．

形式文法理论在数理语言学中占有中心地位，因为它使人们得以模拟语言功能最本质的方面——意义到文词的过程及其逆过程，也因为这一点，它起了数理语言学其余部分之间的联结作用．形式文法理论工具的本质在许多方面都接近于算法和自动机理论．形式文法的其他类型中得到最充分发展的是对一种语言的文法上正确句子集合的刻画和把语法结构归因于这些句子．这里，句子模拟为有限字母表上的一些字符串（单词、字），字母表上的元素解释成自然语言的单词（因此，数理语言学中认为术语"字符串"比术语"单词"好，同样字母表常称为字典（dictionary））且语法上正确的句子的集合的模型是某种形式语言．特别地，**生成文法**（grammar, generative）就是这一类型．一种生成文法本质上是一种 Post 演算的特殊情形：它的组成部分包括分成基本的和辅助的两部分的有限字母表以及演绎规则（deduction rule）的一个有限集合，其中演绎规则是形如 $\varphi \to \psi$（φ 和 ψ 是字符串）的替换规则和一个公理（通常由一称为初始符（initial symbol）的辅助符号组成）．由这种文法生成的（形式）语言是由公理导出的基本字母表上的字符串集合．语言学的应用上最重要的生成文法类是**上下相关文法**（grammar, context-sensitive），其中每一规则具有形式 $\xi_1 A \xi_2 \to \xi_1 \theta \xi_2$，这里 ξ_1，ξ_2，θ 是基本的和辅助的字母表之并上的字符串，A 是一辅助符号且 θ 是非空字符串．一个上下文相关文法容许以自然方式串连由其语言生成的结构成分的标记系统的串．这类文法从纯数学方面看也是最重要的，因为由上下文相关文法生成的语言类是原始递归集合的简单而很重要的

子类．而在上下文相关文法中，无论从理论还是从应用的观点看，**上下文无关文法**（grammar, context-free）又具有特别重要性，其中文法规则具有形式 $A \to \theta$，这里 A 是一个辅助符号．与上下文无关文法相似的文法有**支配文法**（grammar, dominating），它生成形式语言，但这些语言中组成的字符串是从属树；还有**范畴文法**（grammar, categorial），它以词的语法性质上的信息指派的一个特别方法为其特征．形式文法的其他主要类型是**变换文法**（grammar, transformational）；它们实现了一般不连接的语法结构到字符串的变换，这些文法为描述自然语言结构提供了更广阔的前景，因为它们容许分别地讨论词之间的语法和线性关系，从而更好地表达语言的实际情况．

形式文法理论，除了有它的"传统"语言学的应用之外，已在为描述程序设计语言和编译器的程序设计理论中得到了应用．为达到这些目的上下文无关文法特别广泛地应用着，其他更一般形式的文法也有应用．

参考文献

[1] Хомский, Н., в кн., Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, 412 − 527.

[2] Гладкий, А. В., Мельчук, И. А., Элементы математической лингвистики, М., 1969.

A. В. Гладкий 撰

【补注】 生成文法理论已得到进一步的发展，一个标准的论著是[A4]．在[A3]中这个理论已应用到语言学中发展起来的若干文法形式系统．[A1]中研究了语言文法形式系统的复杂性理论．

自然语言的意义和形式文法的关系已被逻辑学家 R. Montague 在[A5]，[A6]中建立．[A2]是一本尤其适用于语言学者的导引书．

参考文献

[A1] Barton, G. E., Berwick, R. C. and Ristad, E. S., Computational complexity and natural language, M. I. T., 1987.

[A2] Dowty, D. R., Wall, R. E. and Peters, S., Introduction to Montague semantics, Reidel, 1981.

[A3] Savitch, J. W., Bach, E., Marsh, W. and Safran-Naveh, G., The formal complexity of natural language, Reidel, 1977.

[A4] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley, 1979.

[A5A] Montague, R., Universal grammar, *Theoria*, **36** (1970), 373 − 398.

[A5B] Montague, R., Univeral grammar, in R. H. Thomason (ed.): Formal philosophy. Selected Papers of Richard Montague, Yale Univ. Press, 1974, 222 − 246, Reprint of [A5A]

[A6A] Montague, R., The proper treatment of quantification in ordinary English, in K. J. J. Hintikka, J. M. E. Moravcsik and P. Suppes (eds.): Approaches to Natural Language, Reidel, 1973, 221−242.

[A6B] Montague, R., The proper treatment of quantification in ordinary English, in R. H. Thomason (ed.): Formal philosophy. Selected papers of Richard Montague, Yale Univ. Press, 1974, 222−246. Reprint of [A6A].

苏开乐 葛显良 译

数理逻辑[**mathematical logic**; **математическая логика**]，符号逻辑（symbolic logic）

数学的一个分支，涉及数学证明的研究和数学基础问题的研究．

历史梗概．17 世纪 G. Leibniz 就提出设想，为整个数学建立一种通用语言，并在这个语言的基础上把数学证明形式化．但直到达 19 世纪中叶才出现第一个科学的工作，G. Boole (1847)，A. De Morgan (1858) 把 Aristoteles 逻辑代数化．此后，G. Frege (1879) 和 C. Peirce (1885) 把谓词、变元和量词的逻辑引进代数语言之中．于是这种语言便可以应用于数学基础问题的探讨．

另一方面，19 世纪非 Euclid 几何学的出现强烈动摇了数学家对几何直觉绝对可靠性的信心，而这种直觉正是 Euclid 几何学赖以建立的基础．对几何直觉可靠性的怀疑也来自微积分学的发展，数学家得到了处处连续而处处不可导的函数这种不可思议的例子．这就要求我们区分实数与基于几何直觉的变数这两种概念．这一问题分别由 K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor 以不同的方法解决．他们证明了可以把分析和函数理论算术化，从而整数的算术被看成整个经典数学的基础．接着，算术的公理化由 Dedekind (1888) 和 G. Peano (1891) 完成．与此相连，Peano 创造了一种更适合于表示逻辑语言的系统．后来，这一系统在 B. Russell 和 A. Whitehead 合著的《数学原理》(Principia Mathematica (1910)) 一书中得到完善．在此书中他们试图把整个数学都归约到逻辑．但是，这一尝试没能得到圆满的成功，因为单从纯粹逻辑公理出发不可能推出无限集合的存在．尽管数学基础的 Frege-Russell 逻辑主义计划未能实现它的主要目标，即把数学归约为逻辑．但是在他们的文章中创造了有用的逻辑工具，没有这一工具，数理逻辑这种可贵的数学理论就不可能出现．

到 19，20 世纪之交，人们发现了关系到集合论基本思想的悖论（antinomy）．当时最引人注意的是 Russell 悖论（Russell paradox）．令 M 是一个集合，它恰好含有所有不以自身为元素的集合作为元素．这就容易看出，M 是自身的一个元素当且仅当 M 不是自身的元素．当然，为了避免这种矛盾，人们可以说，

这样的集合 M 不可能存在．然而，如果一个集合严格地由所有满足某种性质的元素所组成，这种性质又可以清楚地定义出来，例如上面给出的 M 的定义那样，但这样的集合却不一定存在，那么怎样才能保证日常工作中不会再遇见那些也可能并不存在的集合呢？还有，一般说来，一个集合的定义要满足什么条件才会使此集合确实存在呢？无论如何，至此有一件事是清楚的：Cantor 的集合论必须加以某种限制．

L．E．J．Brouwer（1908）反对把经典逻辑的法则应用到无限集合上．在他的直觉主义计划中提出在讨论中要排除**实无穷抽象**（abstraction of actual infinity），即拒绝把无穷集合看作已完成的类．在承认有任意大的自然数存在的同时，直觉主义者反对把全体自然数看作一个已完成的集合．他们认为，在数学中每个涉及对象存在性的证明都必须是构造性的，这就是说，必须把那个对象构造出来．如果假设要找的对象不存在就会导出矛盾，在直觉主义者的观点看来，这还不能当作是这个对象存在的证明．直觉主义着重批评的目标是**排中律**（law of the excluded middle）．由于这条定律最初只在有限集合中加以考虑，而又看到许多关于有限集合的性质对无限集合不再满足的事实（例如，部分小于全体），直觉主义者认为把这条定律用于无限集合是不允许的．例如，要确定 Fermat 问题有肯定或否定解，直觉主义者认为必须给出相应的解．在 Fermat 问题没有解决之前，这个要么肯定要么否定的析取被看作是不合法的．直觉主义的这一要求甚至在考虑关于有限集合的问题时也会引起困难．请闭上眼想象，一个瓮中有三个黑球和三个白球，从这个瓮中取出一个球再放回去．依直觉主义的观点，如果没有人看见这个球，那就不可能知道它是什么颜色．然而不论怎样狡辩，毫无疑问可以肯定，这个球的颜色不是黑的，就是白的．

直觉主义者用有趣而独特的方法构造了他们自己的数学，但是比起经典数学来要复杂得多，麻烦得多．直觉主义者对数学基础问题研究的贡献是他们进一步明确地强调了数学中构造性与非构造性的区别；对数学发展中遇到的许多困难，他们给出了仔细的分析，为克服这些困难作出了贡献．

19 世纪末 20 世纪初 D．Hilbert（见[9]附录 Ⅶ－Ⅹ）计划用另外的方法来克服数学基础中出现的这些困难．他设计的路线着眼于将公理化方法应用于讨论流行数学的形式模型，应用于探讨这种模型的相容性．他限定在应用中只能用可靠的有限方法，他的路线被称为数学中的 Hilbert 有限主义（Hilbert finitism）．注意到几何直觉的不可靠性，Hilbert 首先着手对 Euclid 几何作仔细的考察，让它摆脱直觉的作用．这一努力的结果是《几何基础》（Grundlagen. der Geometrie（1910））一书的出版（[9]）．

各种理论的相容性问题在 Hilbert 之前就受到实质性的考虑．F．Klein（1871）构造的非 Euclid Лобачевский 几何的射影模型，就把 Лобачевский 几何的相容性问题归结为 Euclid 几何的相容性问题．类似地，Euclid 几何的相容性可以归结到分析的，即实数理论的相容性．然而，究竟怎样才能为相容性的证明构造分析的和算术的模型尚不清楚．Hilbert 的贡献在于为探索这个问题给出了一种直接途径．一个给定理论的所谓相容性就是从这个理论推不出矛盾（contradiction），也就是说，不能从它既证明出一个论断 A、又证明出它的反面 $\neg A$．Hilbert 建议把要讨论的理论表示为形式化的公理系统，在系统中能推出这一理论的一切定理，并且只有这个理论的定理才能被推出来．那么，为了证明相容性，就只要证明还有一些论断不能从这个理论推出来．这样的一门以数学理论的相容性为研究对象的学科，Hilbert 称之为元数学（metamathematics），或**证明论**（proof theory）．

Hilbert 写道，集合论的悖论并不是由排中律引起的，而是"由于数学家用了一些不能允许的和无意义的想法，而这些在我的证明论中都被排除在外了 ….不许数学家应用排中律，就像不许天文学家使用望远镜，或不许拳击手使用拳头一样（见（9））．Hilbert 提出要区分经典数学中"实在的"和"理想的"假设．前者有真实意义而后者就不一定．对应于实无穷而作的假设就是理想的．为了使简单的逻辑结论能够应用到关于无穷集合的讨论，可以在实在的假设之外附加上理想的假设．这样能使整个理论得到实质性的化简．这就像在射影几何中引入无穷远直线，而使平面上任意两条平行线都相交于这个无穷远线．

Hilbert 为数学基础提出的计划以及他为此付出的热情，激励了同时代人广泛地发展**公理方法**（axiomatic method）．因此，数理逻辑作为一个独立数学分支的形成，是与 Hilbert 在 20 世纪初证明论的开创、以及后来在 Frege，Peano 和 Russell 的逻辑语言基础上证明论的发展联系在一起的．

数理逻辑的对象和基本分支；与数学其他领域的关系．现代数理逻辑的对象是多样的．首先要谈到对建立于经典谓词演算之上的逻辑和逻辑数学演算的研究．1930 年 K．Gödel 证明了谓词演算的完全性定理，由此得到数学中的所有恒真的纯逻辑论断的集合与谓词演算中所有能推导出来的公式的集合是相同的（见 **Gödel 完全性定理**（Gödel completeness theorem））．这个定理表明，谓词演算是可以用来把数学形式化的一个逻辑系统．在谓词演算的基础上，许多种逻辑－数学理论被构造出来（见**逻辑－数学演算**（logico-mathematical calculus））．流行数学的形式化的代表有：算术、

分析，集合论、群论，等等．与**初等理论**（elementary theory）并立，高阶理论也被考虑．在高阶理论中，允许对谓词、谓词的谓词等等取量词．在这些形式化的逻辑系统中所研究的经典问题，是考察系统中演绎的结构，各种公式的可推导性、以及相容性和完全性等问题．

1931 年证明的关于算术的 Gödel **不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem），摧毁了 Hilbert 用上面提到的方法完全解决数学基础中的问题的乐观希望．这个定理说明，如果一个包含算术的形式系统是相容的，那么系统中代表这一相容性的论断不能在这个系统中形式化地证明．这说明数学基础的问题不像 Hilbert 最初希望或相信的那样简单．但是 Gödel 早已注意到算术的相容性可以用相当可靠的构造性方法加以证明，尽管这远不是在算术中被形式化的方法．G. Gentzen（1936）和 П. С. Новиков（1943）也得到了算术的相容性的类似证明（亦见 **Gentzen 形式系统**（Gentzen formal system））．

研究 Cantor 集合论和相关的悖论的结果是,各种各样系统的**公理集合论**（axiomatic set theory）被构造出来．这些系统对集合的形成分别加以各种限制，以排除已知的不相容性．在这些公理系统中，数学的很大部分能够被发展出来．对集合论的较丰富的公理体系来说，相容性问题仍然没有解决．公理集合论所获得的最重要的结果要数 Gödel（1939）在 Bernays-Gödel 系统 Σ 中关于**连续统假设**（continuum hypothesis）和**选择公理**（axiom of choice）的相容性的结果，以及 P. Cohen（1963）关于这些公理对于 Zermelo-Fraenkel 公理系统 ZF 的独立性的结果．应该指出的是，这两个公理系统 Σ 和 ZF 的相容性是等价的．Gödel 为了证明他的结果，引进了构造集这一重要概念，（见 **Gödel 构造集**（Gödel constructive set））．他证明了所有可构造集组成 Σ 的一个模型．Gödel 的这一方法曾被 Новиков 用来在**描述集合论**（descriptive set theory（1951））中证明一些其他相容性结果．为了构造集合论 ZF 的模型，使得连续统假设或选择性公理的否定在其中成立，Cohen 引进了所谓**力迫法**（forcing method），这一方法后来成为集合论中构造具有各种性质的模型的基本方法（亦见**模型论**（model theory））．

数理逻辑中最值得提及的成就之一是**一般递归函数**（general recursive function）概念的发展，以及 **Church 论题**（Church thesis）的形成．Church 论题是一个论断，它断言一般递归函数严格地描述了**算法**（algorithm）这一直觉的概念．精确描述而又互相等价的许多算法概念中应用最广的是 **Turing 机**（Turing machine）和 Марков **正规算法**（normal algorithm）的思想．实质上任何数学都与这种或那种算法相联．但是在数学中要确定一些算法问题是不可判定的（见**算法问题**（Algorithmic problem），则只有当算法概念精确化之后才有可能．不可判定的算法问题在数学的许多领域中被发现（代数，数论，拓扑，概率论，等等），它们甚至与数学中用得非常广泛的基本的思想都有关．在数学的各种领域里研究算法问题，肯定会把数理逻辑的思想和方法渗透进去，从而也能解决一些其他并非算法性的问题．

严格的算法概念的发展使得有可能改进可行性概念，并用以在数学中发展一种精确的构造性的方向（见**构造性数学**（constructive mathematics））．它体现某些直觉主义的特色，但从本质上与之不同．构造性分析，构造性拓扑，构造性概率论、等等，都已经奠定了基础．

在算法理论本身，我们可以举出递归算术领域的研究，包括递归集和递归可枚举集的各种分类，递归可枚举集的不可解度，对算法描述的和算法演算的（就时间和广度而言的）复杂性研究（见**算法的计算复杂性**（algorithm, computational complexity of an）；**算法的描述复杂性**（algorithm, complexity of description of an））．算法理论中一个不断发展的领域就是**枚举**（enumeration）理论．

如前所述，公理化方法对数学的许多领域的发展都有很大的影响．特别重要的是这个方法被运用到代数之中．数理逻辑和代数结合就产生了泛代数系统理论（见**代数系统**（algebraic system）），也称**模型论**（model theory）．这个理论的奠基人是 А. И. Мальцев，A. Tarski 以及他们的追随者．这一方面、引人注意的是研究模型类的初等理论，特别是，这些理论中的可判定性问题，模型类的公理化问题，模型的同构问题，模型类的范畴性和完全性问题等．

算术和分析的非标准模型的研究在模型论中占有重要的一席．早在微积分初期，在 Leibniz 和 Newton 的工作中，无穷小和无穷大量都被看作是数．后来，出现了变量，数学家们才不再使用无穷小的数，因为它们的模小于任何正实数而不是零，这样就需要放弃 Archimedes 公理．只有在三个世纪之后，作为数理逻辑发展的一个结果，才有可能建立起具有无穷小和无穷大数的（非标准）分析，它相对于通常的实数的（标准）分析是协调的（见**非标准分析**（non-standard analysis））．

我们还应注意到公理化方法对直觉主义数学的影响．早在 1930 年，A. Heyting 就提出了命题和谓词的**直觉主义逻辑**（intuitionistic logic）形式系统（构造性命题和谓词演算）．后来、直觉主义分析的形式系统也被提出（例如见[8]）.直觉主义逻辑和数学的众多研究都与形式系统有关．有人特别研究一种所谓**中间逻辑**

(intermediate logic)(也叫超直觉主义逻辑)，即间乎经典和直觉主义逻辑之间的逻辑．公式的 Kleene 可实现性概念是用经典数学的观点来解释直觉主义真实性的一种尝试．然而、并非命题演算的每个可实现的公式都是直觉主义(构造性)命题演算中可推导的．

模态逻辑(modal logic)也已被形式化．然而，尽管关于模态逻辑形式系统及其语义(**Kripke 模型**(Kripke models))有大量的文章，仍只能称之为尚未适当整理的事物的堆积．

此外，数理逻辑还具有更实用的价值，它的思想和方法正在一年比一年更深入地渗透进控制论、计算数学和结构语言学之中．

参考文献

[1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1－2, Springer, 1968 － 1970.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林、元数学导论，科学出版社，1984).

[3] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

[4] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973 (英译本：Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd, 1964).

[5] Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А., Математическая логика, М., 1979.

[6] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

[7] Новиков, П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977.

[8] Kleene, S. C. and Vesley, R. E., The foundations of intuitionistic mathematics: especially in relation to recursive functions, North-Holland, 1965.

[9] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913.

[10] Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., Foundations of set theory, North-Holland, 1973.

[11] Математика, XIX века. Математическая логика, Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

[12] Mostowski, A., Thirty years of foundational studies, in Foundational studies: Selected Works, Vol. 1. PWN & North-Holland, 1979, 1－176.

也可以参阅数理逻辑各分支的文献． С. И. Адян 撰

【补注】 数理逻辑的完整的基础参考文献是[A8]．非标准分析开拓性的教材是 A. Robinson 写的[A10]，亦见[A2]．

参考文献

[A1] Heyting, A., Intuitionism, an introduction, North-Holland, 1956.

[A2] Robinson, A., Non-standard analysis, North-Holland, 1971.

[A3] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977.

[A4] Brouwer, L. E. J., Collected works, North-Holland, 1975.

[A5] Šanin, N. A. [N. A. Shanin], On the constructive interpretation of mathematical judgements, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **23** (1963), 109－190 (*Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **52** (1958), 226－311).

[A6] Troelstra, A. S. and Dalen, D. Van, Constructivism in mathematics, an introduction, 1－2, North-Holland, 1989.

[A7] Bishop, E. A., Foundations of constructive analysis, McGraw-Hill, 1967.

[A8] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977.

[A9] Muller, G. (ed.), Bibliography of mathematical logic, 1－4, Springer, 1988.

[A10] Robinson, A., Introduction to model theory and the metamathematics of algebra, North-Holland, 1963.

沈复兴 译

数学模型[**mathematical model**; **математическая модель**]

对外部世界某类现象用数学符号体系表示的一种(近似的)描述．数学模型是认识外部世界与预测和控制的一个有力工具．数学模型的分析能够深入了解被研究现象的本质．数学模型化(mathematical modelling)的过程，即借助于数学模型对现象进行研究，能分成四个阶段．

第一阶段是说明与模型的基本对象有关的规律．这个阶段需要对与现象有关的事实具有广泛的认识并深入了解其内部联系．这个阶段的完成在于用数学术语定性地描述该模型各对象之间的关系．

第二阶段是研究数学模型所引出的数学问题．这里的基本问题是解正问题(direct problem)，即作为模型分析的结果得到输出数据(理论上的结果)，然后再将它们与现象的观察结果相比较．在这个阶段，分析数学模型所必须的数学工具以及计算技术——为求解复杂数学问题而得到定量输出信息的有力手段——起着主要作用．基于各种不同数学模型而产生的数学问题往往是相同的(例如，**线性规划**(linear programming)的基本问题反映了性质上各不相同的情形)．这就为把这些典型的数学问题作为由现象中抽象出来的独立对象来考虑提供了根据．

第三阶段是阐明所采用的(假设的)模型是否满足实践标准，即观测结果与此模型的理论推断在观测精度范围内是否相符合．如果该模型是完全确定的，它的所有参数已被给定，则确定理论推断与观测的偏差给出了正问题的带有偏差后验估计的解．如果偏差在观测的精确度范围之外，则该模型不能被接受．通常，在构造模型时，某些特征尚未确定．有些问题中模型的特征(参数的．函数的)是确定的，因而输

出信息在观测精度范围内与现象的观测结果是可比的，这些问题称为反问题（inverse problem）．如果一个数学模型是这样的，即无论怎样选取特征均不能满足这些条件，则这个模型对该现象的研究是无用的．应用一个实践标准去评估数学模型使得人们能够在构成所研究（假设的）模型的基础的假设有效的条件下去引出结论．这是研究不能直接进入的宏观和微观世界的现象的仅有方法．

第四阶段是与现象的观测数据相联系对模型的事后分析，以及更新模型．在科学技术发展过程中，现象的数据变得越来越精确，而根据一个已被公认的数学模型得到的输出不符合对现象的认识的时候已经来临．因此产生了构造新的、更精确的数学模型的必要性．

用于解释数学模型构造中这些特定阶段的一个典型例子是太阳系模型．对天空星星的观察在很早的古代已经开始．对这些观察的初步分析使得人们从整个错综复杂的天体中找出行星．这样，第一阶段是研究对象的选择．第二阶段是确定它们运动中的规则性（一般地，对象和它们的内部联系的确定是这个模型的出发点，“公理”）．太阳系模型在其发展过程中经历了一系列的改进．最早是 Ptolemeus 模型（公元前第二世纪），其出发点是行星和太阳都围绕地球运动（以地球为中心的模型），而由一些规则（公式）描述这种运动，随着观测的增加这些规则变得越来越复杂．

航海的发展对天文学提出了观测精确性的新要求．N．Copernicus 于 1543 年由假设行星围绕处于中心位置的太阳旋转（日心系统）而对行星运动定律提出了根本性的新基础．这是一个太阳系的性质上的（而不是数学上的）新模型．然而，该系统的参数（诸圆的半径和运动的角速度）不能测量到，由此造成的结果是这个理论的定量的结论与观察不真正符合．所以 Copernicus 不得不对行星按圆周（本轮）运动引进修正．

太阳系模型发展中的下一阶段是 J．Kepler（1571－1630）的研究工作，其中行星运动定律用公式表示出．Copernicus 和 Kepler 的目标是给出每一个单独的行星的运动学上的描述而不涉及这些运动的原因．

一个最重要的新阶段是 I．Newton 的研究工作，他于 17 世纪后半叶提出基于万有引力定律（见 **Newton 力学定律**（Newton laws of mechanics））的太阳系动力学模型．该动力学模型与 Kepler 提出的运动学模型是一致的，因为 Kepler 的定律可由二体——“太阳－行星”的动力学系统推出．

在 19 世纪 40 年代，发觉其对象为可见行星的动力学模型所推出的结论与当时收集到的观测有矛盾；即观测到的天王星的运动偏离于理论上计算得出的运动．U．le Verrier 于 1846 年把一颗新假设的由他取名为海王星的行星扩充到已观测到的行星系中，而且用这个太阳系的新模型，确定了这颗新行星的质量和运动规律，在新系统中天王星运动中的矛盾消除了．海王星在 le Verrier 所说明的位置被发现了．由类似的方法，利用海王星的偏差，于 1930 年发现了冥王星．

建立数学模型的方法，把外部世界的研究化为数学问题，在研究方法中占有领先地位，特别是与电子计算机的出现相联系，更是如此．它使得人们可以为解决复杂的科学技术问题去设计按最优方式实施的新的技术方法并预见新的现象．数学模型已经显示出是一种重要的控制方法．它们被应用于多种多样的知识领域且已成为经济计划中的一个必要工具和自动控制系统中的一个重要因素（见**自动控制理论**（automatic control theory））．　　A．H．Тихонов 撰

【补注】 关于逻辑中的模型（即公理系统的模型），见**模型（逻辑中的）**（model（in logic））和**模型论**（model theory）．

参考文献

[A1] Bochner, S., The role of mathematics in the rise of science, Princeton Univ. Press, 1981.

[A2] Kuhn, T. S., The Copernican revolution, Cambridge, Mass., 1981.

[A3] Nagel, E., The structure of science, London, 1974.

[A4] Rosenblueth, A. and Wiener, N., The role of models in science, *Philosophy of Science*, **12** (1949).

[A5] Bender, E. A., An introduction to mathematical modelling, Wiley, 1978.

葛显良 译

数学物理 [mathematical physics; математическая физика]

物理现象的数学模型的理论；由于它位于数学和物理学的交叉点处，它在这两门科学中处在一个特殊的位置．

数学物理紧密地联系着与构造数学模型有关的那部分物理学．同时，由于讨论这些数学模型的方法是数学的，它也是数学的一个分支．包含在数学物理方法这一概念中的是这样一些数学方法，它们被用来构造及研究那些描述很大一类物理现象的数学模型．

数学物理方法如同物理学中的数学模型理论一样，首先由 I．Newton 在创建经典力学基础，万有引力以及光的理论时建立（见 **Newton 力学定律**（Newton laws of mechanics））．数学物理方法随后的发展以及在研究广泛领域内物理现象的数学模型方面的应用要提到 J．L．Lagrange、L．Euler，J．Fourier，C．F．Gauss，B．Riemann，M．B．Остроградский 以及

许多其他学者的名字．在数学物理方法的发展方面作出较大贡献的是 А．М．Ляпунов 和 В．А．Стеклов．

从 19 世纪下半叶开始，数学物理方法成功地被应用于研究那些物理现象的数学模型，该物理现象联系着各种物理领域以及在电动力学、声学、弹性理论（见**弹性的数学理论**（elasticity, mathematical theory of））、流体动力学和空气动力学（见**流体动力学的数学理论**（hydrodynamics, mathematical problems in））中的波动过程，还联系着连续介质物理学中的大量别的研究方向．这类现象的数学模型最经常地由偏微分方程描述，这种方程称为“**数学物理方程**”（mathematical physics, equations of）．

除数学物理的微分方程外，在描述物理的数学模型时人们会发现应用积分方程和积分-微分方程，变分和概率论方法，位势理论以及从复变函数论和从大量的别的数学分支而来的方法．联系到计算数学的蓬勃发展，利用计算机的直接数值方法（有限差分法和对边值问题的其他计算算法）为讨论物理的数学模型获有特殊的意义；并且，借助于数学物理方法，它们已有效地解决了气体动力学（见**气体动力学的数值方法**（gas dynamics, numerical methods of）），迁移理论（见**迁移方程**，**数值方法**（transport equations, numerical methods））以及等离子物理中的许多新的问题，这里还包含这些最重要的物理研究方向的逆问题．

量子物理（见**量子场论**（quantum field theory））和**相对论**（relativity theory）的理论研究，数学物理的各个领域内（包含逆问题和不适定问题）计算机的广泛应用，均要求用于数学物理的数学方法的工具库有一个相当大的扩张．和数学中的传统分支一起，算子理论、广义函数论、多复变函数论以及拓扑和代数方法也有广阔的应用．数学物理、数学以及计算机应用在科学研究中的深入的相互作用已导致主题和新的一类模型的创造有一个意义重大的扩张，并已使现代数学物理上升到一个新的水平．它已为科技进步的加速作出了很大的贡献．

数学物理中问题的形成归之于数学模型的构造，此模型描述了所研究的那类物理现象的基本规律．模型的表示由导出的方程（微分，积分，积分-微分或代数的）组成，而这些方程由表征物理过程的那些量满足．在此，人们从物理的基本规律着手，仅考虑该现象的较本质的面貌而不顾及大量的次要的特征．这些规律是通常的守恒律，例如动量、能量、质点数目的守恒律等等．它们和对称群、时空群及其他一些有联系．这就导致这样一个事实，对于不同的物理性态的一些过程——但它们有共同的特征面貌——可以用同样的数学模型来描述．例如，最简单的双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的数学问题最初由 J．d'Alembert（1747）为描述一个齐次弦的自由振动而得到，现在知道它同样可用来描述声学、流体动力学及其他物理领域中出现的广泛范围的波动过程．类似地，关于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

的边值问题最初由 P．Laplace（在 18 世纪末）在联系到有关重力理论的构造时被研究，现称此方程为 **Laplace 方程**（Laplace equation）．随后已经发现，它在解决静电学、弹性理论中许多问题以及理想流体的稳态运动等问题中的应用．每一个物理中的数学模型对应于一大类的物理过程．

同样作为数学物理的特征的是，用以解决数学物理中问题的许多一般性方法，往往是由解决具体物理问题的特殊方法发展而来；并且这些方法按其最初形式并没有一个严格的数学基础，也不足够完满．这个说法适用于解数学物理问题中一些众所周知的方法，诸如 **Ritz 法**（Ritz method）和 **Галеркин 法**（Galerkin method），**扰动理论**（perturbation theory）方法，**Fourier 变换**（Fourier transform）方法以及其他许多方法，这里也包含**分离变量法**（saparation of variables, method of）．为解决具体问题而应用所有这些方法，其有效性是导致对这些方法给出数学证明以及推广的一个原因，而后者又在大量情况下导致数学中新方向的出现．

数学物理对各个数学分支的影响由下面的事实显示出来，那就是反映自然科学和实际需要的数学物理的发展，有时已蕴含着对在一些业已确立的数学领域内的研究方向进行重新定向．与实际物理现象的数学模型的深入研究相联系，数学物理中一些问题的提出已导致偏微分方程理论中所考虑的一些基本问题的变化．边值问题（见**偏微分方程的边值问题**（boundary value problems, partial differential equations））理论业已出现，随之在微分方程、积分方程和变分法之间发生了联系．

借助于数学方法，对物理的数学模型的研究不仅允许人们得到物理现象的量的特征以及在给定的精度下计算实际过程的进程，而且为深入地渗透到物理现象的本质，为被隐藏的规律的解释以及新结果的预报提供了可能性．对物理现象的较详细的研究可得到描述这些现象的较复杂的数学模型，而往往不可能应用解析方法去研究这些模型．特别地，这可由这样的事实来说明．那就是，通常实际物理过程的数学模型是非线性的，也就是用数学物理的非线性方程描述的．为详尽地讨论这些模型，使用计算机的直接数值

方法是成功的．对于数学物理中的典型问题，数值方法的应用导致，例如，关于连续自变量的函数的数学物理方程被在一个离散点（一个网格）集上给定的网格函数的代数方程所替代．换句话说，代替一个媒质的连续模型，人们引入了一个离散模型．数值方法的应用在许多场合下允许人们用一个经济得多的数学的（数值的）实验去代替一个复杂的、耗时的且又昂贵的物理实验．一个恰当地进行的数学实验，对于一个实际物理实验的最佳条件的选取，复杂的物理装置中参数的选取以及为呈现新的物理结果所需的条件的确定等均是一个基础．于是，数值的实验通常扩展到对应于物理现象的数学模型的有效利用范围内．

物理现象的数学模型，如像所有模型一样，它不需要表达现象的所有方面．仅仅借助于如下一个实践准则就有可能对所讨论的现象建立一个可接受的恰当的模型，此准则就是将理论研究的结果和实验数据资料进行比较．

在许多场合，建立在解数学物理的逆问题的基础上就可能判断该模型是否恰当，此时关于那些用直接观察达不到现象的性质，而现在可按其间接的物理的观察效果的结果作出推断．

数学物理的一个特征面貌是去构造数学模型，此模型不仅描述和解释在所研究的事态范围内业已建立的物理现象，而且允许人们去预报尚未揭露的现象．此种模型的经典例子是万有引力的 Newton 理论，此理论不仅统一了太阳系中各已知星体的运动，而且容许对新行星存在性进行预报．另一方面，新的实验数据不一定总是适合于已被接受的模型．顾及到这一点，可能要求对模型进行改进．

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972(中译本：А. Н. 吉洪诺夫，А. А. 萨马尔斯基，数学物理方程（上、下册），高等教育出版社，1956、1957）．

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981（英译本：Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984）．

[3] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966(中译本：С. Л. 索伯列夫，数学物理方程，高等教育出版社，1954）．

[4] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 1 – 2, Interscience, 1955 – 1962（中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，1 – 2，科学出版社，1958，1977）．

[5] Morse, P. M., Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 1 – 2, McGraw-Hill, 1953.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, А. Г. Свешников 撰

【补注】 基本粒子的场论的最新进展是（非线性）耦合和在所谓规范的变换群（见**规范变换**（gauge transformation））下不变性质之间的联系．

参考文献

[A1] Mathews, J., Walker, R. L., Mathematical methods of physics, Benjamin, 1965.

[A2] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleich, M., Analysis, manifolds, physics, North-Holland, 1977（译自法文）．

[A3] Reed, M., Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 1 – 4, Acad. Press, 1972 – 1978.

仇庆久 译

数学物理方程 [**mathematical physics, equations of; математической физики уравнения**]

描述物理现象的数学模型的方程．数学物理方程是**数学物理**（mathematical physics）这一主题中的一部分．大量的物理学及力学（流体和气体动力学，弹性学，电动力学，光学，迁移理论，等离子体物理，量子力学，重力理论等）的现象能用微分方程的边值问题来描述．相当广泛一类模型化为这种边值问题．

对物理过程的演变要有一个完全的描述，首先要求在某一固定的瞬时对过程的状态有个说明（初始条件（initial conditions）)，其次对发生该过程的媒质的边界状态也要有说明（边界条件（boundary conditions））．初始和边界条件构成边值条件（boundary value conditions），微分方程连同对应的边值条件确定了数学物理的一个边值问题．

下面给出几个方程及其相应的边值问题的例子．

振动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \quad (1)$$

描述了弦、薄膜的微小振动以及声音的和电磁的振荡．在（1）中，空间变量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 在区域 $G \subset \mathbf{R}^n (n=1, 2, 3)$ 内变化，正是在此区域内物理过程进行演变；同样，按其物理意义，（1）中出现的量使得 $\rho > 0$, $p \geqslant 0$ 及 $q \geqslant 0$．并且假定 $\rho, q \in C(\bar{G})$ 及 $p \in C^1(\bar{G})$．在这些条件下，（1）是一个**双曲型偏微分方程**（hyperbolic partial differential equation）．

当 $\rho = 1$, $p = a^2 =$ 常数且 $q = 0$,（1）成为**波动方程**（wave equation）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad (2)$$

其中 Δ 是 Laplace 算子．

扩散方程

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \quad (3)$$

描述了质点的扩散过程以及媒质中热的传播．方程（3）是一个**抛物型偏微分方程**（parabolic partial differential equation）．当 $\rho = 1$, $p = a^2 =$ 常数时它就成

为**热传导方程**(thermal conductance equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(x,t). \tag{4}$$

对于稳定过程，此时这过程不依赖于时间 t，方程(1)和扩散方程(3)均取如下形式

$$-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u)+qu=f(x). \tag{5}$$

这是一个**椭圆型偏微分方程**(elliptic partial differential equation). 当 $p=1$ 和 $q=0$ 时，(5)称为 **Poisson 方程**(Poisson equation)

$$\Delta u=-f(x). \tag{6}$$

而当 $f=0$ 时，称为 **Laplace 方程**(Laplace equation)

$$\Delta u=0. \tag{7}$$

方程(6)和(7)为如下各类位势所满足：Coulomb (Newton)位势，不可压缩流体流的位势，等等.

假使在波动方程(2)中的外部扰动项 f 是周期的，且它带有频率 ω:

$$f(x,t)=a^2f(x)e^{i\omega t},$$

则具同样频率 ω 的周期解

$$u(x,t)=u(x)e^{i\omega t}$$

的振幅 $u(x)$ 满足 **Helmholtz 方程**(Helmholtz equation)

$$\Delta u+k^2u=-f(x),\ k^2=\frac{\omega^2}{a^2}. \tag{8}$$

在考虑散射(绕射)问题时会导致 Helmholtz 方程.

为了对振动过程有一个完全的描述，必须要给定初始扰动和初始速度:

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x),\ x\in\bar{G}. \tag{9}$$

而在扩散过程情况下，仅需给定初始扰动就足够了:

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ x\in\bar{G}. \tag{10}$$

并且，在 G 的边界 S 上，解必须取规定之值. 在最简单的情况下，对方程(1)，(3)，(5)，在物理上有意义的边界条件由下面关系式描述:

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+hu|_S=v(x,t),\ t>0, \tag{11}$$

其中 k 和 h 为给定的非负函数，且不同时为零，$\mathbf{n}$ 是 S 的外法向，v 是一个给定的函数.

于是，对弦来说，条件

$$u|_{x=x_0}=0$$

意味着弦的终端 x_0 处是固定的，而条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}=0$$

表示终端 x_0 处是自由的. 对于热传导方程，条件

$$u|_S=v_0(x,t) \tag{12}$$

表示在 G 的边界 S 上保持一个规定的温度分布，而条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S=v_1(x,t) \tag{13}$$

规定了穿过 S 的热流. 在无界区域场合，例如在一有界区域的外部，边界条件必须补充一个无穷处的条件. 于是，对于空间($n=3$)中的 Poisson 方程(6)，这一条件是

$$u(x)=o(1),\ |x|\to\infty, \tag{14}$$

而在平面($n=2$)中时，它是

$$u(x)=O(1),\ |x|\to\infty. \tag{15}$$

对于 Hemholtz 方程(8)，在无穷远处人们要加上一个 Sommerfeld **辐射条件**(radiation conditions)

$$u(x)=O(|x|^{-1}),$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial|x|}\mp iku(x)=o(|x|^{-1}),\ |x|\to\infty, \tag{16}$$

其中符号"－"(分别地，"＋")对应于发射(分别地，入射)波.

一个仅涉及初始条件(且从而不包含边界条件，故 G 是全空间 $\mathbf{R}^n$)的边值问题称为 **Cauchy 问题**(Cauchy problem). 对于振动方程(1)，Cauchy 问题(1)，(9)提法如下: 找一函数 $u(x,t)\in C^2(t>0)\cap C^1(t\geqslant0)$，使它在 $t>0$ 时满足(1)，而在平面 $t=0$ 上满足初始条件(9). 对扩散方程的 Cauchy 问题(3)，(10)可用类似方法提出.

若边值问题既含有初始条件又有边界条件，则称为混合问题(mixed problem). 对方程(1)，其混合问题(1)，(9)，(11)提法如下：找一个属于

$$C^2(G\times(0,\infty))\cap C^1(\bar{G}\times[0,\infty))$$

类的函数 $u(x,t)$，使其在柱体 $G\times(0,\infty)$ 内满足方程(1)，在其底部，$\bar{G}\times\{0\}$，满足初始条件(9)且在其侧面 $S\times[0,\infty)$ 满足边界条件(11). 用类似方法可对扩散方程(3)提出混合问题(3)，(10)，(11). 同样还存在边值问题的另外提法，例如 **Goursat 问题**(Goursat problem)和 **Tricomi 问题**(Tricomi problem).

对于稳态方程(5)不存在初始条件，其相应的边值问题提法如下: 找一个属于 $C^2(G)\cap C^1(\bar{G})$ 类的函数 $u(x)$，使它在区域 G 内满足方程(5)，而在 G 的边界 S 上满足边界条件

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+hu|_S=v(x). \qquad (11')$$

对方程(5),具边界条件

$$u|_S=v_0(x) \qquad (12')$$

的边值问题称为 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem),而具边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S=v_1(x) \qquad (13')$$

的边值问题称为 **Neumann 问题** (Neumann problem). 人们要区别外部的和内部的 Dirichlet 及 Neumann 问题. 对外部问题,边界条件必须补充形如(14),(15)或(16)的无穷处的条件.

对方程(5),下述本征值问题同样考虑为边值问题:找参数值 λ(本征值),使得齐次方程

$$Lu\equiv-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)+qu=\lambda\rho u \qquad (17)$$

有非平凡解(本征函数),且此解满足齐次边界条件

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+hu|_S=0. \qquad (18)$$

若 G 是一个有界区域且有充分光滑的边界 S,则问题(17),(18)存在可数个非负本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots(0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\lambda_k\to\infty)$,每个 λ_k 有有限的重数,且对应的本征函数 $u_k(x)$ 列,$Lu_k(x)=\lambda_k\rho u_k(k=1,2,\cdots)$ 构成 $L_2(G;\rho(x)dx)$ 中的一个完全的规范正交系;并且每一个 $C^2(\bar{G})$ 类中满足边界条件(18)的函数容许有一个关于此本征函数系 $\{u_k(x)\}$ 的正则收敛的 Fourier 级数展开式.

上述讨论的边值问题的提法假定了解是在区域内及直到边界均是充分正则的. 这种边值问题的提法,按术语称为古典的(classical). 但是,在许多有物理意义的问题中,人们必须抛弃这种正则性的要求. 在区域内部,解可能是一个**广义函数**(generalized function)且在广义函数意义下满足方程,而边值条件可能是在某种广义意义下被满足(几乎处处,L_p 中,弱意义下,等等). 这种提法称为广义的(generalized),且对应的解称为广义解(generalized solutions). 例如,波动方程的广义 Cauchy 问题提法如下. 令 u 是 Cauchy 问题(2),(9)的一个古典解. 以在 $t<0$ 部分取零的方法将函数 u 和 f 延拓到整个 t 轴上,并分别用 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{f}$ 来表示. 那么 $\tilde{u}$ 作为在全空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的广义函数满足波动方程

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=a^2\Delta\tilde{u}+u_0(x)\times\delta'(t)+u_1(x)\times\delta(t)+\tilde{f}(x,t). \qquad (19)$$

此处初始扰动 u_0 和 u_1 作为瞬间作用的一个双层型 $u_0(x)\times\delta'(t)$ 及一个单层型 $u_1(x)\times\delta(t)$ 的外来源. 这就容许人们给出下面的定义. 具有源 $F\in D'(\mathbf{R}^{n+1})$(当 $t<0$ 时 $F=0$)的波动方程的广义 Cauchy 问题(generalized Cauchy problem)是这样一个问题:找波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+F(x,t) \qquad (19')$$

在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的广义解 $u(t,x)$,使得在 $t<0$ 部分为零. 热传导方程(4)的广义 Cauchy 问题可类似地提出.

由于数学物理的边值问题描述实际的物理过程,它们必须符合下述自然的要求,这些要求由 J. Hadamard 系统地阐明的:

1)解必须在某函数类 M_1 内存在(exist);

2)这个解必须在可能是另一函数类 M_2 内唯一(unique);

3)这个解必须连续地(continuously)依赖于问题的数据(初始和边界条件,自由项,方程的系数,等等). 这个要求是联系这样一个事实被提出的,即通常物理问题的数据由实验所确定,它们仅是近似值,从而必须要确保问题的解在本质上不依赖于这些数据的测量误差.

称符合这三个条件1)-3)的问题是适定的(well-posed),且函数集合 $M_1\cap M_2$ 称为适定类(well-posed class). 虽然条件1)-3)从第一眼看来似乎很自然,然而它们必须在所取的数学模型的框架内被证明. 适定性的证明是使一个数学模型首先得到合法化——此模型是不矛盾的,不包含寄生的解,并且对测量误差的敏感性是很弱的.

寻找数学物理的适定的边值问题及构造它们的(精确或近似)解的方法是数学物理的一个分支的主要目标. 众所周知,上面列出的所有边值问题均是适定的.

例 若 $f\in C^1$,则 Cauchy 问题 $y'=f(x,y)$,$y(x_0)=y_0$ 是适定的.

如果一个问题至少这三个条件1)-3)中有一个不满足,则称它为**不适定问题**(ill-posed problems). 不适定问题的重要性在当今的数学物理中正在增长:在此不适定类中,逆问题首先可能发生,同样,那些连结观察结果的解释与处理的问题也会发生.

不适定问题的一个例子是下面关于 Laplace 方程的 Cauchy 问题(Hadamard 的例(Hadamard example)):

$$\Delta u(x,y)=0,\ u|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\frac{\sin kx}{k}.$$

对于 $y>0$,解 $u(x,y)$ 满足

$$u(x,y)=\frac{1}{k^2}\sin kx\sinh ky\overset{x}{\nrightarrow}0,\ k\to\infty,$$

而

$$\frac{\sin kx}{k} \overset{x}{\Rightarrow} 0, \ k \to \infty.$$

为了近似地解不适定问题，能够凭借**正则化方法**(regularization method)，此方法利用了在解上的附加信息并且相当于解一连串的适定问题.

在数学物理方程中，**Green 函数**(Green function)概念起着重要作用. 对于线性微分算子

$$L(x, t; D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x, t) D^\alpha,$$

$$D = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t} \right],$$

关于它及带有在变量 (x, t) 的变化区域的边界上的给定的(齐次)边值条件，其 Green 函数按定义是这样的函数 $G(x, t; \xi, \tau)$，它在此区域的每点 (ξ, τ) 处满足方程

$$L(x, t; D) G(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi, t - \tau). \tag{20}$$

在物理情况中，Green 函数 $G(x, t; \xi, \tau)$ 描述了由强度为 1 的瞬时(在时间 τ)点源(位于点 ξ)所生成的分布(伴随媒质的不均匀性及顾及到边界的影响). 在常系数算子及无边界的情况下，关于 $\xi = 0$ 及 $\tau = 0$ 的 Green 函数称为基本解(fundamental solution)且用 $E(x, t)$ 表示:

$$L(D) E(x, t) = \delta(x, t). \tag{20'}$$

在空间 D' 及 S' 空间中基本解的存在性对任意算子 $L(D) \not\equiv 0$ 业已建立.

基本解的例. 对于波动方程:

$$E_1(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a},$$

$$E_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}},$$

$$E_3(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \delta_+(a^2 t^2 - |x|^2),$$

其中 $\theta(t)$ 是 Heaviside 函数: $\theta(t) = 0$，当 $t < 0$ 时; $\theta(t) = 1$ 当 $t \geqslant 0$ 时. 对热传导方程:

$$E_n(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/4a^2 t}.$$

对 Laplace 方程:

$$E_1(x) = \frac{|x|}{2}, \ E_2(x) = \frac{\ln|x|}{2\pi},$$

$$E_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

若方程

$$L(D) u = F(x, t) \tag{21}$$

在 D' 内存在解，其中 $F \in D'$，则它的解 $u(x, t)$ 可用基本解 $E(x, t)$ 表示为在全空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的卷积

$$u = F * E. \tag{22}$$

在物理情况中，公式(22)的意义如下：将源 F 用恒等式 $F = F * \delta$ 分解为点源 $F(\xi, \tau)\delta(x - \xi, t - \tau)$ 集合，再由每一个这样的点源生成基本分布 $F(\xi, \tau) E(x - \xi, t - \tau)$，解 $u(x, t)$ 就是由这些基本分布叠加而成. 卷积 $F * E$ 起着带有源(密度)F 的位势的作用. 对于求解数学物理的线性问题，这是点源法(method of point sources)，或映射法(mapping method)的实质.

特别地，波动方程(或热传导方程)的广义 Cauchy 问题的解由波动(热)位势(wave (heat) potential)

$$u = F * E_n \tag{22'}$$

给出.

在对源

$$F(x, t) = u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) + f(x, t)$$

作出光滑性的适当假定后，能从公式(22')得到 Cauchy 问题的解的经典公式. 对三维空间内的波动方程，可得 **Kirchhoff 公式**(Kirchhoff formula)

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi|<at} f\left[\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a}\right] \frac{d\xi}{|x-\xi|} + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) dS\right]. \tag{23}$$

对热传导方程，有 **Poisson 公式**(Poisson formula)

$$u(x, t) = \int_0^t \int \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-|x-\xi|^2/4a^2(t-\tau)} d\xi d\tau + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int u_0(\xi) e^{-|x-\xi|^2/4a^2 t} d\xi. \tag{24}$$

用同样方法构造球面上 Laplace 方程的 Green 函数，可得关于(三维)球 $|x| < R$ 的内部 Dirichlet 问题的解为如下 **Poisson 积分**(Poisson integral):

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|\xi|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^2} u_0(\xi) dS_\xi. \tag{25}$$

为讨论并且近似混合问题的解，在假定方程及边

界条件中的系数不依赖于时间 t 的情况下，可用 **Fourier 法** (Fourier method)（变量分离）．这个方法的思想，譬如说，应用到问题 (3)，(10)，(18) 是这样的．首先，将未知解 $u(x, t)$ 及右端项 $f(x, t)$ 按边值问题 (17)，(18) 的本征函数列 $\{u_k\}$ 进行 Fourier 级数展开:

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) u_k(x),\ f(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k(x). \tag{26}$$

然后，将这些级数形式地代入方程 (3)，可得到未知函数 $b_k(t)$ 的方程

$$b_k'(t)+\lambda_k b_k(t)=c_k(t),\ k=1,2,\cdots. \tag{27}$$

为确保 (26) 中的 u 满足初始条件 (10)，必须令

$$b_k(0)=\int_G \rho(x) u_0(x) u_k(x) d x=a_k. \tag{28}$$

解 Cauchy 问题 (27)，(28)，就可得到问题 (3)，(10)，(18)的下面级数形式的形式解

$$u(x, t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{-\lambda_k t}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} c_k(\tau) d \tau\right] u_k(x). \tag{29}$$

因而就产生了这样的问题，Fourier 法是否证明有根据，即要确定在什么时候形式级数 (29) 将产生问题 (3)，(10)，(18) 的一个古典或广义解．

为证实 Fourier 方法，并且一般地为建立扩散方程 (3) 的混合问题的适定性，要求助于**最大值原理** (maximum principle)．Fourier 方法的类似作法同样可用于振动方程的混合问题 (1)，(9)，(18)．此时**能量积分** (energy integral) 方法将是有用的．

分离变量法同样可用于椭圆型方程 (5) 的边值问题的求解，特别地，在区域 G 有足够对称性的情况下计算本征函数和本征值．

为讨论和近似方程 (5) 的边值问题的解，广泛应用变分方法．例如，在本征值问题 (17)，(18)（当 $\rho=1$ 时）中，本征值 λ_k 满足变分原理

$$\lambda_k=\inf_{\substack{(u, u_i)=0 \\ i=1, \ldots, k-1}} \frac{(L u, u)}{\|u\|^2}, \tag{30}$$

此处假定了比较函数 $u(x)$ 属于 $C^2(\bar{G})$ 类且满足边界条件 (18)；(30) 中的下确界在对应于本征值 λ_k 的任一本征函数处达到，并且仅在这些地方达到．

当讨论方程 (5)（特别地，对调和函数）的边值问题时，人们应用最大值原理．

上面列出的边值问题并没有穷举了数学物理中的所有各种边值问题；它们仅提供了最简单的经典例子．描述实际物理过程的边值问题可以非常复杂：这里将出现方程组，高阶方程或非线性方程．有一些主要的例子，它们是 **Schrödinger 方程** (Schrödinger equation)，流体动力学，迁移以及磁流体动力学方程，**Maxwell 方程** (Maxwell equations)，弹性理论方程，**Dirac 方程** (Dirac equation)，**Hilbert 方程**，**Einstein 方程** (Einstein equations) 和 Yang-Mills 方程（亦见 **Yang-Mills 场** (Yang-Mills field))，等等．

联系到对描述量子场的干扰的非平凡模型的寻找，对一些古典的非线性方程发生了兴趣，在其中有 **Korteweg-de Vries 方程** (Korteweg-de Vries equation)

$$u_t-6 u u_x+u_{xxx}=0. \tag{31}$$

非线性波动方程

$$u_{tt}-u_{xx}=g f(u),\ g>0$$

（当 $f=e^u$ 时称为 Liouvill 方程，而 $f=-\sin u$ 称为 sine-Gordin 方程），以及非线性 Schrödinger 方程：

$$i u_t+u_{xx}+\nu|u|^2 u=0,\ \nu>0.$$

这些方程的一个特征面貌是它们允许有“孤立波”型的解（**孤立子** (soliton))．于是，对方程 (31)，其孤立子解是

$$u(x, t)=$$
$$=\frac{a}{2 \cosh^2[\sqrt{a}(x-a t-x_0)/2]},$$
$$a>0,\ x_0 \text{ 任意}.$$

此解有有限能量．

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977(中译本: A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基, 数学物理方程 (上、下册), 高等教育出版社, 1956, 1957).

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981(英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[3] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974 (英译本: Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya., Solutions of ill-posed problems, Winston, 1977).

[4] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1-2, Springer, 1983.

[5] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952.

[6] Whitman, G. B., Linear and non-linear waves, Wiley, 1974.

[7] Михайлов, В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976.

[8] Ладыженская, О. А., Краевые задачи математи-

ческой физики, М., 1973 (英译本: Ladyzhenskaya, O. A., The boundary value problems of mathematical physics, Springer, 1985).

[9] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, 2, 科学出版社, 1977).

[10] Владимиров, В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979(英译本: Vladimirov, V. S., Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979). В. С. Владимиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966(中译本: С. Л. 索伯列夫, 数学物理方程, 高等教育出版社, 1954).

[A2] Budal, B. M., Samarskii, A. A., Tikhonov, A. N., A collection of problems on mathematical physics, Pergamon, 1964(译自俄文).

[A3] Michlin, S. G., Lehrgang der mathematischen Physik, Akad. Verlag, 1972(译自俄文).

[A4] Morse, P. M., Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 1-2, McGraw-Hill, 1953.

[A5] Zauderer, E., Partial differential equations of applied mathematics, Wiley, 1983. 仇庆久 译

数学规划 [mathematical programming; математическое программирование]

研究有限维向量空间中由线性或非线性约束（等式或不等式）所定义的集合上对函数求极值的问题的求解理论和方法的数学学科. 数学规划是**运筹学**(operations research)的分支, 后者包括一大类其数学模型是有限维极值问题的控制问题. 数学规划问题在人类活动的各种领域中能找到应用, 在这些领域中, 人们必须选取一种行动方式; 例如在求解生产过程的控制和计划的众多问题中, 以至在设计方案和制订长期规划中, 都有这类问题. 名称"数学规划"是与求解问题的目标是选择行动规划(program)这一事实相联系的.

数学规划问题的数学陈述如下: 使向量变量的标量函数 $\varphi(x)$ 在集合

$$X=\{x: q_i(x)\geqslant 0,\ i=1, \cdots, k;$$
$$h_j(x)=0,\ j=1, \cdots, m\}$$

上达到最小, 其中 $q_i(x)$ 和 $h_j(x)$ 是标量函数. 函数 $\varphi(x)$ 称为目标函数(objective function), 也称质量判据(quality criterion), 集合 X 称为可行集(feasible set), 或计划集(set of plans), 数学规划问题的解 x^* 就是最优点(optimum point)(或最优向量), 整体最小值点(point of global minimum), 也称最优计划(optimal plan).

在数学规划中, 通常区分以下一些分支. **线性规划**(linear programming): 目标函数 $\varphi(x)$ 以及约束 $q_i(x)$ 和 $h_j(x)$ 是线性的. **二次规划**(quadratic programming): 目标函数是凸的二次函数, 而可行集由线性的等式和不等式来定义. **凸规划**(convex programming): 目标函数和可行集都是凸的. **离散规划**(discrete programming): 求解仅在 X 的离散点集(例如整数点集)上进行. **随机规划**(stochastic programming): 不同于确定性问题, 这里原始数据包含不确定性元素. 例如, 线性函数

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

在线性约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i=1, 2, \cdots,$$

下求最小值的随机问题中, 参数 c_i, a_{ij}, b_j 或仅仅是其中的某些是随机的. 线性、二次和凸规划问题具有一个共同性质: 每个局部最优点是整体最优点. 所述性质对所谓多极值问题不成立, 这种问题要困难得多, 研究得也很少.

凸规划, 尤其是线性和二次规划, 其理论基础是 Kuhn-Tucker 定理(Kuhn-Tucker theorem), 这一定理给出了最优点 x^* 存在的充分必要条件: x^* 是最优点, 即

$$\varphi(x^*)=\min_{x\in X}\varphi(x),$$

$$X=\{x: f_i(x)\leqslant 0,\ i=1, \cdots, k\},$$

其充分必要条件为存在点 $y^*=(y_1^*, \cdots, y_k^*)$, 使得点对 x^*, y^* 形成 **Lagrange 函数**(Lagrange function)

$$L(x, y)=\varphi(x)+\sum_{i=1}^{k} y_i f_i(x)$$

的**鞍点**(saddle point). 后者意味着

$$L(x^*, y)\leqslant L(x^*, y^*)\leqslant L(x, y^*)$$

对于所有 x 和所有 $y\geqslant 0$ 成立. 如果约束 $f_i(x)$ 非线性, 那么定理在某些对可行集所作的附加假定下成立, 例如, 假定存在点 $x\in X$ 使得 $f_i(x)<0$, $i=1, \cdots, k$ (Slater 正则性条件(Slater regularity condition)).

如果 $\varphi(x)$ 和 $f_i(x)$ 是可微函数, 那么下列关系式刻画了鞍点:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\geqslant 0,\ j=1, \cdots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_j}x_j=0;\ \frac{\partial L}{\partial y_i}\leqslant 0,\ i=1, \cdots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial y_i} y_i = 0;\ y_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, k.$$

这样一来，凸规划问题被归结为方程和不等式组的求解．

基于 Kuhn-Tucker 定理，已经拟定了各种最小化的迭代法，其中都着眼于搜索 Lagrange 函数的鞍点．

数学规划中的主要研究方向之一是关于求解极值问题的计算方法．这些方法中最为流行的之一是可行方向法（method of feasible directions）．在这一方法中，集合 X 的点列 $\{x_m\}$ 由公式 $x_{p+1} = x_p + \alpha_p s_p$ 来构造．对每次迭代，为计算点 x_{p+1}，必须选择方向（向量）s_p 和步长（数）α_p．在可行方向（即在点 x_p 上的所有使小位移不走出集合 X 的方向）中，s_p 选为与目标函数的最速下降方向 $g(x_p)$（当 φ 可微时，向量 $g(x_p) = -d\varphi(x)/dx|_{x=x_p}$）构成锐角的方向．因此，沿着方向 s_p，函数 $\psi_p(\alpha) = \varphi(x_p + \alpha s_p)$ 是下降的．数 α_p 是由条件 $x_{p+1} \in X$ 和 $\varphi(x_{p+1}) < \varphi(x_p)$ 来确定的．为计算点 x_p 上的 s_p，定义由不等式组给定的可行方向锥，并把问题陈述为求使目标函数下降最快的可能方向的（线性规划）问题．这一问题不难用诸如标准的**单纯形法**（simplex method）那样的方法来解决．步长 α_p 用求解对于一维函数 $\psi_p(\alpha)$ 的极小化问题来确定．在相当一般的假定下，可以指出，点 x_p 到原问题的驻点集（即其上满足关于 $\varphi(x)$ 在 X 上的局部极小值点的必要条件的点集）的距离随 $p \to \infty$ 而趋于零．在这种情形下，如果原问题是凸规划问题，那么，随着 $p \to \infty$，x_p 趋向于原问题的解（最优点）集．可行方向法允许有所述的确定 s_p 和 α_p 的问题的逼近解，并且在这一意义下，它关于计算误差是稳定的．

对于有特殊结构的可行集（从方向 s_p 的选取问题的求解是否简单这一观点来看），可以应用不同于可行方向法的最小化方法．例如，在梯度射影法（gradient-projection method）中，选取 $s_p = y_p - x_p$ 作为点 x_p 上的下降方向，这里 y_p 是 $v_p = x_p + g(x_p)$ 在集合 X 上的射影，而 $g(x_p) = -d\varphi(x)/dx|_{x=x_p}$．

如果 X 由线性约束给定，那么大有希望的是条件梯度法（method of the conditional gradient）：通过构造函数 $l(x) = \varphi(x_p) + \langle g(x_p), x_p - p \rangle$，来使目标函数在点 x_p 上线性化，然后，在集合 X 上使 $l(x)$ 极小化，求出它的最小点 y_p，并最后置 $s_p = y_p - x_p$．

非光滑函数的极小化方法已被成功地拟定．这类方法的代表之一是广义梯度法（method of the generalized gradient）．由定义，x_p 上的广义梯度是使不等式 $\varphi(y) - \varphi(x_p) \geqslant \langle \tilde{g}(x_p), y - x_p \rangle$ 对于所有 $y \in X$ 满足的任意向量 $\tilde{g}(x_p)$．这一方法不同于梯度射影法之处在于被射影的点取为 $v_p = x_p - \tilde{g}(x_p)$．

随机极小化方法（stochastic methods of minimization）也非常流行．在随机下降法（method of random descent）的最简单的变种中，取以坐标原点为中心的 n 维单位球面上的随机点为 s_p；如果 s_p 是可行方向，并且 $\varphi(x)$ 沿着这一方向下降，那么执行一步，即移动到点 x_{p+1}．在相反情形下，选取 s_p 的程序就再做一遍．

解数学规划问题的方法的计算方面的本质特征在于这些方法的应用总是联系着电子计算机的应用．其主要原因在于陈述现实系统控制势态的数学规划问题所引起的巨大的工作量，不可能用手算来完成．

研究数学规划问题的流行方法之一是**罚函数法**（penalty functions, method of）．这一方法的本质在于用一系列带参数的无条件极小化问题来代替原来的数学规划问题，使得当参数趋于无限（在另一些情形趋于零）时，这些辅助问题的解收敛于原来的数学规划问题的解．注意到在一个无条件极小化问题中，每个方向都是可行的，因而搜索 s_p 所花费的工作量比用可行方向法来解类似的问题要小（例如在最速下降法中，可取 $s_p = -d\varphi(x)/dx|_{x=x_p}$）．对数 α_p 的搜索也一样．

数学规划中的一个重要研究方向是稳定性问题．这里对稳定问题类的研究有本质意义，对于这类问题，对原始数据的小扰动（误差）只引起对解的小扰动．对于不稳定问题情形，把不稳定问题用一系列稳定问题来逼近的程序起着重要作用——这就是所谓正则化过程（regularization process）．

除了有限维的数学规划问题外，无限维空间上的数学规划问题也被考虑．后者中有在数理经济学、技术、核反应堆的物理特征的最优化问题等等中的各种极值问题．用数学规划的术语，可把这些问题在**变分学**（variational calculus）和**最优控制**（optimal control）的对应的函数空间中陈述．

数学规划是在 20 世纪的 50 年代到 70 年代间形成为学科的．这首先联系着电子计算机的发展，从而有可能对大量数据进行数学处理，以及在这一基础上解决控制与计划问题；这里数学方法的应用主要联系着数学模型的建立和相应的极值问题，其中就有许多数学规划问题．

参考文献

[1] Моисеев, Н. Н., Иванилов, Ю. П., Столярова, Е. М., Методы оптимизации, М., 1978.

[2] Карманов, В. Г., Математическое программирование, М., 1975.

[3] Polak, E., Computational methods in optimization: a unified approach, Acad. Press., 1971.

[4] Ермольев, Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976.

В. Г. Карманов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Minoux, M., Mathematical programming: theory and algorithms, Wiley, 1986.

[A2] Zoutendijk, G., Mathematical programming methods, North-Holland, 1976.

[A3] Heesterman, A. R. G., Matrices and simplex algorithms, Reidel, 1983.

[A4] Hadley, G., Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964.

[A5] Zangwill, W. I., Nonlinear programming: a unified approach, Prentice-Hall, 1969.

[A6] Zionts, S., Linear and integer programming, Prentice-Hall, 1973.

【译注】 本文中所提到的"广义梯度"目前文献中通常称为次梯度(subgradient),它们的全体称为次微分(subdifferential).这些概念主要对凸函数有意义(见[B1]).至于"广义梯度"这一术语目前文献中通常对局部 Lipschitz 函数来定义,它是由 F. H. Clarke 在 70 年代初提出的.局部 Lipschitz 函数是几乎处处可微的,从而其梯度几乎处处存在.在它的不可微点上的广义梯度则定义为该点邻近的梯度的极限点全体的闭凸包.对非光滑的局部 Lipschitz 规划就可用这一意义下的"广义梯度法"来计算(见[B2]).

参考文献

[B1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[B2] Clarke, F. H., Optimization and nonsmooth analysis, Wiley-Interscience, 1983.

[B3] Avriel, M., Nonlinear programming: analysis and methods, Prentice-Hall, Unc., 1976(中译本: M.阿弗里尔,非线性规划——分析与方法,上海科学技术出版社,上册,1979,下册,1980).

[B4] 席少霖、赵凤治,最优化计算方法,上海科学技术出版社,1983.

史树中 译 韩继业 校

数理统计 [mathematical statistics; математическая статистика]

数学的一个分支,研究用于科学和实际推断的,统计数据的系统整理、加工和利用的数学方法.这里,统计数据指关于在相当广泛的总体中具有某种特征的对象之数量的信息.

数理统计的对象和方法.对于对象总体的统计描述介于如下两种描述之间: 一种是对总体每一对象的个别描述;另一种是在完全无需将总体分解为单独对象的情形下,根据总体的一般性质对其进行描述.与第一种描述相比,统计数据或多或少失去其"个性",并且在恰好是个别数据重要时它只有有限的价值(例如,教师在熟悉班级时,从前任提供的"优秀"、"良好"、"及格"和"不及格"等评分的统计数字、只能得到十分初步的印象).另一方面,与关于从外部可观测的总体综合性质的数据相比,统计数据可以使人们更深入了解事情的本质.例如,对岩石的颗粒分析数据(即构成岩石的微粒按大小数据的分布),比非计数方式试验提供更有价值的补充信息,同时可以在某种程度上说明岩石的性质、形成条件……等等.

基于对关于这样或那样对象总体的统计数据分析的研究方法称为统计方法(statistical method).统计方法应用于多种知识领域.不过,用于不同性质对象的统计方法,其特点如此多种多样,致使把诸如社会经济统计、物理统计、星体统计等联合成一门科学是不可思议的.

不同知识领域中统计方法的一般特点可以归纳为,计算属于不同群体的对象的数量;研究数理标志的分布;对于容量很大总体,在逐个研究其一切对象困难时,运用抽样研究方法;在对于不同推断问题,在估计观测次数的充分性时运用概率论等等.这种与研究对象无关的,统计研究方法的形式上的数学一面,就是数理统计的对象.

数理统计与概率论的联系.在不同场合、数理统计与概率论的联系有不同特点.**概率论**(probability theory)研究的不是任何大量现象,而是随机现象并且是"概率随机现象",即可以讨论其相应概率分布的现象.尽管如此,在统计研究任何性质的(可能并不属于概率随机类的)大量现象时,概率论仍然有一定作用.这通过基于概率论的抽样方法理论和误差理论来实现.见**误差理论**(errors, theory of)和**抽样方法**(sample method).在这些场合,服从概率规律性的不是被研究现象本身,而是研究方法.

在对概率随机现象进行统计研究时,概率论起更重要作用.这里,概率论获得充分应用的,以其为基础的有这样一些数理统计的分支,如**统计假设检验**(statistical hypotheses, verification of)、概率分布及其参数的**统计估计**(statistical estimation)等.这些较深统计方法的应用领域比较窄,因为这要求被研究现象本身服从充分确定的概率规律.例如,水涡流状态或无线电接收装置中振动状态的统计研究,是以平稳随机过程的理论为基础的.然而,将同一理论用于分析经济时间数列会导致重大错误,因为平稳过程的定理要求概率分布在一长时间内保持不变,而这对经济时间数列是不可接受的.

根据大数定律,概率定律获得统计表示(概率以频率的形式来近似实现,数学期望以平均值的形式实现).

统计描述的最简单方法.对所研究的 n 个对象的总体,可以按某个属性标志 A 划分为若干组 $A_1,\cdots,A_r$.由指明属于各组的对象的个数(或频数)$n_1,\cdots,$

n_r(其中 $\sum_{i=1}^r n_i=n$)给出对应于该划分的统计分布．常用相应的相对频数(频率) $h_i=n_i/n$ (显然满足关系式 $\sum_{i=1}^r h_i=1$)来代替频数 n_i．如果所研究的是某数量标志，则可以通过直接列举该标志的观测值 $x_1,\cdots,x_n$(例如按递增顺序)，给出它在 n 个对象的总体中的分布．不过，对于较大的 n，这种方法十分繁琐，同时这也不能清晰地显示分布的重要性质．实际中对于不管多大的 n 通常并不编制观测值的完全表格，而是将观测值按适当选定的区间分组，进一步的工作从只含各组观测值频数的表格出发．

通常划分为 10－20 个区间，每个区间含不多于 15－20% 的观测值 x_i．对于相当完整地显示分布的一切重要性质，对于根据组频率可靠地计算分布的基本特征，这样的分组就足够了(见下文)．根据这样的分组数据描出的**直方图**(histogram)能直观地显示分布．基于用较小区间分组建立的直方图，通常是多顶点的，并且不能直观地显示分布的重要性质．

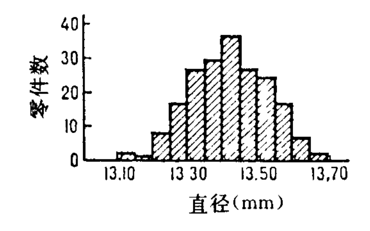


图 1

作为例子，图 1 给出了 200 个某种零件直径(单位：毫米)的分布直方图，该分布是在对大批量产品的统计研究时产生的，分组区间长为 0.05 毫米；图 2 是区间长 0.01 毫米的同一分布的直方图．另一方面，区间过长的分组可能失去分布特点的明显的直观，并且

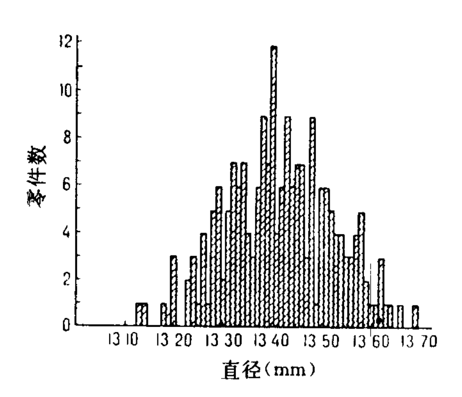


图 2

在计算分布均值和其他一些特征时产生明显错误(见图 3 中相应的直方图)．

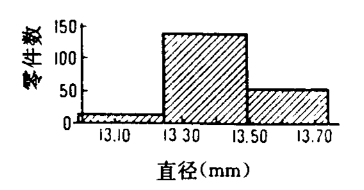


图 3

在数理统计的范围内，关于分组区间问题可以讨论的只是形式上的一面：分布之数学描述的完整性，根据分组数据计算均值的准确性等．

一个数量标志的分布的最简单综合特征是均值

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

和根均方偏差

$$D=\frac{S}{\sqrt{n}},$$

其中

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

在由分组数据计算 $\overline{x}$，S^2 和 D 时，利用公式

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}n_k a_k=\sum_{k=1}^{r}h_k a_k,$$

$$S^2=\sum_{k=1}^{r}n_k(a_k-\overline{x})^2=\sum_{k=1}^{r}n_k a_k^2-n\overline{x}^2$$

或

$$D^2=\sum_{k=1}^{r}h_k a_k^2-\overline{x}^2,$$

其中 r 是分组区间的个数，a_k 是区间的中点．假如数据按过长的区间分组，则这样的计算将给出非常粗略的结果．在这种情形下，有时利用专门的分组校正量是有益的．不过，只有满足一定的概率假设时，引进这样的校正才有意义．

关于两个和两个以上标志的联合分布见专条**相关(统计中的)**(correlation (in statistics))和**回归**(regression)．

统计分布和概率分布的关系．参数估计(parameter estimators)．**概率假设检验**(testing probabilistic hypotheses)．前面仅有选择地介绍了统计描述的最简单方法．统计描述是一个相当广泛的学科，具有很好提炼的概念和计算技术．统计描述的方法之所以有价值，并不在于它自身，而在于它作为获取用于推断的统计资料的手段，包括推断所研究现象遵从的规律性，以及推断在每一个别场合，产生这样或那样被观测到的统计分布的原因．

例如，搜集描在图 1, 2, 3 中的数据的目的，在于在生产过程正常的情形下确定零件的加工精度，其中零件的设计直径为 13.40 毫米．在这种情形下，经某些理论考虑论证的最简单的假定是，假设单个零件的直

径可以看作服从正态概率分布的随机变量 X:

$$\mathsf{P}\{X<x\}=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\ . \qquad (1)$$

如果此假设成立，则参数 a 和 σ^2(概率分布的均值和方差)可以以足够的精度由统计分布的相应特征来估计(因为观测次数 $n=200$ 充分大)．作为理论方差的估计量倾向于不是采用统计方差

$$D^2=\frac{S^2}{n}\ ,$$

而是采用**无偏估计量**(unbiased estimator):

$$s^2=\frac{S^2}{n-1}\ .$$

对于理论根均方差 σ，不存在一般的(适用于任何概率分布的)无偏估计量的表达式．通常用 s 作 σ 的估计量(一般说是有偏的)．a 和 σ 的估计量 $\bar{x}$ 和 s 的精确程度由其方差表示，对于正态分布(1)，其方差为

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\sim\frac{s^2}{n}\ ,$$

$$\sigma_{s^2}^2=\frac{2\sigma^2}{n-1}\sim\frac{2s^4}{n}\ ,$$

$$\sigma_s^2\sim\frac{\sigma^2}{2n}\sim\frac{s^2}{2n}\ ,$$

其中符号"$\sim$"表示"对于较大的 n 为近似等式"．这样，假如在估计量上相应地加上和减去根均方差，则在正态性条件(1)下，对于大 n，有

$$a=\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \sigma=s\pm\frac{s}{\sqrt{2n}}\ . \qquad (2)$$

样本容量 $n=200$ 足以保障使用这些大样本理论公式的合理性．

关于理论概率分布参数估计的进一步信息，见**统计估计**(statistical estimation)和**置信估计**(confidence estimation)．

建立在概率论上的一切统计参数估计和假设检验规则，都仅在一定**显著性水平**(significance level) $\omega<1$ 下起作用，即这些规则以概率 $\alpha=1-\omega$ 可能得出错误结果．例如，若在正态分布且理论方差 σ^2 已知的假设下，按照规则

$$\bar{x}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$$

用 $\bar{x}$ 估计 a，则错误概率等于 α 且与 k 有如下关系:

$$\alpha=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{k}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ .$$

针对给定的具体情形(例如，在制定大批量产品质量统计控制规则时)，合理地选择显著性水平的问题十分重要．这时、只采用(接近1的)高显著性水平的愿望与如下事实是矛盾的，即在有限的观测次数下，这样的规则只能得出很贫乏的结论(如、甚至在频率明显不等的情形下，不能证明概率不相等 ……)．

数理统计的进一步课题．前面提到的参数估计和假设检验方法都基于这样的假设：达到给定推断精度所必须的观测次数是(在进行试验之前)事先确定的．然而，事先确定观测次数往往并不适宜，因为事先不固定试验次数，而是在试验过程来确定它，可以减小试验次数的数学期望．在根据独立试验序列在两个假设中选择一个的例子中、首先发现了这一情况．相应的(首先对于接受统计检验问题提出的)程序如下：在每一步根据已经进行的观测的结果决定，a)是否进行下一次试验，或 b)停止试验并接受第一种假设，或 c)停止试验并接受第二种假设．与固定容量的抽样程序相比，若适当选择类似程序的数字特征，可以(在同一推断精度下)平均削减一半的观测次数．见**序贯分析**(sequential analysis)．序贯分析方法的发展，一方面引向**受控随机过程**(controlled stochastic process)的研究，另一方面导致**统计判决理论**(statistical decision theory)的出现．这一理论的出发点是，序贯进行的观测是作出某些判决的基础(中间判决为是否继续进行试验；在中止试验时作出最终判决)．参数估计问题中的最终判决是数值(估计值)，假设检验问题中的最终判决是被接受的假设．该理论的目标是，指出作出使平均风险或损失最小的判决的规则(风险既依赖于观测结果的概率分布，也依赖于所作的最终判决，还依赖于用于试验的费用等等)．

在对现象进行统计分析时，合理分配力量的问题在试验设计理论中研究．试验设计理论已经成为现代数理统计学的重要组成部分．

在数理统计的概念发展和完善的同时，它的一些单独的分支也在发展．如，**方差分析**(dispersion analysis)；**协方差分析**(covariance analysis)；**多维统计分析**(multi-dimensional statistical analysis)；**随机过程的统计分析**(statistical analysis of stochastic processes)和**因子分析**(factor analysis)．在回归分析中出现了新见解(亦称**随机逼近**(stochastic approximation))．处理统计问题的 **Bayes 方法**(Bayesian approach)在数理统计问题中起着重要作用．

历史情况．在概率论的创始人 J.Bernoulli, P.Laplace 和 S.Poisson 的著作中就已经包含数理统计的初步基础．在俄罗斯，В.Я.Бняковский (1846) 以概率论为基础在人口学和保险业的应用中发展了数理统计方法．19 世纪后半叶到 20 世纪初，俄罗斯经典学派 (П.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпнов, С.Н.Бернштейн) 的工作，对于整个数理统计的进一步发展有决定的意义．统计估计理论的许多问题，实质上是以误差理论和最

小二乘法(C.Gauss 和 A.A.Марков)为基础深入研究的．A.Quételet, F. Golton 和 K. Pearson 的工作有重大意义，但在概率论成就的应用水平方面落后于俄罗斯学派的工作．K.Pearson 广泛地开展了编制数理统计方法的应用所必须的函数表的工作．这项重要的工作在许多科学中心被延续(在前苏联，E.E.Слуцкий、H.B. Смирнов 和 Л.Н.Большев 曾致力这一工作)．自 20 世纪 20 年代起步，英美学派代表人物(Student (W.S. Gosset 的笔名)，R.A.Fisher, E.Pearson 和 J. Neyman)，在小样本理论、统计估计的一般理论和(排除关于有先验分布假设的)假设检验理论、序贯分析的创建中地位非常显赫．前苏联在数理统计领域得到有意义成果的，有 В.И.Романовский，А.Н.Колмогоров，Е.Е. Слуцкий (关于相依平稳数列统计的重要工作属于他)；Н.В.Смирнов 为**统计学中的非参数方法**(non-parametric methods in statistics)的理论奠定了基础；Ю.В.Линник 以新的方法丰富了数理统计的分析工具．基于数理统计学，特别强化地深入探讨了批量生产的研究和控制的统计方法，物理学、水文学、气象学、恒星天文学、生物学、医学以及其他一些领域中的统计方法．

亦见数理统计各分支的参考文献．

参考文献

[1] Смирнов, Н. В., Дунин-Барковский, И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

[3] Waerden, B.L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ.Press, 1946(中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[5] Wald, A., Statistical decision functions, Wiley, 1950 (中译本：A. 瓦尔特，统计决策函数，上海科学技术出版社，1960).

[6] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 1, Distribution theory, Griffin, 1977.

[7] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

[8] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 3, Design and analysis and time series, Griffin, 1983.

А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров 撰　周概容 译

数学符号 [mathematical symbols；знаки математические]

用于表述数学概念和推理的标准书写记号．例如，“一个圆的周长与直径之比的平方根”这一概念可以简单地记为 $\sqrt{\pi}$；命题“圆的周长与直径之比大于 3 又 71 分之 10，小于 3 又 7 分之 1”可以写成

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

数学符号的发展与数学概念和方法的总的发展密切相关．

最初的数学符号是表示数的记号——**数字**(ciphers)，它们的出现看来是在文字产生以前．最古老的计数系统(见**数的表示法**(numbers, representations of))是巴比伦人和埃及人的记数系统——可追溯至大约公元前 3500 年．

最初表示变量的数学符号是在希腊出现的，时间要晚得多(自公元前 5－4 世纪)．任意量(面积、体积、角度)用线段的长度来表示，两个这样的量的积用一个矩形来表示，矩形的两个边分别等于两个因子．在 Euclid 的《几何原本》(Elements)(公元前 3 世纪)中，量用两个字母——相应线段的始端字母和终端字母来表示，有时也用一个字母来表示．到了 Archimedes (公元前 287－213 年)，量的字母表示法已普遍采用．这种表示法很有可能发展到字母的演算．但是，在古典数学中不对字母进行运算，因而这种字母演算未能实现．

字母符号及其演算出现在后希腊时代，这是由于代数学从其几何形式解放出来的结果．Diophantus (约公元后 3 世纪)用下列符号表示未知数(x)和它的幂：

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
s'	$\delta^{\tilde{v}}$	$\kappa^{\tilde{v}}$	$\delta\delta^{\tilde{v}}$	$\delta\kappa^{\tilde{v}}$	$\kappa\kappa^{\tilde{v}}$

($\delta^{\tilde{v}}$—来自希腊文 $\delta v' v\mu\alpha\mu\iota\zeta$，表示未知数的平方；$\kappa^{\tilde{v}}$—来自希腊文 $\kappa v'\beta o\zeta$，表示未知数的立方)．Diophantus 把系数写在未知数或者它的幂的右边，例如把 $3x^5$ 写成 $\delta\tilde{\kappa}^{v}\bar{\gamma}$ (其中 $\bar{\gamma}=3$)．需要相加的项并排书写，减法使用特殊符号⋀；相等用字母 ι 来表示(来自希腊文 $'\iota\sigma o s$—相等)．例如，Diophantus 把方程

$$(x^3+8x)-(5x^2+1)=x$$

写成

$$\kappa^{\tilde{v}}\bar{\alpha}\,s'\bar{\eta}\wedge\delta^{\tilde{v}}\bar{\varepsilon}\,\mu^{o}\bar{\alpha}\,\iota\,s'\bar{\alpha}$$

(其中 $\bar{\alpha}=1$，$\bar{\eta}=8$，$\bar{\varepsilon}=5$，$\mu^{o}\bar{\alpha}$ 表示单位 $\bar{\alpha}$ 不与未知数的幂相乘)．

几个世纪以后，印度人在发展数值代数的过程中引进了一些未知数的数学符号(用一些颜色名称的缩写来表示未知数)以及平方、平方根和减数的数学符号．例如，用 Brahmaputra (7 世纪)的表示法，方程

$$3x^2+10x-8=x^2+1$$

被写成

$$\underline{\text{ya}}\ \underline{\text{va}}\ 3\ \underline{\text{ya}}\ 10\ \underline{\text{ru}}\ \dot{8}$$
$$\underline{\text{ya}}\ \underline{\text{va}}\ 1\ \underline{\text{ya}}\ 0\ \underline{\text{ru}}\ 1$$

($\underline{\text{ya}}$ 来自 $\underline{\text{yavat-tavat}}$，未知数；$\underline{\text{va}}$ 来自 $\underline{\text{varga}}$，平方

数；ru 来自 rupa — 卢比银币，自由项；数字上面的点表示减去）.

现代代数符号的产生是在 14－15 世纪；这是由于实用算术和方程研究取得成就的结果. 在不同国家都自发地出现了一些表示各种运算和未知量的幂的数学符号. 一个特定的符号在计算中被普遍采用要经过几十年，甚至几个世纪. 例如，在 15 世纪末，N. Chuquet 和 L. Pacioli 使用符号 p̃ 和 m̃（来自拉丁文 plus 和 minus）分别表示加法和减法，而德国数学家则引入了现代使用的符号 +（也许是拉丁文 et 的缩写）和 －. 到 17 世纪为止，可以举出大约 10 种不同的乘法运算符号：

□, *; ,, , , , ; ∫ ; · ; ×.

根号的历史更值得注意. 根据 Leonardo Pisano 的建议（1220），直到 17 世纪广泛采用符号 ℞（来自拉丁文 radix— 根）表示"平方根". N. Chuquet 用 ℞², ℞³ 等表示平方根、立方根等. 在一份大约 1480 年的德文手稿中，数字前加一点表示平方根，加三点表示立方根，加两点表示四次方根. 在 1525 年已经出现了符号 ⸢（Ch. Rudolff）. 为了表示高次方根，有些学者简单地重复这个符号，另一些学者则在这个符号后面写上一个适当的字母（指数名称的缩写），还有一些学者是把相应的数字写在一个圆圈当中，或者写在圆括号或方括号当中，以便同根号下的数相区别（被开方数上面的水平线是 R. Descartes 引入的，1637）. 把指数写在根号开口处的上方，这种做法直到 18 世纪初叶才被普遍采用，虽然在很久以前就已经出现了（A. Girard, 1629）. 这样，根号的演变经历了大约 500 年之久.

一些表示未知数及其幂的数学符号差别很大. 在 16 世纪到 17 世纪初叶，仅仅是表示未知数平方的数学符号，常用的就有十多个，其中包括 ce（来自 census — 希腊文 δυναμις 的拉丁文译文），Q（来自 quadratum）. 𝓏, $\frac{\text{ii}}{1}$, $A(2)$, $1^{\underline{2}}$, A'', aa, a^2, 等等. G. Cardano（1545）把方程

$$x^3 + 5x = 12$$

写成

1. cubus p̃. 5. positionibus æquantur 12

（cubus = 立方，positio = 未知数，æquantur = 相等）.

对于同一个方程，由 M. Stifel（1544）写出的是

1cℭ + 5 ℜ. æqu. 12

由 R. Bombelli（1572）写出的是

$1\overset{3}{\smile}$ p. $5\overset{1}{\smile}$ eguale à 12

（$\overset{3}{\smile}$= 未知数的立方，$\overset{1}{\smile}$= 未知数，equale à = 相等）；由 F. Viète（1591）写出的是

1C + 5 N, æquatur 12

（C = cubus = 立方，N = numerus = 数）；而由 T. Harriot（1631）写出的是

$$aaa + 5.a = 12$$

在 16 世纪和 17 世纪初已经出现并使用等号和括号；方括号（Bombelli, 1550），圆括号（N. Tartaglia, 1556）和波形括号（Viète, 1593）.

在数学符号的发展过程中向前迈进的重要一步是 Viète（1591）采用拉丁文大写字母表示任意常数和未知数：用辅音字母 B, D, … 表示常数，用元音字母 A, E, … 表示未知数. 这就使得写出具有任意系数的代数方程和对它们进行运算成为可能. 例如，采用这种符号，可把 Viète 的方程

A cubus + B plano in A 3, æquatur Dsolido

（cubus = 立方，planus = 平面，即 B 是二维常数；solidus = 立体，即 D 是三维常数；指明维数是为了保证各项是齐次的）表示为下列方程：

$$x^3 + 3B = D.$$

因此，Viète 是代数公式的创始人. Descartes（1637）给出了代数符号的现代形式：用最后的几个英文字母 x, y, z 表示未知数，而用最前几个字母 a, b, c 表示任意已知量. Descartes 还创造了幂的现代表示法. 由于他的表示法比前人的表示法优越得多，所以很快得到普遍承认.

数学符号的进一步发展与**微积分学**（infinitesimal calculus）的发明密切相关，虽然在代数学中已打下了很好的基础. I. Newton 在他的流数法（1666 及其后）中引进了量 x 的逐次流数（导数）的符号：$\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ 以及无穷小增量的符号 o. 稍早一些时候，J. Wallis（1655）采用了无穷大符号 ∞. 微积分学的现代符号的创始者是 G. Leibniz. 特别是，正是他发明了现代使用的微分符号 dx, d^2x, d^3x 和积分符号

$$\int y\,dx.$$

应强调指出，Leibniz 使用的积分符号要比 Newton 使用的符号 $'x$ 优越得多. Leibniz 的符号 $\int y\,dx$ 不但反映了积分和的实际构造过程，而且还明显地指出了被积函数和积分变量. 因此，符号 $\int y\,dx$ 也适合书写变量变换公式，并很容易用于多重积分和线积分. Newton 的符号 $'x$ 则不能直接做到这一些. Leibniz 的微分符号与 Newton 的流数符号和无穷小增量符号相比，情况也类似.

现代数学符号的相当大的一部分应归功于 L. Euler. 他引入了第一个被普遍采用的变量运算符号，即函数符号 $f(x)$（来自拉丁文 functio = 函数；1734）. 稍早

一些时候，J. Bernoulli (1718) 曾使用符号 φx. 由于 Euler 的工作，许多特定函数(包括三角函数)的符号都标准化了. Euler 还首先使用了符号 e (自然对数的底，1736)，π (或许来自希腊文 $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\iota\alpha$ = 圆周，1736) 以及虚数单位 $i=\sqrt{-1}$ (来自法文 imaginaire, 1777; 1794 出版)，这些符号很快被普遍采用.

在 19 世纪，符号的作用变得更加重要，并产生了许多新的符号，因此数学家们力图使基本数学符号标准化. 正是在这时一些广泛采用的现代数学符号出现了: 绝对值 $|x|$ (K. Weierstrass, 1841)，向量 $\bar{r}$ (A. Cauchy, 1853)，行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(A. Cayley, 1841) 等等. 19 世纪的许多新理论，例如张量分析，没有适当的符号就不能发展. 在这方面的一个突出现象是表示关系的符号所占比例显著增加，其中包括同余关系 $\equiv$ (C. F. Gauss, 1801)，从属关系 $\in$，同构关系 $\cong$，等价关系 $\sim$，等等. 随着广泛使用数学符号的一个数学分支——数理逻辑的发展，表示可变关系的数学符号出现了.

从数理逻辑的观点来看，数学符号可以划分为以下几大类: A)对象符号，B)运算符号，C)关系符号. 例如，符号 1, 2, 3, 4 表示数，即算术中研究的对象. 加法运算符号 +，在单独使用时不表示任何对象; 仅当指定了被加数时它才具有具体内涵: 1 + 3 表示数 4. 符号 > (大于) 表示两个数之间的关系. 仅当指定了处于特定关系中的一些对象时，关系符号才具有确定的内涵. 除了上述三类基本符号以外，还可加上第四类: D)辅助符号，它们规定了基本符号组合的次序. 这类符号的一个很好的例子就是括号，它们规定了算术运算进行的次序.

个 体 对 象 符 号

符 号	意 义	引 入 者	年 代
∞	无穷大	J. Wallis	1655
e	自然对数的底	L. Euler	1736
π	圆周长与直径之比	H. Jones L. Euler	1706 1736
i	-1 的平方根	L. Euler (1794 出版)	1777
i,j,k	单位向量	W. Hamilton	1853
$\Pi(\alpha)$	平行角	Н. И. Лобачевский	1835

可 变 对 象 符 号

符 号	意 义	引 入 者	年 代
x,y,z	未知数或变量	R. Descartes	1637
$\bar{r}$	向量	A. L. Cauchy	1853

个 体 运 算 符 号

符 号	意 义	引 入 者	年 代
$+$ $-$	加法 减法	德国数学家	15 世纪末
$\times$	乘法	W. Oughtred	1631
$\cdot$	乘法	G. Leibniz	1698
:	除法	G. Leibniz	1684
$a^2, \cdots, a^n$	幂	R. Descartes	1637
$\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \cdots$	根	I. Newton K. Rudolff A. Girard	1676 1525 1629
Log	对数	J. Kepler	1624
log	对数	B. Cavalieri	1632
sin	正弦	L. Euler	1748
cos	余弦	L. Euler	1748
tg	正切	L. Euler	1753
tan	正切	L. Euler	1753
arc sin	反正弦	J. Lagrange	1772
Sh	双曲正弦	V. Ricatti	1757
Ch	双曲余弦	V. Ricatti	1757
$dx, ddx, \cdots,$ $d^2x, d^3x, \cdots$	微分	G. Leibniz (1684 出版)	1675
$\int y\,dx$	积分	G. Leibniz (1684 出版)	1675
d/dx	导数	G. Leibniz	1675
$f', y', f'x$	导数	J. Lagrange	1770－1779
Δx	差分，增量	L. Euler	1755
$\partial/\partial x$	偏导数	A. Legendre	1786
$\int_a^b f(x)\,dx$	定积分	J. Fourier	1819－1820
$\sum$	和	L. Euler	1755
$\prod$	积	C. F. Gauss	1812
!	阶乘	Ch. Kramp	1808
$\lvert x\rvert$	绝对值	K. Weierstrass	1841
lim	极限	S. l'Huillier	1786
$\lim_{n=\infty}$	极限	W. Hamilton	1853
$\lim_{n\to\infty}$	极限	多位数学家	20 世纪初
ζ	ζ 函数	B. Riemann	1857
Γ	Γ 函数	A. Legendre	1808
B	B 函数	J. Binet	1839
Δ	Laplace算子	R. Murphy	1833
∇	nabla, Hamilton 算子	W. Hamilton	1853

可 变 运 算 符 号

符 号	意 义	引 入 者	年 代
φx	函数	J. Bernoulli	1718
$f(x)$	函数	L. Euler	1734

个体关系符号

符号	意义	引入者	年代
=	相等	R. Recorde	1557
>	大于	T. Harriot	1631
<	小于	T. Harriot	1631
≡	同余，全等	C. F. Gauss	1801
∥	平行	W. Oughtred (死后出版)	1677
⊥	垂直	P. Hérigone	1634

三类基本符号 A), B), C) 中的每一类，又都可分为两种：1) 确定的对象、运算和关系的个体符号 (individual symbols)；2) "可变的"或"未知的"对象、运算和关系的一般符号．第一种符号的例子如下所述 (亦见本条中的符号表)：

A_1) 自然数的符号 1, 2, 3, 4, 5, 6、7, 8, 9；超越数 e 和 π；虚数单位 $i=\sqrt{-1}$；等等．

B_1) 算术运算符号 +, −, ×, :；开方 $\sqrt{\ }$, $(\cdot)^{1/n}$, 微分 d/dx, Laplace 算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在这一种符号中也包括个体符号 sin, tan, log, 等等．

C_1) 等号和不等号 =, >, <, ≠, 表示平行的符号 (∥), 表示垂直的符号 (⊥)．

第二种符号表示某一类符号中的任意的对象、运算和关系，或者由预先指定的条件得到的对象、运算和关系．例如，在写出的恒等式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

中，字母 a 和 b 表示任意数；当研究函数关系

$$y=x^2$$

时，字母 x 和 y 表示满足这个关系的任意数；当解方程

$$x^2-1=0$$

时，x 表示满足这个方程的任何数 (解出这个方程便可得知，只有两个满足这个条件的数：+1 和 −1)．

从逻辑学的观点来看，把所有这一类符号称为可变符号 (variable symbols) 是完全合理的，在数理逻辑中就这样称呼 (可以证明变元的"变化域"可能是由唯一的一个对象组成的，甚至可能是"空的"，例如方程无解的情况)．这类符号的另一些例子是：

A_2) 点、直线、平面和一些更复杂的几何图形的符号，在几何学中用字母表示．

B_2) 函数符号，例如 f, F, φ、以及算子演算中的符号，这里字母 L 可以表示任意算子，例如，

$$L(y)=a_0+a_1\frac{dy}{dx}+\cdots+a_n\frac{d^ny}{dx^n}.$$

表示"可变关系"的符号不常使用；它们只应用于数理逻辑以及一些比较抽象的、主要是公理化的数学分支．

参考文献

[1] Cajori, F., A history of mathematical notations, 1−2, Open Court, La Salle, 1952 − 1974.

【补注】 事实上，符号 π 是 Euler 从 H. Jones 那里借用的．

参考文献

[A1] Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, 1972. (中译本：M. 克莱因，古今数学思想，1−4卷，上海科学技术出版社，1979 − 1981).

[A2] Boyer, C., A history of mathematics, Wiley, 1968.

张鸿林 译

计算的数学理论 [mathematical theory of computation; математическая теория вычисления]

【补注】 近 20 年来的事实证明了与计算机以及计算机科学相关联的数学研究领域有了很大的发展．计算机的迅猛发展和由此引起的科学方法论中的深刻变化，以数学发展史上前所未有的速度把数学提高到了一个新的水平．

下述两个现象是值得注意的．第一，数学在各方面的发展直接引发了计算机和计算机科学的"新起点"．第二，计算机科学的发展导致了某些数学分支的迅猛发展．特别是，这里的第二点指的是离散数学的重要性在不断增长——业已证明，离散数学自 20 世纪 90 年代以来的影响仅仅是个开端．

由此可见，数学在计算机科学的基础中起着关键性的作用．某些重要的数学研究领域可以与计算机科学相联系．这些领域也反映了计算机科学的发展历史．

(1) 由 K. Gödel, A. Tarski, A. Church, E. Post, A. Turing 和 S. C. Kleene 开创的经典的可计算性理论占据着中心地位．这个领域起源于数理逻辑 (见**可计算函数** (computable function))．

(2) 在古典形式语言与自动机理论中，核心概念是**自动机** (automaton)，文法 (例如，见**生成文法** (grammar, generative)) 与语言 (例如，见**字母表** (alphabet))．除了 (1) 中所述领域的发展，这里不但要提到 N. Chomsky 关于自然语言基础的工作，而且还要提到 Post 有关重写系统的工作．此外，探讨由挪威数学家 A. Thue 在本世纪初开创的形式语言与重写系统的现代理论，也是十分有意义的！(见**形式语言与自动机** (formal language and automata)；L **系统** (L-system))．

(3) 复杂性理论是从 20 世纪 60 年代开始形成的一个研究领域，它是研究算法性能的．其核心概念

是易解的和难解的问题，这个领域日益显得重要，其中的一个原因是领域（4）的发展．（见**复杂性理论**（complexity theory）；**算法的计算复杂性**（algorithm, computational complexity of an）.）

（4）最近，联系到计算机系统的安全性，密码学的重要性日见显著．此外，公开密钥的概念有其特殊的理论上的重要性，并且极大地改变着与通讯系统联系的可操作性方法．（见**密码学**（cryptography）.）

（1）到（4）构成了计算的数学理论的核心．其他许多涉及到计算机科学的数学研究领域（例如语义学与程序语言校正理论、数据结构理论和数据库理论）也有了发展．

上面列出的一切领域构成了现代数学的一个极具诱惑力的部分．它是富有活力的，其中充满了需要用到最有意义和最机敏的数学技巧的挑战性问题．

计算理论的基本问题，可以表述成下列任何一种形式：什么是可计算的？对于什么样的问题，能够构造出一个有效的机械的过程，以解决该问题的每个实例？哪些问题有求解的算法？

数理逻辑的一项重要进展是 20 世纪 30 年代指出了不可解问题的存在性：不存在判断问题解的**算法**（algorithm），这种算法的不存在不是因为人类的无能，而是因为它在逻辑上是不可能的．这是目前计算理论基本问题的确切表述．过去，对每一个明确表述的问题，人们总是力图构造正确的算法（如果这种算法存在的话）．此基本问题的实际意义，就在于对不可解问题，再也不要去试图构造它的算法了（曾经有过一些失败的范例）．

计算模型必须确定不可解性．如果要说明一个特定问题不存在算法，就必须给出算法的确切定义．这种情况与确定可解性不同：后者只要给出在直觉意义上某一特别的有效程序就足够了．（术语"算法"与"有效程序"是作为同义词使用的．）

现在，面临着形成计算模型观念的必要性，如同算法的直觉观念一样，这种模型要足以适用于所有的计算机．在这方面，人们早期的一些想法是合理的．

设算法需要形式化计算函数，该函数是从非负整数到自身的映射，尽管此假设在这点上不是重要的，可以看到，它对一般性的约束是非本质的，这是由于其他的输入输出形式是可以转化为非负整数的．

在设计定义了用 MC 表示的计算的一般模型后，可以看到模型的每个特例都具有有限描述（finitary description），也就是说它可以用一个公式或有限多个字来描述．列举这些描述，就得到了计算的一般模型的所有特例的一个枚举：MC_1、MC_2，…，其中，每个 MC_i 表示一些特殊算法，用以计算一个从非负整数到非负整数的函数，用 $MC_i(j)$ 表示 MC_i 计算自变量值为 j 所得的函数值．

函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=MC_x(x)+1. \quad (A1)$$

显然，下面是计算函数 $f(x)$ 的一个算法（在直觉意义上）：给定输入 x，算法 MC_x 由输入 x 开始，加 1 后输出．

然而，在形式化的 MC 模型中是否有计算函数 $f(x)$ 的特殊算法呢？回答是没有并且结论不是可以直接得到的．假定某个 MC_t 给出这样一个算法，这里 t 是自然数．那么对所有的 x，

$$f(x)=MC_t(x). \quad (A2)$$

这样，在（A1）与（A2）中，用 t 代入自变量 x，两者就发生了矛盾．

这个被称为对角线化二难推理（dilemma of diagonalization）的矛盾，说明了计算模型的独立性，的确，没有一个模型 MC 能列举出有被自身形式化的算法．

有一个简单而自然的方法避开对角线化二难推理．迄今 MC_i 算法被假定为处处有定义：对所有的输入 j、算法 MC_i 有一个输出．但是从各个方面，如从计算机程序来看，这个假定是不合理的．无法确信每个程序都对所有的输入产生一个输出．所以也要允许一些 MC_i 算法对某些输入 j 进入无限循环、从而对这种 j 没有输出．而且这种 j 的集合甚至是事先不知道的．

于是，算法表

$$MC_1, MC_2, \cdots \quad (A3)$$

中的一些算法只对某些可能的输入产生输出，即相应的函数不是对全体非负整数定义的，若算法（A3）计算的函数中包含这样的部分函数、则不会产生对角线二难推理．实际上，因为 MC_t 不必被定义、所以上面提出的论点不会产生矛盾．

现在，**Turing 机**（Turing machine）被看成是计算的一般模型．在电子计算机出现以前很长时间 Turing 机就被引入了，它是用途最广的一般模型．其他的还有 Марков 算法（见**正规算法**（normal algorithm）），Post 系统（见 **Post 典范系统**（Post canonical system）），文法及 L 系统．每个模型都产生如（A3）的算法表，其中也包括部分函数．由它们所定义的可解问题或可计算函数的集合是相同的，从这一意义上讲，所有的模型都是等价的．

这里，只考虑了刻画可解问题类的一般问题．但这个问题被认为是计算理论的基本问题、它引发了关于计算的一般模型的讨论．

在计算理论中，一个更为特殊的问题是关于可解问题的复杂性．在关于问题 P_1 的每个算法是否都比关于问题 P_2 的算法复杂（例如，就需要的时间或存储空间而言），从这一意义上讲，P_1 是否较 P_2 困难？ 根据复杂性，问题的合理分类是怎样的呢？哪一些问题是如此复杂，以至于解决这类问题、对所有可预见的计算机都要求一个难以想象的时间开销的限定？这些问题可归结为难解的一类．

对实用计算来说，这类问题无疑是起决定性作用的．若一个问题是已知可解的或可计算的，但同时又是难的，就不好加以解决．一个典型的例子是，密码学中基于两个大素数因子分解假设之上的许多结果，就无法付诸实际应用．例如，若已知一个大的整数 n，譬如它是 200 位数，即使还知道 n 是两个大素数的积，但是一般来说，实际找出这两个素数仍然是不可能的．因为所描述的问题是很难处理的，所以这个假定是合理的，至少从目前所知的分解算法来看是如此．当然，如果不考虑复杂性，这样的分解算法就很容易被构造出来．

这类特殊的问题就导致了特殊的计算模型．后者可通过对 Turing 机的限定而得到，或者直接构造出，其中尤为重要的是**有限自动机**（automaton, finite）．它是一个严格进行有限计算的模型：在计算过程中，自动机不能在其上增加任何东西．虽然，不可能有适用于所有场合的计算模型，但为了发展，对模型进行修改甚至引入全新的模型是必要的．到现在，理论计算机科学已有很长的历史，足以对好的与坏的模型进行评判，理论上也完全可以产生出各种各样不同的计算模型，并证明某些与它们相关联的有价值的性质．好的模型应该具有充分的一般性，使得与计算中的任何特定情况或问题没有太紧密的联系．另一方面，它们不应太抽象，加在好模型上的限制将逐步地作用于某些实际应用领域．加在抽象文法上的一些限制，特别适宜于作文法上的相关分析，找出句中各字之间的关系，就是一个典型的例子．在编辑者遣词造句方面，文法分析的结果是具有本质意义的．

总之，一个好的模型表示了一种对于实际情况的恰如其分的抽象——距离描述对象既不太远亦不太近．

在关于输入－输出格式与运算方式方面，形式语言成为描述计算模型的工具．形式语言理论实质上是一个跨学科的研究领域，从语言学到生物学，各种不同的学科中都需要形式文法的描述．

参考文献

[1] Salomaa, A., Formal languages, Acad. Press, 1973.

[2] Rozenberg, G. and Salomaa, A., The mathematical theory of L systems, Acad. Press, 1980.

[3] Kuich, W. and Salomaa, A., Semirings, automata, languages, Springer, 1986

[4] Salomaa, A., Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1985.

G. Rozenberg, A. Salomaa 撰
王水汀、李　康 译　王继民 校

数学［**mathematics**; **математика**］

（希腊文为 $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta$、源出 $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$——知识、科学）

关于现实世界的数量关系和空间形式的一门科学．数学与自然科学和技术上的需要有着不可分割的密切联系；随着自然科学和技术的发展，数学所研究的数量关系和空间形式的储备不断扩大起来；以致数学的这个一般定义已含有越来越丰富的内容．

数学是一门具有独特的研究对象和研究方法（即逻辑推理方法）的特殊科学，但是只有在积累了足够多的实际材料之后，人们才有可能明确地认识到它的独立地位；而最早在公元前 6 至 5 世纪古希腊人就已具有这样的明确认识．在此之前的数学发展当然属于数学的萌芽时期，而公元前 6 至 5 世纪正是初等数学（elementary mathematics）时期的开端．在这两个最早的时期内，数学的研究只涉及到很有限的基本概念的储备，这些概念还是在历史发展的很早阶段由于经济生活上的最简单的需要而发生的．最初的力学和物理学问题还都可以由这些基本数学概念来满足需要．

在 17 世纪中，自然科学和技术中的新问题迫使数学家集中注意于创造方法，以便对运动、量的变化过程以及几何图形的变换进行数学研究．随着在解析几何中使用变量和微积分的建立，开始了变量数学（mathematics of variable quantities）即高等数学（higher mathematics）时期．

由于数学所研究的数量关系和空间形式继续扩大范围，在 19 世纪初叶就需要把数学研究对象的扩大过程本身作为数学研究的一个论题有意识地进行处理；面临的任务是要以相当普遍的观点对可能有的各式各样的数量关系和空间形式进行系统的研究．在这方面的第一个重大进步就是 Н. И. Лобачевский 创立了“拟想”几何学．这类研究的开展在数学中引进了新的特征，以致 19 和 20 世纪的数学当然属于一个特殊的近世数学（modern mathematics）时期．

1. 数学的萌芽．由于物件的计数，在文化发展的最早阶段就产生了最简单的自然数算术概念．但是只在口头记数法已经发展完成的基础上才出现书写的记数法，并逐渐产生对自然数实施四则算术运算的方法．由于测量（谷物数量、路程长度等）的需要，导致出现了最简单的分数的名称和记法并产生了对分数实施四则运算的方法．这样，资料累积起来，便逐渐形成了最古老的一门数学科学：**算术**（arithmetic）．面积和体积的测定，建筑技术上及稍后天文学上的需要，则引起了**几何学**（geometry）的初步发展．这些过程在

很大程度上曾独立地与平行地在许多民族中发生．在埃及和巴比伦算术与几何知识的积累，对于后来科学的发展起了特别重要的作用．在巴比伦，在已经发达的算术计算技巧的基础上也出现了**代数学**（algebra）的萌芽，而由于天文学上的需要则出现了**三角学**（trigonometry）的萌芽．

2.初等数学时期．只有在大量累积了像算术计算上零星的方法、确定面积和体积的方法等等具体的资料以后，数学才兴起而成为一门独立的科学，对于其所用方法的特殊性，对于其基本概念和命题在充分普遍的形式中系统发展的必要性，才有明确的认识．就算术和代数学而言，这个过程在巴比伦早已开始．但是这种新的趋向，即系统地和逻辑一贯地建立数学科学的基础，却是在古希腊才完全确定的．古希腊人所创造的初等几何学的表述系统，两千多年来一直是数学理论演绎结构的范例．从算术逐渐发展出**数论**（number theory）．又出现了关于量和测量的系统学说．实数（见**数**（number））概念（随着量的测定问题）的形成过程是非常长久的．问题在于无理数和负数的概念与自然数、分数或几何图形的概念不同，属于比较复杂的数学抽象，在科学出现以前的人类经验中是没有充分牢固的支柱的．代数学作为一种字母演算来建立，只是在这个时期的末尾才完成．测地学和天文学的发展很早便促进了平面及球面三角学的研究．当数学兴趣的重心转移到变量数学方面去的时候，初等数学时期结束了（在西欧是在 17 世纪初叶）．

3.变量数学建立的时期．从 17 世纪起，开始了数学发展中的一个崭新时期．这时，数学研究的数量关系和空间形式的范围已不再限于数、量和几何图形了．这主要是因为在数学中已公然引入了运动和变化的观念．在代数学中早就以隐蔽的形式含有变量与变量之间的依赖性的观念（和的值依赖于相加的各项的值，等等）．但是要想了解变化过程中的数量关系，就必须把量与量之间的依赖性本身作为独立的研究对象．因此，**函数**（function）概念被提到首要地位，这个概念以后就成为基本的和独立的研究对象，正如从前的量或数的概念一样．变量和函数依赖性的研究导致数学分析的一些基本概念，导致极限、导数、微分和积分的概念，因而在数学中公然引入了无穷的思想．无穷小分析首先以**微分学**（differential calculus）和**积分学**（integral calculus）的形式被建立起来了，这就有可能把变量的有限变化同变量在其各别所取值的接近邻域内的性态联系起来．力学与物理学的基本定律被写成微分方程（见**常微分方程**（differential equation，ordinary）和**偏微分方程**（differential equation，partial）），因而求解这些方程的问题就成为数学的重要课题之一．寻求由另一类条件（某些相关量取极大值或极小值的条件）确定的未知函数，则构成**变分学**（variational calculus）的论题．这样，除了以数作为未知量的方程以外，又出现了另一类方程，其中一些函数是未知的、待定的．

随着图形的运动与变换的观念引入几何学，几何学的研究对象也大大地扩充了．几何学开始研究运动和变换本身．例如，在**射影几何学**（projective geometry）中，平面或空间的射影变换集合就是基本研究对象之一．然而，这些思想的有意识的发展还只是在 18 世纪末和 19 世纪初．很久以前，随着**解析几何学**（analytic geometry）在 17 世纪的建立，几何学同数学的其他分支的关系起了根本变化．那时已找到一种普遍的方法把几何问题转换为代数学和分析学的语言，并灵巧地用代数和分析的方法来解决；另一方面，又发现了把代数和分析的事实用几何方法来表现（图示）的广泛可能性，例如用图形来表示函数关系．

4.近世数学．在 17 和 18 世纪建立的数学分析各分支，在 19 和 20 世纪都以很大的强度继续发展．对于科学和技术问题的应用范围这时也大为扩充．但是，除了这种数量上的增长以外，在 18 世纪末和 19 世纪初在数学发展中还出现了一些本质上崭新的特征．

在 17 和 18 世纪所积累起来的大量实际资料，使得进行深入的逻辑分析并把这种分析同新的观点相结合成为必要的了．这时数学同自然科学的关系，虽然紧密的程度在实质上并未稍减，却已具有十分复杂的形式了．重大新理论的产生，不仅是由于自然科学或技术的直接需要，也由于数学本身的内在要求．19 世纪初叶和中叶在全部数学分析中占有中心地位的**复变函数论**（functions of a complex variable，theory of），大体上正是这样发展起来的．作为数学内在发展的结果而兴起的理论的另一个精彩例子是 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiĭ geometry）．

比较直接地和不断地依靠力学与物理学的需要而成长起来的，是向量和张量分析．向量和张量概念转向无穷维量，则是在**泛函分析**（functional analysis）的框架内发生的，并与现代物理学的需要有着密切的联系．

这样，由于数学的内在需要，也由于自然科学的新的需要，数学所研究的数量关系和空间形式大大地扩充起来；在数学中引入了存在于任何群的元素之间的、向量之间的、函数空间中的算子之间的关系，各种各样任意维数的空间形式，等等．

在 19 世纪开始的这个数学发展阶段，其本质上新异之处在于研究的数量关系和空间形式必须扩大范围的问题本身，已成为数学家自觉地和积极地感到兴趣的对象．要是在从前，例如，负数和复数的引入及其

运算法则的准确形成需要长期的努力，那么现在数学的发展则要求拟定一些方法来有意识、有计划地建立新的几何和代数系统.

在 19 世纪数学对象的极大扩充引起人们密切注意数学“基础”问题，即批判地修正数学的初始原理(公理)，构成定义和证明的严格系统，以及批判地考察这些证明中所用到的逻辑方法. 对于在发展个别数学理论时数学家的实际工作提出的逻辑严格性的标准要求，直到 19 世纪末才完全形成. 深入和仔细分析对证明的逻辑严格性的要求，数学理论的构成，以及数学问题的算法可解性和不可解性问题，就是**数理逻辑**(mathematical logic)的研究对象.

在 19 世纪初叶，数学分析的应用范围有了新的大扩展. 以前，需要大量数学工具的物理学基本分支是力学和光学. 现在，又加上了电动力学、磁学和热力学. 连续介质力学这个重要分支也得到了广泛发展. 技术上对数学需要也在迅速增加. 作为力学和数学物理一些新领域的基本工具而被深入发展的，是**常微分方程**(differential equation, ordinary)、**偏微分方程**(differential equation, partial)和**数学物理方程**(mathematical physics, equations of)的理论.

微分方程理论是流形拓扑学研究的出发点. 这里得到了**代数拓扑学**(algebraic topology)中的“组合”方法、“同调”方法和“同伦”方法的起点. 在**集合论**(set theory)和**泛函分析**(functional analysis)的基础上产生了其他拓扑学分支，并导致系统构造一般拓扑空间理论(见**拓扑空间**(topological space)).

在自然的研究和技术问题的求解中，作为对微分方程方法的一种重要补充的，是**概率论**(probability)方法. 如果说在 19 世纪初叶概率方法主要用于弹道学和误差理论，那么在 19 世纪末叶和 20 世纪初叶由于**随机过程**(stochastic process)论的建立和**数理统计**(mathematical statistics)工具的发展，概率论有了许多新的应用.

数论，它的许多个别的结果和思想，在 19 世纪在各个方向上发展成为严整的理论(见**代数数论**(algebraic number theory)；**解析数论**(analytic number theory)；**Diophantus 逼近**(Diophantine approximations)).

代数学研究重心转移到一些新的代数学领域：群、环、域理论以及一般代数结构. 在代数学和几何学交界处，产生了连续群理论，其方法后来渗入数学的一切新领域，以及自然科学中.

初等几何学和射影几何学主要是从研究其逻辑与公理基础的观点上引起数学家的注意的. 但是吸引大量科学力量进行研究的几何学基本领域是：**微分几何学**(differential geometry)，**代数几何学**(algebraic geometry)和 **Riemann 几何学**(Riemannian geometry).

作为在无理数的严格算术理论和集合论的基础上系统构造数学分析的结果之一，产生了**实变函数论**(functions of a real variable, theory of).

当应用纯数学研究结果解决实际问题时，往往要求给出问题的数值形式的解. 但是，即使对问题进行了充分的理论分析之后，这通常还是极困难的. 因此，在 19 世纪末叶和 20 世纪初叶产生的分析和代数的数值方法，随着电子计算机的制造和使用逐渐发展成为一门独立的数学分支：**计算数学**(computational mathematics).

现代数学的这些突出的基本特征，上面列举的数学各分支的基本研究方向，在 20 世纪初叶已经形成. 尽管在 20 世纪数学有了突飞猛进的发展，这种数学各分支划分的框架在很大程度被保留下来. 但是，数学本身发展的要求，各科学领域的“数学化”，数学方法向许多实际活动领域的渗透，以及计算技术的迅速进步，导致数学家对数学各分支研究兴趣的变迁和溶和，并导致一系列新的数学科目的出现(例如，见**自动机理论**(automata, theory of)；**信息论**(information theory)；**对策论**(games, theory of)；**运筹学**(operations research)，亦见**控制论**(cybernetics)；**数理经济学**(mathematical economics)). 在**控制系统**(control system)理论问题的基础上，产生了**组合分析**(combinatorial analysis)、**图论**(graph theory)、**编码理论**(coding theory)和**离散分析**(discrete analysis). 由微分方程所描述的物理或数学系统的最优(在某种意义下)控制问题，导致产生了**最优控制的数学理论**(optimal control, mathematical theory of).

一般控制问题以及有关的数学课题的研究，随着计算技术的进步，为人类活动的一些新领域的自动化奠定了基础.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Математика, в кн.: Большая Советская Энциклопедия, 2 изд., т. 26, М., 1954(中译本：А. Н. 柯尔莫戈罗夫等，数学·算术，高等教育出版社，1956).

[2] Виноградов, И. М., Математика и научный прогресс, в кн.: Ленин и современная наука, кн. 2, М., 1970.

[3] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1-2, Springer, 1968 - 1970.

[4] Александров и др., Математика, её содержание, методы и значение, т. 1-3, М., 1956(中译本：数学——它的内容、方法和意义，第一、二、三卷，科学出版社，1984).

[5] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1-3, М., 1970 - 1972.

[6] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М.,

1978.

[7] Математика XIX века. Геометрия. теория аналитических функций, М., 1981.

[8] Struik, D. J., A concise history of mathematics, Dover, reprint, 1967 (中译本: D. J. 斯特洛伊克, 数学简史, 科学出版社, 1958).

[9] Марджанишвили, К. К., Математика в Академии наук СССР, «Вестн. АН СССР», 1974, 6.

[10] Weyl, H., A half-century of mathematics, *Amer. Math. Monthly*, 58 (1951), 8, 523 – 553.

根据 А. Н. Колмогоров 的文章 [1] 摘编

【补注】

参考文献

[A1] Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, 1972 (中译本: M. 克莱因, 古今数学思想, 第 1–4 册, 上海科学技术出版社, 1979 – 1981).

[A2] Bourbaki, N., Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 1960.

[A3] MacLane, S., Mathematics, form and function, Springer, 1986

[A4] Lakatos, I., Proofs and refutations, Cambridge Univ. Press, 1979.

[A5] Hardy, G., A mathematician's apology, Cambridge Univ. Press, 1977.

[A6] Young, L. C., Mathematicians and their times, North-Holland, 1981.

[A7] Newman, J. R., The world of mathematics, 1–3, Simon & Schuster, 1956.

[A8] Browder, F. E. (ed.), Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proc. Symp. Pure Math., 28, Amer. Math. Soc., 1976.

[A9] Dieudonné, J., Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700 – 1900, 1–2, Hermann, 1978.

[A10] Dieudonné, J., Panorama des mathématiques pures: le choix bourbachique, Gauthier-Villars, 1977.

[A11] Bochner, S., The role of mathematics in the rise of science, Princeton Univ. Press, 1981.

[A12] Courant, R. and Robbins, H., What is mathematics?, Oxford Univ. Press, 1980 (中译本: R. 柯朗, H. 罗宾, 数学是什么?, 科学出版社, 1985).

【译注】 翻译本条目时, 参考并引用了文献 [1] 的中译本.

张鸿林 译

Mathieu 方程 [Mathieu equation; Матьё уравнение]

下列实系数常微分方程:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + b\cos 2z)u = 0,\ z\in\mathbf{R}.$$

这个方程是由 E. Mathieu ([1]) 在研究椭圆薄膜的振动时引入的. 它是 **Hill 方程** (Hill equation) 的特殊情况.

Mathieu 方程的**基本解组** (fundamental system of solutions) 具有下列形式:

$$u_1(z) = e^{\alpha z}\varphi(z),\ u_2(z) = u_1(-z), \qquad (*)$$

其中 $\alpha \neq ni$, n 为整数, $\varphi(z)$ 是周期为 π 的函数, 而 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent) α 或者是实数, 或者是纯虚数. 当 $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$ 时, 一个解无限增长, 而另一个解当 $z\to+\infty$ 时趋向于零 (参数 a, b 平面上的不稳定带); 当 $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$ 时, 两个解都是有界的 (稳定带). 在这些带的边界上 (未包含于 (*) 的情况), 基本解组中的一个函数具有周期 π 或 2π (后一情况称为 **Mathieu 函数** (Mathieu functions)), 第二个函数可由第一个函数乘以 z 而得到. 不稳定带的形状为曲边三角形, 其顶点为 $a = n^2$, $b = 0$, $n = 0, 1, \cdots$ (见 [2], [4]).

另一种形式的方程也称为 Mathieu 方程 (见 [3]).

参考文献

[1] Mathieu, E., Course de physique methématique, Paris, 1873.

[2] Strett, M. J. D., Laméschc-Mathieuscheund verwandter Funktionen in Physik und Technik, Springer, 1932.

[3] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Chelsea, reprint, 1971 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1977).

[4] Yakubovich, V. A. and Starzhinskiĭ, V. M., Linear differential equations with periodic coefficients and their applications, 1–2, Wiley, 1975.

В. М. Старжинский 撰

【补注】 Mathieu 方程中所包含的算子称为 Mathieu 算子 (Mathieu operator). 在各种应用中, 特别是在固态理论中, 相应的离散情况, 即由

$$(M_{A,\alpha,\nu}g)(n) = g(n+1) + $$
$$+ 2A\cos(2\pi n\alpha - \nu)g(n) + g(n-1),$$
$$A,\ \alpha,\ \nu \in \mathbf{R}$$

定义的离散 Mathieu 算子 (discrete Mathieu operator) 是重要的. 如果 α 是有理数, 则这是一个周期算子, 反之, 它是殆周期算子. 设 Spec (A, α, ν) 是 $M_{A,\alpha,\nu}$ 在 $l_2(\mathbf{Z})$ 上的谱, 并且

$$\mathrm{Spec}(A, \alpha) = \bigcup_{\nu}\mathrm{Spec}(A, \alpha, \nu).$$

谱 Spec$(1, \alpha)$ 作为 α 的一个函数给出具有非常组合正则性和类似于 Cantor 集的一些性质的平面上的一个图形. 它称为 Hofstadter 蝶形 (Hofstadter butterfly) ([A1]). M. Kac 猜想 (Martini 问题 (Martini problem)): 对于一切无理数 α, $A\neq 0$, $\nu\in\mathbf{R}$, Spec (A, α, ν) 是一个 Cantor 集; 另一个猜想说的是: 对于一切无理数 α, Spec$(1, \alpha)$ 的 Lebesgue 测度为零. 对于有理数 α, 关于这种谱的一些详细结果, 以及关于这一问题领域的综述, 见 [A2]. 有关这些内容以及连续

情况类似结果的一些有价值的文章是[A3]-[A5].

参考文献

[A1] Hofstadter, D., The energy levels of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Phys. Rev.*, **B14** (1976), 2239-2249.

[A2] Mouché, P. M. M. van, Sur les régions interdites du spectre de l'opérateur périodique et discret de Mathieu, Math. Inst. Univ. Utrecht, 1988. Thesis.

[A3] Bélissard, J. and Simon, B., Cantor spectrum for the almost Mathieu potential. *J. Funct. Anal.*, **48** (1982). 408-419.

[A4] Bélissard, J., Lima, R. and Testarel, D., Almost periodic Schrödinger operators, in L. Streit (ed.). Mathematics and Physics, lectures on recent results, Vol. 1, World Scientific, 1985. 1-64.

[A5] Simon, B., Almost periodic Schrödinger operators, a review, *Adv. Appl. Math.*, 3 (1982), 463-490.

[A6] Meixner, J. and Schäfke, F. W., Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations: further studies, Springer, 1980.

张鸿林 译

Mathieu 函数 [Mathieu functions; матьё функций]

Mathieu 方程 (Mathieu equation)

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)u=0,\ z\in\mathbf{R}$$

周期为 2π 的解，仅当参数平面中的点 (a, q) 位于稳定性区域的边界上时它才存在. Mathieu 函数或为偶或为奇，它在相差一个因子之下是唯一的；另一个线性无关的解当 $|z|\to\infty$ 时随 z 线性增加，如果 $q\neq 0$. 偶 Mathieu 函数是积分方程

$$G(z)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos z\cos t}G(t)dt,\ k=\sqrt{32q}\ .$$

的本征函数. 奇 Mathieu 函数也满足类似的方程. Mathieu 函数的记法为

$$ce_0(z, q),\ ce_1(z, q),\ \cdots;$$
$$se_1(z, q),\ se_2(z, q),\ \cdots.$$

当 $q\to 0$ 时，这些函数退化为**三角函数系** (trigonometric system)

$$1,\ \cos z,\ \cdots;\ \sin z,\ \sin 2z,\ \cdots,$$

并且在区间 $(-\pi, \pi)$ 上具有相同的正交性质. Mathieu 函数存在 Fourier 级数展开，它关于小的 $|q|\leqslant r_n$ 收敛；这些级数的系数是关于 q 的收敛幂级数，例如，

$$ce_0(z, q)=1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2^{n+1}\frac{q^n}{(n!)^2}-\frac{n(3n+4)2^{n+3}q^{n+2}}{((n+1)!)^2}+\right.$$

$$\left.+O(q^{n+4})\right]\cos 2nz.$$

参考文献

[1] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambrige Univ. Press, 1952.

[2] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Automorphic functions, 3, McGraw-Hill, 1955(中译本：A. 爱尔台里，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957-1958).

[3] Sansone, G., Equazioni differenziali nel compo reale, 1, Zanichelli, 1948.

[4] Strett, M. J. O., Lamésche-, Mathieusche-, und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Springer, 1932.

[5] Mac-Lachlan, N. W., Theory and application of Mathieu functions, Clarendon Press, 1947.

M. B. Федорюк 撰 唐 云 译

Mathieu 群 [Mathieu group; Матьё группа]

同构于由 E. Mathieu ([1]) 发现的五个群之一的**有限群** (finite group). Mathieu 群系列由记作

$$M_{11},\ M_{12},\ M_{22},\ M_{23},\ M_{24}$$

的群构成. 它们可分别表示成 11, 12, 22, 23 和 24个元素的集合上的**置换群** (permutation group). 群 M_{12} 和 M_{24} 是五重传递的. M_{11} 可自然地成为 M_{12} 作用的集合中某个元素在 M_{12} 中的**稳定化子** (stabilizer)；同样地，M_{23} 和 M_{22} 分别是 M_{24} 和 M_{23} 的元素的稳定化子. Mathieu 群的阶分别为

7 920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040.

当考虑 Mathieu 群时，常常使用它们作为相应的 **Steiner 系** (Steiner system) $S(l, m, n)$ 的自同构群的表示(见[2])，即一个 n 元集合以及由它的

$$\binom{n}{l}\Big/\binom{m}{l}$$

个子集(称为区组)构成的系统，每个区组包含 m 个元素，而每个 l 元集合恰包含在一个区组里. Steiner 系的自同构 (automorphism of a Steiner system) 定义为集合中元素的一个置换，它将区组变成区组. Mathieu 群和它们作为其自同构群的相应的 Steiner 系列表如下：$M_{11}-S(4, 5, 11)$；$M_{12}-S(5, 6, 12)$；$M_{22}-S(3, 6, 22)$；$M_{23}-S(4, 7, 23)$；$M_{24}-S(5, 8, 24)$.

Mathieu 群是最早知道的(也是 80 多年中仅知的)散在有限单群(亦见**零散单群** (sporadic simple group)).

参考文献

[1A] Mathieu, E., Mémoire sur l'étude des fonctions de

plusieures quantités, sur la manière de les formes et sur les substitutions qui les laissant invariables, *J. Math. Pures Appl.*, **6** (1861), 241 − 323.

[1B] Mathieu, E., Sur la fonction cinq fois transitive des 24 quantités, *J. Math. Pures Appl.*, **18** (1873), 24 − 46.

[2A] Witt, E., Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **12** (1938), 256 − 264.

[2B] Witt, E., Ueber Steinersche Systeme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **12** (1938), 265 − 275.

[3] Мазуров, В. Д., Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, 5−56.

С. П. Струнков 撰 王 杰 译 石生明 校

矩阵 [**matrix**; **матрица**]

其元素 a_{ij} 属于某集合 K 由 m 行与 n 列组成的长方形阵列

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| . \qquad (1)$$

(1)亦称为 K 上 $(m\times n)$ 维矩阵 ($(m\times n)$ - dimensional matrix) 或 K 上具有维数 $m\times n$ 的矩阵. 用 $M_{m,n}(K)$ 表示 K 上所有 $(m\times n)$ 维矩阵的集合. 如果 $m=n$, 则 (1) 称为 n 阶方阵 (square matrix of order n). K 上所有 n 阶方阵集合记为 $M_n(K)$.

矩阵的另外记号有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{与} \|a_{ij}\|.$$

在最重要情况中, K 取实数域, 复数域, 任意域, 多项式环, 整数环, 函数环或任意结合环. 定义在 K 上的加法与乘法运算自然地扩充到 K 上矩阵上, 且按此方式导出矩阵演算 (matrix calculus)——矩阵论的主要课题.

矩阵概念首先出现在 19 世纪中叶 W. Hamilton 以及 A. Cayley 的研究工作中. 矩阵论的基本结果应归于 K. Weierstrass, C. Jordan 与 G. Frobenius. И. А. Лаппо-Данилевский 已发展了多个矩阵变量的解析函数论, 并将它用于线性微分方程组的研究.

矩阵的运算. 设 K 为结合环, 设 $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|\in M_{m,n}(K)$. 这时, 矩阵 A 与 B 的和定义为

$$A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|.$$

显然, $A+B\in M_{m,n}(K)$ 且矩阵的加法是可结合与可交换的. $M_{m,n}(K)$ 中零矩阵 (null matrix) 为元素均为零的矩阵 0. 对每个 $A\in M_{m,n}(K)$,

$$A+0=0+A=A.$$

设 $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,k}(K)$ 与 $B=\|b_{ij}\|\in M_{k,n}(K)$. 这时, 两个矩阵 A 与 B 的积由下列规则定义:

$$AB=\|c_{\mu\nu}\|\in M_{m,n}(K),$$

其中

$$c_{\mu\nu}=\sum_{j=1}^{k} a_{\mu j}b_{j\nu}.$$

$M_n(K)$ 的两个元素之积总有定义且属于 $M_n(K)$. 矩阵乘法是可结合的: 若 $A\in M_{m,k}(K)$, $B\in M_{k,n}(K)$ 与 $C\in M_{n,p}(K)$, 则

$$(AB)C=A(BC)$$

且 $ABC\in M_{m,p}(K)$. 分配律也成立: 对 $A\in M_{m,n}(K)$ 与 $B,C\in M_{n,m}(K)$,

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)A=BA+CA. \qquad (2)$$

特殊地, 对 A, B, $C\in M_n(K)$(2) 亦成立. 因此, $M_n(K)$ 是一个结合环. 如果 K 是有单位元的环, 则矩阵

$$E_n=\left\| \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\|$$

是环 $M_n(K)$ 的单位元: 对所有 $A\in M_n(K)$, $E_nA=AE_n=A$. 矩阵乘法不是可交换的: 若 $n\geqslant 2$, 则对有单位元的每一个结合环 K 存在矩阵 $A,B\in M_n(K)$ 使得 $AB\neq BA$.

设 $\alpha\in K$, $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}(K)$; 矩阵 A 与元素 (数, 标量) α 的积定义为矩阵 $\alpha A=\|\alpha a_{ij}\|$. 这时,

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\quad \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$$

设 K 为有单位元的环, 定义矩阵 e_{ij} 为其唯一非零元素等于 1 且是 (i,j) 元素的 $M_{m,n}(K)$ 中的矩阵, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$. 这时, 对每个 $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}(K)$,

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_{ij}.$$

如果 K 是域, 则 $M_{m,n}(K)$ 是 K 上 mn 维**向量空间** (vector space), 且诸矩阵 e_{ij} 组成这个空间的基.

分块矩阵. 设 $m=m_1+\cdots+m_k$, $n=n_1+\cdots+n_l$, 其中 m_μ 与 n_ν 是正整数. 这时, 矩阵 $A\in M_{m,n}(K)$ 可写成下列形式

$$A=\left\| \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{matrix} \right\|, \qquad (3)$$

其中, $A_{\mu\nu}\in M_{m_\mu,n_\nu}(K)$, $\mu=1,\cdots,k$, $\nu=1,\cdots,l$. 矩阵 (3) 称为分块矩阵 (block matrix). 若 $B\in M_{n,p}(K)$, $p=p_1+\cdots+p_t$, $p_i>0$, 且 B 写成以下形式

$$B=\begin{Vmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{l1} & \cdots & B_{lt} \end{Vmatrix}, \quad B_{ij}\in M_{n_\nu,p_j}(K),$$

则

$$AB=C=\begin{Vmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{k1} & \cdots & C_{kt} \end{Vmatrix}, \quad C_{\mu j}=\sum_{i=1}^{l}A_{\mu i}B_{ij} .$$

例如，若 $n=kl$，则 $M_n(K)$ 可视为 $M_k(\Sigma)$，这里，$\Sigma=M_l(K)$．

如果矩阵 $A\in M_n(K)$ 具有以下形式

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0_{12} & \cdots & 0_{1k} \\ 0_{21} & A_2 & \cdots & 0_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{k1} & 0_{k2} & \cdots & A_k \end{Vmatrix},$$

其中 $A_i\in M_{n_i}(K)$ 与 $0_{ij}\in M_{n_i,n_j}(K)$ 为零矩阵，则记成 $\mathrm{diag}[A_1,\cdots,A_k]$ 且称为分块对角的（block diagonal）．只要对 $i=1,\cdots,k$，A_i 与 B_i 的阶相同，那么下面式子成立

$$\mathrm{diag}[A_1,\cdots,A_k]+\mathrm{diag}[B_1,\cdots,B_k]=$$
$$=\mathrm{diag}[A_1+B_1,\cdots,A_k+B_k],$$
$$\mathrm{diag}[A_1,\cdots,A_k]\ \mathrm{diag}[B_1,\cdots,B_k]=$$
$$=\mathrm{diag}[A_1B_1,\cdots,A_kB_k] .$$

域上的方阵．设 K 是域，$A\in M_n(K)$，$\det A$ 是矩阵 A 的**行列式**（determinant）．这时，如果 $\det A\neq 0$，则 A 称为非退化的（non - degenerate）（或非奇异的（non-singular））．如果 $AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$，则矩阵 $A^{-1}\in M_n(K)$ 称为 A 的逆（inverse）．A 在 $M_n(K)$ 中的可逆性等价于它的非退化性，并且

$$A^{-1}=\|c_{ij}\|,\quad c_{ij}=\frac{A_{ji}}{\det A},$$

这里，A_{ij} 为元素 a_{ji} 的**代数余因子**（(algebraic) cofactor），$\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$．对 A，$B\in M_n(K)$，

$$AB=E_n\Leftrightarrow BA=E_n .$$

$M_n(K)$ 的所有可逆元的集合在乘法下是一个群，称为**一般线性群**（general linear group），并记为 $\mathrm{GL}(n,K)$．矩阵 A 的幂定义如下

$$A^0=E_n;$$
$$A^k=A^{k-1}A \text{ 对 } k>0,$$

并且，如果 A 可逆，则 $A^{-k}=(A^{-1})^k$．对多项式

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_tx^t,\ f(x)\in K[x],$$

定义矩阵多项式

$$f(A)=\alpha_0E_n+\alpha_1A+\cdots+\alpha_tA^t .$$

取自 $M_n(K)$ 的每一个矩阵产生出 K 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换．设 $v_1,\cdots,v_n$ 为 V 中的基，又设 $\sigma: V\to V$ 为 V 的线性变换．这时，σ 由向量集

$$u_1=\sigma(v_1),\cdots,u_n=\sigma(v_n)$$

唯一确定．并且，

$$\left.\begin{aligned} \sigma(v_1)&=v_1a_{11}+\cdots+v_na_{n1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(v_n)&=v_1a_{1n}+\cdots+v_na_{nn}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

这里，$a_{ij}\in K$．矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ 称为关于基 $v_1,\cdots,v_n$ 变换 σ 的矩阵（matrix of the transformation）．对一固定基，矩阵 $A+B$ 是线性变换 $\sigma+\tau$ 的矩阵，而 AB 是变换 $\sigma\tau$ 的矩阵，如果 B 为线性变换 τ 的矩阵．(4)式可写为如下形式

$$[\sigma(v_1),\cdots,\sigma(v_n)]=[v_1,\cdots,v_n]A .$$

假定 $w_1,\cdots,w_n$ 为 V 中其他的基．这时，$[w_1,\cdots,w_n]=[v_1,\cdots,v_n]T$，$T\in\mathrm{GL}(n,k)$，并且，$T^{-1}AT$ 是变换 σ 关于基 $w_1,\cdots,w_n$ 的矩阵．两个矩阵 A．$B\in M_n(K)$ 是相似的（similar），如果存在矩阵 $T\in\mathrm{GL}(n,K)$ 使得 $B=T^{-1}AT$．在这里，还有 $\det A=\det T^{-1}AT$，且矩阵 A 与 B 的秩相等．如果 $\sigma(V)=V$，则线性变换 σ 称为非退化的（non - degenerate）或非奇异的（non - singular）；σ 是非退化的，当且仅当它的矩阵是非退化的．如果 V 被认为是列空间 $M_{n,1}(K)$，那么 V 中每一个线性变换由列 $v\in V$ 被某 $A\in M_n(K)$ 左乘给定：$\sigma(v)=Av$，并且，σ 关于基

$$v_1=\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \cdots,\ v_n=\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

的矩阵重合于 A．矩阵 $A\in M_n(K)$ 是奇异的（singular）（或退化的（degenerate）），当且仅当存在某列 $v\in M_{n,1}(K)$，$v\neq 0$，使得 $Av=0$．

转置与特殊形式的矩阵（transposition and matrices of special form）．设 $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}(K)$，这时，矩阵 $A^T=\|a^T_{ij}\|\in M_{n,m}(K)$（其中 $a^T_{ij}=a_{ji}$）称为 A 的转置矩阵（transpose matrix）．另外记号有 ${}^tA$ 与 A'．设 $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}(\mathbf{C})$，这时 $\overline{A}=\|\overline{a}_{ij}\|$（其中 $\overline{a}_{ij}$ 是数 a_{ij} 的复共轭）称为 A 的复共轭矩阵（complex conjugate matrix）．当 $A\in M_n(\mathbf{C})$ 时，矩阵 $A^*=\overline{A}^T$ 称为 A 的 Hermite 共轭矩阵（Hermitian conjugate matrix）．应用中许多矩阵被冠以特殊名称：

矩阵的名称	定义条件
对称(symmetric)矩阵	$A^T=A$
斜对称(skew-symmetric)矩阵	$A^T=-A$
正交(orthogonal)矩阵	$A^T=A^{-1}$
Hermite(Hermitian)矩阵	$A^*=A$
酉(unitary)矩阵	$A^*=A^{-1}$
正规(normal)矩阵	$A^*A=AA^*$
幂幺(unipotent)矩阵	$(A-E_n)^n=0$
随机(stochastic)矩阵	$A=\|a_{ij}\|\in M_n(\mathbf{R}^n)$, $a_{ij}\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$, $i=1,\cdots,n$
双随机(doubly-stochastic)矩阵	A 与 A^T 都是随机的
(0,1)矩阵((0,1)-matrix)	A 的每个元素是 0 或 1

多项式矩阵．设 K 是域，$K[x]$ 是系数取自 K 的关于变量 x 的所有多项式的环．$K[x]$ 上矩阵称为多项式矩阵(polynomial matrix)．对环 $M_n(K[x])$ 的元素，引入下列初等运算(elementary operation)：1)矩阵的一行或一列乘以域 K 的非零元素；2)给定矩阵的一行(相应地，一列)乘以 $K[x]$ 的多项式再加到另一行(另一列)．两个矩阵 $A, B\in M_n(K[x])$ 称为等价的(equivalent)($A\sim B$)，如果 B 可从 A 经过有限次初等运算得到．

设

$$N=\mathrm{diag}[f_1(x),\cdots,f_r(x),0,\cdots,0]\in M_n(K[x]),$$

其中，a) $f_i(x)\neq 0$; b) 对 $j>i$，$f_i(x)$ 整除 $f_j(x)$；c) $f_i(x)$ 内首项系数等于 1．这时，N 称为典范多项式矩阵(canonical polynomial matrix)．环 $M_n(K[x])$ 诸元素的每一个等价类包含唯一的典范矩阵．如果 $A\sim N$，其中

$$N=\mathrm{diag}[f_1(x),\cdots,f_r(x),0,\cdots,0]$$

是典范矩阵，则诸多项式

$$f_1(x),\cdots,f_r(x)$$

均称为 A 的不变因子(invariant factor)；数 r 重合于 A 的秩(rank)．矩阵 $A\in M_n(K[x])$ 在 $M_n(K[x])$ 中有一个逆，当且仅当 $A\sim E_n$．最后这个条件又等价于 $\det A\in K\backslash 0$．两个矩阵 A，$B\in M_n(K[x])$ 是等价的，当且仅当

$$B=PAQ,$$

其中，P，$Q\in M_n(K[x])$，$P\sim Q\sim E_n$．

设 $A\in M_n(K)$，这时，矩阵

$$xE_n-A\in M_n(K[x])$$

称为 A 的特征矩阵(characteristic matrix)，且 $\det(xE_n-A)$ 称为 A 的特征多项式(characteristic polynomial)．对每一个具有形式

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n\in K[x]$$

的多项式，存在 $F\in M_n(K)$ 使得

$$\det(xE_n-F)=f(x).$$

例如，矩阵

$$F=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{matrix}\right\| \qquad (*)$$

就是其一．两个相似矩阵的特征多项式重合．然而，两个矩阵有相同特征多项式的事实不必得出矩阵是相似的事实．一个相似性准则(similarity criterion)是：两个矩阵 A、$B\in M_n(K)$ 是相似的，当且仅当多项式矩阵 xE_n-A 与 xE_n-B 是等价的．取自 $M_n(K)$ 有一个给定特征多项式 $f(x)$ 的所有矩阵的集合被划分为有限多个相似矩阵类；此集合简化为一个单一类，当且仅当 $f(x)$ 在 $K[x]$ 中没有多重因子．

设 $A\in M_n(K)$，$v\in M_{n,1}(K)$，$v\neq 0$，并假定 $Av=\lambda v$，其中 $\lambda\in K$．这时，v 称为 A 的一个本征向量(eigen vector)，且 λ 称为 A 的一个本征值(eigen value)．一个元素 $\lambda\in K$ 为矩阵 A 的本征值，当且仅当它是 A 的特征多项式的一个根．对 A 的一个固定本征值 λ，所有满足 $Au=\lambda u$ 的列 $u\in M_{n,1}(K)$ 的集合是 $M_{n,1}(K)$ 的一个子空间．此子空间的维数等于矩阵 λE_n-A 的亏数(defect 或 deficiency) d ($d=n-r$，这里，r 是 λE_n-A 的秩)．此数值 d 不超过根 λ 的重数，但不必重合于它．矩阵 $A\in M_n(K)$ 相似于一个对角矩阵，当且仅当它有 n 个线性无关的本征向量．如果对 $A\in M_n(K)$，

$$\det(xE_n-A)=(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_t)^{n_t},\quad \lambda_j\in K,$$

且诸根 λ_j 是不同的，则如下事实成立：A 相似于一个对角矩阵，当且仅当对每一个 λ_j，$j=1,\cdots,t$，$\lambda_j E_n-A$ 的亏数重合于 n_j．特殊地，有 n 个相异本征值的每一个矩阵相似于一个对角矩阵．在一个代数闭域上，每一个 $M_n(K)$ 中矩阵相似于 $M_n(K)$ 中的某个三角矩阵．Hamilton-Cayley 定理(Hamilton-Cayley theorem)：如果 $f(x)$ 是矩阵 A 的特征多项式，则 $f(A)$ 为零矩阵．

按定义，矩阵 $A\in M_n(K)$ 的极小多项式(minimum polynomial)是具有如下性质的多项式 $m(x)\in K[x]$：α) $m(A)=0$；β) 其首项系数等于 1；γ) 如果 $0\neq\psi(x)\in K[x]$ 且 $\psi(x)$ 的次数小于 $m(x)$ 的次数，则 $\psi(A)\neq 0$．每一个矩阵有唯一的极小多项式．如果 $g(x)\in K[x]$ 且 $g(A)=0$，则 A 的极小多项式 $m(x)$ 整除 $g(x)$．A 的极小多项式与特征多项式分别重合于矩阵 xE_n-A 的最

后一个不变因子与所有不变因子的乘积．A 的极小多项式等于

$$\frac{\det(xE_n-A)}{d_{n-1}(x)},$$

其中 $d_{n-1}(x)$是矩阵 xE_n-A的所有 $n-1$ 阶**子式**(minor)的**最大公因子**(greatest common divisor)．矩阵 $A\in M_n(K)$ 相似于一个域 K上的对角矩阵，当且仅当它的极小多项式是环 $K[x]$ 内相异线性因子的乘积．

矩阵 $A\in M_n(K)$ 称为幂零的(nilpotent)，如果对某个整数 k，$A^k=0$．矩阵 A 是幂零的，当且仅当 $\det(xE_n-A)=x^n$．每个 $M_n(K)$ 中幂零矩阵相似于对角元素为零的某个三角矩阵．

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Линейная алгебра, М., 1974.

[2] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本: Φ.Р.甘特马赫尔，矩阵论，上、下册，高等教育出版社，1955)．

[3] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977 (英译本: Kostrikin, A. I., Introduction to algebra, Springer, 1982)．

[4] Курош, А. Г., Курс Высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本: А.Г.库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1953)．

[5] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970 (中译本: А.И. 马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社，1957)．

[6] Мишина, А. П., Проскуряков, И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965.

[7] Тышкевич, Р. И., Феденко, А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 2 изд., Минск, 1976.

[8] Bellman, R., Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill, 1970.

[9] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文)．

[10] Lancaster, P., Theory of matrices, Acad. Press, 1969.

[11] Marcus, M. and Minc, H., A survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn & Bacon, 1964.

Д. А. Супруненко 撰

【补注】 前面提及的关于典范多项式矩阵的结果有一种向主理想整环上矩阵的自然推广．具有形式

$$\left\|\begin{matrix} d_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & d_r & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{matrix}\right\| \qquad (\mathrm{A1})$$

的主理想整环 R上的 $(m\times n)$矩阵 A，这里，d_{i+1} 整除 d_i，$i=1,\cdots,r-1$，称为Smith 典范形式(Smith canonical form)．主理想整环 R上每一个矩阵 A 在下列意义等价于某 Smith 典范形式的矩阵，即存在 $(m\times m)$ 维矩阵 P 与 $(n\times n)$维矩阵 Q 使得 P 与 Q 分别在 $M_m(R)$ 与 $M_n(R)$ 中可逆，且使得 PAQ 为 Smith 典范形式．

形如(A1)的矩阵在线性系统与控制理论中特别地亦称为友形式(companion form)，在这个领域中，(多项式)矩阵论找到许多应用．

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1974, Sect. 10.6.

[A2] Wolovich, W. A., Linear multivariable systems, Springer, 1974.

[A3] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical system theory, Prentice-Hall, 1969.

陈公宁 译

矩阵代数 [**matrix algebra 或** algebra of matrix; **матриц алгебра**]

域 F上所有 $n\times n$ 矩阵的全阵代数 F_n 的一个子代数，F_n 中运算定义如下：

$$\lambda a=\|\lambda a_{ij}\|,\quad a+b=\|a_{ij}+b_{ij}\|,$$

$$ab=c=\|c_{ij}\|,\quad c_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}a_{i\nu}b_{\nu j},$$

其中 $\lambda\in F$，且 $a=\|a_{ij}\|$，$b=\|b_{ij}\|\in F_n$．代数 F_n 同构于 F上一个 n 维向量空间的所有自同态的代数．F_n 在 F 上的维数等于 n^2．每个有恒等元且在 F 上的维数不大于 n 的结合代数(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))同构于 F_n 的某个子代数．无恒等元且在 F 上的维数小于 n 的结合代数也可同构地嵌入 F_n．根据 Wedderburn 定理(Wedderburn theorem)，代数 F_n 是单的，即它仅有平凡的双边理想．代数 F_n 的中心由 F上所有 $n\times n$ 纯量矩阵组成．F_n 的全部可逆元的群是**一般线性群**(general linear group) $GL(n,F)$．F_n 的每个**自同构**(automorphism) h 都是内自同构：

$$h(x)=txt^{-1},\quad x\in F_n,\quad t\in GL(n,F).$$

每个不可约矩阵代数(亦见**不可约矩阵群**(irreducible matrix group))是单的．如果矩阵代数 A是绝对可约的(例如，如果 F是代数闭的)，则当 $n>1$ 时 $A=F_n$ (Burnside 定理(Burnside theorem))．矩阵代数是半单的，当且仅当它完全可约(亦见**完全可约矩阵群**(completely-reducible matrix group))．不计共轭时，F_n 含唯一的极大幂零子代数——所有对角线元素为零的上三角矩阵构成的代数．F_n 有 r 维交换子代数，当且仅当

$$r\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$$

(Schur 定理(Schur theorem)). 在复数域 **C** 上, $\mathbf{C}_n$ 的极大交换子代数的共轭类的集合在 $n<6$ 的情形下是有限的, 而当 $n>6$ 时是无限的.

在 F_n 中有 $2n$ 次标准恒等式:

$$\sum_{\sigma\in S_{2n}}(\operatorname{sgn}\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(2n)}=0,$$

其中 S_{2n} 表示**对称数**(symmetrix group), $\operatorname{sgn}\sigma$ 是置换 σ 的符号, 但没有次数更低的恒等式.

参考文献

[1] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.
[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.
[3] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.
[4] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971(译自德文).
[5] Супруненко, Д. А., Тышкевич, Р. Н., Перестановочные матрицы, Минск, 1966. Д. А. Супруненко 撰

【补注】 F_n 常用的记法是 $M_n(F)$.

半单环结构的 Wedderburn 定理: 半单环 R 是体 F_i 上全阵环 $M_{n_i}(F_i)$ 的一个有限直积, 反之, 每个这种形式的环是半单的. 此外, F_i 和 n_i 均由 R 唯一决定.

Wedderburn - Artin 定理 (Wedderburn - Artin theorem): 右 Artin 单环是一全矩阵环 (E. Artin, 1928; J.H.M. Wedderburn 在 1907 年对有限维代数作了证明). 此定理的深远推广是 Jacobson 稠密定理, 见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)及[A1].

参考文献

[A1] Cohn, P.M., Algebra, 2, Wiley, 1977, Sect. 10.2.

郭元春 译 牛凤文 校

矩阵微分方程[matrix differential equation; матричное дифференциальное уравнение]

一个方程, 以其中出现的函数的矩阵及其导数为未知量.

考虑下列形式的线性矩阵微分方程:

$$X'=A(t)X,\ t\in\mathbf{R},\tag{1}$$

其中 $A(t)$ 为具有局部 Lebesgue 可积元的 $n\times n$ 维矩阵函数, 设 $X(t)$ 是方程 (1) 的满足条件 $X(t_0)=I$ 的绝对连续的解, 这里 I 是单位矩阵. 这时, 向量函数 $x(t)=X(t)h$ $(h\in\mathbf{R}^n)$ 是线性方程组

$$x'=A(t)x\tag{2}$$

满足条件 $x(t_0)=h$ 的解. 反之, 如果 $h_1,\cdots,h_n\in\mathbf{R}^n$, 而 $x_i(t)$ 是方程组 (2) 满足条件 $x_i(t_0)=h_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 的解, 则以解 $x_i(t)$ 为列的矩阵是矩阵微分方程 (1) 的解. 此外, 如果向量 $h_1,\cdots,h_n$ 是线性无关的, 则对于所有的 $t\in\mathbf{R}$, $\det X(t)\neq 0$.

方程 (1) 是下列矩阵微分方程 (产生于稳定性理论) 的特殊情况:

$$X'=A(t)X-XB(t)+C(t).\tag{3}$$

方程 (3) 的具有初始条件 $X(t_0)=X_0$ 的解由下列公式给出:

$$X(t)=U(t,t_0)X_0V(t,t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}U(t,s)C(s)V(s,t)ds,$$

其中 $U(t,s)$ 是方程 (1) 的具有条件 $X(s,s)=I$ 的解, 而 $V(t,s)$ 是满足条件 $X(s,s)=I$ 的矩阵微分方程 $X'=B(t)X$ 的解.

在各种应用问题 (镇定理论、最优控制理论、控制系统的滤过理论等等) 中, 所谓 Riccati 矩阵微分方程 (matrix Riccati differential equation)

$$X'=A(t)X-XB(t)+C(t)+XD(t)X$$

起着重要作用. 例如, Riccati 矩阵方程

$$X'=-(F(t)+\lambda I)^TX-X(F(t)+\lambda I)-$$
$$-I+XG(t)G^T(t)X$$

(这里 T 代表转置) 对 $\lambda\geqslant 0$ 在直线 **R** 上具有有界解 $X(t)$, 并且对所有的 $h\in\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}$ 和某个 $\varepsilon>0$, 不等式 $h^TX(t)h\geqslant\varepsilon h^Th$ 成立, 则由反馈律 $u=-G^T(t)X(t)x/2$ 封闭的可控系统

$$x'=F(t)x+G(t)u,\ x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^m$$

的每个解都满足不等式

$$|x(t)|\leqslant M|x(s)|e^{-\lambda(t-s)},\ s\leqslant t,$$

这里 $|\cdot|$ 是 Euclid 范数, 且 M 与 s 无关.

参考文献

[1] Лаппо-Данилевский, И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1957.
[2] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970(英译本: Daletskiĭ, Yu. L. and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974).
[3] Atkinson, F. V., Discrete and continuous boundary problems, Acad. Press, 1964.
[4] Reid, W. T., Riccati differential equations, Acad. Press, 1972.
[5] Захар-Иткин, М. Х., 《Успехи матем. наук》,

28 (1973), 3, 83 – 120.

Е. Л. Тонков 撰 唐 云 译

矩阵因子分解法 [**matrix factorization method**; **матричной факторизации метод**], 矩阵前后向代换法 (matrix forward-backward substitution method)

解有限差分方程组的一种方法. 在一维问题中差分方程组逼近于常微分方程组的边值问题, 而在二维问题中则逼近于椭圆方程组的边界值问题.

对于三点差分格式

$$A_i Y_{i-1} - C_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i,\ i = 1, \cdots, N-1,$$

其中 $Y_i = \{y_{1,i}, \cdots, y_{n,i}\}$ 是未知的格点向量, F_i 是右端的向量, A_i, B_i, C_i 是给定的方阵, 以及边界条件

$$-C_0 Y_0 + B_0 Y_1 = -F_0,$$

$$A_N Y_{N-1} - C_N Y_N = -F_N,$$

在标量情况下, 求下列形式的解:

$$Y_i = R_{i+1} Y_{i+1} + Q_{i+1},\ i = 0, \cdots, N-1. \quad (*)$$

系数 (矩阵 R_{i+1} 和向量 Q_{i+1}) 由递归关系 ("向前代换") 确定:

$$R_{i+1} = (C_i - A_i R_i)^{-1} B_i,$$

$$Q_{i+1} = (C_i - A_i R_i)^{-1}(A_i Q_i + F_i),$$

$$i = 1, \cdots, N-1,$$

而 R_1 和 Q_1 由左边界条件给出:

$$R_1 = C_0^{-1} B_0,\ Q_1 = C_0^{-1} F_0.$$

Y_i 通过公式 (*) ("向后代换") 计算, 而

$$Y_N = (C_N - A_N R_N)^{-1}(A_N Q_N + F_N).$$

在下列条件下, 这个方法对舍入误差是稳定的:

$$\| C_0^{-1} B_0 \| < 1,\ \| C_N^{-1} A_N \| < 1,$$

$$\| C_i^{-1} B_i \| + \| C_i^{-1} A_i \| < 1,\ i = 1, \cdots, N-1,$$

由此可知 $\| R_i \| < 1,\ i = 1, \cdots, N$ (见[1]). 也可得到其他形式的稳定性条件 (见 [2], [3]). 矩阵因子分解法也适用于两点差分格式 (见[3]). 也使用一种变形方法, 其中矩阵的求逆由正交化代替 (见[4]).

参考文献

[1] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.
[2] Огнева, В. В., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, 7 (1967), 4, 803 – 812.
[3] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.
[4] Годунов, С. К., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, **2** (1962), 6, 972 – 982.
[5] Wachspress, E. L., Interative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics, Prentice-Hall, 1966.

Т. А. Гермогенова 撰 杜小杨 译

矩阵对策 [**matrix game**; **матричная игра**]

一种**二人零和对策** (two-person zero-sum game), 其中每个局中人都只有有限个纯策略. 如果局中人 I 具有 m 个策略, 而局中人 II 具有 n 个策略, 那么矩阵对策可由一个 $m \times n$ 矩阵 $A = \| a_{ij} \|$ 来给定, 这里 $a_{ij},\ i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n$, 是局中人 I 在他选择策略 i 而局中人 II 选择 j 时所得到的支付. 按照二人零和对策中的一般最优性原理 (见**极小化极大原理** (minimax principle)), 局中人 I 力求选择策略 i_0, 使得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}$$

达到, 而局中人 II 力求选择策略 j_0, 使得

$$\min_j \max_i a_{ij} = \overline{v}$$

达到. 如果 $\underline{v} = \overline{v}$, 那么 (i_0, j_0) 称为对策的鞍点 (见**对策论中的鞍点** (saddle point in game theory)); 数 $a_{i_0 j_0}$ 称为对策的值, 而策略 i_0, j_0 是最优纯策略. 如果 $\underline{v} \neq \overline{v}$ (即纯策略解不存在), 那么总有 $\underline{v} < \overline{v}$. 在这种情形, 就必须在局中人的混合策略 (见**策略** (**对策论中的**) (strategy (in game theory))) 中寻求他们的最优策略. 设 $X \subset \mathbf{R}^m$ (相应地, $y \subset \mathbf{R}^n$) 是局中人 I (相应地, 局中人 II) 的混合策略集. 那么局中人 I 和 II 将力求选择策略 x^* 和 y^*, 使得

$$\underline{v}^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x A y^T$$

$$\overline{v}^* = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x A y^T$$

分别达到 (上标 ^{T} 表示转置). 矩阵对策论中的主要定理 (von Neumann 极小化极大定理 (von Neumann minimax theorem)) 断言 $\underline{v}^* = \overline{v}^* = v$, 即对于每个矩阵对策存在最优混合策略 x^*, y^* 和对策的值 v.

关于矩阵对策的数值解 (numerical solution of matrix games) (即求出对策的最优策略和值) 人们经常利用求解矩阵对策问题可以归结为**线性规划** (linear programming) 问题这一事实. 一种效率较次的方法是 Brown-Robinson 迭代法 (Brown-Robinson iterative method), 它假想如下 "进行" 矩阵对策: 局中人的每一步都在对手的 "累积" 混合策略的条件下, 选取他们的最优纯策略. 局中人之一只有两个策略的矩阵

对策容易用图论方法来解决．

在经济学、数理统计、军事科学、生物学等领域中，矩阵对策可用来作为许多最简单的冲突形势的数学模型．在应用中，局中人之一的角色有时被指定为“自然”，由此人们来理解对决策者（另一个局中人）未知的外部环境总体．

参考文献

[1] Dresher, J. M., Games of strategy: theory and practice, Prentice-Hall, 1961.

[2] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1953(中译本：约翰·冯·诺意曼，奥斯卡·摩根斯特恩，竞赛论与经济行为，科学出版社，1963).

[3] Owen, H. G., Game theory, Saunders, 1968.

[4] Воробьев, Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974(英译本：Vorob'ev, N. N., Game theory. Lectures for economists and system scientists, Springer, 1977).

А. А. Корбут 撰

【补注】 矩阵对策理论分为零和对策与非零和对策两种．二人非零和矩阵对策（two-person non-zero-sum matrix games）通常被认为是**双矩阵对策**（bimatrix game）．

参考文献

[A1] Karlin, S., Matrix games, programming and mathematical economics, 1-2, Addison-Wesley, 1959.

史树中 译 韩继业 校

矩阵群 [matrix group; матричная группа]

元素取自带单位元的结合环（见**结合环与代数**（associative rings and algebras））的 $(n \times n)$ 维**矩阵**（matrix）构成的**群**（group），其运算为通常的矩阵乘法．见**线性群**（linear group）．　王 杰 译 石生明 校

转移概率矩阵 [matrix of transition probabilities; переходных вероятностей матрица]

状态集 S 至多为可数的齐次 **Марков 链**（Markov chain）$\xi(t)$ 在时刻 t 的**转移概率**（transition probabilities）构成的矩阵 $P_t = \| p_{ij}(t) \|$，其中

$$p_{ij}(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\},\ i, j \in S.$$

离散时间 Марков 链或连续时间正则 Марков 链的转移概率矩阵 $\| p_{ij}(t) \|$ 对任意 $t > 0$ 和 $i, j \in S$ 满足以下条件：

$$p_{ij}(t) \geqslant 0,\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1\ ,$$

即它们是**随机矩阵**（stochastic matrix），而对非正则链则有

$$p_{ij}(t) \geqslant 0,\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \leqslant 1\ ,$$

称这种矩阵为次随机的（sub-stochastic）．

由于齐次 Марков 链的基本（Chapman-Колмогоров）性质

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t),$$

矩阵族 $\{P_t : t \geqslant 0\}$ 形成一个**乘法半群**（multiplicative semi-group）；如果时间是离散的，这个半群由 P_1 唯一决定．　А. М. Зубков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chung, K. L., Elementary probability theory with stochastic processes, Springer, 1974(中译本：钟开莱，初等概率论附随机过程，人民教育出版社，1979).

刘秀芳 译

矩阵环 [matrix ring; матриц кольцо]，全矩阵环（full matrix ring）

环 R 上具有固定阶数的所有方阵组成的环．R 上 $(n \times n)$ 维矩阵的环记为 R_n 或 $M_n(R)$．遍及本条，R 总是一个含单位元的**结合环**（见**结合环与结合代数**（associative rings and algebras））．

环 R_n 同构于拥有 n 个元素的基的自由右 R 模 M 的所有自同态的环 $\mathrm{End}\, M$．矩阵 $E_n = \mathrm{diag}[1, \cdots, 1]$ 为 R_n 内的单位元．含单位元 1 的结合环 A 同构于 R_n，当且仅当在 A 中存在 n^2 个元素 $e_{ij}\,(i, j = 1, \cdots, n)$ 的集合，这些元素满足下列条件：

1) $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$，$\sum_{i=1}^{n} e_{ii} e_{ii} = 1$；

2) A 中元素 e_{ij} 的集合的中心化子同构于 R．

R_n 的中心重合于 $Z(R) E_n$，其中，$Z(R)$ 为 R 的中心；对 $n > 1$，环 R_n 是非交换的．

环 R_n 的乘法群(所有可逆元组成的群)称为**一般线性群**(general linear group)，记为 $\mathrm{GL}(n, R)$．R_n 的一个矩阵在 R_n 中可逆，当且仅当它的诸列组成 R 上所有 $(n \times 1)$ 维矩阵的自由右模的基．如果 R_n 是可交换的，则 R_n 中矩阵 a 的可逆性等价于它的行列式 $\det a$ 在 R 中的可逆性．等式 $(R_m)_n = R_{mn}$ 成立．

环 R_n 是单的，当且仅当 R 是单的，因为 R_n 中双边理想均具有形式 k_n，这里，k 是 R 中任一双边理想．一个 **Artin 环**(Artinian ring)是单的，当且仅当它同构于某除环上的矩阵环(Wedderburn-Artin 定理(Wedderburn-Artin theorem))．如果 $J(R)$ 表示环 R 的 **Jacobson 根**（Jacobson radical），则 $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$．因此，半单环 R 上的每一个矩阵环总是半单的．如果 R 是正则的(亦即如果对每一个 $a \in R$，有 $b \in R$ 使得 $aba = a$)，则 R_n 亦然．如果 R 是含有不变基数的环，这就是说，在每个自由 R 模的任一基内元素个数不依赖于基的选择，则 R_n 也有这个性质．环 R 与 R_n

按森田意义是等价的(见**森田等价**(Morita equivalence)): R 模的范畴等价于 R_n 模的范畴．然而，投射 R 模是自由的事实不必导出投射 R_n 模也是自由的．例如，如果 R 是域且 $n>1$，则存在若干有限生成的投射 R_n 模，它们不是自由的．

参考文献

[1] Faith, C., Algebra: rings, modules, and categories, 1, Springer, 1973.

[2] Lambek, J., Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966.

[3] Бокуть, Л. А., Ассоциативные кольца, ч.1, Новосиб., 1977.

Д. А. Супруненко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohn, P.M., Algebra, 1-2, Wiley, 1974-1977.

陈公宁 译

矩阵求和法[matrix summation method; матричный метод суммирования]

运用一个无穷矩阵求级数或序列之和的一种方法．运用一个无穷矩阵 (a_{nk})，$n, k=1, 2, \cdots$，给定的序列 $\{s_n\}$ 变换为序列 $\{\sigma_n\}$：

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k .$$

如果右边的级数对所有 $n=1, 2, \cdots$ 收敛且当 $n \rightarrow \infty$ 时序列 σ_n 具有极限 s：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n=s,$$

则称序列 $\{s_n\}$ 按由矩阵 (a_{nk}) 确定的求和法是可求和的或简称按矩阵 (a_{nk}) 可求和的，而数 s 称为此求和法意义下的极限．如果 $\{s_n\}$ 是级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

的部分和序列，则称此级数按矩阵 (a_{nk}) 可求和，其和为 s．

关于级数的矩阵求和法也可通过把级数(1)变换为序列 $\{\gamma_n\}$：

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk} u_k \tag{2}$$

直接定义，其中 (g_{nk}) 是给定的矩阵．此时级数(1)称为可求和的，其和为 s，如果对所有 $n=1, 2, \cdots$，(2)右边的级数收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n=s .$$

下面定义的矩阵求和法不常使用：分别用矩阵 (α_{nk})，(β_{nk}) 把级数(1)变换为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \tag{3}$$

其中

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} u_k ;$$

或把序列 $\{s_n\}$ 变换为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \tag{4}$$

其中

$$\beta_n=\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} s_k, \quad n=1, 2, \cdots .$$

此时称具有部分和 s_n 的级数(1)可求和到和 s，如果级数(3)收敛到 s，或对应地级数(4)收敛到 s．

如果求和法中矩阵的所有元素均非负，则称此求和法的矩阵是正矩阵(positive matrix)．矩阵求和法的例子有 **Вороной 求和法**(Voronoï summation method)，**Cesàro 求和法**(Cesàro summation method)，**Euler 求和法**(Euler summation method)，**Riesz 求和法**(Riesz summation method)(R, p_n)，**Hausdorff 求和法**(Hausdorff summation method)，等等(亦见**求和法**(summation methods))．

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Cooke, R. G., Infinite matices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

[3] Кангро, Г. Ф., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5-70.

[4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977.

И. И. Волков 撰 沈永欢 译

拟阵[matroid; матроид]

超图(hypergraph)的一种特殊形式．线性代数的一种组合学抽象．一个拟阵由元素的集合 V 及满足下列公理而称作 V 的独立子集(independent subset)的集族 $\mathscr{E}=\{E_1, E_2, \cdots\}$ 来规定：1)空集是独立的；2)独立子集的任何子集是独立的；3)对于每个子集 $A \subseteq V$，拟阵的含于 A 且对于 A 中子集的包含关系为极大的所有独立子集都含有同样多个元素．

例．1)任意一个长方矩阵的行组成的集合 V 及 V 的由线性无关的行组成的子集的族 $\mathscr{E}$ 形成一个拟阵．2)设 $\mathscr{L}=\{L_1, L_2, \cdots\}$ 是一个图 G 的全体支撑林(skeleton forest)(见**树**(tree))组成的集合，又以 $R(L_i)$ 表示林 L_i 的边集合，$i=1, 2, \cdots$，则图 G 的边集 V 及族 $\mathscr{E}=\{R(L_i): i=1, 2, \cdots\}$ 形成一个拟阵．3)设 G 是一个**二部图**(graph, bipartite)，它的二部分是 W'，W''．对于图 G 的一个顶点子集 $V \subseteq W'$，如果存在图 G 的一个匹配 P，能使每个顶点 $v \in V$ 都与 P 的某条边关联，则 V 就称为一个部分横截(partial transversal)．集合 W' 及图 G 的全部横截形成一个所谓的横截拟阵(transversal mat-

roid).

拟阵也可用元素的集合 V 以及满足下述公理并被称为回路(circuit)的非空子集 $C_i \subseteq V$ 的族 $C=\{C_1, C_2, \cdots\}$ 来规定: 回路的任何真子集都不是回路; 并且若有 $v \in C_i \cap C_j$, 则 $(C_i \cup C_j) \setminus \{v\}$ 含有一个回路. 这个拟阵的独立子集是 V 的不含有回路的子集 E.

如果 G 是一个图, 则它的边集及它的简单回路的族所形成的拟阵称为图拟阵(graphic matroid). 如果取这个图 G 的余圈(割, 参见**图的连通度**(graph, connectivity of a))作为拟阵的回路, 所得的拟阵便称作余图拟阵(cographic matroid). 后面两种类型的拟阵, 也称为圈(cyclic)拟阵及余圈拟阵(cocyclic matroid). "拟阵"的概念在图论及组合学中用于证明关于匹配的**覆盖与填装**(covering and packing)的某些断言.

参考文献

[1] Whitney, H., On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 509-533.

[2] Tutte, W. T., Lectures on matroids, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sec. B*, **69** (1965), 1-2, 1-47.

A. A. Сапоженко 撰

【补注】 拟阵的名字是由(长方)矩阵的行组成拟阵的这个例子引出的.

在拟阵理论中, 往往假定基础集合 V 是有限集. 而且, 事实上还不特别清楚在 V 为无限的情形正确的定义是什么(参见[A1], 第20章). 对于有限的 V (在给出了其他两条公理之后), 第三条独立性公理等价于 3') 若 $E_1, E_2 \in \mathscr{E}$ 并且 $|E_1|=|E_2|+1$, 则有一个 $v \in E_1 \setminus E_2$ 能使 $E_2 \cup \{v\} \in \mathscr{E}$.

关于拟阵有许多公理系统. 除了基于独立子集概念及基于回路概念的公理系统以外, 还有基于秩函数概念的, 基于基概念的, 基于超平面概念的, 或基于闭包运算概念的公理系统.

一个极大独立集就称为一个基(而一个极小非独立集则称为拟阵的一个回路(circuit)或圈(cycle)). 包含在 V 的子集 A 内的具有最大基数的独立集, 其基数称为 A 的秩(rank) $\rho(A)$. 给定 A 之后, 集合 $\sigma(A)=\{x \in V: \rho(A \cup \{x\})=\rho(A)\}$ 称为 A 的闭包(closure); 当且仅当 $A=\sigma(A)$ 时, 称 A 为闭的(closed). V 的一个极大的(真)闭子集 H, 就称为一个超平面.

对于有限的 V, 下面是"基公理化刻画": V 的子集的一个非空集 $\mathscr{B}$ 称为拟阵的基的集合, 当且仅当对于一切 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ 及 $x \in B_1 \setminus B_2$, 存在一个 $y \in B_2 \setminus B_1$ 能使 $((B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}) \in \mathscr{B}$.

在集合 V 上的一个闭包运算(closure operation)是从 V 的子集到 V 的子集的一个映射 $A \mapsto \sigma(A)$, 能使 $\sigma(\sigma(A))=\sigma(A)$, $A \subset \sigma(A)$, $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \subset \sigma(B)$. 如果对于一切 $A \subset V$, p, $q \in V$, $p \notin \sigma(A)$ 都有 $p \in \sigma(A \cup \{q\}) \Rightarrow q \in \sigma(A \cup \{p\})$ (交换公理(exchange axiom)), 这样的闭包运算便定义了一个拟阵. 相应的独立子集定义如下: $A \in \mathscr{E}$, 当且仅当 $x \in A \Rightarrow x \notin \sigma(A \setminus \{x\})$.

给定任一拟阵 $M=(V, \mathscr{E})$, 有它的一个对偶拟阵(dual matroid) M^*, 它可以用基很简单地定义如下: 设 $\mathscr{B}$ 是 M 的全部基组成的集合, 则集合 $\{V \setminus B: B \in \mathscr{B}\}$ 就是 M^* 的基的集合. 这种对偶理论有重要的应用; 作为一个可注意的例子, 不妨指出下列 H. Whitney 的一个结果: 一个图 G 及与之联系的(如上所述由回路或相应地由林确定的)图拟阵 M 是可平面的, 当且仅当其对偶拟阵 M^* 也是图拟阵.

拟阵也以"组合几何"的名称(亦参见**组合几何学**(combinatorial geometry)), 从更为几何的观点被人研究.

最后, 也可以从算法的途径来定义拟阵. 设 $M=(V, \mathscr{E})$ 是满足上面提到的条件 1) 与 2) 的一个集合组, 并且考虑在 M 上的一种赋权(weighting)即映入实数的一个映射 $w: V \to R$, 它满足对于一切 $v \in V$, $w(v) \geqslant 0$. 用对于 V 的每个子集 A, 取 $w(A)=\sum_{v \in A} w(v)$ 的办法, 把 w 拓展到 V 的幂集合. 要求找出(在 $\mathscr{E}$ 中的一切子集中)具有最大权的一个子集 $E \in \mathscr{E}$. 于是 M 是一个拟阵, 当且仅当对于每一个赋权 w, 用贪婪算法(greedy algorithm)都能得到这种问题的解. 把 V 的元素按权来排序, 比如说 $w(v_1) \geqslant \cdots \geqslant w(v_n)$, 然后像以下这样递归地决定 E (从空集开始): 在第 i 步, 把元 v_i 加入集合 E (除非加入后所得的集合不再包含在 $\mathscr{E}$ 内). 由于有这种算法特性, 拟阵在组合优化中是极重要的工具.

拟阵也用于 Grassmann 流形的分层, 高维样条的分析以及 p-adic 曲线和许多别的领域.

一个有关的重要概念是定向拟阵(oriented matroid), 它是在有序域上的线性代数的一种抽象, 用于研究凸多面体.

开始了整个拟阵理论的基本论文是[1](它也被收入[A8]之内).

参考文献

[A1] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.

[A2] Lawler, E. L., Combinatorial optimization: Networks and matroids, Holt, Rinehart & Winston, 1976.

[A3] Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, K., Combinatorial optimization. Algorithms and complexity, Prentice-Hall, 1982 (中译本: C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, 组合最优化算法和复杂性, 清华大学出版社, 1988).

[A4] White, N. (ed.), Theory of matroids, Cambridge

Univ. Press, 1986.
[A5] White, N. (ed.), Combinatorial geometries, Cambridge Univ. Press, 1987.
[A6] White, N. (ed.), Combinatorial geometries: Advanced theory, Cambridge Univ. Press, 1986.
[A7] Aigner, M., Kombinatorik II. Matroide und Transversaltheorie, Springer, 1976.
[A8] Kung, J. P. S., A source book in matroid theory, Birkhäuser, 1986. 陶懋颀 译 李 乔 校

松岛准则 [Matsushima criterion; Мацусимы критерий]

设 G 是定义在代数闭域 k 上的仿射约化代数群 (algebraic group) (亦见**仿射群** (affine group); **约化群** (reductive group)), H 是 G 的闭子群, 则齐性空间 G/H 是仿射代数簇, 当且仅当 H 是约化群. 松岛与三 ([1]) 在 k 是复数域的情形首先发现了这个准则. 以后又有人给出了对特征数零的任何代数闭域都有效的证明 (见 [2], [3], [4]). 在 k 的特征数为正的情形, 仅当 **Mumford 假设** (Mumford hypothesis) 获证后才得到这个准则的证明 (见 [5], [6]).

参考文献

[1] Matsushima, Y., Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 205−218.
[2] Bialynicki-Birula, A., On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 577−582.
[3] Luna, D., Slices étales, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81−105.
[4] Borel, A. and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 485−535.
[5] Нисневич, Е. А., 《Функц. анализ и его прилож.》, **11** (1977), 1, 73−74.
[6] Richardson, R. W., Affine coset spaces of reductive algebraic groups, *Bull. London Math. Soc.*, **9** (1977), 38−41. В. Л. Попов 撰 陈志杰 译

Maupertuis 原理 [Maupertuis principle; Мопертюи принцип]

一个最小作用量原理, 它的第一个文字的系统的阐述是由 P. Maupertuis 给出的. 最初 (1744) Maupertuis 从这原理推演出光的反射和折射定律是相容的, 用他的话说 "按照这个重要的原理, 自然界当实现它的作用时, 总是沿着最简单的路径走" (见 [1]), 而随后 (1746) 他发表了他的运动和平衡的普适定律: "一个一般的原理: 当自然界中发生改变时, 为这改变所必需的作用量是最小可能的. 作用量是物体的质量乘以它们的速度再乘以它们运动所越过的距离" (见 [2]). 这原理的普遍性被 Maupertuis 利用目的论的论点以一种形而上学性质的含糊的推理来证明, 在随后的对其原理的讨论中, 这种论点引起了他的很多同时代人的强烈反对. 在光的传播定律以外, Maupertuis 从这原理仅推演出已知的物体碰撞和杠杆平衡定律. 按 J. L. Lagrange 的意见, "所提到的应用带有过分特殊的性质, 以致不足以从它们构造一个一般原理的证明; 此外它们是有些不确定的和任意的, 由此对用它们为基础作出的结论和原理本身带来某种不可靠性" (见 [3]).

对一个孤立物体这种特殊情况的最小作用量原理的第一个数学概念是属于 L. Euler 的. 他证明 (1744) 在中心力作用下, 物体描绘这样的轨道, 使得积分 $\int v\,ds$ 取极小或极大值 (见 [4]); 这里 v 是速度而 ds 是弧长元素.

对以任何方式相互作用而系统的总机械能保持不变的任一物体系统运动的一般情况, 最小作用量原理由 Lagrange (1760) 建立. 从力学定律出发, 他证明了质量与速度乘以走过路径元素的积分的乘积之和, 总是一个极大值或极小值 (见 [5]), 即

$$\delta \sum_i m_i \int v_i\, ds_i = 0.$$

"这个原理, 与活劲原理一起且用变分法规则加以发展, 立刻给出为解每一个问题所需要的所有方程; 因此产生了一种既简单又一般的解关于物体运动问题的方法" (见 [3]).

在数学上, 把最小作用量原理写成 Lagrange 的形式 (**Lagrange 原理** (Lagrange principle)), 等式 (14) 的形式都是可以的 (关于与这里给出的方程标号数有关的方程见**经典力学的变分原理** (variational principles of classical mechanics)). 用能量积分 (13) 从 (14) 中消去时间, C. G. J. Jacobi (1837) 把最小作用量原理表示成形式 (16) (亦见 **Jacobi 原理** (Jacobi principle)).

参考文献

[1] Maupertuis, P., Accord de différentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles, 1744.
[2] Maupertuis, P., Les lois de mouvement et du répos déduites d'un principle métaphysique, *Mem. Acad. R. Sci. et Belles Lettres Berlin* (1746), 267 − 294.
[3] Lagrange, J. L., Mécanique analytique, Paris, 1788 (Also: Oeuvres, Vol. 11).
[4] Euler, L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gandentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae et Genevae, 1744.
[5] Lagrange, J. L., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, in J.-A. Serret (ed.), Oeuvres, Vol. 1. G. Olms, reprint, 1973, 335 − 362.
[6] Jacobi, C., Note sur l'intégration des équations differ-

entielles de la dynamique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 5 (1837), 61 – 67. В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文).

[A2] Gantmacher, F. [F. Gautmakher], Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975 (译自俄文).

[A3] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

葛显良 译 鲁世杰 校

Maurer-Cartan 形式 [Maurer-Cartan form; Маурера-Картана форма]

一个 Lie 群 G 上的左不变 1 形式. 即 G 上满足以下条件的 1 次微分形式 ω: 对于任意左平移 l_g: $x \mapsto gx$, g, $x \in G$, 来说, $l_g^* \omega = \omega$. G 上 Maurer-Cartan 形式与在点 e 处的切空间 $T_e(G)$ 上的线性型一一对应; 确切地说, 将每一个 Maurer-Cartan 形式 ω 映成它的值 $\omega_e \in T_e(G)^*$ 的映射是 Maurer-Cartan 形式所组成的向量空间到 $T_e(G)^*$ 上的同构. 一个 Maurer-Cartan 形式 ω 的微分是由以下公式所定义的 G 上一个左不变 2 形式:

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]), \qquad (1)$$

这里 X, Y 是 G 上任意左不变向量场. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是 $T_e(G)$ 内一个基, 令 ω_i, $i = 1, \cdots, n$, 是 Maurer-Cartan 形式, 使得

$$(\omega_i)_e(X_j) = \delta_{ij}, \; j = 1, \cdots, n.$$

于是

$$d\omega_i = -\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k, \qquad (2)$$

这里 c_{jk}^i 是 G 上左不变向量场所构成的 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 关于由

$$(\widetilde{X}_i)_e = X_i, \; i = 1, \cdots, n,$$

所确定的基 $\widetilde{X}_1, \cdots, \widetilde{X}_n$ 的结构常数. 等式 (2) (或 (1)) 称为 Maurer-Cartan 方程 (Maurer-Cartan equations). 它们首先是由 L. Maurer (以不同的然而是等价的形式) 得到的 ([1]). 形式 ω_i 是由 E. Cartan 在 1904 年引入的 (见 [2]).

令 $x_1, \cdots, x_n$ 是在点 $e \in G$ 的一个邻域内由基 $X_1, \cdots, X_n$ 所确定的典范坐标, 则形式 ω_i 被写成如下形状

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \cdots, x_n) dx_j,$$

其中矩阵

$$A(x_1, \cdots, x_n) = (A_{ij}(x_1, \cdots, x_n))$$

由公式

$$A(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}$$

来计算, 这里 $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{X}_i$ 而 ad 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示.

此外, 令 θ 是 G 上这样一个 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式, 它将 G 上每一个切向量指派到包含这个向量的唯一的左不变向量场 (θ 称为典范左微分形式 (canonical left differential form)), 则

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i \omega_i.$$

且

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0,$$

这其实就是 Maurer-Cartan 方程的另一种写法.

参考文献

[1] Maurer, L., Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. (München), **18** (1879), 103 – 150.

[2] Cartan, E., Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. Ecole Norm., **21** (1904), 153 – 206.

[3] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975.

[5] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

А. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

极大扩张和极小扩张 [maximal and minimal extensions; максимальное и минимальное расширения]

一个**对称算子** (symmetric operator) A 的极大扩张和极小扩张分别是算子 $\overline{A}$ (A 的闭包, (见**闭算子** (closed operator))) 和 A^* (A 的伴随, 见**伴随算子** (adjoint operator)). A 的所有闭对称扩张都出现在它们之间. 极大扩张和极小扩张相等等价于 A 的自伴性 (见**自伴算子** (self-adjoint operator)), 并且是自伴扩张唯一性的必要和充分条件. А. И. Логинов, В. С. Шульман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Reed, M. and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 1. Functional analysis, Acad. Press, 1972 Chapt. 8.

鲁世杰 译 葛显良 校

极大算子和极小算子 [maximal and minimal operators; максимальный и минимальный операторы]

由在具有紧支集的函数子空间上给定的微分表示式定义的算子的**极大扩张和极小扩张** (maximal and minimal extensions). 极大算子和极小算子的定义域

可以分为许多情形具体描述，例如，对常微分算子、对椭圆算子、对常系数微分算子．

参考文献

[1] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiy, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

А. И. Логинов, В. С. Шульман 撰 唐 云 译

极大紧子群 [**maximal compact subgroup**; **максимальная компактная подгруппа**], 拓扑群 G 的

一个紧子群（见**紧群**（compact group））$K \subset G$，它不作为真子群被包含在 G 的任何紧子群内．例如，$K = \mathrm{SO}(n)$ 对于 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$，$K = \{e\}$ 对于一个可解单连通 Lie 群 G．

在任意群 G 里，极大紧子群不一定存在（例如，$G = \mathrm{GL}(V)$，V 是一个无限维 Hilbert 空间），而且即使存在，它们之间也可能有不同构的．

Lie 群的极大紧子群已被广泛地研究．如果 G 是一个连通 Lie 群，那么 G 的任意紧子群都被包含在某个极大紧子群内（特别，极大紧子群一定存在），并且 G 的一切极大紧子群都是连通的且彼此共轭．群 G 的空间微分同胚于 $K \times \mathbf{R}^n$．因此，很多关于 Lie 群的拓扑问题都归结为**紧 Lie 群**（Lie group, compact）相应的问题．

参考文献

[1] Cartan, E., La géometrie des groupes de transformations, *J. Math. Pures Appl.*, **6** (1927), 1 – 119.
[2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

В. В. Горбацевич 撰 郝钢新 译

最大相关系数 [**maximal correlation coefficient**; **максимальный коэффициент корреляции**]

两个随机变量 X 和 Y 之相依性的度量，定义为实随机变量 $\varphi_1(X)$ 和 $\varphi_2(Y)$ 间相关系数一切值的上确界:

$$\rho^*(X, Y) = \sup \mathsf{E}[\varphi_1(X)\varphi_2(Y)],$$

其中 X 和 Y 的函数 $\varphi_1(X)$ 和 $\varphi_2(Y)$ 满足条件: $\mathsf{E}\varphi_1(X) = \mathsf{E}\varphi_2(Y) = 0$, $\mathsf{D}\varphi_1(X) = \mathsf{D}\varphi_2(Y) = 1$．如果当 $\varphi_1 = \varphi_1^*(X)$, $\varphi_2 = \varphi_2^*(Y)$ 时达到此上确界，则 X 和 Y 间的最大相关系数等于 $\varphi_1^*(X)$ 和 $\varphi_2^*(Y)$ 的**相关系数**(correlation coefficient)．最大相关系数有如下性质: 对于 X 和 Y 独立，$\rho^*(X, Y) = 0$ 充分而且必要．如果变量之间线性相关，则最大相关系数与普通相关系数等同．

参考文献

[1] Сарманов, О. В., 《Докл. АН СССР》, **120** (1958), 4, 715 – 718.
[2] Сарманов, О. В., 《Докл. АН СССР》, **53** (1946), 9, 781 – 784.
[3] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prohorov, Yu. V. [Yu. V. Prohorov] and Rozanov, Yu. A., Probability theory, basic concepts. Limit theorems, random processes, Springer, 1969).

И. О. Сарманов 撰

【补注】 亦见**典型相关**(canonical correlation)．

参考文献

[A1] Gebelein, H., Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichungrechnung, *Z. Angew. Math. Mech.*, **21** (1941), 364 – 379.
[A2] Koyak, R., On measuring internal dependence in a set of random variables, *Ann. Statist.*, **15** (1987), 1215 – 1229.

周概容 译

极大遍历定理 [**maximal ergodic theorem**; **максимальная эргодическая теорема**]

如果 T 是测度空间 (X, μ) 的一个**自同态**(endomorphism)，若 $f \in L_1(X, \mu)$ 且 E 是所有满足下式的 $x \in X$ 所组成的集合

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{i=0}^{n} f(T^i x) \geq 0,$$

则

$$\int_E f \, d\mu \geq 0.$$

极大遍历定理是由吉田耕作和角谷静夫给出的（[1]），他们指出极大遍历定理可在 **Birkhoff 遍历定理**（Birkhoff ergodic theorem）的证明中起关键作用（G. D. Birkhoff 本人使用了不同的论证代替极大遍历定理）．后来，推广的极大遍历定理被类似地运用于 Birkhoff 定理推广的证明中（并且在使这些推广有意义的条件下，也用于将相空间分解成守恒和耗散部分的相关问题中）．极大遍历定理的推广属于 E. Hopf，且 A. Carcia 给出它的一个简单证明（见 [2]），亦见 [3] 和 **Birkhoff 遍历定理**（Birkhoff ergodic theorem）的参考文献．

参考文献

[1] Yosida, K. and Kakutani, S., Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 165 – 168.
[2] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probability, Holden-Day, 1965 (译自法文).
[3] Вершик, А. М., Юзвинский, С. А., в кн., Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, 133 – 187.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 多种类型的遍历定理（包括其历史背景）可在 [A1] 中查到．

参考文献

[A1] Krengel, U., Ergodic theorems, De Gruyter, 1985.

束立生 译 苏维宜 校

极大理想[maximal ideal; максимальный идеал]

一个代数结构的全体真理想构成的**偏序集**(partially ordered set)中的极大元. 极大理想在环论中起重要的作用. 每一个含幺元的环都有极大左(和右及双边)理想. R 的相应于极大左(右)理想 I 的商模 $M = R/I$, 看作左(右) R 模是不可约的(见**不可约模**(irreducible module)); R 到 M 的自同态域的一个同态 φ 是 R 的一个表示. 所有这些表示的核, 即环中被所有这些表示映为零的元素全体, 称为 R 的 Jacobson 根(Jacobson radical);它也就是全体极大左(右)理想之交.

一个闭区间$[a, b]$上的连续实值函数环 $R = C[a, b]$中, 在一个固定点 x_0 为零的函数全体是 R 的一个极大理想. 这样的理想穷尽了 R 的所有极大理想. 这种区间中的点和极大理想的关系, 导致了当表示环是一个拓扑空间上的连续函数环时的各种理论的建立.

环 R 的素理想(prime ideal)集合 Spec R 上的 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)有弱可分性(即存在非闭点). 在非交换的情形下, 可以在**本原理想**(primitive ideal)集合 Spec R 上引入类似的拓扑, 本原理想是不可约 R 模的零化子. 极大理想集和非交换情形下的极大本原理想集构成子空间 Specm $R \subset$ Spec R, 它满足 T_1 可分公理.

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings. Amer. Math. Soc., 1956.

В. Е. Говоров 撰

【补注】 极大理想在格(特别是分配格)的结构和表示理论中也起重要的作用. 在一个**分配格**(distributive lattice)中, 和在交换环中一样, 所有极大理想都是素理想, 其逆在 **Boole 代数**(Boolean algebra)中也成立. 事实上, 所有素理想都是极大理想的分配格一定是 Boole 的. 和环一样, 分配格 L 的极大理想集 Specm L 能拓扑化为所有素理想的空间 Spec L 的一个子空间, 它是紧 T_1 空间; 而且, 每个紧 T_1 空间都能通过这种方式得到. 分配格 L 称为正规的(normal),若任给元素 $a, b \in L$, 满足 $a \vee b = 1$, 则存在 $c, d \in L$, 使得 $a \vee d = c \vee b = 1$ 及 $c \wedge d = 0$. 正规的分配格也可以刻画为每个素理想包含在唯一的极大理想中的格, 或说成是从 Spec L 到 Specm L 之上有一个连续的**保核收缩**(retraction)的格; 这种格具有这样的性质: Specm L 是一个 Hausdorff 空间. 对于拓扑空间 X, 它的开子集构成的格 $\mathcal{O}(X)$ 是正规的, 当且仅当 X 是**正规空间**(normal space); 若 X 是 T_1 空间, 则 Specm $\mathcal{O}(X)$ 产生 X 的 T_1 **紧化**(compactification); 当 X 正规时, 它与 **Stone-Čech 紧化**(Stone-Čech compactification)一致(见 **Wallman 紧化**(Wallman compactification)).

在任意的环或格中构作极大理想, 一般需要用 Zorn 引理(见**选择公理**(axiom of choice)或 **Zorn 引理**(Zorn lemma)). 事实上, 很多类型的环或格的极大理想定理(maximal ideal theorem)(该定理指出, 这些类型的任一非平凡的环或格中存在极大理想)在 ZF 集合论中是与选择公理等价的. 这个结论适用于所有(交换)唯一因子分解整环, 所有 Heyting 代数(见 **Brouwer 格**(Brouwer lattice)); 但是, 对于主理想整环, Brouwer 格及正规分配格, 极大理想定理等价于"素理想定理", 严格地弱于选择公理.

参考文献

[A1] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1983.

在**半群**(semi-group)理论中, 极大理想的作用次于**极小理想**(minimal ideal). 若 M 是半群 S 的双边理想, 那么, 或者 $M = S \setminus \{a\}$, 其中 a 是 S 的一个不可分解元素(即 $a \in S \setminus S^2$), 或者 M 是一个素理想(prime ideal)(亦即对任意两个理想 A, B, $AB \subseteq M$ 蕴含着 $A \subseteq M$ 或 $B \subseteq M$). 由此可知, 当且仅当 $S^2 = S$ 时, S 的每个极大双边理想都是素理想. 在存在极大双边理想的半群 S 中, 一个不等于 S 的素理想 P 是极大理想, 当(显然, 也仅当) P 包含 S 的所有双边理想的交 I. Rees 商半群 S/I 是一组半群的 **O 直并**(O-direct union), 其中每个半群或是 0 单或是二元幂零的.

有时, 具有真左理想的半群 S, 可以有一个最大的这种理想 L^*(即它包含所有其他的真左理想). 例如, 当 S 有右幺元, 就是这种情形. 此时, 若 $S \setminus L^*$ 不是单元集, 则它是子半群. 在一个周期半群 S 中, 由 L^* 的存在性可推知 L^* 是一个(最大真)双边理想. 另一个例子是具有可分群部分(见**可逆元**(invertible element))的子群集, 它们不是群.

参考文献

[1A] Schwarz, S.,《Чехосл. матем. ж.》, **3**(1953), 2, 139 - 153.

[1B] Schwarz, S.,《Чехосл. матем. ж.》, **4**(1953), 365 - 383.

[2] Schwarz, S.,《Чехосл. матем. ж.》, **19**(1969), 1, 72 - 79.

[3] Grillet, P. A., Intersections of maximal ideals in semigroups, *Amer. Math. Monthly*, **76**(1969), 503-509.

Л. Н. Шеврин 撰 裴定一 译 赵春来 校

最大不变量[maximal invariant; максимальный инвариант]

在不同轨道上取不同值的**不变统计量**(invariant statistic), 这里轨道是由**样本空间**(sampling space)的一一可测变换群生成的. 这样, 设$(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$是样本空间, 而

$G=\{g\}$ 是 $\mathfrak{X}$ 到自身的一一 $\mathfrak{B}$ 可测变换群，那么不变统计量 $T(x)$ 是最大不变量，如果由 $T(x_2)=T(x_1)$ 可推出对于某个 $g\in G$，有 $x_2=gx_1$．例如，设 $\mathfrak{X}=\mathbf{R}^n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$G=\{\Gamma\}$ 是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 正交变换群，而 $y=\Gamma x$，则统计量 $T(x)=\sum x_i^2$ 是最大不变量．任一不变统计量都是最大不变量的函数．

最大不变量用于构造**不变检验**(invariant test)．

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

[2] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1975.

[3] Климов, Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

М. С. Никулин 撰　周概容 译

极大谱型 [maximal spectral type; максимальный спектральный тип]

作用在 Hilbert 空间 H 上的**正规算子**(normal operator) A 的极大谱测度(maximal spectral measure) μ (即它的等价类)的类型．这个测度按下面的条件定义(到等价)．设 $E(\lambda)$ 是正规算子 $A=\int\lambda\,dE(\lambda)$ 的谱表示中的**单位分解**(resolution of the identity)，并且设 $E(\Lambda)=\int_\Lambda dE(\lambda)$(其中 Λ 表示一个 Borel 集)是相伴的"算子值"测度．那么 $E(\Lambda)=0$ 精确地对使 $\mu(\Lambda)=0$ 的那些 Λ．任一 $x\in H$ 有一个相伴谱测度(spectral measure) $\mu_x(\Lambda)=(x,E(\Lambda)x)$；用这些术语 μ 的定义蕴涵对任一 x 测度 μ_x 关于 μ 绝对连续，并且存在一个 x_0 使 μ_{x_0} 与 μ 等价(即 x_0 有极大谱型)．如果 H 是可分的，那么具有这些性质的测度总存在，但是如果 H 是不可分的，那么不存在这样的测度，并且 A 没有极大谱型．这使得不可分情形正规算子酉不变量理论复杂化了．

参考文献

[1] Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965 (英译本: Plesner, A. I., Spectral theory of linear operators, F. Ungar, 1969).

Д. В. Аносов 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

极大子群 [maximal subgroup; максимальная подгруппа]

群 G 的一个真子群，它不包含于 G 的其他真子群中；换言之，它是 G 的真子群集合中以包含关系为序的极大元．存在没有极大子群的群，例如 p^∞ **型的群**(group of type p^∞)．

极大子群概念的一个推广是关于某个性质 σ 的极大子群，这是 G 中具有性质 σ 的一个子群 H_0，且不存在 G 的其他真子群 H 既满足 σ 又包含 H_0．

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 群 G 的一个真子群(proper subgroup)是 G 的一个子群 H，满足 $H\neq G$．

参考文献

[A1] Hall, M. Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959 (中译本: M. 赫尔，群论，科学出版社，1982).

王　杰 译　石生明 校

级数的最大项 [maximal term of a series; максимальный член ряда]

正项(其项为数或函数)收敛**级数**(series)的项，其值不小于此级数所有其他项的值．

应用此想法于复变量 z 的具有正收敛半径 $R(0<R\leqslant\infty)$ 的**幂级数**(power series)

$$\sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k$$

的研究，就会考虑级数

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k|r^k,\ 0<r=|z-a|<R$$

的最大项 $\mu(r)$，于是

$$|c_k|r^k\leqslant\mu(r),\ k=0,1,\cdots.$$

最大项 $\mu(r)$ 的下标 $\nu(r)$ 称为中心下标(central index)：

$$\mu(r)=|c_{\nu(r)}|r^{\nu(r)}.$$

如果有几项的模都等于 $\mu(r)$，则取中心下标为这些项的下标中的最大下标．函数

$$y=\ln\mu(e^x),\ -\infty<x<\infty$$

是非减的和凸的；函数 $\nu(r)$ 是阶梯函数，在间断点处递增，跃度为自然数，而且处处右连续．

参考文献

[1] Valiron, G., Les fonctions analytiques, Paris, 1954.

[2] Wittich, H., Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Springer, 1955.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pólya, G., Szegö, G., Problems and theorems in analysis, 2, Springer, 1976, Part Ⅳ, Chapt. 1 (中译本: G. 波利亚，G. 舍贵，数学分析中的问题和定理，第二卷，上海科学技术出版社，1985，第四编第一章).

沈永欢 译

极大环面 [maximal torus; максимальный тор]

1) 线性代数群 G 的极大环面是 G 的一个代数子群，同时它是**代数环面**(algebraic torus)且不包含于任何更大的这种类型的子群中．现设 G 为连通的．G

的所有极大环面之并集与 G 的所有半单元素的集合相等（见 **Jordan 分解**（Jordan decomposition）），而它们的交与 G 的中心的所有半单元素的集合相等．每个极大环面包含于 G 的某个 **Borel 子群**（Borel subgroup）中．极大环面的中心化子是 G 的一个 **Cartan 子群**（Cartan subgroup），它总是连通的．G 的任意两个极大环面在 G 中共轭．如果 G 定义在一个域 k 上，那么 G 中存在一个极大环面也定义在 k 上，且其中心化子也定义在 k 上．

设 G 为定义在域 k 上的**约化群**（reductive group）．在 G 的所有代数子群中，考虑那些本身是 k 分裂代数环面的极大子群．这样得到的极大 k 分裂环面在 k 上共轭．这些环面共同的维数称为 G 的 k 秩（k-rank），记作 $\mathrm{rk}_k G$．一般地，一个极大 k 分裂环面不必是极大环面，因此，$\mathrm{rk}_k G$ 一般小于 G 的秩（rank）（它等于 G 中极大环面的维数）．如果 $\mathrm{rk}_k G=0$，就称 G 为 k 上的非迷向群（anisotropic group），而当 $\mathrm{rk}_k G$ 等于 G 的秩时，称 G 为 k 上的分裂群（split group）．如果 k 是代数封闭的，则 G 总在 k 上分裂．一般地，G 在 k 的可分闭包上分裂．

例 设 k 为一个域，$\bar{k}$ 是其代数闭包．系数在 $\bar{k}$ 中的 n 级非奇异矩阵群 $G=\mathrm{GL}_n(\bar{k})$（见**典型群**（classical group）；**一般线性群**（general linear group）），它在 k 的素子域上定义且分裂．全体对角矩阵构成的子群是 G 的一个极大环面．

设 k 的特征不等于 2．V 是 $\bar{k}$ 上的 n 维向量空间，F 是 V 的定义在 k 上的一个非退化二次型（即：对于 V 的某组基 $e_1,\cdots,e_n$，型 $F(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)$ 是一个系数在 k 中的 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式）．令 G 为 V 的所有行列式等于 1 且保持 F 的非奇异线性变换构成的群．它定义在 k 上．令 V_k 为 $e_1,\cdots,e_n$ 在 k 上的线性包，它是 V 的一个 k 形式．在 V 中总存在一组基 $f_1,\cdots,f_n$，使得

$$F(x_1f_1+\cdots+x_nf_n)=x_1x_n+x_2x_{n-1}+$$
$$+\cdots+x_px_{n-p+1},$$

其中，当 n 是偶数时 $p=n/2$，当 n 是奇数时 $p=(n+1)/2$．在这组基下，由形如 $\|a_{ij}\|$，其中当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=0$，而对 $i=1,\cdots,p$，$a_{ii}a_{n-i+1,n-i+1}=1$ 的矩阵为元素构成的 G 的子群是 G 中一个极大环面（从而 G 的秩等于 $n/2$ 的整数部分）．一般地，这组基不属于 V_k．但总存在 V_k 中一组基 $h_1,\cdots,h_n$ 使得二次型可写成

$$F(x_1h_1+\cdots+x_nh_n)=$$
$$=x_1x_n+\cdots+x_qx_{n-q+1}+F_0(x_{q+1},\cdots,x_{n-q}),$$
$$q>p,$$

其中 F_0 是一个在 k 上非迷向的二次型（即方程 $F_0=0$ 在 k 中只有零解，见 **Witt 分解**（Witt decomposition））．在基 $h_1,\cdots,h_n$ 下，由形如 $\|a_{ij}\|$，其中当 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=0$，当 $i=1,\cdots,q$ 时 $a_{ii}a_{n-i+1,n-i+1}=1$，而对 $i=q+1,\cdots,n-q$，$a_{ii}=1$ 的矩阵为元素构成的 G 的子群是 G 中一个极大 k 分裂环面（从而 $\mathrm{rk}_k G=q$，且 G 是分裂的，当且仅当 q 等于 $n/2$ 的整数部分）．

利用极大环面可赋予约化群 G 一个**根系**（root system），它是约化群分类的基本要素．即令 $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数，T 为 G 中一个取定的极大环面．T 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示是有理的且可对角化，因此 $\mathfrak{g}$ 分解成为关于该表示的权空间的直和．这个表示的非零权的集合（视为其线性包在向量空间 $X(T)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ 中的一个子集，其中 $X(T)$ 是 T 的有理指标群）为一个（约化的）根系．用相似的方式可定义**相对根系**（relative root system）：如果 G 定义在 k 上，S 是 G 中一个极大 k 分裂环面，则 S 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示的非零权集合在 $X(S)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ 的某个子空间中构成一个根系（未必是约化的）．亦见 **Weyl 群**（Weyl group）；**半单群**（semi-simple group）．

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Borel, A. and Mostow, G. D. (eds.), Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., 9, Amer. Math. Soc., 1966.

【补注】 关于 k 形式见**代数结构的形式**（form of an (algebraic) structure）．

特别地见 [2] 中 A. Borel 的文章．

2）连通实 Lie 群 G 的极大环面是 G 的一个连通紧致的交换 Lie 子群 T，它不包含在任一相同类型的更大的子群里．作为一个 Lie 群，T 同构于一个直积，其因子为绝对值等于 1 的复数组成的乘法群．G 的每个极大环面包含在 G 的一个极大紧致子群里．G 的任意两个极大环面（与任意两个极大紧致子群一样）在 G 中共轭．这在熟知的意义下将极大环面的研究化到 G 是紧致的情形．

现在令 G 为一紧致群．G 的所有极大环面之并集等于 G，而它们的交等于 G 的中心．极大环面 T 的 Lie 代数是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中一个极大交换子代数，而 $\mathfrak{g}$ 中每个极大交换子代数都可用这一方法得到．极大环面 T 在 G 中的中心化子等于 T 本身．T 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示可对角化，且该表示的全体非零权构成 $X(T)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ 中一个**根系**（root system），其中 $X(T)$ 是 T 的指标群．这是紧致 Lie 群分类的一个基本要素．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3

изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 上、下, 科学出版社, 1957, 1958).

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[3] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Masson, 1982, Chapt. IX.

[A2] Bröcker, Th. and tom Dieck, T., Representations of compact Lie groups, Springer, 1985.

王 杰 译 石生明 校

极大化极小 [maximin; максимин]

混合极值

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x, y),\ \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x, y), \text{等}. \quad (*)$$

一个极大化极小能解释（例如，在决策理论，**运筹学**（operations research）或**对策论**（games, theory of）中），为在最坏条件下作出决策所能获得的那些增益中的最大增益；因此，它是一个有保障的增益．所以，以极大化极小为目的作决策可以合情合理地认为是最优的．

极大化极小的值不超过对应的**极小化极大**（minimax）的值．使它们相等的条件在对策论中是很重要的（见**极小化极大原理**（minimax principle））．这类条件是，例如，X 中存在线性结构，X 的凸性和函数 F 对每一 $y\in Y$ 相对于 $x\in X$ 的凹性（或者，X 的线性和 Y 的凸性，和 F 对每一个 $x\in X$ 相对于 $y\in Y$ 的凸性）．

求极大化极小作为一种数学运算形式上在于逐次计算极值，即在于解标准（"单一准则"）最优规划问题，因而不包含概念上的复杂性．然而，即使当 Y 是"良好地排列的"且 F 在 X 上一致连续，把 x 与其上达到（或几乎达到）极值 $\inf_{y\in Y}F(x, y)$ 的 y 联系起来的函数原来可以是"很坏地排列的"，而且，特别地，可以是 x 的不连续函数．在这些情况下解析地计算一个极大值（$*$）是困难的，并且必须用数值方法来寻找（见**极大化极小，数值方法**（maximin, numerical methods）．以上所述也适用于求极小化极大．

Н. Н. Воробъев 撰

【补注】 亦见**极大化极小，数值方法**（maximin, numerical methods）（其中的参考文献 [1] 和 [2]）．

葛显良 译 鲁世杰 校

极大化极小准则 [maximin criterion; максиминный критерий], 极大化极小检验 (maximin test)

检验复合假设 $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$ 对复合备选假设 $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$ 的统计检验，其功效（见**统计检验的功效**（power of a statistical test））的最小值在具有同一水平 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 H_0 对 H_1 的全部统计检验中最大．在假设 H_0 对备选假设 H_1 的统计检验问题中，如果问题本身关于某变换群 G 是不变的，则极大化极小**不变检验**（invariant test）存在，而且在相应的不变检验类中一**致最大功效检验**（uniformly most-powerful test）存在．见 **Hunt-Stein 定理**（Hunt-Stein theorem）．一般地，如果由零复合假设 H_0 与复合假设 H_1 决定的概率分布族关于某 σ 有限测度绝对连续，则极大化极小检验存在．

参考文献

[1] Lehmann, E.L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1959.

[2] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

М.С. Никулин 撰 周概容 译

极大化极小，数值方法 [maximin, numerical methods; максмин, численные методы]

求解极大化极小（极小化极大）问题的计算数学分支．在**运筹学**（operations research）和在**对策论**（games, theory of）中经常会提出极大化极小或极小化极大问题的计算，例如，由**极小化极大原理**（minimax principle）或由**最大保证结果原理**（principle of the largest sure result）出发，就可遇到这类问题．

首先是极大化极小

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x, y) \quad (1)$$

的计算问题，这样的问题例如在求解有完全信息的二人零和对策时出现．它的自然推广是求带"约束"变量的极大化极小

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in B(x)} F(x, y), \quad (2)$$

其中集合 $B(x)$ 通常以下列形式给定：对于每个 $x\in X$,

$$B(x)=\{y\in T: \varphi(x, y)\geqslant 0\}\neq\emptyset.$$

这个问题在有信息交换的二人对策理论中是基本的（见例如，**具有分级结构的对策**（game with a hierarchy structure））．第一个问题的迭代导致一个多重或序贯极大化极小问题：

$$\sup_{x_1\in X_1}\inf_{y_1\in Y_1}\cdots\sup_{x_n\in X_n}\inf_{y_n\in Y_n} F(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n), \quad (3)$$

其中涉及某些动态对策的解．计算极小化极大的随机问题以至最优控制的极大化极小是很有意义的．

求解极小化极大问题的多数方法的基础是**梯度法**（gradient method）或**罚函数法**（penalty functions,

method of). 在前一情形，(1) 被看作最优规划问题：

$$\sup_{x\in X} f(x), \tag{4}$$

其中

$$f(x)=\inf_{y\in Y} F(x, y). \tag{5}$$

求解 (4) − (5) 的数值方法的构造联系着极小值函数 (5) 的方向可微性.

如果 $X\subset \mathbf{R}^n$, Y 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集以及 $\partial f(x)/\partial g$ 是关于方向 $g\in\mathbf{R}^n$ 的导数 (见 [1] − [3]),

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial g} &= \min_{y\in Y(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x, y), g\right),\\ Y(x) &= \{y\in Y: F(x, y)=f(x)\},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

那么对于有限集 Y, 公式 (6) 允许构造一个迭代序列 $x_1, x_2, \cdots$, 其中 $x_{k+1}=x_k+\alpha_k g_k$ 对于 $k=0, 1, \cdots$, 成立，且在某些附加限制下，收敛于满足对于极大化极小的必要条件的点.

在罚函数法中，对于在紧集 $X\subset\mathbf{R}^n$ 和单位立方体 $Y\subset\mathbf{R}^m$ 的乘积上连续的函数 $F(x, y)$ 的问题 (1) 归结为

$$\lim_{c\to\infty}\max_{x, u\in X}\mathscr{L}(x, u, c),$$

其中

$$\mathscr{L}(x, u, c)=u-c\int_Y(\min(0, F(x, y)-u))^2dy \tag{7}$$

(u 是辅助变量). 这里，如果点对 $(u(c), x(c))$ 实现了最大值

$$\max_{u, x\in X}\mathscr{L}(x, u, c),$$

那么任何点列 $\{(u(c_k), x(c_k)): c_k\to\infty\}$ 的任何极限点 (u^*, x^*) 给出

$$u^*=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}F(x, y)$$

作为 (1) 的极大化极小值以及最优策略之一 x^*, 满足

$$u^*=\min_{y\in Y}F(x^*, y)$$

(见 [4]). 因此，(1) 的达到任何精度的解都可归结为对于充分大的惩罚值 c, 求函数 (7) 的最大值. 为避免计算 (7) 中的积分所引起的困难，可利用随机梯度法 (见 [5], [8]):

$$\left.\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k+\alpha_k\xi_k(c_k),\\ u_{k+1}&=u_k+\alpha_k\eta_k(c_k),\end{aligned}\right\}\quad k=1, 2, \cdots, \tag{8}$$

其中 $(\xi_k(c_k), \eta_k(c_k))$ 是 $\mathscr{L}(x, u, c)$ 的随机梯度，即，数学期望是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{L}(x_k, u_k, c_k), \frac{\partial}{\partial u}\mathscr{L}(x_k, u_k, c_k)\right)$$

的随机变量. 在有关序列 $\{\alpha_k\}$, $\{c_k\}$ 以及函数 $F(x, y)$ 的一定条件下，对于任何一阶逼近 (x_1, y_1), 由 (8) 定义的点列以概率 1 收敛于极大化极小问题 (1) 的解集.

为在 (7) 中避免大的惩罚值 c, 可利用所谓 "分散法" (见 [6]), 这是另一种变换问题 (1) 的方法. 这里，(1) 的极大化极小 u^* 定义为满足

$$\min_{x\in X}\Phi(x, u)=0 \tag{9}$$

的 u 的最大值，其中

$$\Phi(x, y)=\int_Y(\min(0, F(x, y)-u))^2dy.$$

这里实现

$$\min_{x\in X}\Phi(x, u^*)$$

的值 x^* 是对于 (1) 的最优策略. 为了求得 (9) 的最大根 u^*, 可能利用使 Φ 相对于 x 极小化的梯度法.

基于罚函数法的变换方法允许把带约束变量的极小化极大问题 (2) 近似地归结为一个最大值问题 (见 [7], [8]).

把极小化极大问题归结为最大值问题后所得到的极值问题是非常复杂的，对它们用已知方法来求解会带来极大的、有时甚至对于现代电子计算机来说是不可克服的困难. 特别是，这使得求解大重数的序贯极大化极小问题 (3) 变得非常麻烦. 与这些求解极小化极大问题的一般方法一起，还有一些针对特殊类问题的方法；例如，对具有信息传递的二人对策论问题的求解方法 (见 [6]).

参考文献

[1] Демьянов, В. Ф., Малоземов, В. Н., Введение в минимакс, М., 1972 (英译本：Dem'yanov, V. F. and Malozemov, V. N., Introduction to minimax, Wiley, 1974).

[2] Danskin, J. M., The theory of max-min and its application to weapons allocation problem, Springer, 1967.

[3] Демьянов, В. Ф., Минимакс: дифференцируемость по направлениям, Л., 1974.

[4] Демьянов, В. Ф., Васильев, Л. В., Недифференцируемая оптимизация, Л., 1982 (英译本：Dem'yanov, V. F. and Vasil'ev, L. V., Non-differentiable optimization, Optim. Software, 1985).

[5] Гермейер, Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971.

[6] Ермольев, Ю. М., Методы стохастического программирование, М., 1976.

[7] Гермейер, Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976.
[8] Ерешко, Ф. И., Злобин, А. С., 《Экономика и матем. методы》, 13 (1977), 4, 703 − 713.
[9] Федоров, В. В., Численные методы максмина, М., 1979.
В. В. Федоров 撰 史树中 译

极大化极小原理 [maximin principle; максимина принцип]

见**极小化极大原理** (minimax principle).

函数的极大化和极小化 [maximization and minimization of functions; максимизация и минимизация функций]，有限个变量的

求函数 $f(x)$ $(x=(x^1, \cdots, x^n)\in X\subseteq \mathbf{R}^n)$ 的极值的问题. 这是指

1) 找 $\bar{f}=\sup_{x\in X}f(x)$ 或 $\underline{f}=\inf_{x\in X}f(x)$;

2) 如果 $\bar{f}$ 或 $\underline{f}$ 在容许集上达到，寻找极大值点或极小值点 (见**函数的极大值和极小值** (maximun and minimum of a function));

3) 如果 $\bar{f}$ 或 $\underline{f}$ 在 X 上达不到，则构造极大化序列 (maximizing sequence) 或极小化序列 (minimizing sequence) $\{x_i\}$，使得:

$$\lim_{i\to\infty}f(x_i)=\bar{f},\ \lim_{j\to\infty}f(x_j)=\underline{f}.$$

对离散自变量函数的极值的研究归属于**离散规划** (discrete programming) 或**整数规划** (integral programming). 以下只阐明对连续自变量函数的极大化和极小化.

经典的 (间接的) 极大化和极小化方法仅能应用于光滑函数. 为了确定稳定点的位置，应用对极值的必要条件. 导数 $\partial^\alpha f/\partial x^\alpha (\alpha=1, \cdots, n)$ 的零点在实践中通常用某种逐次逼近法计算 (见 [3]). 另一方面，每一个求解有限多个以下形式泛函方程

$$\varphi_m(x^1, \cdots, x^n)=0,\ m\leqslant n$$

的问题能解释为某个函数的极大化或极小化问题，例如，函数

$$f(x)=\varphi_1^2(x)+\cdots+\varphi_m^2(x)\to\min,$$

而且能够应用极大化和极小化的一个特定方法.

使函数极大化和极小化的直接方法是以直接比较 f 在两个或更多点上的值为基础的.

实用的极值搜索法用以下形式的迭代算法:

$$x_{i+1}=\hat{X}(i, x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-j}),$$

其中 i 是迭代的指标，而 $\hat{X}(\cdot)$ 是某个算子. 这里通常假设

a) 在某种意义下这算法收敛，最经常是在

$$x_\infty=\bar{x}(x_\infty=\underline{x})\text{ 或 } f(x_\infty)=\bar{f}\ (f(x_\infty)=\underline{f})$$

的意义下;

b) 迭代程序是局部的，即 $j\ll i\,(j=o(i)$ 当 $i\to\infty)$; 这算法仅"记住"当前位置 x_i 的某邻域内的 x 的迭代值. 对 $j=0$ 得到无记忆的简单 Марков 计算程序.

算子 $X(\cdot)$ 在确定性方法中可以是确定的，或者也可以包含随机参数. 在计算实践中，随机方法常常与确定性方法结合起来; 例如，在**坐标方式的下降法** (coordinate-wise descent method) 中下降方向可随机地决定. 随机参数的概率特征可以从迭代到迭代轮流地改变 (适应搜索法或"自学"随机搜索法).

各种确定性方法广泛地联合使用，包括用几种方法序贯地和平行地计算极值，形如 $\hat{X}=\hat{X}_2(\hat{X}_1(\cdot))$ 的算法的复合，等等. 例如 Levenberg-Marquardt 法 (Levenberg-Marquardt method)

$$x_{i+1}=x_i-(\alpha_i\nabla\nabla f(x_i)+\beta_i I)^{-1}\nabla f(x_i),$$

当 $\alpha_i=0$ 与**梯度法** (gradient method) 一致，当 $\beta_i=0$ 与 **Newton 法** (Newton method) 一致.

一维最优化 (one-dimensional optimization)，即极大化和极小化一个函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R}^1)$，除了它本身的意义外，在大多数能应用的方法中是一个必要的步骤. 具体的一维方法包括，例如，**Fibonacci 法** (Fibonacci method); **对分法** (dichotomy method) (分成一半) 和**抛物线法** (parabola method). 极大化和极小化多元函数的方法有**梯度法** (gradient method)，**最速下降法** (steepest descent, method of)，**坐标方式的下降法** (coordinate-wise descent method)，**单纯形法** (simplex method)，**扫描法** (scanning method)，**共轭梯度法** (conjugate gradients, method of)，**重球法** (heavy sphere, method of the)，**调节法** (adjustment method)，及其他.

上列大部分方法的算法属于下降 (上升) 法 (descent (ascent) method) 的系统:

$$x_{i+1}=x_i\mp\kappa_i y_i,$$

这里对所有 i (松弛条件)，$f(x_{i+1})\leqslant f(x_i)$ 或 $f(x_{i+1})\geqslant f(x_i)$. 这些方法的区别或者由于下降方向 y_i 的选择，或者由于步长因子 (step factor) κ 决定的沿下降向量运动方式的选择.

对其等高线是"有陡坡的山谷"的函数，切割方法已有发展 (见**极小化方法 (强依赖于多个变量的函数的)** (minimization methods (for functions depending strongly on a few variables)). 普通的 (非切割) 方法应用到这里时给出一条曲折的松弛路径，需要超

量的机器时间去计算极值.

方法的比较有效性是用很多的甚至互相矛盾的准则来估计. 例如, 解的精度, 逼近解的速度, 方法的可靠性, 从问题到计算的准备时间, 算法的收敛性等等. 每一种被认可的方法的适用范围是很有限的.

为了检验这些方法, 已经收集了一个代表不同函数类的标准的检验函数 (test functions) 的集合 (见[1]). 函数极大化和极小化方法的收敛性已被广泛地研究 (见[6], [8]). 然而, 收敛性对于一种计算的有效终止是既非必要又非充分的性质.

所有上面的方法导致一个局部极值, 如果第一次逼近属于这个极值的吸引区域. 总体极值的检测仅对凸函数和与它相关的单峰函数才有保证. 求总体极值的理论迄今 (1989) 仍然处于发展的初始状态 (见**多极值问题** (multi-extremum problem)). 正在发展的函数极大化和极小化的另一领域是非光滑函数的最优化 (见[4], [13], [16]). 特别地, 一族函数的极大值极小化问题一般导致非光滑函数 (见**极大化极小, 数值方法** (maximin, numerical methods)). 显然, 所有常用的最优化方法有一种令人感兴趣的物理的、经济的或生物学的意义. 相应的研究还刚刚开展 (见[9]) 并且导致新方法的创造 (亦见**迭代法的连续模拟** (continuous analogues of iteration methods)). 如果所考虑函数的值由于随机噪声是统计地定义的, 则**随机逼近** (stochastic approximation) 方法之一适用于求极值. 这里我们就接近**试验设计** (design of experiments) 了.

函数极大化和极小化的试验方法 (experimental methods) 在研究极值中利用各种物理过程的复制. 一个有关的领域是在模拟计算机上模拟 (见[17]). 尽管利用最简单自动优化机有方便性和廉价性, 但它们不能保证计算的高精确度.

图解法 (graphical methods) 只是适合于用来得到粗略的估计和为迭代方法构造初始逼近.

如果容许集是由泛函条件

$$\varphi_m(x) \leqslant 0$$

(约束和限制, 条件极值) 给出的, 则**数学规划** (mathematical programming) 的方法能用于极值的搜索. 这个问题能利用罚函数和障碍函数 (见**罚函数法** (penalty functions, method of)) 化成一系列无约束极值问题.

参考文献

[1] Aoki, M., Introduction to optimization techniques, Macmillan, 1971.

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[4] Васильев, Ф. П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М., 1974.

[5] Гупал, А. М., Стохастические методы решения негладких экстремальных задач, К., 1979.

[6] Карманов, В. Г., Математическое программирование, М., 1975.

[7] Моисеев, Н. Н., Иванилов, Ю. П., Столярова, Е. М., Методы оптимизации, М., 1978.

[8] Пшеничный, Б. Н., Данилин, Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975.

[9] Разумихин, Б. С., Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике, М., 1975 (英译本: Razymikhin, B. S., Physical models and methods of the theory of equilibrium in programming and economics, Reidel, 1984).

[10] Растригин, Л. А., Системы экстремального управления, М., 1974.

[11] Саульев, В. К., Самойлова, И. И., в сб., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, 91 – 128.

[12] Wilde, D. J., Extremum searching methods, Prentice-Hall, 1965.

[13] Федоров, В. В., Численные методы максимина, М., 1979.

[14] Ortega, J. M. and Rheinboldt, C., Iterative solution of non-linear equations in several variables, Acad. Press, 1970 (中译本: J. M. 奥特加等, 多元非线性方程组迭代解法, 科学出版社, 1983).

[15] Современное состояние теории исследования операций, М., 1979.

[16] Lemarechal, C. and Mifflin, R. (eds.), Nonsmooth optimization, Pergamon, 1978.

[17] Dixon, L. C. W. and Szegö, G. P. (eds.), Towards global optimisation. 1 – 2, North-Holland, 1975 – 1978.

[18] Евтушенко, Ю. Г., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **11** (1971), 6, 1390 – 1403.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rockafellar, R. T., The theory of subgradients and its applications to problems of optimization. Convex and nonconvex functions, Heldermann, 1981.

[A2] Laarhoven, P. J. M. van, Theoretical and computational aspects of simulated annealing, CWI Tract, 51, Centre Math. Computer Sci., Amsterdam, 1988.

[A3] Luenberger, D. G., Linear and nonlinear programming, Addison-Wesley, 1984.

[A4] (Condor). Committee On the Next Decade in Operations Research: Operations Research: the next decade, *Oper. Research*, **36** (1988), 4, 619 - 637.

[A5] Daniel, J. W., The approximate minimization of functionals, Prentice-Hall, 1971.

[A6] Buckley, A. G. and Goffin, J. L., Algorithms for constrained minimization of smooth nonlinear functions, North-Holland, 1982.

葛显良 译 鲁世杰 校

函数的极大值和极小值 [maximum and minimum of a function; максимум и минимум функции]

实值函数的最大值和最小值．实值函数的定义域中在其上达到极大或极小值的点分别称为极大点或极小点（见**极大点和极小点**（maximum and minimum points））．如果某点是一个绝对（局部）极大点或极小点，严格的或非严格的，则此函数在该点的值相应地称为绝对（局部），严格的或非严格的，极大值或极小值．紧集上的连续函数总在该集上取到最大值和最小值．

一个函数的极大值和极小值统称为它的极值．

Л. Д. Кудрявцев 撰 葛显良 译

极大点和极小点 [maximum and minimum points; максимума и минимума точки]

使实值函数在其定义域中取达最大与最小值的点；这些点也称为绝对极大点（absolute maximum points）与绝对极小点（absolute minimum points）．若 f 定义在拓扑空间 X 上，一点 x_0 称为局部极大点（local maximum point）（局部极小点（local minimum point）），如果存在 x_0 的邻域 $U\subset X$，使 x_0 为 f 在此邻域上的限制的绝对极大（极小）点．应注意严格的极大（极小）点（strict maximum (minimum) points）与非严格的极大（极小）点（non-strict maximum (minimum) points）的区别（绝对与局部两者）．例如，点 $x_0\in R$ 称为 f 的非严格（严格）局部极大点，如果存在 x_0 的邻域 U，使对一切 $x\in U$ 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)<f(x_0),\ x\neq x_0)$．

关于定义在有限维区域上的函数，可用微分学描述的条件与检验法，去判定给定点是否为局部极大（极小）点．设 f 定义在实直线的一点 x_0 的邻域上．若 x_0 为非严格局部极大（极小）点且若导数 $f'(x_0)$ 存在，则此导数等于零．

若函数 f 在点 x_0 的一个邻域中可微而在 x_0 本身可能只是连续，并且导数 f' 在 x_0 的上述邻域中点 x_0 的每一边保持符号不变，则为使 x_0 是严格局部极大（局部极小）点，其充要条件是此导数由正号变至负号，即对 $x<x_0$ 有 $f'(x)>0$，且对 $x>x_0$ 有 $f'(x)<0$（相应地，由负号变至正号，即对 $x<x_0$ 有 $f'(x)<0$，且对 $x>x_0$ 有 $f'(x)>0$）．然而，不能对每个在 x_0 的邻域中可微的函数 f 的导数在 x_0 处符号变化给出肯定的结论．

若 f 在 x_0 处有 m 阶导数且 $f^{(k)}(x_0)=0\,(k=1,\cdots,m-1)$，$f^{(m)}(x_0)\neq 0$，则为使 x_0 是严格局部极大点，其充要条件是 m 为偶数且 $f^{(m)}(x_0)<0$，而对于局部极小点，条件换为 m 为偶数且 $f^{(m)}(x_0)>0$．

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为定义在点 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的 n 维邻域中并在该点可微．若 $x^{(0)}$ 为非严格局部极大（极小）点，则 f 的微分在此点等于零．这个条件等价于 f 的所有一阶偏导数在此点为零．若 f 在 $x^{(0)}$ 有二阶连续偏导数，所有一阶偏导数在 $x^{(0)}$ 等于零，并且二阶微分在 $x^{(0)}$ 是负定（正定）二次型，则 $x^{(0)}$ 为严格局部极大（极小）点．当对定义域中的变元附加某些限制时，可微函数的极大点与极小点所满足的条件是熟知的：必须满足一组方程．在数学的一些专门领域中，具有更复杂结构的定义域的实值函数的极大（极小）的充分必要条件亦已得到；例如，在**凸分析**（convex analysis）与**数学规划**（mathematical programming）中（亦见**函数的极大化和极小化**（maximization and minimization of functions））．流形上函数的极大点与极小点在**大范围变分学**（variational calculus in the large）中被研究，而函数空间上的函数即泛函的极大点与极小点则在**变分学**（variational calculus）中被研究．还有各种求极大点与极小点的数值逼近方法．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971（英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Faundamentals of mathematical analysis, 1, Mir, 1982）.

[2] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, 2, М., 1981.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975（英译本: Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 1, Mir, 1977）.

[4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд. т.1, М. 1975（英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stromberg, K. R., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

郑维行 译 沈祖和 校

最大熵谱估计量 [maximum-entropy spectral estimator; спектральная оценка максимальной энтро-

пии], 自回归谱估计量(auto-regressive spectral estimator)

离散时间平稳过程之**谱密度**(spectral density) $f(\lambda)$ 的一种估计量 $f_q^*(\lambda)$, 满足: 1) 自相关的前 q 个值等于由观测数据求得的样本自相关的值; 2) 在上述条件下, 以 $f_q^*(\lambda)$ 为谱密度的 Gauss 随机过程的**熵**(entropy)取最大值. 设 X_t 是以 $f(\lambda)$ 为谱密度的实平稳过程, $x_t(t=1,\cdots,N)$ 作为 X_t 的一个实现段由观测已知, 则最大熵谱估计量 $f_q^*(\lambda)$ 决定于关系式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos k\lambda f_q^*(\lambda)d\lambda=r_k^*\equiv \tag{1}$$

$$\equiv N^{-1}\sum_{j=1}^{N-k}x_j x_{j+k},\quad k=0,1,\cdots,q;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log f_q^*(\lambda)d\lambda=\max, \tag{2}$$

其中符号"≡"表示"根据定义等于". 最大熵谱估计量具有如下形式:

$$f_q^*(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi|1+\beta_1\exp(i\lambda)+\cdots+\beta_q\exp(iq\lambda)|^2}, \tag{3}$$

其中系数 $\beta_1,\cdots,\beta_q$ 和 σ^2 决定于(1)中的 $q+1$ 个方程(见[1],[9],[10]). (3)式表明, 最大熵谱估计量与所谓自回归谱估计量相同(见[2],[3]). 正整数 q 在这里所起的作用, 类似于在用周期图平滑法求谱密度之非参数估计时, 谱窗的倒宽度的作用(见**谱窗**(spectral window); **随机过程论中的统计问题**(statistical problems in the theory of stochastic processes)). 存在若干种由已知观测结果估计 q 的最优值的方法(见[1],[4],[5],[8]). 系数 $\beta_1,\cdots,\beta_q$ 和 σ^2 的值, 可以由如下 Yule-Walker 方程组求解得到:

$$r_k^*+\sum_{j=1}^{q}\beta_j r_{|k-j|}^*=0,\quad k=1,\cdots,q, \tag{4}$$

$$r_0^*+\sum_{j=1}^{q}\beta_j r_j^*=\sigma^2. \tag{5}$$

还存在其他一些计算上更简便的求这些系数的方法(例如, 见[1],[4]-[6],[10]).

对于样本容量较小或复谱密度的情形, 最大熵谱估计和作为其推广的参数谱估计(见**参数谱估计量**(spectral estimator, parametric)), 比 $f(\lambda)$ 的非参数估计具有更明显的优越性: 前者有更为正则的形式和较强的求解能力, 即可以更好地分辨谱密度图象较接近的峰值(见[1],[4]-[7]). 因此, 最大熵谱估计量在**平稳随机过程的谱分析**(spectral analysis of a stationary stochastic process)的应用中被广泛采用.

参考文献

[1] Childers, D. G. (ed.), Modern spectrum analysis, IEEE Press, 1978.

[2] Parzen, E., An approach to empirical time series analysis, *Radio Sci.*, **68** (1964), 937 – 951.

[3] Akaike, H., Power spectrum estimation through autoregressive model fitting, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **21** (1969), 3, 407 – 419.

[4] Haykin, S. (ed.), Nonlinear methods of spectral analysis, Springer, 1979.

[5] Kay, S. M. and Marpl, S. L., Spectrum analysis——a modern perspective, *Proc. IEEE*, **69** (1981), 11, 1380–1419.

[6] Spectral estimation, *Proc. IEEE*, **70** (1982), 9.

[7] Писаренко, В. Ф., в сб., Вычислительная сейсмология, в. 10, М., 1977, 118 – 149.

[8] Gooyer, J. G. de, Abraham, B., Gould, A. and Robinson, L., Methods for determining the order of an autoregressive-moving average process: A survey, *Internat. Stat. Rev.*, **55** (1985), 301 – 329.

[9] Priestley, M. B., Spectral analysis and time series, 1–2, Acad. Press, 1981.

[10] Papoulis, A., Probability, random variables and stochastic processes, McGraw-Hill, 1984.

А. М. Яглом 撰　周概容 译

最大似然法[**maximum-likelihood method**; **максимального правдоподобия метод**]

统计估计理论中建立未知参数估计量基本的一般方法之一.

假设根据观测结果 X 来估计其分布 P_θ 依赖的未知参数 $\theta\in\Theta\subseteq R^k$. 假设一切测度 P_θ 关于同一测度 ν 绝对连续, 由等式

$$L(\theta)=\frac{d\mathsf{P}_\theta}{d\nu}(X)$$

定义似然函数(likelihood function). 最大似然估计法建议用关系式

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta^C}L(\theta)$$

所决定的统计量 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量. $\hat{\theta}$ 称为最大似然估计量(maximum-likelihood estimator). 在广泛的一类情形下, 最大似然估计量是似然方程(likelihood equation)

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log L(\theta)=0,\quad i=1,\cdots,k,\ \theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k) \tag{1}$$

的解.

例 1. 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是独立随机变量(观测结果)列, 其联合分布为 $\mathsf{P}_\theta(\theta\in\Theta)$. 如果存在关于某测度 m 的密度

$$f(x,\theta)=\frac{d\mathsf{P}_\theta}{dm}(x),$$

则

$$L(\theta)=\prod_{j=1}^{n} f(X_j,\theta),$$

而方程(1)有如下形状

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f(X_j,\theta)=0,\quad i=1,\cdots,k. \qquad (2)$$

例 2．在例 1 中设 P_θ 是**正态分布**(normal distribution)，密度为

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

其中 $x\in\mathbf{R}^1$, $\theta=(a,\sigma^2)(-\infty<a<\infty,\sigma^2>0)$．方程(2)为

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)=0,$$

$$\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}(X_j-a)^2-\frac{n}{2\sigma^2}=0;$$

而最大似然估计为

$$\hat{a}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2.$$

例 3．在例 1 中设 X_j 以概率 $1-\theta$ 和 θ 分别取 0和 1 为值，则

$$L(\theta)=\prod_{j=1}^{n}\theta^{X_j}(1-\theta)^{1-X_j},$$

而最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$．

例 4．设观测结果 $X=X_t$ 是**扩散过程**(diffusion process)，其**随机微分**(stochastic differential)为

$$dX_t=\theta a_t(X_t)+d\,W_t,\ X_0=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 W_t 是 **Wiener 过程**(Wiener process)，而 θ 是未知一维参数．这里(见[3])

$$\log L(\theta)=\theta\int_0^T a_t(X_t)\,dX_t-\frac{\theta^2}{2}\int_0^T a_t^2(X_T)\,dt,$$

$$\hat{\theta}=\frac{\int_0^T a_t(X_t)\,dX_t}{\int_0^T a_t^2(X_t)\,dt}.$$

作为最大似然法的基础，没有任何明确表述的最优性的想法，而对其良好性质的广泛普遍的信念，部分地建立在最大似然法用于众多具体问题的巨大成功，部分地建立在严格证明了的渐近最优性上．例如，在例 1 的情形下，在广泛的条件下以概率 P_θ 为 1 有 $\hat{\theta}_n\to\theta$．如果存在 Fisher 信息量

$$I(\theta)=\int\frac{|f_\theta'(x,\theta)|^2}{f(x,\theta)}m(dx),$$

则差 $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)$ 渐近正态，参数为 $(0,I^{-1}(\theta))$，且 $\hat{\theta}_n$ 在一定意义下对 θ 有渐近最小均方偏差(见[4])．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[2] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1975.

[3] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. И., Статистика случайных процессов, М., 1974 (中译本：Р. Ш. 李普切尔，А. И. 史里亚耶夫，随机过程统计，宇航出版社，1987).

[4] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979(英译本：Ibragimov, A. I. and Has'minskii, R. Z. [R. Z. Khas'minskii], statistical estimation: asymptotic theory, Springer, 1981.

[5] Lehmann, E. L., Theory of point estimation, Wiley, 1983.

И. А. Ибрагимов 撰　周概容 译

最大模原理[maximum modulus principle; максимума модуля принцип]

表现**解析函数**(analytic function)的模的基本性质之一的定理．设 $f(z)$ 是一个定义在复空间 $\mathbf{C}^n$ 的一个(开)区域 D 上的 n 个复变量 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ $(n\geqslant 1)$ 的正则解析(或全纯)函数，它不是常数，$f(z)\neq$ 常数．最大模原理的局部表述(local formulation of the maximum modulus principle)断言：$f(z)$ 的模在点 $z^0\in D$ 没有局部最大值，即不存在 z^0 的邻域 $V(z^0)$ 使得 $|f(z)|\leqslant|f(z^0)|$, $z\in V(z_0)$．若附加条件 $f(z^0)\neq 0$，则 z^0 也不可能是 $f(z)$ 的模的局部最小值点．一个等价的最大模原理的整体表述(global formulation of the maximum-modulus principle)：在如上的相同条件下，在任何 $z^0\in D$ 处，$f(z)$ 的模达不到它的最小上界

$$M=\sup\{|f(z)|:z\in D\}.$$

因此，若在有限闭区域 D 内 $f(z)$ 是连续的，则 M 只能在 D 的边界上达到．最大模原理的这些表述，当 $f(z)$ 是连通复(解析)流形，特别是 **Riemann 曲面**(Riemann surface)或 **Riemann 区域**(见 Riemannian domain) D 上的全纯函数时仍然成立．

最大模原理在几个方向上有推广．首先，代替 $f(z)$ 全纯，假设 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 是一个(复)**调和函数**(harmonic function)就足够了．另一种推广同这样的事实有关：对于全纯函数 $f(z)$，模 $|f(z)|$ 是**对数下调和函数**(logarithmically-subharmonic function)．若 $f(z)$ 是有限域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 内的有界全纯函数且对所

有的 $\zeta \in \partial D$，除去某个（$\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{C}^n$ 内）外容量（capacity）为零的集合 $E \subset \partial D$，有

$$\lim\sup\{|f(z)|: z \to \zeta, z \in D\} \leqslant M,$$

则在 D 内处处有 $|f(z)| \leqslant M$. 亦见**二常数定理**（two-constants theorem）；**Phragmén-Lindelöf 定理**（Phragmén-Lindelöf theorem）.

最大模原理亦可推广到全纯映射. 设 $f: D \to \mathbf{C}^m$ 是（开）区域 $D \subset \mathbf{C}^n (n \geqslant 1)$ 到 $\mathbf{C}^m$ 的全纯映射，即 $f=(f_1, \cdots, f_m)(m \geqslant 1)$，其中 $f_j(j=1, \cdots, m)$ 是 D 上的全纯函数，$f(z) \neq$ 常数且 $\|f\| = \sqrt{|f_1|^2+\cdots+|f_m|^2}$ 是 Euclid 范数. 则 $\|f(z)\|$ 在任何 $z^0 \in D$ 达不到局部最大值. 当保区域原理得到满足时，最大模原理总是成立的（见**保区域原理**（preservation of domain, principle of））.

参考文献

[1] Стоилов, С., Теорие функций комплексного переменного, пер. с рум., М., 1962.

[2] Вмадимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of many complex variables, M. I. T., 1966).

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч, 1-2, М., 1976.　Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 这一原理亦称最大值原理（maximum principle），见[A2].

参考文献

[A1] Burckel, R. B., An introduction to classical complex analysis, 1, Acad. Press, 1979.

[A2] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979.　杨维奇 译

最大值原理[**maximun principle**; **максимума принцип**]，离散的

对离散时间控制过程的 Понтрягин 最大值原理. 对这种过程最大值原理不必满足，即使 **Понтрягин 最大值原理**（Pontryagin maximum principle）对于它的用微分 dx/dt 取代有限差分算子 $x_{t+1}-x_t$ 得到的连续模拟是成立的. 例如，考虑最优控制问题

$$\max J(x_{T+1}), \tag{1}$$

$$x_{t+1}=f_t(x_t, u_t), \tag{2}$$

$$x_t \in U, \ t=0, \cdots, T, \tag{3}$$

$$x_0=a. \tag{4}$$

这可以作为有约束的极值的标准问题来处理. 那么一个轨道 $\{x_t^*, u_t^*\}$ 的最优性条件能借助于 **Lagrange 函数**（Lagrange function）

$$L=J(x_{T+1})+\sum_{t=0}^{T}(p_{t+1}f_t(x_t, u_t)-p_{t+1}x_{t+1}),$$

而得到，这里

$$p_{t+1}f_t(x_t, u_t)=H_t,$$

由于类似于连续情况，称为 **Hamilton 函数**（Hamilton function）. 设 $J, f_t(t=0, \cdots, T)$ 是关于所有变量的可微函数且设 U 是有界闭集，那么为了（1）-（4）的一个解 $\{x_t^*, u_t^*\}$ 是最优的，必须存在 **Lagrange 乘子**（Lagrange multipliers）$\{p_{t+1}^*\}$，使得（x_t^*, u_t^*, p_{t+1}^*）是 Lagrange 函数的稳定点，即在这点

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0; \ \frac{\partial L}{\partial p}=0; \ \delta_n L=\frac{\partial L}{\partial u}\delta u \leqslant 0$$

对控制的所有容许变分 δu. 第一个条件导致离散过程的动力方程（2）和初始条件（4）. 第二个条件导致边界条件和对脉冲 $\{p_{t+1}\}$ 的共轭组：

$$p_{T+1}=\frac{\partial J}{\partial x_{T+1}},$$

$$p_t=p_{t+1}\frac{\partial f}{\partial x_t}, \ t=T, \cdots, 0.$$

第三个条件导致 Hamilton 函数的一阶变分上的一个条件：

$$\delta_n H_t=\frac{\partial H_t}{\partial u_t}\delta u_t \leqslant 0. \tag{5}$$

然而，（5）不蕴涵 Hamilton 函数在最优控制上达到它在所有满足约束（3）的控制上的最大值，

$$H_t(x_t^*, u_t^*, p_{t+1}^*)=\max_{u \in U} H_t(x_t^*, u_t^*, p_{t+1}^*);$$

这表明 u_t^* 是 Hamilton 函数的一个稳定点. 如果 Hamilton 函数的一阶变分（$\partial H_t/\partial u_t$）$\delta u_t$ 为零（特别地，当 u_t^* 是一内点，或者当在点 u_t^* 存在控制的正交于 $\partial H_t/\partial u_t$ 的容许变分 δu_t 时，这条件成立），则此稳定点的性质由这展开式中的后继项决定：

$$H_t(u_t^*+\varepsilon\delta u_t)-H_t(u_t^*)=\varepsilon\frac{\partial H_t}{\partial u_t}\delta u_t \leqslant 0.$$

已经构造出种种例子，其中 u_t^* 是 Hamilton 函数的一个局部极大，一个局部极小，甚至是一个鞍点. 所以，一般地，最大值原理对离散系统不成立.

对于按相变量是线性的，

$$x_{t+1}=A(u_t)x_t+\varphi(u_t),$$

或按控制是线性的，

$$x_{t+1}=g(x_t)+B(x_t)u_t,$$

那些系统，第一种情况中在目标 $J=c_{T+1}x_{T+1}$ 是线性的附加条件下，或第二种情况中在 U 的凸性的附加条件下，最大值原理是满足的（见[1]-[5]）.

如果线性离散系统的最优控制问题作为**线性规划**

(linear programming)问题来处理(见[6],[7]),则可以得到对偶于它的离散时间动力问题.对脉冲的共轭组给出对偶问题的动力方程.在一个最优轨道上,对相互对偶的动力问题,不但目标一致,而且Hamilton 函数一致.

参考文献

[1] Fan, L.-Ts. and Wang, Ch.-S., The discrete maximum priciple, Wiley, 1964.

[2] Пропой, А. И., Элементы теории оптимальных процессов, М., 1973.

[3] Пшеничный, Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969(英译本: Pshenichnyi, B. N., Necessary conditions for an extremum, M. Dekker, 1971).

[4] Болтянский, В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973(英译本: Boltyanskiĭ, V. G., Optimal control of discrete systems, Wiley, 1978.

[5] Габасов, Р., Кириллова, Ф. М., 《Автоматика и телемеханика》, 1966, 11, 46 – 51.

[6] Иванилов, Ю. П., 《Прикл. матем. и программирование》, Киш., 1971, 4, 31 – 40.

[7] Иванилов, Ю. П., Пропой, А. И., 《Докл. АН СССР》, **198** (1971), 5, 1011 – 1014.

Ю. П. Иванилов 撰

【补注】 对解析函数的最大值原理,见**最大模原理** (maximum-modulus principle).

参考文献

[A1] Bryson, A. E. and Ho, Y. C., Applied optimal control, Ginn, 1969.

葛显良 译 鲁世杰 校

Maxwell 分布 [Maxwell distribution; Максвелла распределение]

具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{x^2}{\sigma^3}\ e^{-x^2/2\sigma^2}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad (*)$$

依赖于参数 $\sigma>0$ 的**概率分布** (probability distribution). Maxwell 分布的**分布函数** (distribution function) 具有形式

$$F(x)=\begin{cases}2\Phi(x/\sigma)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{x}{\sigma}\ e^{-x^2/2\sigma^2}-1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准**正态分布** (normal distribution) 函数. Maxwell 分布具有正的偏度系数; 它是单峰分布,唯一峰值出现在 $x=\sqrt{2}\ \sigma$. Maxwell 分布具有有限的各阶矩; 数学期望和方差分别等于 $2\sigma\sqrt{2/\pi}$ 和 $(3\pi-8)\sigma^2/\pi$.

若 X_1, X_2 和 X_3 是具有参数为 0 和 σ^2 的正态分布的独立随机变量,则随机变量 $\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$ 具有概率密度为 (*) 的 Maxwell 分布. 换句话说,Maxwell 分布可以作为随机向量的长度的分布而获得,该随机向量在三维空间中的 Descartes 坐标是独立的,并且以参数 0 和 σ^2 正态地分布的. 具有 $\sigma=1$ 的 Maxwell 分布与具有三个自由度的 χ^2 分布的变量的平方根的分布重合(亦见 **Rayleigh 分布** (Rayleigh distribution)). Maxwell 分布就是通常所说的统计力学和统计物理中粒子的速度分布. 该分布是 J. C. Maxwell (1859) 在求解关于理想气体中分子速度分布的问题时首次建立的.

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971.

А. В. Прохоров 撰 徐锡申 译

Maxwell 方程组 [Maxwell equations; Максвелла уравнения]

介质中电磁场的方程组; 18 世纪 60 年代由 J. C. Maxwell 在当时关于电磁现象定律的实验证据的基础上建立的.

在经典电动力学中,介质中的电磁场由四个向量场描述; 电场强度 **E**, 电位移 **D**, 磁场强度 **H** 和磁感应强度 **B**, 它们是 3 维空间点的径向量 **r** 和时间 t 的连续可微函数. 这些场可被确定到相差常量因数,容许选择相应物理单位制来测量它们的绝对值.

Maxwell 方程组是关于 **E**、**D**, **H** 和 **B** 的一阶非齐次偏微分方程组,在国际单位制下,它们采取下列形式:

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J},\qquad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\qquad (1b)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\qquad (1c)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho,\qquad (1d)$$

其中非齐次项 $\rho(t,\mathbf{r})$(给定的介质中电荷的体密度)和 $\mathbf{J}(t,\mathbf{r})$(电流密度,即单位时间内通过垂直于电荷运动方向单位面积的电荷)是场的源. Maxwell 方程组也可以用积分形式描述:

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\left[\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]\cdot d\mathbf{s},\qquad (2a)$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\int_S\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s},\qquad (2b)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \tag{2c}$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dV, \tag{2d}$$

其中 S 是任何具有闭边界曲线 C 的双侧曲面，∂V 是 $\mathbf{R}^3$ 中任何有界域 V 的闭边界曲面；而且，$d\mathbf{l}$ 是沿 C 的弧元，$d\mathbf{s}$ 是有向面元，dV 是 V 上的体积元；而在 ∂V 上面元 $d\mathbf{s}$ 指向 V 外.

场 **E**、**D**，**H**，**B** 和 **J** 不是独立的. 根据实验事实，在大量介质中，**D** 和 **J** 仅依赖于 **E**，而 **B** 仅依赖于 **H**，也就是说，下列函数依存关系成立:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}),\ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}),\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \tag{3}$$

称为物态方程 (equations of state) 或介质的本构方程 (constitutive equations). 在经典宏观电动力学范围以内，必须另行给出物态方程 (3) (假设或由实验数据确定)，于是方程组对剩下的两个独立向量 **E** 和 **H** 变成闭合的. 物态方程 (3) 的具体形式由给定介质及其状态的电磁性质确定. 一般，在物态方程 (3) 中，向量场 **D**, **J** 和 **B** 在点 **r** 和时刻 t 的值可能非线性地分别依赖于 **E** 和 **H** 在介质所有点 (非定域情形) 和根据因果性的物理原理在给定时刻 t 以前所有时间 (具有后效或记忆的介质) 的值. 实际感兴趣的大部分介质以 **D** 和 **J** 对 **E** 及 **B** 对 **H** 的定域线性依存关系为表征，在这个情况下，Maxwell 方程组结果是线性的；然而，在应用中会碰到更复杂的情况 (例如，在非线性光学中).

物态方程 (3) 原则上可借助于微观电动力学，并考虑到介质各部分的运动，它们个别的微观特征 (电荷、质量的值) 以及它们的相互作用，这样来推导出来. 宏观场 **E**、**H**, **D** 和 **B** 的值于是定义为介质中带电粒子个别运动所产生的微观场的体积平均值；对于这些宏观场，Maxwell 方程组适用.

在两个不同介质的分界面上，必须满足下列边界条件:

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1] = \mathbf{J}_S,$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2] - [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1] = 0,$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1) = \sigma,$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1) = 0,$$

其中 $\mathbf{J}_S$ 是面电流密度，σ 是面电荷密度，**n** 是垂直于分界面的单位向量，而下标 1 和 2 指界面任一侧上场的值.

Maxwell 方程组的一个推论是连续性方程 (continuity equation):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0,$$

它表达电荷守恒定律.

Maxwell 方程组在 **Lorentz 变换** (Lorentz transformation) 下是不变的. 如果在具有坐标 $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ 和 $x_4 = ict$ 的伪 Euclid 4 维时空中，引进两个反对称 4 维张量 F_{kl} 和 G_{kl} $(k, l = 1, 2, 3, 4)$，它们具有分量:

$$\left.\begin{aligned} &F_{12} = B_z,\ F_{23} = B_x,\ F_{31} = B_y,\ F_{4k} = \frac{i}{c} E_k, \\ &G_{12} = H_z,\ G_{23} = H_x,\ G_{31} = H_y,\ G_{4k} = icD_k, \\ &\qquad k = 1, 2, 3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

以及引进一个 4 维流向量 $j_k (k = 1, 2, 3, 4)$，它们的空间分量 $j_1 = j_x$, $j_2 = j_y$, $j_3 = j_z$ 与电流 **j** 的分量一致，而其第四个分量 $j_4 = ic\rho$ 正比于电荷密度，于是 Maxwell 方程组 (1) 可写成相对论性协变形式:

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x_l} = 0,\ k, l, m = 1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

和

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial G_{kl}}{\partial x_l} = j_k,\ k = 1, 2, 3, 4. \tag{6}$$

在这些方程中，$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ 是真空中光速. 方程组 (5) 是 (1b) 和 (1c) 的 4 维形式，而方程组 (6) 是 (1a) 和 (1d) 的 4 维形式.

对于真空中的电磁场，$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \equiv \mu_0 \mathbf{H}$，因而 $G_{kl} = F_{kl} / \mu_0$，其中 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ 是真空磁导率和 $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ 是真空电容率，而电磁场由正好一个张量 F_{kl} 描述. 如果引进 4 维向量电磁势 $A_k (k = 1, 2, 3, 4)$，其空间分量 $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$ 形成所谓 3 维向量势 $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$，而其第四个时间分量 $A_4 = (i/c)\varphi$ 正比于标量势 $\varphi(t, \mathbf{r})$，于是反对称电磁场张量 F_{kl} 可通过 4 维向量电磁势分量 A_k 由

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l},\ k, l = 1, 2, 3, 4 \tag{7}$$

来表达. 由于 (7)，方程组 (5) 恒等地满足，而方程组 (6) 采取下列形式:

$$\sum_{l=1}^{4} \left[\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_l^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial A_l}{\partial x_l} \right] = -\mu_0 j_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{8}$$

也就是说，它们是关于 A_k 的非齐次波动方程. 电磁势 A_k 的引进使 Maxwell 方程组可以写成简单形式 (8). 然而，势 A_k 不是唯一定义的，它反映形式 (8) 的 Maxwell 方程组相对于规范变换的不变性，势 A_k 定义中的这个不唯一性能够予以消除 (见**规范变换**

(gauge transformation)).

根据(4)和(7),物理上可观察场 **E** 和 **H** 可以通过向量势 **A** 和标量势 φ 来表达:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{A},\ \mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

当真空中电磁场无源时,Maxwell 方程组(1)和(8)变成齐次的,并且可以由此获得对电场和磁场强度的齐次波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}-\Delta\mathbf{E}=0,\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}-\Delta\mathbf{H}=0,$$

其中 Δ 是 **Laplace 算子**(Laplace operator),c 是真空中电磁波传播速率.

关于电磁场的 Maxwell 方程组仅适用于经典理论.因而,当可变电场和磁场具有很高频率和很小波长(与原子的尺度相比较)时,出现值得注意的量子效应,而电磁场及其源的理论必须建立在量子电动力学的基础上.

参考文献

[1] Maxwell, J. C., A treatise on electricity and magnetism, Clarendon Press, 1873.

[2] Тамм, И. Е., Основы теории электричества, 7 изд., М., 1957 (中译本: И. Е. 塔姆, 电学原理, 人民教育出版社, 1963).

[3] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席茨, 场论, 人民教育出版社, 1959).

[4] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1957 (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Electrodynamics of continuous media, Pergamon, 1960).

В. Д. Кукин 撰

【补注】 关于历史的概括评述,见[A3].

参考文献

[A1] Jackson, J. D., Classical electrodynamics, Wiley, 1962. (中译本: J. D. 杰克逊, 经典电动力学, 人民教育出版社, 上册 1978, 下册 1980).

[A2] Statton, J. A., Electromagnetic theory, McGraw-Hill, 1941.

[A3] Whittaker, E. T., A history of the theories of aether and electricity, 1-2, Nelson, 1951-1953.

徐锡申 译

Mayer 问题[Mayer problem; Майера задача]

关于条件极值变分法的基本问题之一(见**变分学**(variational calculus)).Mayer 问题如下:求泛函

$$J(y)=g(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)),$$

$$g:\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to R,$$

在以下型式的微分约束

$$\varphi(x,\ y,\ y')=0,\ \varphi:\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to R^m,$$

$$m<n$$

和边界条件

$$\psi(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2))=0,$$

$$\psi:\ \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p,\ p<2n+2$$

下的极小值.详情见 **Bolza 问题**(Bolza problem).

Mayer 问题是以 A. Mayer 的名字命名的,他研究了该问题解的必要条件(在 19 世纪末).

И. Б. Вапнярский 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

平均曲率[mean curvature; средняя кривизна],3 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中曲面 Φ^2 的

该曲面点 A 处**主曲率**(principal curvature)k_1 与 k_2 和之半:

$$H(A)=\frac{k_1+k_2}{2}.$$

对于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超曲面 Φ^n,此公式可推广为:

$$H(A)=\frac{k_1+\cdots+k_n}{n},$$

其中 $k_i(i=1,\ \cdots,\ n)$ 是所给超曲面在点 $A\in\Phi^n$ 处的主曲率.

$\mathbf{R}^3$ 中曲面的平均曲率可通过该曲面的第一和第二基本形式的系数表示:

$$H(A)=\frac{1}{2}\ \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},$$

其中 $E,\ F,\ G$ 是在点 $A\in\Phi^2$ 处计算的**第一基本形式**(first fundamental form)的系数,$L,\ M,\ N$ 是该点处**第二基本形式**(second fundamental form)的系数.在所给曲面由方程 $z=f(x,\ y)$ 定义的特殊情形,平均曲率可用下述公式计算:

$$H(A)=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}},$$

此公式推广到 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中由方程 $x_{n+1}=f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 定义的超曲面 Φ^n 如下:

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[1+p^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}}{(1+p^2)^{3/2}},$$

其中

$$p^2 = |\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2.$$

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 对于 n 维 Euclid 空间中余维数为 $n-m>1$ 的 m 维子流形 M，平均曲率推广为平均曲率法向量 (mean curvature normal) 概念：

$$v_p = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n-m}[\operatorname{Tr} A(e_j)]e_j,$$

其中 $e_1, \cdots, e_{n-m}$ 是 M 在 p 处的法空间（见**法空间（曲面的）**（normal space (to a surface)）的标准正交标架，$A(e_j)$: $T_p(M) \to T_p(M)$（$T_p(M)$ 为 M 在 p 处的切空间）是 M 在 p 处沿 e_j 方向的形状算子 (shape operator)，它与 M 在 p 处的第二基本张量 V 由 $\langle A(e_j)(X), Y\rangle = \langle V(X, Y), e_j\rangle$ 相联系.

参考文献

[A1] Berger, M., Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).

[A2] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976

[A3] Blaschke, W., Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.

[A4] Chen, B.-Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.

沈永欢 译

函数的均方逼近 [**mean-square approximation of a function; среднеквадратическое приближение функции**]

函数 $\varphi(t)$ 对函数 $f(t)$ 的一种逼近，逼近的误差度量 $\mu(f;\varphi)$ 由下式定义：

$$\mu_\sigma(f;\varphi)=\int_a^b[f(t)-\varphi(t)]^2 d\sigma(t),$$

其中 $\sigma(t)$ 是 $[a,b]$ 上异于常数的非减函数.

设

$$u_1(t), u_2(t), \cdots. \qquad (*)$$

是 $[a,b]$ 上关于分布 $d\sigma(t)$ 的一个**规范正交系** (orthonormal system). 当用线性组合 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k(t)$ 对函数 $f(t)$ 作均方逼近时，对每个 $n=1, 2, \cdots$，最小误差由和式

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(f)u_k(t)$$

给出，其中，$c_k(f)$ 是函数 $f(t)$ 关于函数系 $(*)$ 的 **Fourier 系数** (Fourier coefficients)；因此，最好的逼近方法是线性的.

参考文献

[1] Гончаров, В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954.（中译本：В. Л. 冈察洛夫，函数插补与逼近理论，科学出版社，1958）.

[2] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】亦见平均逼近；函数逼近；函数逼近，线性方法；最佳逼近；最佳平均逼近；最佳线性方法.

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, 1966.

[A2] Natanson, I. P., Constructive theory of functions, 1–2, F. Ungar, 1964–1965 (译自俄文).

王仁宏、檀结庆 译

可测分解 [**measurable decomposition; измеримое разбиение**]，可测分划 (measurable partition)，测度空间 (M, μ) 的

空间 M 分为互斥子集（称为分划的元素）的一分划（见**空间的分解** (decomposition of a space)）ξ，它能作为 M 上某个（数值）**可测函数** (measurable function) 的分为水平集的分划而得到. 此定义可以用分划的“内蕴”性质来改述（见 [1]）. 按照测度论中问题的一般处理方法，略去零测度集不计，可测分划往往理解为模零可测分划，亦即，模零等价于某个可测分划（测度空间 M 中的两个分划称为模零等价，如果存在零测度集 N 使由 ξ 和由 η 的元与 $M\setminus N$ 的交构成的 $M\setminus N$ 分划相合）.

尽管此定义对任何测度空间有意义，但实际上可测分划差不多总是对 **Lebesgue 空间** (Lebesgue space) 考虑的（有时考虑的空间具有后一性质到某种程度，例如，考虑具有完满测度空间；见 [2] 与 [3]；**完满测度** (perfect measure))，这是由于在这些空间中可测分划有许多“好”性质. 这样，此时便存在属于可测分划的条件测度系（或者如早期常说的 ([1])，测度的典则系）. 这是分划 ξ 的元 C 上的测度 $\mu(\cdot\mid C)$ 的系，它能使人们把关于 μ 的积分看作累次积分：首先，在 C 上且关于适当的 $\mu(\cdot\mid C)$ 进行积分，然后必须积出结果，这种手续可看作是在商空间 M/ξ 上的函数关于自然测度 μ_ξ 在该商空间上积分（据定义，M/ξ 以 ξ 的元素作为点，而其可测子集就是可测原象在自然投影 π: $M\to M/\xi$ 下的象；此测度定义为 $\mu_\xi(A)=\mu(\pi^{-1}(A))$). 若将 (M, μ) 看作概率论中基本事件的空间，可以说条件测度系是同特殊的 Lebesgue 空间密切相关的条件概率的一种“改进”；对于基本事件的任意空间、条件概率一般

不能解释为某个分划的元素上的测度.

不可测分划(与模 0 不可测分划)决不像不可测集或不可测函数那样总是"病态"对象. 例如, 将遍历动力系统的相空间分为其轨道的分划可以有完全"经典的"原点; 很简单, 它的性质与可测分划的性质不同.

参考文献

[1] Рохлин, В. А., 《Матем. сб.》, **25** (1949), 1, 107 - 150.

[2] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949(英译本: Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N., Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, 1954).

[3] Сазонов, В. В., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **26** (1962), 3, 391 - 414.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 在遍历理论中关于 Lebesgue 空间与可测分划的一个有用结果是 Рохлин-Halmos 定理 (Rokhlin-Halmos theorem). 它的强形式可叙述为: 设 $\pi=(A_1, \cdots, A_r)$ 为 Lebesgue 空间 $(M, \mathscr{A}, \mu)$ 的有限可测分划, 且 T 是此空间的**自同构**(automorphism). 那么, 对任何 $\varepsilon>0$ 与任何 $n\in\mathbf{N}$, 存在 $E\in\mathscr{A}$, 使 $E, TE, \cdots, T^{n-1}E$ 互斥, $\mu(\bigcup_{i=0}^{n-1}T^iE)>1-\varepsilon$, 且 $\mu(E\cap A_j)=\mu(E)\mu(A_j)$ $(j=1, \cdots, r)$ (弱形式结果由取平凡分划 (M) 而得).

参考文献

[A1] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinaǐ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982, Chapt. 10, § 5.

郑维行 译 沈祖和 校

可测流 [**measurable flow**; **измеримый поток**], 测度空间 (M, μ) 中的

空间 M 的自同构所成的族 $\{T^t\}$ (t 取遍实数集 $\mathbf{R}$), 满足: 1) 对一切 $t, s\in\mathbf{R}$, $x\in M$, $T^t(T^s(x))=T^{t+s}(x)$; 与 2) 映射 $M\times\mathbf{R}\to M$ 映 (x, t) 为 T^tx 是可测的(对 $M\times\mathbf{R}$ 赋予 M 中的测度与 $\mathbf{R}$ 中 Lebesgue 测度的直积测度). 这里"自同构"理解为词的严格意义(并非模 0), 亦即, T^t 必须是 $M\to M$ 将可测集映为同一测度的可测集的一一映射. 如果利用模 0 自同构, 则宜于将条件 2) 代之以不同特性的条件, 后者导致**连续流**(continuous flow)概念. 可测流在**遍历理论**(ergodic theory)中有用.

Д. В. Аносов 撰 郑维行 译 沈祖和 校

可测函数 [**measurable function**; **измеримая функция**]

1) 最初, 可测函数被理解为满足下述性质的、实变量 x 的函数 $f(x)$: 对于任意 a, 满足 $f(x)<a$ 的所有点 x 构成的集合 E_a 是 Lebesgue **可测集**(measurable set). 区间 $[x_1, x_2]$ 上的可测函数可以通过改变它在任意小测度的集合上的值而成为连续函数, 这就是所谓的可测函数的 C 性质(Н. Н. Лузин, 1913, 亦见 **Лузин C 性质**(Luzin C-property)).

2) 空间 X 上的可测函数是相对于 X 中的一可选定的可测函数系 A 来定义的. 设 A 是一个 σ 环, 则称 X 上的实值函数 f 是可测函数, 如果对于任意实数 a, 有

$$R_f\cap E_a\in A,$$

其中

$$E_a=\{x\in X: f(x)<a\},$$

$$R_f=\{x\in X: f(x)\neq 0\}.$$

这个定义等价于: 实值函数 f 是可测的, 如果对所有 **Borel 集**(Borel set) B, 有

$$R_f\cap\{x\in X: f(x)\in B\}\in A.$$

当 A 是一个 σ 代数时, 如果 E_a(或 $\{x\in X: f(x)\in B\}$) 可测, 则称 f 可测. 可测函数类在算术运算与格运算下是封闭的; 也就是说, 如果 $f_n(n=1, 2, \cdots)$ 可测, 那么 f_1+f_2, f_1f_2, $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$ 及 af(a 为实数) 均可测; $\overline{\lim} f_n$ 和 $\underline{\lim} f_n$ 也可测. 一个复值函数可测, 如果它的实部和虚部可测. 可测函数概念的一个推广是一个**可测空间**(measurable space)到另一个可测空间的**可测映射**(measurable mapping).

В. В. Сазонов 撰

参考文献

[1] Halmos, R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: R. 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1, Interscience, 1958.

[3] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976 (中译本: А. Н. 柯尔莫戈罗夫, С. В. 福明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1957).

刘建明 译 苏维宜 校

可测映射 [**measurable mapping**; **измеримое отображение**]

可测空间(measurable space) $(X_1, \mathscr{A}_1)$ 到可测空间 $(X_2, \mathscr{A}_2)$ 的映射 f, 使对一切 $A\in\mathscr{A}_2$,

$$f^{-1}(A)=\{x: f(x)\in A\}\in\mathscr{A}_1.$$

在 $\mathscr{A}_1$ 是一个 σ 代数且 $(X_2, \mathscr{A}_2)$ 是具有 **Borel 集**(Borel set)的 σ 代数 $\mathscr{A}_2$ 的实直线情形下, 可测映射概念就化为**可测函数**(measurable function)(然而, 当 $\mathscr{A}_1$ 仅为一个 σ 环时, 可测函数的定义通常要按积

分理论的需要来修正). 若 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 都是环，并且对 $\mathscr{A}_2$ 的某一子类中的每个集 B，这里此子类生成的环为整个 $\mathscr{A}_2$，有 $f^{-1}(B)\in\mathscr{A}_1$，则 f 是可测的. 类似的论断在 σ 环、代数与 σ 代数的情形成立. 若 $(X_1, \mathscr{A}_1)$ 与 $(X_2, \mathscr{A}_2)$ 是具有 Borel 集的 σ 代数的拓扑空间，则每个从 X_1 到 X_2 的连续映射都是可测的. 设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{A}$ 是 Borel 集的 σ 代数且 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个有限非负的正则测度 (regular measure) (正则性意为 $\mu(A)=\{\mu(F): F\subset A, F$ 是闭集$\}$). 此外，设 Y 是一个可分度量空间，$\mathscr{B}$ 是 Borel 集的 σ 代数且 f 是从 $(X, \mathscr{A})$ 到 $(Y, \mathscr{B})$ 的一个可测映射，则对任何 $\varepsilon>0$，存在一个闭子集 $F\subset X$，使 $\mu(X\setminus F)<\varepsilon$ 且 f 在 F 上连续 (Лузин 定理 (Luzin theorem)).

参考文献

[1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958).

[2] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probabilities, Holden-Day, 1965 (译自法文).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8 (译自法文).

[4] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

В. В. Сазонов 撰 束立生 译 苏维宜 校

可测集 [**measurable set**; **измеримое множество**]

可测空间 (measurable space) $(X, \mathscr{A})$ 中属于 $\mathscr{A}$ 的子集，这里 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集所成的环或 σ 环. 这个概念是在解决与推广各种集的面积 (长度、体积) 的测量问题过程中产生与发展起来的. 就是说，如何将多边形 (线段、多面体) 的面积 (长度、体积) 作为可加函数扩张到更广的集系上的问题. 可测集被定义为集系中的一个集合，使上述扩张能够实现; 这种扩张称为测度. 因此，**Jordan 测度** (Jordan measure)、**Borel 测度** (Borel measure) 与 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure) 相继被定义出来，他们分别与 Jordan、Borel 与 Lebesgue 可测集相对应. 去解将 $\mathbf{R}^n$ 中任何固定测度的扩张问题便导致 **Radon 测度** (Radon measure) (Lebesgue-Stieltjes 测度) 以及关于 Radon(Lebesgue-Stieltjes) 测度的可测集. 与定义在一个抽象集上的测度有关的可测集是指所述测度已经有定义的集.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976 (中译本: A. H. 柯尔莫戈洛夫，C. B. 福明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957).

[2] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958).

А. П. Терехин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

束立生 译 苏维宜 校

可测空间 [**measurable space**; **измеримое пространство**]

一个具有由 X 的子集所成的特定环或 σ 环 $\mathscr{A}$ (特别地，代数或 σ 代数) 的集 X.

例如: 具有由 Jordan 可测集所成的环的 $\mathbf{R}^n$ (见 **Jordan 测度** (Jordan measure)); 具有由有限 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure) 的集所成的 σ 环的 $\mathbf{R}^n$; 具有由 Borel 集 (见 **Borel 集** (Borel set)) 所成的 σ 代数的拓扑空间 E.

参考文献

[1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: P. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958).

В. В. Сазонов 撰 郑世骏 译 苏维宜 校

测度 [**measure**; **мера**], 集合的测度 (measure of a set)

线段长度、图形面积和立体体积概念的一种推广，并直观地对应于带有质量分布的空间的集合的质量. 集合的测度概念产生于实变量函数论，它与**积分** (integral) 概念的研究与改进有关.

定义与一般性质. 设 X 为一个集合，$\mathscr{E}$ 为 X 的一个子集类. 定义在 $\mathscr{E}$ 上的非负 (不必有限) 集函数 λ 称为加性的 (additive)，有限加性的 (finitely additive) 或可数加性的 (countably additive)，如果对于 $E_i\in\mathscr{E}$, $\bigcup_{i=1}^n E_i\in\mathscr{E}$, $E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)$，等式

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda(E_i)$$

成立，这里 n 分别取 2，任意有限自然数且 $n\leqslant\infty$.

X 的一个子集族 $\mathscr{S}$ 称为集半环 (semi-ring of sets)，如果

1) $\phi\in\mathscr{S}$;

2) $E_1, E_2\in\mathscr{S}$ 蕴含 $E_1\cap E_2\in\mathscr{S}$;

3) $E, E_1\in\mathscr{S}$, $E_1\subset E$ 蕴含 E 可以表示为

$$E=\bigcup_{i=1}^n E_i,\ E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j),\ E_i\in\mathscr{S}$$

$$(i=1, \cdots, n, n<\infty).$$

X 的一个子集族 $\mathscr{R}$ 称为集环 (ring of sets)，如果

1) $\phi\in\mathscr{R}$;

2) $E_1, E_2\in\mathscr{R}$ 蕴含 $E_1\cup E_2\in\mathscr{R}$, $E_1\setminus E_2\in\mathscr{R}$.

半环的一个例子是: $X=\mathbf{R}^k$, $\mathscr{S}$ 为一切形如

$\{x=(x_1, \cdots, x_k)\in\mathbf{R}^k: a_i\leqslant x_i<b_i, i=1, \cdots, k\}$ 的区间族，这里 $a_i, b_i\in\mathbf{R}(i=1, \cdots, k)$. 这些区间的一切可能的有限并构成一个环.

X 的子集族 $\mathscr{S}$ 称为 σ 环 (σ-ring)，如果

1) $\phi\in\mathscr{S}$；

2) $E_1, E_2\in\mathscr{S}$ 蕴含 $E_1\setminus E_2\in\mathscr{S}$；

3) $E_i\in\mathscr{S}(i=1, 2, \cdots)$，蕴含 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{S}$.

每个 σ 环均为环；每个环均为半环.

有限加性测度 (finitely-additive measure) 为满足 $m(\phi)=0$ 的非负有限加性集函数 m. 有限加性测度的定义域 $\mathscr{E}_m$ 可能是半环、环或 σ 环. 在环或 σ 环上的有限加性测度的定义中，有限加性条件可减弱为加性，它导致同一概念.

若 m 为有限加性测度，集合 $E, E_1, \cdots, E_n$ 属于它的定义域，并且 $E\subset\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，则

$$m(E)\leqslant\sum_{i=1}^{n}m(E_i).$$

设 m_1 为以 $\mathscr{E}_{m_1}$ 为定义域的有限加性测度. 以 $\mathscr{E}_{m_2}$ 为定义域的有限加性测度 m_2 称为 m_1 的扩张 (extension)，如果 $\mathscr{E}_{m_1}\subset\mathscr{E}_{m_2}$ 且对一切 $E\in\mathscr{E}_{m_1}$ 有 $m_2(E)=m_1(E)$.

每个定义于半环 $\mathscr{S}$ 上的有限加性测度 m 具有到含 $\mathscr{S}$ 的最小环 $\mathscr{R}(\mathscr{S})$ 上的有限加性测度 m' 的唯一扩张. 此扩张定义如下：每个 $E\in\mathscr{R}(\mathscr{S})$ 可表示为 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, $E_i\in\mathscr{S}$, $E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$，从而令

$$m'(E)=\sum_{i=1}^{n}m(E_i).$$

具有可数加性的有限加性测度称为测度 (measure). 测度的一些例子：设 X 为任意非空集合，$\mathscr{E}_\mu$ 为由 X 的子集生成的 σ 环、环或半环，$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为 X 的一个可数子集，而 $p_1, p_2, \cdots$ 为一些非负数，则函数

$$\mu(E)=\sum_n p_n\delta_{x_n}(E)$$

为在 $\mathscr{E}_\mu$ 上定义的测度，这里 $\delta_x(E)=1$，若 $x\in E$；$\delta_x(E)=0$，若 $x\notin E$. 测度 δ_x 为基本测度 (elementary measures)，退化测度 (degenerate measures) 或 Dirac 测度 (Dirac measures) (有时称 Dirac 质量 (Dirac masses)). 并不是每个有限加性测度都是测度. 例如，若 X 为区间 $[0, 1]$ 的有理点集，$\mathscr{S}$ 是 $[0, 1]$ 的子区间与 X 的一切可能的交构成的半环，且对每个 a, b，$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$,

$$\begin{aligned}m((a, b)\cap X)&=m([a, b)\cap X)\\&=m((a, b]\cap X)\\&=m([a, b]\cap X)\\&=b-a,\end{aligned}$$

那么 m 在 $\mathscr{S}$ 上是有限加性的，但不是可数加性的.

以 $\mathscr{E}_m$ 为定义域的 (有限加性) 测度称为有限的 (finite) (相应地，σ 有限的 (σ-finite))，如果对一切 $E\in\mathscr{E}_m$ 有 $m(E)<\infty$ (相应地，若对每个 $E\in\mathscr{E}_m$，有 $\mathscr{E}_m$ 中序列 $\{E_i\}$，使 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 与 $m(E_i)<\infty$ $(i=1, 2, \cdots)$). (有限加性) 测度 m 称为全有限的 (totally finite) (全 σ 有限的 (totally σ-finite))，如果它是有限的 (相应地，σ 有限的) 且 $X\in\mathscr{E}_m$.

一个对 $(X, \mathscr{S})$ 称为**可测空间** (measurable space)，其中 X 为一集合，$\mathscr{S}$ 为 X 的子集的 σ 环，满足 $\bigcup_{E\in\mathscr{S}}E=X$. 三元组 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 称为**测度空间** (measure space)，其中 $(X, \mathscr{S})$ 为可测空间，μ 为 $\mathscr{S}$ 上的测度. 具有全有限测度 μ 且用条件 $\mu(X)=1$ 正规化的空间 X 称为**概率空间** (probability space). 在抽象测度论中，其基本概念是可测空间 $(X, \mathscr{S})$ 或测度空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$，$\mathscr{S}$ 的元素也被看作可测集 (measurable set).

测度空间的性质. 设 $\{E_i\}$ 为可测集的任意序列，那么

1) $\mu(\liminf_{i\to\infty}E_i)\leqslant\liminf_{i\to\infty}\mu(E_i)$；

2) 若对某个 i_0, $\mu(\bigcup_{i=i_0}^{\infty}E_i)<\infty$，则

$$\mu(\limsup_{i\to\infty}E_i)\geqslant\limsup_{i\to\infty}\mu(E_i);$$

3) 若 $\lim_{i\to\infty}E_i$ 存在且 2) 中条件满足，则

$$\mu(\lim_{i\to\infty}E_i)=\lim_{i\to\infty}\mu(E_i).$$

环 $\mathscr{R}$ 上定义的有限可加测度 m 为测度，当且仅当对 $\mathscr{R}$ 中满足 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$ 的每个单调增加元列 $\{E_i\}$ 有 $m(\lim_{i\to\infty}E_i)=\lim_{i\to\infty}m(E_i)$.

设 $(X_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ 为测度空间，$(X_2, \mathscr{S}_2)$ 为可测空间并设 T 为由 X_1 到 X_2 的可测映射 (measurable mapping)，即对一切 $E\in\mathscr{S}_2$, $T^{-1}(E)=\{x\in X_1: Tx\in E\}\in\mathscr{S}_1$. 由映射 T 生成的测度 (用 μT^{-1} 表示) 为 $\mathscr{S}_2$ 上由 $\mu T^{-1}(E)=\mu(T^{-1}(E))$ 定义的测度. 设 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 为测度空间，并设 $X_1\subset X$. 对 σ 环 $\mathscr{S}\cap X_1=\{E\cap X_1: E\in\mathscr{S}_1\}$ 中的集合 E 上定义 μ_{X_1},

$$\mu_{X_1}(E)=\inf_{E\subset F\in\mathscr{S}}\mu(F),$$

则 $(X_1, \mathscr{S}\cap X_1, \mu_{X_1})$ 为测度空间；μ_{X_1} 称为测度 μ 在 X_1 上的限制 (restriction).

空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ (或测度 μ) 的原子 (atom) 指的是满足下列条件的任意正测度集 E：若 $F\subset E$, $F\in\mathscr{S}$，则或者 $\mu(F)=0$，或者 $\mu(F)=\mu(E)$. 不含原子的测度空间称为非原子的 (non-atomic) 或连续的 (continuous) (此时也称 μ 是非原子或连续的). 若 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 为具有非原子 σ 有限测度的空间且

$E_1 \in \mathscr{S}$，则对满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant \mu(E_1)$ 的每个 α（可能 $\alpha = \infty$），有元素 $E_2 \in \mathscr{S}$ 使 $E_2 \subset E_1$ 且 $\mu(E_2) = \alpha$.

测度空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$（或测度 μ）称为完全的（complete），如果 $E \in \mathscr{S}$、$F \subset E$，$\mu(E) = 0$ 蕴含 $F \in \mathscr{S}$. 每个测度空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 可用下述方法完全化：对 $\mathscr{S}$ 添加形如 $E \cup N$ 的集合，其中 $E \in \mathscr{S}$，$N \subset N'$、$N' \in \mathscr{S}$、且 $\mu(N') = 0$，并且对这些集合令 $\overline{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$. 这种形式的集合的类构成一个 σ 环，且 $\overline{\mu}$ 是其上的完全测度. 测度为零的集合称为零集（null set）. 如果性质 Q 仅在 X 的一零集上不满足，则称性质 Q 在 X 上**几乎处处**（almost-everywhere）成立.

测度的扩张. 测度 μ_2 称为测度 μ_1 的扩张，如果 μ_2 是 μ_1 在有限可加测度（见上）中的扩张. 定义在半环 $\mathscr{S}$ 上的每个测度可唯一扩张成为由 $\mathscr{S}$ 生成的环 $\mathscr{R}(\mathscr{S})$ 上的测度（此扩张可依有限可加测度情形的同样方法实现）. 进而，定义在环 $\mathscr{R}$ 上的每个测度 μ 可以扩张为由 $\mathscr{R}$ 生成的 σ 环 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的测度 μ'；若 μ 为 σ 有限的，则 μ' 是唯一且 σ 有限的. μ' 在任何集合 $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的值可由公式

$$\mu'(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathscr{R}, i = 1, 2, \cdots, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} \qquad (*)$$

给出.

X 的子集类称为遗传的（hereditary），如果它包含类中的任一集合时，它就包含这个集合的一切子集. **外测度**（outer measure）是定义在可传 σ 环 $\mathscr{H}$（亦即既是可传的又是 σ 环的集类）上的集函数 m^*，它有下列性质：

1) $0 \leqslant m^*(E) \leqslant \infty$，$m^*(\phi) = 0$；

2) $E \subset F$ 蕴含 $m^*(E) \leqslant m^*(F)$；

3) $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$.

对于环 $\mathscr{R}$ 上给定的测度 μ，可用公式

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathscr{R}, i = 1, 2, \cdots, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}$$

来构造由 $\mathscr{R}$ 生成的可传 σ 环 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$（$\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 由可被 $\mathscr{R}$ 中元的可数并覆盖的集合组成）上的外测度 μ^*. 外测度 μ^* 称为由测度 μ 导出的外测度（outer measure）.

设 m^* 为 X 的子集所成的遗传 σ 环 $\mathscr{H}$ 上的外测度. 集合 $E \in \mathscr{H}$ 称为 m^* 可测的（m^*-measurable），如果对每个 $A \in \mathscr{H}$ 有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (X \setminus E)).$$

由 m^* 可测的集合构成的族 $\overline{\mathscr{S}}$ 是 σ 环，它包含一切外测度为零的集合. 由等式 $\overline{m}(E) = m^*(E)$ 定义的 $\overline{\mathscr{S}}$ 上的集函数 $\overline{m}$ 是完全测度并称为由外测度 m^* 导出的测度.

设 μ 为环 $\mathscr{R}$ 上的测度且 μ^* 为由 μ 导出的 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的外测度. 设 $\overline{\mathscr{S}}$ 与 $\overline{\mu}$ 分别表示 μ^* 可测集族与由 μ^* 导出的 $\overline{\mathscr{S}}$ 上的测度. 那么，$\overline{\mu}$ 是 μ 的扩张，并且由于 $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \overline{\mathscr{S}}$，可知由公式（$*$）给出的 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的函数 μ' 也是测度 μ 的扩张. 若 $\mathscr{R}$ 上原来的测度 μ 是 σ 有限的，则空间 $(X, \overline{\mathscr{S}}, \overline{\mu})$ 是空间 $(X, \mathscr{S}(\mathscr{R}), \mu')$ 的完全化（见（$*$））. 若 μ 为 σ 环 $\mathscr{S}$ 上给定的，则由 $\mathscr{S}$ 生成的可传 σ 环 $\mathscr{H}(\mathscr{S})$ 上的导出外测度 μ^* 由公式

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) : E \subset F, F \in \mathscr{S}\}$$

给出.

与外测度一起，可定义 $\mathscr{S}$ 上由测度 μ 导出的内测度（inner measure）如下：

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : E \supset F, F \in \mathscr{S}\}, E \in \mathscr{H}(\mathscr{S}).$$

对每个集合 $E \in \mathscr{H}(\mathscr{S})$，可测核（measurable kernel）$E'$ 与可测包（measurable envelope）E'' 定义为 $\mathscr{S}$ 的元素，使 $E' \subset E \subset E''$ 且对满足 $F' \subset E \setminus E'$，$F'' \subset E'' \setminus E$ 的一切 F'，$F'' \in \mathscr{S}$ 有 $\mu(F') = \mu(F'') = 0$. 可测核总是存在的，但可测包只当 E 有 σ 有限外测度时存在；此外，有 $\mu_*(E) = \mu(E')$，$\mu^*(E) = \mu(E'')$. 设 μ 为环 $\mathscr{R}$ 上的测度，并设 μ' 为它到由 $\mathscr{R}$ 生成的 σ 环 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的扩张. 具有有限 μ 测度的子集 E 上的内测度 μ'_* 可用外测度 μ^*（从而用 μ）表示为：

$$\mu'_*(A) = \mu(E) - \mu^*(E \setminus A), A \subset E.$$

进而，属于可传 σ 环 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 具有有限外 μ^* 测度的集合 F 是 μ^* 可测的，当且仅当 $\mu^*(F) = \mu'_*(F)$. 在 $\mathscr{R}$ 上原来的测度 μ 为全有限情形下，关于集合 $E \subset X$ 的 μ^* 可测性的充要条件是：

$$\mu(X) = \mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E).$$

对 $\mathscr{R}$ 上全有限测度，此条件往往取为集合 E 的 μ^* 可测性的定义.

若 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 为具有 σ 有限测度的空间而 $X_1, \cdots, X_n$ 为由 $\mathscr{S}$ 生成的可传 σ 环 $\mathscr{H}(\mathscr{S})$ 中元素的有限族，则在由 $\mathscr{S}$ 生成的 σ 环 $\widetilde{\mathscr{S}}$ 与集合 $X_1, \cdots, X_n$ 上，可以定义测度 $\widetilde{\mu}$，它与 $\mathscr{S}$ 上的测度 μ 相合.

Jordan 测度，Lebesgue 测度与 Lebesgue-Stieltjes 测度. 由 $\mathbf{R}^k$ 中 Lebesgue 测度给出测度的扩张的一个范例. 形如

$$I = \{(x_1, \cdots, x_k) : a_i \leqslant x_i < b_i, i = 1, \cdots, k\}$$

的区间构成 $\mathbf{R}^k$ 中的半环 $\mathscr{S}$. 对每个这样的区间，令

$$\lambda(I)=\prod_{i=1}^{k}(b_i-a_i)$$

($\lambda(I)$ 与 I 的体积相一致)．函数 λ 在 $\mathscr{P}$ 上是 σ 有限的与可数加性的，并有到由 $\mathscr{P}$ 生成的 σ 环 $\mathscr{S}$ 上的唯一扩张测度 λ'；$\mathscr{S}$ 与 $\mathbf{R}^k$ 中 **Borel 集** (Borel set) (或 Borel 可测集)的 σ 环恒同．测度 λ' 首先为 E. Borel 于 1898 年定义(见 **Borel 测度** (Borel measure))．λ' 的完全化 $\bar{\lambda}$(定义于 $\bar{\mathscr{S}}$ 上)称为 Lebesgue 测度(Lebesgue measure)，且为 H. Lebesgue 于 1902 年引进(见 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure))．$\bar{\lambda}$ 的定义域中的集合称为 Lebesgue 可测的(Lebesgue measurable)．有界集 $E\subset\mathbf{R}^k$ 属于 $\bar{\mathscr{S}}$，当且仅当 $\lambda(I)=\lambda^*(E)+\lambda^*(I\setminus E)$，其中 $I\in\mathscr{P}$ 是包含 E 的某个区间；此时 $\bar{\lambda}(E)=\lambda^*(E)$．集合 $E\subset\mathbf{R}^k$ 属于 $\bar{\mathscr{S}}$，当且仅当对某个序列 $\{r_n\}$ $(r_n>0,\ n=1,2,\cdots)$ 满足 $r_n\to\infty$，对一切 n 恒有 $E\cap B_{r_n}\in\bar{\mathscr{S}}$，其中 $B_r=\{x\in\mathbf{R}^k:\ \|x\|\leqslant r\}$．$\mathbf{R}^k$ 中一切 Borel 集的族的势为 $\mathfrak{c}$ (连续统的势)，而一切 Lebesgue 可测集的族的势为 $2^{\mathfrak{c}}$，因此包括式 $\mathscr{S}\subset\bar{\mathscr{S}}$ 是严格的，亦即存在非 Borel 可测的 Lebesgue 可测集．

Lebesgue 测度 $\bar{\lambda}$ 关于 $\mathbf{R}^k$ 中的线性直交变换 A 以及由元 $x\in\mathbf{R}^k$ 所生平移变换是不变的，亦即对一切 $E\in\mathscr{S}$ 有 $\bar{\lambda}(AE+x)=\bar{\lambda}(E)$．

利用**选择公理** (axiom of choice) 可以证明，存在非 Lebesgue 可测集．例如在直线上这样的集合可以由有理数加法子群在 $\mathbf{R}$ 中的每个陪集中取一点而得到(Vitali 例(Vitali example))．

历史上 $\mathbf{R}^k$ 中 Borel 与 Lebesgue 测度的产生要迟于 C. Jordan 在 1892 年定义的测度(见 **Jordan 测度** (Jordan measure))．Jordan 测度定义的概念很接近于起源于古希腊的面积与体积的经典定义．这样，集合 $E\subset\mathbf{R}^k$ 称为 Jordan 可测的(Jordan measurable)，如果存在两个可表成有限个互斥矩形的并的集合，其中之一含于 E 而另一包含 E，使它们的体积(用明显的方式定义)之差为任意小．这样集合的 Jordan 测度(Jordan measure)是覆盖 E 的矩形集的有限并的体积的下确界．Jordan 可测集也是 Lebesgue 可测的，并且它的 Jordan 测度与 Lebesgue 测度相等．Jordan 测度的定义域只是一个环而不是 σ 环，这就大大限制了它的应用范围．

Lebesgue 测度是更一般的 Lebesgue-Stieltjes 测度的一个特殊情形．后者是利用 $\mathbf{R}^k$ 上具有下列性质的实值函数 F 来定义的：

1) $-\infty<F<\infty$；

2) 对 $a_i<b_i\ (i=1,\cdots,k)$，$\Delta_{b_1-a_1}\cdots\Delta_{b_k-a_k}F(a_1,\cdots,a_k)\geqslant 0$，这里 $\Delta_{b_i-a_i}$ 是在点 a_i 关于第 i 坐标步长为 b_i-a_i 的差分算子；

3) 当 $a_i\uparrow b_i$，$F(a_1,\cdots,a_k)\uparrow F(b_1,\cdots,b_k)\ (i=1,\cdots,k)$．

给出这样的函数 F，区间

$$I=\{(x_1,\cdots,x_k):\ a_i\leqslant x_i<b_i,\ i=1,\cdots,k\}$$

的测度 μ_F 用公式

$$\mu_F(I)=\Delta_{b_1-a_1}\cdots\Delta_{b_k-a_k}F(a_1,\cdots,a_k)$$

定义．这样，μ_F 在这类区间所成的半环上是可数加性的且有到 Borel 集的 σ 代数上的扩张；此扩张的完全化便产生所谓对应于 F 的 Lebesgue-Stieltjes 测度 (Lebesgue-Stieltjes measure)．特别选择 $F(x_1,\cdots,x_k)=x_1\cdots x_k$，便得到 Lebesgue 测度．

积空间的测度．据定义，两可测空间 $(X_1,\mathscr{S}_1)$，$(X_2,\mathscr{S}_2)$ 的积是指这样的可测空间 $(X_1\times X_2,\ \mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2)$，其中 $X_1\times X_2=\{(x_1,x_2):\ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\}$ (X_1 与 X_2 的积)，且 $\mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2$ 为由形如 $E_1\times E_2=\{(x_1,x_2):\ x_1\in E_1,\ x_2\in E_2\}$ $(E_1,E_2\in\mathscr{S})$ 的集合的半环 $\mathscr{P}$ 生成的 X 的子集的 σ 环(σ 环 $\mathscr{S}_1$ 与 $\mathscr{S}_2$ 的积)．若 $(X_1,\mathscr{S}_1,\mu_1)$ 与 $(X_2,\mathscr{S}_2,\mu_2)$ 为测度空间，则公式

$$\mu(E_1\times E_2)=\mu_1(E_1)\mu_2(E_2),\ E_1\in\mathscr{S}_1,\ E_2\in\mathscr{S}_2$$

定义了 $\mathscr{P}$ 上的测度；若 μ_1 与 μ_2 均为 σ 有限的，μ 可唯一扩张为 $\mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2$ 上的测度，记成 $\mu_1\times\mu_2$．测度 $\mu_1\times\mu_2$ 与空间 $(X_1\times X_2,\ \mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2,\ \mu_1\times\mu_2)$ 分别称为测度 μ_1 与 μ_2 的积(product of measures)与测度空间 $(X_1,\mathscr{S}_1,\mu_1)$ 与 $(X_2,\mathscr{S}_2,\mu_2)$ 的积(product of measure spaces)．$\mathbf{R}^k$ 中 Lebesgue 测度与 $\mathbf{R}^l$ 中 Lebesgue 测度的积的完全化为 $\mathbf{R}^{k+l}$ 中 Lebesgue 测度．类似地可定义任意有限个测度空间的积．

设 $(X_i,\mathscr{S}_i,\mu_i)$ $(i\in I)$ 为满足 $\mu_i(X_i)=1$ $(i\in I)$ 的测度空间的任意族．据定义积空间(product space) $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是 I 上一切函数的集合，满足：对每个 $i\in I$，这种函数在 i 的值为元素 $x_i\in X_i$．X 中的可测矩形(measurable rectangle)是形如 $\prod_{i\in I}E_i$ 的任意集合，这里 $E_i\in\mathscr{S}_i$ 且仅有有限个集合 E_i 与 X_i 不同．可测矩形的族构成半环 $\mathscr{P}$．由 $\mathscr{P}$ 产生的 σ 环记成 $\prod_{i\in I}\mathscr{S}_i$ 并称为 σ 环 $\mathscr{S}_i$ 的积．现在令 μ 为 $\mathscr{P}$ 上对 $E=\prod_{i\in I}E_i$，由 $\mu(E)=\prod_{i\in I}\mu_i(E_i)$ 定义的函数．如此定义的函数 μ 是测度，它有到 $\prod_{i\in I}\mathscr{S}_i$ 上的唯一扩张测度，记为 $\prod_{i\in I}\mu_i$．测度空间 $(\prod_{i\in I}X_i,\ \prod_{i\in I}\mathscr{S}_i,\ \prod_{i\in I}\mu_i)$ 称为空间 $(X_i,\mathscr{S}_i,\mu_i)$ $(i\in I)$ 的积．

任意多个测度空间的积是下述更一般格式的特例，它在概率论中起重要作用．设 $(X_i,\mathscr{S}_i)$ $(i\in I)$ 为可测空间族(每个 $\mathscr{S}_i$ 为 σ 代数)，并设对每个有限子集 $I_1\subset I$ 给定可测空间 $(\prod_{i\in I_1}X_i,\ \prod_{i\in I_1}\mathscr{S}_i)$

(对应于 $\mu_{I_1}=\prod_{i\in I_1}\mu_i$，对一切有限的 $I_1\subset I$) 上的概率测度 μ_{I_1}. 再设每两个测度 μ_{I_1}, μ_{I_2} 依下述意义是相容的 (compatible)，即若 $I_1\subset I_2$ 且 p_{21} 表示 $\prod_{i\in I_2}X_i$ 到 $\prod_{i\in I_1}X_i$ 上的投影，则对一切 $E\in\prod_{i\in I_1}\mathscr{S}_i$ 有 $\mu_{I_1}(E)=\mu_{I_2}p_{21}^{-1}(E)$ (据定义，p_{21} 为 $\prod_{i\in I_2}X_i$ 到 $\prod_{i\in I_1}X_i$ 上的映射，使对一切 $i\in I_1$ 有 $(p_{21}(x))_i=x_i$). 下述问题便产生了：是否有 $\prod_{i\in I}\mathscr{S}_i$ 上的概率测度，使对每个有限的 $I_1\subset I$ 与每个 $E\in\prod_{i\in I_1}\mathscr{S}_i$ 有 $\mu_{I_1}(E)=\mu p^{-1}(E)$ (这里 p 表示 $\prod_{i\in I}X_i$ 到 $\prod_{i\in I_1}X_i$ 上的投影)? 原来这样的测度不总是存在，为保证其存在性必须附加条件. 这样的一个条件是测度 μ_i (对应于一点的集合 $i\in I$) 的完满性 (perfectness). **完满测度** (perfect measure) 概念首先为 Б. В. Гнеденко 与 А. Н. Колмогоров ([6]) 引进. 具有全有限测度的空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 以及测度 μ 本身称为完满的 (perfect)，如果对 X 上每个 $\mathscr{S}$ 可测实值函数 f，有 Borel 集 $B\subset f(X)$，使 $\mu(f^{-1}(B))=\mu(X)$. 完满性假设消除了在一般测度论中发生的一系列"病态"现象.

拓扑空间中的测度. 拓扑空间中测度的研究，通常是讨论关于所论空间的拓扑依某种方法为连通的集合上定义的测度. 一个典型的方法如下. 设 X 为任意拓扑空间，并设 $\mathscr{Z}$ 为形如 $f^{-1}(F)$ 的子集的类，这里 f 为 X 上连续实值函数且 $F\subset\mathbf{R}^1$ 为闭集. 设 $\mathfrak{A}$ 为由类 $\mathscr{Z}$ 生成的代数且 $\mathscr{B}$ 为由 $\mathscr{Z}$ 生成的 σ 代数 ($\mathscr{B}$ 称为 Baire 集的 σ 代数 (σ-algebra of Baire sets，亦见**集代数** (algebra of sets)). 现在设 $\mathscr{M}$ 为 $\mathfrak{A}$ 上全有限且有限可加测度 m 的类，且在下述意义下为正则的：对一切 $E\in\mathfrak{A}$, $m(E)=\sup\{m(Z): Z\subset E, Z\in\mathscr{Z}\}$. 在 $\mathscr{M}$ 中要区别三个对 (有限可加) 测度附加一定的光滑性形成的子类 $\mathscr{M}_\sigma$, $\mathscr{M}_\tau$ 与 $\mathscr{M}_t$. 据定义，$\mu\in\mathscr{M}_\sigma$，如果对每个序列 $Z_n\downarrow\varnothing$, $Z_n\in\mathscr{Z}$ 有 $\mu(Z_n)\downarrow 0$ (此性质等价于 μ 的可数加性；$\mathscr{M}_\sigma$ 上的测度有到 $\mathscr{B}$ 上的唯一扩张，因此总假定它们在 $\mathscr{B}$ 上定义)；$\mu\in\mathscr{M}_\tau$，是指对每个格网 $Z_\alpha\downarrow\varnothing$, $Z_\alpha\in\mathscr{Z}$ 有 $\mu(Z_\alpha)\downarrow 0$；并且 $\mu\in\mathscr{M}_t$，是指对每个 $\varepsilon>0$，存在紧集 K，使当 $E\subset X\backslash K$, $E\in\mathfrak{A}$ 时有 $\mu(E)<\varepsilon$.

包含式 $\mathscr{M}\supset\mathscr{M}_\sigma\supset\mathscr{M}_\tau\supset\mathscr{M}_t$ 成立. $\mathscr{M}_\sigma$ 中的元素称为 Baire 测度 (Baire measure).

在 $\mathscr{M}$ 中的测度与 X 上有界连续函数空间 $C(X)$ 上的线性泛函之间有密切联系. 也就是说，公式

$$\Lambda(f)=\int_X f\,dm$$

建立了有限加性测度 $m\in\mathscr{M}$ 与 $C(X)$ 上非负线性泛函之间的一一对应 (非负意为对 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in X)$, $\Lambda(f)\geqslant 0$ 成立). 此外，对每个集合 $Z\in\mathscr{Z}$,

$$m(Z)=\inf\{\Lambda(f):\chi_Z\leqslant f\leqslant 1\},$$

其中 χ_Z 为 Z 的指示函数. 这种对应将 $\mathscr{M}_\sigma$ 中测度映到 σ 光滑泛函 (σ-smooth functionals) Λ (亦即具有下述性质的泛函：对 $C(X)$ 中 $f_n\downarrow 0$ 有 $\Lambda(f_n)\to 0$)，将 $\mathscr{M}_\tau$ 中测度映到 τ 光滑泛函 (τ-smooth functionals) (亦即具有下述性质的泛函：对 $C(X)$ 中每个格网 $f_\alpha\downarrow 0$ 有 $\Lambda(f_\alpha)\to 0$)，并且将 $\mathscr{M}_t$ 中测度映到稠密泛函 (dense functionals) (亦即具有下述性质的泛函：在 $C(X)$ 中对一切 α 满足 $\|f_\alpha\|\leqslant 1$ 且在紧集上一致有 $f_\alpha\to 0$ 的每个格网 f_α 有 $\Lambda(f_\alpha)\to 0$；这里 $\|\cdot\|$ 表示一致范).

空间 $\mathscr{M}$ 常赋予弱拓扑 w，其中邻域基由形如

$$U(m_0;f_1,\cdots,f_n,\varepsilon)=\{m:|\int_X f_k(dm-dm_0)|<\varepsilon,$$
$$k=1,\cdots,n,f_1,\cdots,f_n\in C(X)\}$$

的集合构成. 关于此拓扑 w，$\mathscr{M}$ 是全正则 Hausdorff 空间. 依拓扑 w 的收敛性常用记号 $\Rightarrow$ 表示. 关于格网 m_α 对 m 的收敛性：$m_\alpha\Rightarrow m$，充要条件为 $m_\alpha(X)\to m(X)$ 与对一切 $Z\in\mathscr{Z}$ 有 $\limsup m_\alpha(Z)\leqslant m(Z)$. 关于 $m_\alpha\Rightarrow m$ 的另一充要条件为：对一切这样的 $E\in\mathfrak{A}$ 使存在 $Z_1,Z_2\in\mathscr{Z}$, $X\backslash E\subset Z_1$, $E\subset Z_2$ 而 $m(Z_1\cap Z_2)=0$，有 $m_\alpha(E)\to m(E)$. 若空间 X 为全正则的和 Hausdorff 的，则 $\mathscr{M}_\tau$ 可度量化，当且仅当 X 可度量化. 若 X 可度量化，则 $\mathscr{M}_\tau$ 有一度量使 $\mathscr{M}_\tau$ 可分，当且仅当 X 可分，并且 $\mathscr{M}_\tau$ 有一度量使它是完全的，当且仅当 X 有同样性质. 若 X 可度量化，则 $\mathscr{M}_\sigma$ 可度量化，当且仅当它可用 **Lévy-Прохоров 度量** (Lévy-Prokhorov metric) 度量化.

空间 $\mathscr{M}_\sigma$ 在 $\mathscr{M}$ 中为序列闭的 (Александров 定理 (Aleksandrov theorem)). 集合 $A\subset\mathscr{M}$ 称为紧密的 (tight)，如果 $\sup\{m(X): m\in A\}<\infty$ 且对每个 $\varepsilon>0$ 有紧集 K，使对一切 $E\subset X\backslash K$, $m\in A$, $E\in\mathfrak{A}$ 有 $m(E)<\varepsilon$. 若 $A\subset\mathscr{M}_\sigma$ 为紧密的，则 A 在 $\mathscr{M}_\sigma$ 中为相对紧的；反之，若 X 可度量化且是拓扑完全的，则 $A\subset\mathscr{M}_\sigma$ 为相对紧的；此外，若 A 中每个测度集中于 X 中某个可分子集上，则 A 是紧密的 (Прохоров 定理 (Prokhorov theorem)).

在一定条件下，$\mathscr{M}_\sigma$ 的元可以扩张为 Borel 测度，即定义在 Borel 集的 σ 代数上的测度 (见 **Borel 集** (Borel set)；**Borel 测度** (Borel measure)). 例如，若 X 为正规可数 - 仿紧 Hausdorff 空间，则每个测度 $\mu\in\mathscr{M}_\sigma$ 有到正则 Borel 测度的唯一扩张. 若 X 为全正则与 Hausdorff 的，则每个 τ 光滑 (紧密) Baire 测度有到 τ 光滑 (紧密) Borel 测度的唯一扩张.

Baire (Borel) 测度的支集 (support) 是这样的最小集 $Z\in\mathscr{Z}$ (对应地，最小闭集)，它的测度与整个空间的测度相等. 每个 τ 光滑测度有一支集.

通常在考虑拓扑空间 (尤其是局部紧 Hausdorff

空间）中的测度时，总假定 Borel 与 Baire 测度是在不太宽广的集类上给定的，更确切地说，在由紧集与对应的，紧 G_δ 集生成的 σ 环上给定的．

设 G 为局部紧 Hausdorff 拓扑群．G 上左 Haar 测度（left Harr measure）μ 是定义在由一切紧子集生成的 σ 环上的测度，μ 不恒等于零并且满足对一切 $x \in G$ 与 μ 的定义域中的 E 有 $\mu(xE)=\mu(E)$．右 Haar 测度（right Haar measure）用类似的方法定义但条件 $\mu(xE)=\mu(E)$ 应用 $\mu(Ex)=\mu(E)$ 代替．在所考虑的类型的任何群上，左 Haar 测度恒存在且（确切到一个正的乘法常因子）是唯一的．每个左 Haar 测度依下述意义是正则的：$\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subset E\}$，这里 K 是紧集．右 Haar 测度有类似的性质．$\mathbf{R}^k$ 上的 Lebesgue 测度为 **Haar 测度**（Haar measure）的特例．亦见**拓扑向量空间中的测度**（measure in a topological vector space）．

测度空间的同构．设 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 为测度空间．两集合 $E, E' \in \mathscr{S}$ 称为 μ 相等的（μ-equal）（记为 $E=E'[\mu]$）．如果 $\mu(E\Delta E')=0$（这里 $E\Delta E'$ 表示 E 与 E' 的对称差，见**集合的对称差**（symmetric difference of sets））．用 $\mathscr{S}_\mu$ 表示 $\mathscr{S}$ 中集合依此等式关系的等价类．在 $\mathscr{S}_\mu$ 中进行有限次（或可数次）集论运算是有定义的．例如，若 $E_1=E_1'[\mu]$ 且 $E_2=E_2'[\mu]$，则 $E_1\cup E_2=E_1'\cup E_2'[\mu]$．测度 μ 可用明显的方式转到 $\mathscr{S}_\mu$ 上．

设 $\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ 为 $\mathscr{S}_\mu$ 中具有有限测度的集合所成的子集．$\tilde{\mathscr{S}}_\mu\times\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ 上的函数 $\rho(E, E')=\mu(E\Delta E')$ 是一个度量．测度空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 称为可分的（separable），如果空间 $\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ 关于度量 ρ 是可分的．若 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 为具有 σ 有限测度的空间且 σ 环 $\mathscr{S}$ 是可数生成的（即存在可数族 $\{E_n\}\subset\mathscr{S}$，使 $\mathscr{S}$ 为含有此族的最小 σ 环），则度量空间 $\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ 是可分的．

两个测度空间 $(X_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ 与 $(X_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ 称为同构的（isomorphic），如果存在 $(\mathscr{S}_1)_{\mu_2}$ 到 $(\mathscr{S}_2)_{\mu_2}$ 上的一一映射 φ，满足

$$\varphi(E\setminus F)=\varphi(E)\setminus\varphi(F),\ \varphi(E\cup F)=\varphi(E)\cup\varphi(F)$$

与

$$\mu_1(E)=\mu_2(\varphi(E)),\ 对一切\ E, F\in(\mathscr{S}_1)_{\mu_1}.$$

现在令 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 为任意的全有限测度空间．存在 X 分为互斥集 $X_n\in\mathscr{S}(n=1, 2, \cdots)$ 的分划，使 μ 在 X_n 上的限制或者与集中于 1 点的测度同构，或者与直积测度 $\prod_{\iota\in I}(U_\iota, \mathscr{U}_\iota, u_\iota)$ 同构，确切到一个正的因子，这里 $U_\iota=\{0, 1\}$，$u_\iota(\{0\})=u_\iota(\{1\})=1/2$，而集合 I 可以有任意的势（Maharan-Колмоголов 定理（Maharan-Kolmogorov theorem））．若 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 是可分的，非原子的，且 $\mu(X)=1$，则它同构于空间 $\prod_{\iota\in I}(U_\iota, \mathscr{U}_\iota, u_\iota)$，$I$ 为可数集，后者原来同构于带有 Lebesgue 测度的单位区间．

随着作为一集合的子集上函数的测度论的发展，作为 Boole 环（或 **Boole 代数**（Boolean algebra））的元上函数的测度论已经发展起来；在许多方面两者是平行的．测度的另一通行构造要追溯到 W. Young 与 P. Daniell（见[12]）．取值于实数或复数的测度论或取值于某个代数结构的测度论已有发展，它们是对正测度论的补充． B. B. Сазонов 撰

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）.

[2] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950（中译本：哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）.

[3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[4] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯尔莫格洛夫 С. В. 佛明，函数论与泛函分析概要，高等教育出版社，1957）.

[5] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probabilities, Holden-Day, 1965（译自法文）.

[6] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949（英译本：Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N., Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, 1954）.

[7] Варадарайн, В. С., 《Матем. сб.》, **55** (1961), 1, 35－100.

[8] Parthasarathy, K. R., Probability measures on metric spaces, Acad. Press, 1967.

[9] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

[10] Sikorski, R., Boolean algebras, Springer, 1969.

[11] Владимиров, Д. А., Булевы алгебры, М., 1969.

[12] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6－8（译自法文）.

[13] Diestel, J. and Uhl, J., Vector measures, Amer. Math. Soc., 1977.

B. B. Сазонов 撰

【补注】 标题“测度空间的性质”下所列性质 1）与 2）通常称为 Fatou 引理（Fatou lemma），见 **Fatou 定理**（Fatou theorem）．

标题“测度的扩张”下所述的测度的扩张办法属于 C. Carathéodory，并且与术语 Carathéodory 扩张定理（Carathéodory extension theorem）与 Carathéodory 外（内）测度（Carathéodory outer (inner) measure）（见 **Carathéodory 测度**（Carathéodory measure））一起，人们常谈到 Carathéodory 扩张（Carathéodory extension）．

回忆由集合 X 的子集 A 所成的环（相应地，σ 环）$\mathscr{A}$，满足 $A\in\mathscr{A}$ 蕴含 $X\setminus A\in\mathscr{A}$，称为 Boole 代数（Boolean algebra）或代数（algebra）（相应地，σ 代数（σ-algebra）或 σ 域（σ-field），亦见**集代数**（algebra of sets））. 通常在测度空间（X, $\mathscr{S}$, μ）中 σ 环 $\mathscr{S}$ 可被证明是一个 σ 域（特别当 $\mu(X)<\infty$ 时此事实成立）.

术语“全 σ 有限”很少使用.

Borel 为了构造测度 λ' 曾给出很好的概念，可是 Lebesgue 是首先作为构造 $\bar{\lambda}$ 的副产品而给出 λ' 的满意的构造.

乘积空间也常被写成一（类）张量积：（$X_1\times X_2$, $\mathscr{S}_1\otimes\mathscr{S}_2$, $\mu_1\otimes\mu_2$）.

在每个有限积上有相容概率测度的一族测度空间（X_i, $\mathscr{S}_i$）$_i$，称为测度空间投射系（projective system of measure spaces），并且 $\prod X_i$ 上相应的概率测度若存在，便称为投射极限（projective limit），当 I 为可数时，它是存在的（Ionescu-Tulcea 定理（Ionescu-Tulcea theorem），参见[5]）.

假设 X 为拓扑空间且 $\mathscr{S}$ 为 Borel σ 域，则（X, $\mathscr{S}$, μ）对每个有限测度 μ 是完全的，如果 X 是 Polish 空间（Polish space）或更一般地是 Лузин 空间（Luzin space）. 此时（X, $\mathscr{S}$）常称为标准可测空间（standard measurable space），或更加一般地是 Суслин 空间（Suslin space）.（此时（X, $\mathscr{S}$）有时称为 Blackwell 可测空间（Blackwell measurable space））（见**描述集合论**（descriptive set theory）的补注.）

当 X 为有理数空间，或更一般地，为非 Polish 的 **Лузин 空间**（Luzin space）时，Прохоров 定理（Prokhorov theorem）的逆是不成立的，见[A1].

在抽象情形下，当（μ_n）为（X, $\mathscr{S}$）上有限测度序列，这里 $\mathscr{S}$ 为 σ 域，使对任何 $A\in\mathscr{S}$，

$$m(A)=\lim_n \mu_n(A)$$

存在，则 m 也称为测度（Vitali-Hahn-Saks 定理（Vitali-Hahn-Saks theorem），见[3]或[5]）.

参考文献

[A1] Preiss, D., Metric spaces in which Prokhorov's theorem is not valid, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Gebiete, **27** (1973), 109 − 116.

[A2] Cohn, D., Measure theory, Birkhäuser, 1980.

[A3] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, I, Springer, 1979.

[A4] Hewitt, E. and Stromberg, K. R., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

郑维行 译 沈祖和 校

拓扑向量空间中的测度 [**measure in a topological vector space**; **мера в топологическом векторном пространстве**]

用来指明定义在**拓扑向量空间**（topological vector space）中的测度的一个术语，以强调该测度与空间的线性拓扑结构相关的一些性质. 当构造拓扑向量空间中的测度时遇到的一个普遍问题是将一个**预测度**（pre-measure）扩张成测度. 设 E 是一个（实或复）局部凸空间，$\mathfrak{A}(E)$ 是它的**柱集**（cylinder set）的代数. 假定在 $\mathfrak{A}(E)$ 上定义了一个准测度. 要求将此准测度扩张成在 σ 代数 $\mathfrak{B}_0(E)$ 上定义的可数可加测度，其中 $\mathfrak{B}_0(E)$ 是包含 $\mathfrak{A}(E)$ 的最小 σ 代数. $\mathfrak{B}_0(E)$ 是与 E 中的拓扑自然相关的所有 σ 代数（弱 Borel, Borel 等等）中最小的；对一大类空间 E，这些 σ 代数相互一致. 在特殊的也是最重要的情形下，空间 $E=V'$，即 E 是某个局部凸空间 V 的对偶空间并赋予弱 * 拓扑（于是 $E'=V$），为使 V' 上的准测度 μ 可扩张成测度，只要它的特征泛函（Fourier 变换（Fourier transform））.

$$\chi(\varphi)=\int_{V'}\exp\{ix(\varphi)\}\,d\mu(x),\ x\in V',\ \varphi\in V$$

在空间 V 上的所谓 Сазонов 拓扑（Sazonov topology）（即由 V 中所有连续的 Hilbert 半范数生成的拓扑）意义下是连续的，并且在很多情形下（例如 V 是一个 **Fréchet 空间**（Fréchet space））特征泛函在 V 的原拓扑下连续这一条件是必要的. 例如，若 V 是一个**核空间**（nuclear space），则 Сазонов 拓扑与原拓扑一致，并且 V' 中每个具有连续特征泛函的准测度可扩张为测度. 对于定义在 Hilbert 空间上的准测度，关于上述准测度到测度的可扩张性的充分条件也是必要的. 除了准测度到测度的可扩张性的这种一般判别法外，还存在可应用于一些特殊的测度类（或空间类）的这种类型的部分结果. 例如，局部凸空间 V' 上的 Gauss 准测度（Gaussian pre-measure）（即一个预测度，它在任何 σ 代数 $\mathfrak{B}(L)\subset\mathfrak{A}(V')$（$L\subset V'$, $\dim L<\infty$）上的限制是具有相关泛函 $B(\varphi_1,\varphi_2)$（$\varphi_1,\varphi_2\in V$）的 Gauss 分布）扩张成一个测度，如果存在 V 中零点的凸邻域，依内积 $\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=B(\varphi_1,\varphi_2)$ 定义的度量的 ε **熵**（ε-entropy）小于 2.

对偶空间 V' 中的一个（概率）测度序列弱收敛的充分条件是：这些测度的特征泛函序列为逐点收敛的（此条件也是必要的）且依 V 中的 Сазонов 拓扑在零点处等度连续；同时这些泛函依 V 的原拓扑等度连续这一条件也是必要的. 在 Hilbert 空间 V 情形下，V 中测度族的弱紧性的充要条件是已知的. 它们也可用特征泛函来表示. 下面的一些问题仅对 Gauss 测度曾研究过（1982）：拓扑向量空间中的测度关于空间中某一平移集（拟不变集）的拟不变问题（见**拟不变测度**（quasi-invariant measure））（已经知道在许

多无限维向量空间中非零测度的拟不变集不必与全空间相合)；一个测度关于另一个测度的绝对连续性的判别法．拓扑向量空间中测度的研究主要与**轨道积分**(integral over trajectories)与广义随机域的理论有关，并且这些理论在物理学与力学中的应用也极大地促进了它自身的研究．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwarz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Intergration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8(译自法文).

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971(英译本：Gikhman, I. I. and Skorokhod, A. V., The theory of stochastic processes, 1, Springer, 1974).

[4] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961(英译本：Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4. Applications of harmonic analysis, Acad. Press, 1964).

[5] Судаков. В. Н.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **141** (1976).

[6] Смолянов, О. Г., Фомин, С. В.,《Успехи матем. наук》, **31** (1976), 4, 3–56.

Р. А. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schwarz, L., Radon measure on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Oxford Univ. Press, 1973.

[A2] Vakhania, N. N., Probability distributions on linear spaces, North-Holland, 1981.

[A3] Vakhania, N. N., Tarieladze, V. I. and Chobanyan, S. A., Probability distributions on Banach spaces, Reidel, 1987(译自俄文).

束立生 译 苏维宜 校

无理性度量 [**measure of irrationality; иррациональности мера**], 实数 ξ 的

函数

$$L(\xi,H)=\min|h_1\xi+h_0|,$$

其中极小取在所有适合

$$|h_0|,|h_1|\leqslant H,|h_0|+|h_1|\neq 0$$

的有理整数对 h_0,h_1 之上．无理性度量的概念是**线性无关性度量**(linear independence, measure of)和**超越性度量**(transcendency, measure of)概念的特殊情形．无理性度量表明，数 ξ 可被有理数怎样“好”地逼近．对于所有的无理数，我们有

$$L(\xi,H)<\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{H},$$

但对任何 $\varepsilon>0$ 及几乎所有(在 Lebesgue 测度的意义下)的实数 ξ,

$$L(\xi,H)>\frac{C}{H^{1+\varepsilon}},$$

其中 $C=C(\varepsilon,\xi)>0$. 而对任何适合 $\varphi(H)\to 0$ (当 $H\to\infty$) 且 $\varphi(H)>0$ 的函数 φ, 总存在数 ξ_φ, 使对所有的 $H\geqslant 1$ 有

$$0<L(\xi_\varphi,H)<\varphi(H).$$

参考文献

[1] Хинчин, А. Я., Цепные дроби, 3 изд., М., 1978 (中译本：А. Я. 辛欣，连分数，上海科学技术出版社，1965).

А. И. Галочкин 撰 朱尧辰 译

保测变换 [**measure-preserving transformation; преобразование с сохранением меры**], 测度空间 $(X,\mathfrak{A},\mu)$ 的

【补注】 **可测映射** (measurable mapping) $T\colon X\to X$ 满足对每个 $A\in\mathfrak{A}$ 有 $\mu(T^{-1}(A))=\nu(A)$. μ 称为关于 T 的不变测度 (invariant measure). 测度空间 $(X,\mathfrak{A},\mu)$ 与 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 之间的可测映射 $T\colon X\to Y$ 满足对每个 $B\in\mathscr{B}$, $\mu(T^{-1}(B))=\nu(B)$ 时，通常称为保测映射(measure-preserving mapping). 测度空间 $(X,\mathfrak{A},\mu)$ 的满保测变换 T, 即 T 映 X 到其自身上，常称为 $(X,\mathfrak{A},\mu)$ 的自同态(endomorphism). 一个双射且其逆亦为保测的自同态称为 $(X,\mathfrak{A},\mu)$ 上的**自同构**(automorphism).

保测变换，例如，是在经典动力系统的研究中提出来的(见(可测)**瀑布**(cascade), **可测流**(measurable flow)). 那时这种变换首先是作为某个通常是紧的拓扑空间(或流形)上的连续(或光滑)变换而得到的，并且不变测度的存在性是被证明了的．关于 **Hamilton 系统**(Hamiltonian system)的 **Liouville 定理**(Liouville theorem)就是一个例子．

进一步的知识与参考文献见**遍历理论**(ergodic theory).

沈祖和 译 郑维行 校

测度空间 (X,A,μ) [**measure space; пространство с мерой**]

具有在 A 上给定的**测度**(measure) μ 的**可测空间**(measurable space) (X,A) (μ 是取值于 $[0,\infty]$ 并满足 $\mu(\phi)=0$ 的可数加性函数；如果测度是有限的即测度不取值 ∞ 或只要存在某个 $Y\in A$ 使 $\mu(Y)<\infty$, 则 $\mu(\phi)=0$ 可由可加性推出). 记号 (X,A,μ) 往往简写为 (X,μ) 并称 μ 是 X 上的测度；甚至有时将此记号简写为 X. 基本情形是：A 为 σ 代数

(见**集代数**(algebra of sets))且 X 可表成 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 这里 $X_n \in A$，$\mu(X_n) < \infty$．此时测度称为(全) σ 有限的((totally) σ-finite)(而当 $\mu(X) < \infty$ 时，称它为(全)有限的((totally) finite))．例如，**R** 上的 Lebesgue 测度就是如此(见 **Lebesgue 空间**(Lebesgue space))．然而，有时会遇到非 σ 有限测度．例如，对于 $k < n$ 时 $\mathbf{R}^n$ 上 k 维 **Hausdorff 测度**(Hausdorff measure)．有时也会遇到测度的一些变形如 μ 取值于 $(-\infty, \infty)$，取复数或向量值以及 μ 仅为有限可加测度．

参考文献

[1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950(中译本：哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958，北京)．

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.

Д. В. Аносов 撰　郑维行 译　沈祖和 校

机械求积法 [**mechanical quadrature, method of** 或 method of mechanical cubature; **механических квадратур метод**]

基于运用求积(求体积)公式所得的和代替积分求解积分方程的一种方法．考虑方程

$$x(t) = \int_{\Omega} K(t, s)x(s)ds + y(t), \qquad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界域．运用求积(求体积)过程

$$\int_{\Omega} z(s)ds = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} z(s_{jn}) + \varphi_n(z)$$

构成线性方程组

$$x_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K(s_{in}, s_{jn})x_{jn} + y(s_{in}),\ i = 1, \cdots, n, \qquad (2)$$

其中 $x_{in} \approx x(s_{in}),\ i = 1, \cdots, n$.

设自由项 y 与核 K 分别在 $\bar{\Omega}$ 与 $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$($\bar{\Omega}$ 是 Ω 的闭包)上连续并设(1)有唯一的解 $x(t)$．设对任一在 $\bar{\Omega}$ 上连续的函数 $z(t)$，当 $n \to \infty$ 时有 $\varphi_n(z) \to 0$．于是对充分大的 n，方程组(2)是唯一可解的，且

$$c_1 \varepsilon_n \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_{in} - x(s_{in})| \leqslant c_2 \varepsilon_n,\ n \geqslant n_0,$$

其中 c_1, c_2 是正常数，且当 $n \to \infty$ 时有

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\varphi_n(K(s_{in}, s)x(s))| \to 0.$$

机械求积法可应用于解非线性积分方程([3])和线性算子的本征值问题．此法甚至对某类具有不连续核的方程也收敛([4])．

参考文献

[1] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962(英译本：Berezin, I. S., Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[3] Красносельский, М. А., иг. д., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969(英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A. et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972).

[4] Вайникко, Г. М., 《Сиб. матем. ж.》, **12** (1971), 1, 40–53.

[5] Michlin (Mikhlin), S. G., Prössdorf, S., Singular integral operators, Springer, 1986(译自德文).

Г. М. Вайникко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Brunner, H., Houwen, P. J. van der, The numerical solution of Volterra equations, North-Holland, 1986.

[A2] Baker, C. T. H., The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977.

[A3] Engels, H., Numerical quadrature and cubature, Acad. Press, 1980.

[A4] Atkinson, K. E., A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind, SIAM, 1976.

沈永欢 译

中线 [**median**; **медиана**]

1) 三角形的中线(median of a triangle)是指连接三角形一顶点与其对边中点的直线(或者它的包含在三角形内的线段)．一个三角形的三条中线交于一点，称为该三角形的重心(centre of gravity 或 barycentre)或者形心(centroid)．此点将每一条中线分为两线段，其长度之比为 2∶1，如果前一线段从顶点出发．

П. С. Моденов 撰

【补注】 J. Hjelmslev 证明，在双曲几何学(见 **Лобачевский 几何学**(Lobachevskiĭ geometry))中一个三角形的子午线交于一点．

2) 梯形的中线(median of a trapezium)是指连接梯形两腰中点的线段．梯形中线平行于两梯，并且等于两底长度之和的一半．

БСЕ-3

中位数(统计学中的) [**median (in statistics)**; **медиана**]

概率分布的数字特征之一，**分位数**(quantile)的特殊情形．对于以 $F(x)$ 为分布函数的实随机变量 X，满足条件 $F(m) \leqslant 1/2$ 和 $F(m+0) \geqslant 1/2$ 的数 m 称做中位数．任一随机变量至少有一个中位数．如果对于一闭区间上的一切 x，有 $F(x)=1/2$，则此区间上的每一点都是中位数．假如 $F(x)$ 是严格单调函数，则中位数唯一．在对称场合，如果中位数唯一，只要数学期望存

在，则它等于**数学期望**(mathematical expectation)．中位数永远存在这一事实用于随机变量的中心化(例如，见**Lévy不等式**(Lévy inequality))．数理统计中，为根据独立观测结果 $X_1, \cdots, X_n$ 估计分布的中位数，利用所谓样本中位数——相应顺序统计量(见**顺序统计量**(order statistic)) $X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}$ 的中位数，它等于 $X_{(k+1)}$，如果 $n=2k+1$ 是奇数；等于 $[X_{(k)}+X_{(k+1)}]/2$，如果 $n=2k$ 是偶数．

参考文献

[1] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977 (中译本：M. 洛易甫，概率论，科学出版社，1966)．

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

А. В. Прохоров 撰　周概容 译

中间数 [mediant；мидиант]

两个具有正分母的分数 a/b 与 c/d 的中间数是分数 $(a+c)/(b+d)$. 两个分数的中间数位于这两个分数之间，即如果 $(a/b) \leqslant (c/d)$, $b, d>0$, 则

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

如果分数的一个有限序列中每个非首尾项是其相邻两项的中间数，则称此序列为 **Farey 序列** (Farey series)．实数 α 的连分数展开的两个相邻渐近分数的中间数位于 α 与这两个渐近分数中较低阶的渐近分数之间(亦见**连分数** (continued fraction))．这样，如果 P_n/Q_n, P_{n+1}/Q_{n+1} 是 α 的连分数展开中的 n 阶，$n+1$ 阶渐近分数，则

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| > \left|\frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}.$$

参考文献

[1] Хинчин, А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978 (中译本：A. Я. 辛钦，连分数，上海科学技术出版社，1965).

В. И. Нечаев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H., Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1979.

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞，潘承彪，初等数论，北京大学出版社，1992.

沈永欢 译

Mehler-Фок 变换 [Mehler-Fock transform 或 Mehler-Fok transform；Мелера-Фока преобразование]

积分变换 (integral transform)

$$F(x) = \int_0^\infty P_{i\tau-1/2}(x) f(\tau) d\tau, \ 1 \leqslant x < \infty, \quad (1)$$

其中 $P_\nu(x)$ 是第一类 **Legendre 函数** (Legendre function)．如果 $f \in L[0, \infty)$，函数 $|f'(\tau)|$ 在 $[0, \infty)$ 上局部可积且 $f(0)=0$，则下述反演公式成立：

$$f(\tau) = \tau \tanh \pi\tau \int_1^\infty P_{i\tau-1/2}(x) F(x) dx. \quad (2)$$

Parseval 恒等式 (Parseval identity)．考虑由等式

$$G(\tau) = \int_1^\infty \sqrt{\tau \tanh \pi\tau}\, P_{i\tau-1/2}(x) g(x) dx,$$

$$g(x) = \int_0^\infty \sqrt{\tau \tanh \pi\tau}\, P_{i\tau-1/2}(x) G(\tau) d\tau$$

定义的 Mehler-Фок 变换及其逆变换．如果 $g_i(x)$ $(i=1, 2)$ 是满足条件

$$g_i(x) x^{-1/2} \ln(1+x) \in L(1, \infty),$$
$$g_i(x) \in L_2(1, \infty)$$

的任意实值函数，则

$$\int_0^\infty G_1(\tau) G_2(\tau) d\tau = \int_1^\infty g_1(x) g_2(x) dx.$$

广义 Mehler-Фок 变换及相应的反演公式是

$$F(x) = \int_0^\infty P_{i\tau-1/2}^{(k)}(x) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} \tau \sinh \pi\tau\, \Gamma\left(\frac{1}{2}-k+i\tau\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-k-i\tau\right) \times \int_1^\infty P_{i\tau-1/2}^{(k)}(x) F(x) dx, \quad (4)$$

其中 $P_\nu^{(k)}(x)$ 是第一类连带 Legendre 函数．当 $k=0$ 时，公式 (3) 和 (4) 化为 (1) 和 (2)；当 $k=1/2$，$y=\cosh\alpha$ 时，公式 (3)和 (4) 导致 **Fourier 余弦变换** (Fourier cosine transform)，而当 $k=-1/2$，$y=\cosh\alpha$ 时则导致 **Fourier 正弦变换** (Fourier sine transform)．变换 (1)，(2) 由 F. G. Mehler 引进 ([1])；相应的基本定理由 В. А. Фок 证明．

参考文献

[1] Mehler, F. G., Ueber eine mit den Kugel-und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Electricitätsvertheilung, *Math. Ann.*, **18** (1881), 161 – 194.

[2] Фок, В. А., 《Докл. АН СССР》, **39** (1943), 279 – 283.

[3] Итоги науки. Математический анализ., 1966, М., 1967, 7 – 82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sneddon, I. N., The use of integral transforms, MacGraw-Hill, 1972.

沈永欢 译

Mehler 求积公式 [Mehler quadrature formula; Мелера квадратурная формула]

对于区间 $[-1, 1]$ 和权 $1/\sqrt{1-x^2}$ 给出最高代数精确度的求积公式，其形式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right). \tag{1}$$

结点为 Чебышев 多项式

$$T_N(x) = \cos(N\arccos x)$$

的根；系数相同，都等于 π/N. 其代数精确度等于 $2N-1$. 公式(1)为 F. G. Mehler([1])所建立.

对于权 $1/\sqrt{1-x^2}$ 且有 $2N+1$ 个结点（其中有 N 个固定结点与求积公式（1）中的结点相同）的代数精确度为最高的求积公式的形式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{2N}\left[\frac{f(-1)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{2N-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{2N}\right)\right]. \tag{2}$$

公式（2）用来改进用公式（1）求得的积分近似值的精确性；由于已计算被积函数在公式（1）的结点处的值，因此只需再计算被积函数在添加的 $N+1$ 个结点处的值. 公式（2）也表示对于权 $1/\sqrt{1-x^2}$ 且结点情况如下的具有最高代数精确度的求积公式：$[-1, 1]$ 的两个端点是固定结点，从而其余结点是 $[-1, 1]$ 上具有权 $\sqrt{1-x^2}$ 的 $2N-1$ 次正交多项式，即第二类 Чебышев 多项式 $U_{2N-1}(x)$ 的根. 求积公式（2）的代数精确度是 $4N-1$.

公式（1）有时也称为 Hermite 求积公式（Hermite quadrature formula）.

参考文献

[1] Mehler, F. G., Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen, *J. Reine Angew. Math.*, **63** (1864), 152 – 157.

[2] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967（英译本：Krylov, V. I., Approximate calculation of integrals, MacMillan, 1962）.

И. П. Мысовских 撰

【补注】 上述求积公式更通用的名称是 Gauss-Чебышев 求积公式（Gauss-Chebyshev quadrature formula）（见 **Gauss 求积公式**（Gauss quadrature formula））. 它可看作基于给出权函数 $1/\sqrt{1-x^2}$ 的 Hermite（振荡）插值. Hermite 求积公式是以 e^{-x^2} 为权，以 $(-\infty, \infty)$ 为积分区间的 Gauss 型求积公式.

参考文献

[A1] Davis, P. J., Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1975（中译本：P. J. Davis, P. Rabinowitz, 数值积分法，高等教育出版社，1986）.

[A2] Hilderbrand, F. B., Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

沈永欢 译

Meier 定理 [Meier theorem; Мейера теорема]

设 $f(z)$ 是单位圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$ 内的一个亚纯函数，那么圆周 $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}: |z|=1\}$ 的所有的点，可能要除去 Γ 上的一个第一范畴集，或者是 Plessner 点，或者是 Meier 点. 按照定义，Γ 上的点 $e^{i\theta}$ 是 $f(z)$ 的一个 Plessner 点（Plessner point），如果对于每个由通过 $e^{i\theta}$ 的一对弦所夹的角 Δ，解聚值集 $C_\Delta(e^{i\theta}; f)$ 是全的（即和整个扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 重合）. 点 $e^{i\theta}$ 称为一个 Meier 点（Meier point）（或具有 Meier 性质（Meier property）），如果：1) $f(z)$ 在 $e^{i\theta}$ 的完全聚值集（cluster set）$C(e^{i\theta}; f)$ 是次全的，即它不和整个扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 重合；2) 沿着圆盘 D 的从 $e^{i\theta}$ 引出的任意弦的所有极限值的集合和 $C(e^{i\theta}; f)$ 重合. 这个定理是 K. Meier 证明的（[1]）.

Meier 定理是与 **Plessner 定理**（Plessner theorem）类似的，它用集合的范畴来表达，而 Plessner 定理则是用测度论表述的. Meier 定理的一个准确形式在 [3] 中给出.

参考文献

[1] Meier, K., Ueber die Randwerte der meromorphic funktionen, *Math. Ann.*, **142** (1961), 328 – 344.

[2] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[3] Гаврилов, В. И., Канатников, А, Н., 《Докл. АН СССР》, **233** (1977), 1, 15–17.

Е. Д. Соломенцев 撰 陈怀惠 译

Meijer 变换 [Meijer transform; Мейера преобразование]

积分变换（integral transform）

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt/2}(xt)^{-\mu-1/2} W_{\mu+1/2,\nu}(xt) f(t)\,dt,$$

其中 $W_{\mu,\nu}(x)$ 是 **Whittaker 函数**（Whittaker functions）. 对应的反演公式是

$$f(t) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\, \frac{\Gamma(1-\mu+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)} \times$$

$$\times \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} e^{xt/2}(xt)^{\mu-1/2} W_{\mu-1/2,\nu}(xt) F(x)\,dx.$$

当 $\mu=\pm\nu$ 时，Meijer 变换成为 **Laplace 变换**（Laplace transform）；当 $\mu=-1/2$ 时，它成为 K_ν

变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-xt/2}(xt)^{1/2}K_\nu\left[\frac{xt}{2}\right]f(t)dt,$$

其中 $K_\nu(x)$ 是 **Macdonald 函数** (Macdonald function).

Varma 变换 (Varma transform)

$$F(x)=\int_0^{\infty}(xt)^{\nu-1/2}e^{-xt/2}W_{\mu,\nu}(xt)f(t)dt$$

可化为 Meijer 变换.

Meijer K变换 (Meijer K-transform) (或 Meijer-Bessel 变换 (Meijer-Bessel transform)) 是积分变换

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}K_\nu(xt)\sqrt{xt}\,f(t)dt.$$

如果函数 f 在 $(0,\infty)$上是局部可积的, 在点 $t=t_0>0$ 的领域内具有有界变差, 且积分

$$\int_0^{\infty}e^{-\beta t}|f(t)|dt,\ \beta>\alpha\geqslant 0$$

收敛, 则下列反演公式成立:

$$\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda}I_\nu(t_0x)(t_0x)^{1/2}F(x)dx.$$

当 $\nu=\pm 1/2$ 时, Meijer K 变换化为 Laplace 变换.

Meijer 变换和 Meijer K 变换由 C. S. Meijer 分别在[1] 和[2] 中引入.

参考文献

[1] Meijer, C. S., Eine neue Erweiterung der Laplace Transformation I, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet.*, **44** (1941), 727 – 737.

[2A] Meijer, C. S., Ueber eine neue Erweiterung der Laplace Transformation I, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet.*, **43** (1940), 599 – 608.

[2B] Meijer, C. S., Ueber eine neue Erweiterung der Laplace Transformation II, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet.*, **43** (1940), 702 – 711.

[3] Брычков, Ю. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

[4] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, 7 – 82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰 张鸿林 译

Mellin 变换 [Mellin transform; Меллина преобразование]

积分变换

$$M(p)=\int_0^{\infty}f(t)t^{p-1}dt,\ p=\sigma+i\tau.$$

代换 $t=e^{-z}$ 使它转化为 **Laplace 变换** (Laplace transform). Mellin 变换用于解关于扇形区域内调和函数的特殊类型平面问题以及弹性论中的特定问题等等.

反演定理 (inversion theorem). 假定 $\tau^{\sigma-1}f(\tau)\in L(0,\infty)$, 函数 $f(\tau)$ 在点 $\tau=t$ 的一个邻域内为有界变差, 则

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}M(s)t^{-s}ds.$$

表示定理 (representation theorem). 假定函数 $M(\tau+iu)$ 关于 u 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且在点 $u=t$ 的一个邻域内为有界变差, 则

$$\frac{M(\sigma+i(t+0))+M(\sigma+i(t-0))}{2}=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{1/\lambda}^{\lambda}f(x)x^{\sigma+it-1}dx,$$

其中

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}M(s)x^{-s}ds.$$

参考文献

[1] Mellin, H., Ueber die fundamentelle Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorie der Gamma-und hypergeometrischen Funktionen, *Acta. Soc. Sci. Fennica*, **21** (1896), 1, 1 – 115.

[2] Mellin, H., Ueber den Zusammenhang zwischen linearen Differential-und Differenzengleichungen, *Acta Math.*, **25** (1902), 139 – 164.

[3] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

[4] Диткин, В. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974.

П. И. Лизоркин 撰

【补注】 以 $M(p)$ 表示 $f(t)$ 的 Mellin 变换, 如果 $f(t)t^{k-1/2}\in L_2(0,\infty)$, 则 Parseval 等式 (Parseval equality) 取如下形式:

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2x^{2k-1}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|M(k+iy)|^2dy.$$

Mellin 变换还用来联系 **Dirichlet 级数** (Dirichlet series) 与**自守函数** (automorphic function); 特别是, 其反演公式在证明 Dirichlet 级数的函数方程 (类似于 Riemann ζ 函数的函数方程) 时有用. 见[A1] – [A5].

参考文献

[A1] Hecke, E., Ueber die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, *Math. Ann.*, **112** (1936), 664 – 699.

[A2] Weil, A., Ueber die Bestimmung Dirichletscher Reihen

durch ihre Funktionalgleichung, *Math. Ann.*, **168** (1967), 149 – 156.

[A3] Weil, A., Zeta functions and Mellin transforms, 载于 Algebraic Geometry (Bombay Coll. 1968), Oxford Univ. Press & Tata Inst. Fundam. Res., 1968, 409 – 426.

[A4] Ogg, A., Modular forms and Dirichlet series, Benjamin, 1969.

[A5] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton Univ. Press & Iwanami-Shoten, 1971, § 3.6, 89 – 94.

沈永欢 译

无记忆信道 [memoryless channel; канал без памяти]

一个具有下述性质的**通信信道** (communication channel): 在时刻 t 时, 信道的输出信号的统计性质只依赖于这个时刻的信道输入信号, 而与时刻 t 以前和以后的信号无关. 更精确地说, 设一个离散时间通信信道的输入信号为一列取值于空间 (Y, S_Y) 上的随机变量序列 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots)$, 输出信号为一列取值于空间 $(\widetilde{Y}, S_{\widetilde{Y}})$ 上的随机变量序列 $\widetilde{\eta}=(\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2, \cdots)$, 这个信道称为无记忆信道, 如果对任意自然数 n 和任意集合 $\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_n$, $\widetilde{A}_k \in S_{\widetilde{Y}} (k=1, \cdots, n)$ 下面等式成立:

$$\mathrm{P}\{\widetilde{\eta}_1 \in \widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{\eta}_n \in \widetilde{A}_n | \eta^n\} =$$
$$= \mathrm{P}\{\widetilde{\eta}_1 \in \widetilde{A}_1 | \eta_1\} \cdots \mathrm{P}\{\widetilde{\eta}_n \in \widetilde{A}_n | \eta_n\},$$

这里 $\eta^n=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$. 更进一步, 如果条件概率 $\mathrm{P}\{\widetilde{\eta}_k \in \widetilde{A}_k | \eta_k\}$ 不依赖于 k, 则这个信道称为齐次无记忆信道 (homogeneous memoryless channel).

设 C_n 为一个齐次无记忆信道的 n 次乘积信道的传输率 (见**信道传输速率** (transmission rate of a channel)), 则 $C_n=nC_1$. 如果 Y 和 $\widetilde{Y}$ 为有限 (或可数) 集, 则一个齐次无记忆信道完全由一个转移概率矩阵 $\{q(y, \widetilde{y}): y \in Y, \widetilde{y} \in \widetilde{Y}\}$ 确定, 这里

$$q(y, \widetilde{y}) = \mathrm{P}\{\widetilde{\eta}_k = \widetilde{y} | \eta_k = y\}, \ k=1, 2, \cdots.$$

参见**通信信道** (communication channel) 的参考文献 [1], [3] – [5].

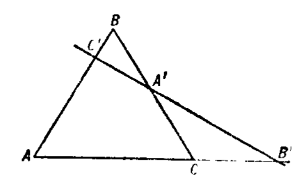
Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰 符方伟 沈世镒 译

Menelaus 定理 [Menelaus theorem; Менелая теорема]

关于一条直线同一个三角形三边相交所得线段的长度之间的关系的一个定理. 它断言: 如果给定直线同三角形 ABC 的各边 (或其延长线) 相交于点 C'. A' 和 B', 则有

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

Menelaus 定理是 **Carnot 定理** (Carnot theorem) 的一个特殊情况; 它可以推广到**多边形** (polygon) 的情况. 例如, 假设直线 l 同多边形 $A_1 \cdots A_n$ 的边 $A_1A_2, \cdots,$



$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 分别相交于点 $a_1, \cdots, a_n$, 则下列关系式成立:

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \cdots \frac{A_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}A_n} \cdot \frac{A_na_n}{a_nA_n} = \pm 1.$$

其中负号对应 n 为奇数的情况, 正号对应 n 为偶数的情况.

这个定理是 Menelaus (1 世纪) 证明的; 但是, 看来 Euclid (公元前 3 世纪) 已经知道.

П. С. Моденов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Waerden, B. L. van der, Science awakening, 1, Noordhoff & Oxford Univ. Press, 1961.

张鸿林 译

Menger 曲线 [Menger curve; Менгера кривая]

包含任意曲线 (以及所有一维可分可度量化空间) 的拓扑象的一条曲线实例. 因此称为万有曲线 (universal curve). 它由 K. Menger 作出 ([1]) (Menger 的构造见**线 (曲线)** (line (curve))). Menger 曲线被拓扑地刻画为一个一维局部连通可度量化连续统 K, 它没有局部分离点 (即对任意点 $x \in K$ 的每个连通邻域 O, 集合 $O \setminus \{x\}$ 是连通的) 也没有可嵌入平面中的非空开子集 ([3]).

参考文献

[1] Menger, K., Kurventheorie, Teubner, 1932.

[2] Пархоменко, А. С., Что такое линия, М., 1954 (中译本: А. С. 巴尔霍民柯, 曲线是什么, 科学出版社, 1957).

[3] Anderson, R., One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 1–16.

Б. А. Пасынков 撰 白苏华、胡师度 译

零级数的 Меньшов 例子 [Men'shov example of a zero-series; Меньшова пример нуль-ряда]

在一个零测度的**完满集** (perfect set) 的余集上收敛到 0 的**三角级数** (trigonometric series) 的第一个非平凡的例子; 由 D. E. Men'shov 所构造 ([1]). 具有这一性质的级数称为零级数 (zero-series). 与这一概念自然相关的问题是函数的三角级数的唯一性 (见**唯一性集** (uniqueness set)).

参考文献

[1] Men'shov, D. E., Sur l'unicité du développement trig-

onométrique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **163** (1916), 433 – 436.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, 804 – 806(英译本: Bary, N. K. (N. K. Bari), A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

朱学贤 译 潘文杰 校

Меньшов - Rademacher 定理 [Men' shov - Rademacher theorem; Меньшова - Радемахера теорема]

关于正交级数的几乎处处收敛性的一个定理：如果函数系 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a, b]$ 上是正交的，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \qquad (*)$$

在 $[a, b]$ 上几乎处处收敛．这一结论由 Д.Е. Меньшов ([1]) 和 H. Rademacher ([2]) 分别独立地证得．Men'shov 还证明了按下述意义这一结论是最准确的：如果一个单调增序列 $\omega(n)$ 满足条件 $\omega(n) = o(\log^2 n)$，则可以找到一个处处发散的正交级数 $(*)$，它的系数满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < \infty.$$

参考文献

[1] Men'shov, D. E., Sur la séries de fonctions orthogonales (I), *Fund. Math.*, **4** (1923), 82 – 105.

[2] Rademacher, H., Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, **87** (1922), 112 – 138.

[3] Alexits, G., Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Deutsch., Verlag Wissenschaft., 1960.

Б. И. Голубов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

朱学贤 译 潘文杰 校

Mercer 定理 [Mercer theorem; Мерсера теорема]

$D \times D$ 上 Hermite 正定连续核 $K(s, t)$ (见**具有对称核的积分方程** (integral equation with symmetric kernel)；**积分算子的核**(kernel of an integral operator)) 的双线性级数

$$\sum_m \frac{\varphi_m(s)\overline{\varphi_m(t)}}{\lambda_m},$$

它在 $D \times D$ 内绝对并且一致收敛到 $K(s,t)$，其中 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界域的闭包．这里 λ_m 是核 $K(s,t)$ 的特征数，并且 $\varphi_m(s)$ 是对应的规范化正交本征函数．如果核 K 满足 Mercer 定理的条件，那么积分算子 T: $L_2(D) \to L_2(D)$,

$$Tf(s) = \int_D K(s,t) f(t)\, dt = \sum_m \frac{1}{\lambda_m}(f, \varphi_m)\varphi_m$$

是核型的 (见**核型算子** (nuclear operator))，并且它的**迹** (trace) $\sum_m 1/\lambda_m$ 可以用公式

$$\sum_m \frac{1}{\lambda_m} = \int_D K(s,s)\, ds$$

计算．

Mercer 定理可以推广到有界不连续核的情形．

这个定理是 J.Mercer ([1]) 证明的．

参考文献

[1] Mercer, J., *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **209** (1909), 415 – 446.

[2] Mercer, J., Functions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **83** (1908), 69 – 70.

[3] Петровский, И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965 (英译本: Petrovskiĭ, I. G., Lectures on the theory of integral equations, Graylock, 1957).

[4] Tricomi, F.G., Integral equations, Interscience, 1957.

[5] Красносельский, М. А., [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M.A., et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff, 1976).

В. Б. Коротков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I. and Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhäuser, 1977.

[A2] Zaanen, A.C., Linear analysis, North – Holland, 1956.

鲁世杰 译 葛显良 校

Мергелян 定理 [Mergelyan theorem; Мергеляна теорема]

关于用多项式一致逼近单复变量函数的可能性的一条定理．设 K 是复 z 平面 $\mathbf{C}$ 的具有连通补集的紧子集，则每个在 K 上连续、在 K 的内部全纯的函数 f 可用 z 的多项式在 K 上一致逼近．

这一定理是 С. Н. Мергелян 证明的 (见 [1], [2])；它使复平面上逼近论的大量研究臻于完善，且

在复分析的各个分支中有许多应用.

对于 K 没有内点情形的相应结果是由 M. A. Лаврентьев 证明的([3]);对于 K 是具有连通补集的紧域的相应定理归之于 M. B. Келдыш([4]);亦见 **Келдыш-Лаврентьев 定理**(Keldysh-Lavrent'ev theorem).

Мергелян 定理有下述推论:设 K 是 $\mathbf{C}$ 的任一紧子集,函数 f 在 K 上连续、在 K 的内部全纯,则为使 f 可用 z 的多项式一致逼近,其必要充分条件是 f 具有到集合 $\mathbf{C}\setminus K$ 的所有有界连通分支上的全纯延拓.

用多项式逼近问题是用极点位于 K 的补集中的有理函数逼近问题的特殊情形. Мергелян 也求得了有理逼近的一些充分条件(见[2]). 这个问题(对于紧统 $K\subset\mathbf{C}$)的完全解答是用**解析容量**(analytic capacity)概念得到的([5]).

Мергелян 定理使大量关于多复变量空间 $\mathbf{C}^n$ 中用多项式、有理函数或全纯函数逼近的论文激增. 不过在这方面迄今只对特殊类型的紧子集获得了部分结果.

参考文献

[1] Мергелян, С. Н., 《Докл. АН СССР》, **78** (1951), 3, 405 - 408.

[2] Мергелян, С. Н., 《Успехи матем. наук》, **7** (1952), 2, 31 - 122.

[3] Lavrentieff, M. A., Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynômes, Hermann, 1936.

[4] Келдыш, М. В., 《Матем. сб.》, **16** (1945), 3, 249 - 257.

[5] Витушкин, А. Г., 《Успехи матем. наук》, **22** (1967), 6, 141 - 199.

[6] Некоторые вопросы теории приближений, М., 1963 (译自英文).

[7] Gamelin, T. W., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

E. M. Чирка 撰

【补注】 Мергелян 定理的另一重要先导是 Walsh 定理(Walsh theorem),其中 K 是 Jordan 区域(Jordan domain)(即边界由一些 **Jordan 曲线**(Jordan curve)组成的集合)的闭包.

L. Carlesson 给出了 Мергелян 定理的基于泛函分析的一个有趣证明,见[A1].

关于 Мергелян 定理对于 $\mathbf{C}^n$ 的推广,见[A2]. 亦见**复变函数逼近**(approximation of functions of a complex variable).

参考文献

[A1] Carlesson, L., Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation, *Math. Scand.*, **15** (1964), 167 - 175.

[A2] Chirka, E. M., Khenkin, G. M., Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables, *J. Soviet Math.*, **5** (1976), 5, 612 - 687. (载于 Итоги науки и техники. Современным проблемам математики, **4** (1975), 13 - 142).

[A3] Gaier, D., Lectures on complex approximation, Birkhäuser, 1987(中译本:D. 加意耳,复变函数逼近论,湖南教育出版社,1985).

【译注】

参考文献

[B1] 沈燮昌,复变函数逼近论,科学出版社,1992.

沈永欢 译

亚纯函数[**meromorphic function**; **мероморфная фукция**],区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 内(或 Riemann 曲面 Ω 上)的单复变量的

区域 $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \cdots\}$ 内的全纯函数,它以每一个奇点 a_ν 为极点(见**极点(函数的)**(pole (of a function)),即 a_ν 是集合 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 的一个孤立点,这个集合在 Ω 内没有极限点,并且 $\lim_{z\to a_\nu}|f(z)|=\infty$). 所有 Ω 内的亚纯函数的全体 $M(\Omega)$ 关于通常的按点运算继之在可去奇点处重新赋值后是一个域.

Ω 内的任意两个全纯函数的商 φ/ψ $(\psi\not\equiv 0)$ 是 Ω 内的一个亚纯函数. 反过来,区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 上(或非紧 Riemann 曲面 Ω 上)的每一个亚纯函数都可以表示成 $f=\varphi/\psi$ $(\psi\not\equiv 0)$,其中 φ, ψ 是全纯的并且在 Ω 内没有公共的零点. 由此,在非紧的 Riemann 曲面 Ω 上,域 $M(\Omega)$ 与 Ω 上的全纯函数环 $O(\Omega)$ 的分式域等同.

每个亚纯函数 $f\in\Omega$ 确定区域 Ω 到 Riemann 球面 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 里的一个连续映射 $\widetilde{f}$,它关于 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}\approx\mathbf{C}P^1$ 上的标准复结构是一个**全纯映射**(holomorphic mapping). 反过来,每个全纯映射 $\widetilde{f}:\Omega\to\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, $(\widetilde{f}\not\equiv\infty)$ 确定 Ω 内的一个亚纯函数:f 的极点的集合与离散集 $\widetilde{f}^{-1}(\infty)$ 重合,同时,若 $z\in\Omega\setminus\widetilde{f}^{-1}(\infty)$,则 $f(z)=\widetilde{f}(z)\in\mathbf{C}$. 于是,一个变量的亚纯函数可以和到 Riemann 球面里的全纯映射 $(\not\equiv\infty)$ 等同起来.

亚纯函数理论的基本问题是关于具有指定奇点的亚纯函数的存在性(和构造)问题.

I. 给定一个离散的(闭)子集 $\{a_1, a_2, \cdots\}\subset\Omega$ 和在每个点 a_ν 的 Laurent 展式(见 **Laurent 级数**(Laurent series))的主要部分

$$f_\nu(z)=\sum_{j=1}^{n_\nu}c_{\nu j}(z-a_\nu)^{-j};$$

要求寻找一个具有这些主要部分的亚纯函数 $f\in M(\Omega)$,即 $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \cdots\}$ 内的一个这样的全纯函数 f:对于每一个 ν,在 a_ν 的一个领域内 $f-f_\nu$ 是全纯的. 若点 a_ν 的个数是有限的,则函数 $\sum f_\nu$ 显然是问题的解(在区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 内). 这个问题的一般情形由 Mittag-Leffler 定理(Mittag-Leffler theorem)解答:在每个非紧的 Riemann 曲面上,存在具有给定的主要部分 f_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ 的亚纯函数. 在一个紧 Riemann 曲面(例如

环面）上，这个问题一般没有解——必须加上关于这些主要部分的相容性的补充条件．

第二个基本问题采用**除子**（divisor）的语言来叙述是方便的，除子即是这样的映射 $D:\Omega\to Z$，对于每个紧统 $K\subset\Omega$，使得 $D(z)\neq 0$ 的点 $z\in K$ 的个数是有限的（数 $D(z)$ 称为 D 在 z 的重数）．除子可以用形式和 $\sum k_\nu a_\nu$ 显式地表示出来，其中 $a_\nu\in\Omega$ 是使 $D(a_\nu)(=k_\nu)\neq 0$ 的点；在有限多项的情形下，数 $\sum k_\nu(=\deg D)$ 称为除子 D 的次数（degree of the divisor）．对于一个亚纯函数 f，它的除子 (f) 除了 f 的零点和极点外处处等于零．在这些点，除子的重数规定为零点或极点的阶（极点的阶是负的）．

Ⅱ．在离散（闭）子集 $\{a_1, a_2, \cdots\}\subset\Omega$ 的每个点都给定一个"重数"——整数 $k_\nu\neq 0$．要求寻找具有相应重数的零点和极点的亚纯函数，即 $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \cdots\}$ 内的这样的全纯函数 f：在点 $a_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ 的一个领域内，$f(z)(z-a_\nu)^{-k}$ 是全纯的并且不为零．在有限多个点 a_ν（同时 $\Omega\subset\mathbf{C}$）的情形下，例如 $f(z)=\prod(z-a_\nu)^{k_\nu}$ 便是这样的函数．这个问题的一般情形由 Weierstrass 定理（Weierstrass theorem）解决：在非紧的 Riemann 曲面 Ω 上，对于每个给定的除子 D，都有一个除子 (f) 等于 D 的亚纯函数 f．对于紧 Riemann 曲面 Ω，由一个非常数的亚纯函数 f 所确定的到 Riemann 球面里的全纯映射是一个分支覆盖，因而函数 f 取每个值相同次数；特别地，f 的零点个数等于它的极点个数（计算重数）．所以，为使问题Ⅱ在紧 Riemann 曲面上有解，条件 $\deg(f)=0$ 是必要的．一般地，这不是充分的；关于具有指定的除子的亚纯函数的存在性的一个充分必要条件由 Abel 定理（Abel theorem，见[2]）给出．

设 D 是紧 Riemann 曲面 Ω 上的一个除子．所有满足条件 $(f)+D\geqslant 0$ 的函数 $f\in M(\Omega)$ 组成一个有限维的线性空间 O_D（$\mathbf{C}$ 上的）；若 $\deg D<0$，则 $O_D=\{0\}$．

Riemann-Roch 定理（Riemann-Roch theorem）断言

$$\dim O_D-\dim O_{K-D}=\deg D-g+1,$$

其中 K 和 g 分别是所谓典范除子和 Riemann 曲面 Ω 的亏格．从这个关系可以得到许多存在性定理（若 $\dim O_{K-D}+\deg D>g$，则 $\dim O_D\geqslant 2$，因而 O_D 包含非常数的亚纯函数）．例如，在每个亏格 g 的紧 Riemann 曲面 Ω 上都有一个亚纯函数，它实现一个至多 $g+1$ 叶的分支覆盖 $f:\Omega\to\mathbf{C}\cup\{\infty\}$．

值分布论（value-distribution theory），即 Nevanlinna 理论，在单复变量的亚纯函数理论中占据了一个重要的地位，这个理论研究方程 $f(z)=a(a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\})$ 的根在趋向区域的边界时的分布．

多复变量的亚纯函数．设 Ω 是 $\mathbf{C}_n$ 中的一个区域（或一个 n 维复流形），又设 $P\subset\Omega$ 是一个余维为 1 的（复）解析子集（或空集）．在 $\Omega\setminus P$ 上定义的全纯函数 f 称为 Ω 内的一个亚纯函数，如果对于每个点 $p\in P$，都能在 Ω 内找到 p 的一个任意小的领域 U 和在 U 内全纯并且在 $O(U)$ 里无公共的不可逆因子的函数 φ，ψ，使在 $U\setminus P$ 内 $f=\varphi/\psi$．集合 $P=P_f$ 称为亚纯函数 f 的**极集**（polar set）．它的子集 $N=N_f$，由条件 $\varphi=\psi=0$ 局部定义，称为 f 的不确定性（点）集（set of (points of) indeterminacy）；N 是 Ω 的一个（复）余维 $\geqslant 2$ 的解析子集．在每个点 $p\in N$，函数 f 本质上是不确定的：当 $z\to p(z\in\Omega\setminus P)$，$f(z)$ 的极限值充满 Riemann 球面 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$．另一方面，在 $P\setminus N$ 的点上，极限 $\lim_{z\to p}f(z)=\infty$ 存在，并且在 $p\in P\setminus N$ 补充定义 $f(p)=\infty$ 后，便得 $\Omega\setminus N$ 到 Riemann 球面里的一个全纯映射．反之，如果 N 是 Ω 的一个任意的（可能是空的）余维 $\geqslant 2$ 的复解析子集，那么每个全纯映射 $f:\Omega\setminus N\to\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 在 Ω 上定义了一个亚纯函数，它在 $\Omega\setminus P$ 上等于 f，其中 $P=N\cup f^{-1}(\infty)$ 或者是 Ω 的一个余维为 1 的解析子集，或者是空集．于是，Ω 内的一个亚纯函数 f 可以定义为到 Riemann 球面里的一个全纯映射，它定义在余维 $\geqslant 2$ 的一个解析子集 $N_f\subset\Omega$ 的余集内．

亚纯函数的第三个完全局部化的定义（等价于上面的定义）是用层的语言叙述的．设 O 是 Ω 上的全纯函数芽层（sheaf），对于每个点 $z\in\Omega$，用 M_z 表示环 O_z（层 O 在 z 上的茎）的分式域．那么，$M=\bigcup M_z$ 自然地具有一个域层结构，称为 Ω 内的**亚纯函数的芽层**（sheaf of germs of meromorphic functions）．Ω 内的一个亚纯函数定义为 M 的一个整体截影，即一个连续映照 $f:z\to f_z$，使对所有的 $z\in\Omega$ 有 $f_z\in M_z$．集合 P_f 和 N_f 的定义如下：设 $f_z=\varphi_z/\psi_z(\varphi_z, \psi_z\in O_z, \psi_z\neq 0)$，这时可以假定 φ_z 和 ψ_z 是互素的，即它们在 O_z 里没有公共的不可逆因子；那么，若 $\psi_z(z)=0$，则 $z\in P_f$，而若 $\psi_z(z)=\varphi_z(z)=0$，则 $z\in N$．这样定义的亚纯函数 f 在点 $z\notin P$ 的值是 $\varphi_z(z)/\psi_z(z)$．

如同一维的情形，Ω 内的所有亚纯函数的全体关于按点代数运算继之在可去奇点处重新定义后成一个域 $M(\Omega)$．

亚纯函数 f 的零点集的闭包 $Z=Z_f$，即集合 $\{z\in\Omega\setminus P_f: f(z)=0\}$ 的闭包，是 Ω 的一个余维为 1 的解析子集（或空集）；它的不确定性集是 $N=Z\cap P$．在 Z_f 和 P_f 上可以定义亚纯函数 f 的零点（或极点）的级（重数）．若 p 是解析集 $Z\cup P$ 的一个正则点，则在 p 的某个领域 U 内，集合 $(Z\cup P)\cap U$ 是连通的，并且由方程 $g=0$，$g\in O(U)$ 所确定，其中 $dg\neq 0$ 在整个 U 上成立．因此，存在最大的整数 $k(p)$，使得函数 $fg^{-k(p)}$ 有一个到 U 的全纯开拓；这个数称为亚纯函数

f 在点 p 的阶（若 $p \in Z$，它是零点 p 的阶（order of the zero）；若 $p \in P$，它是极点 p 的阶（order of the pole）），函数 $k(p)$ 在 $Z \cup P$ 的正则点集上是局部常数．所以，Ω 内的每个亚纯函数，都可以附上它的除子 $(f) = \sum k_v A_v$，其中 A_v 是 $Z_f \cup P_f$ 的不可约分支，k_v 是 f 在 $Z \cup P$ 中属于 A_v 的正则点的重数（阶）（可供选择记号：$(f) = D_f = \Delta_f$，等）．在紧复流形上，亚纯函数被它的除子唯一确定到相差一个常数倍．

在一维情形下由 Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理所解决的两个问题在高维时以第一（加性）和第二（乘性）**Cousin 问题**（Cousin problems）而知名．由于极集 P_f 的复杂的结构，亚纯函数的主要部分的概念一般是不定义的，因而，Cousin 问题是以下述方式叙述的．

Ⅰ．设已给定流形 Ω 的一个开覆盖 $\{U_v\}$ 和在每个 U_v 内的一个亚纯函数 f_v，要求寻找亚纯函数 $f \in M(\Omega)$，使得对所有的 v 有 $f - f_v \in O(U_v)$.

Ⅱ．对于 Ω 上一个给定的除子 $D = \sum k_v A_v$，找出使得 $(f) = D$ 的亚纯函数 $f \in M(\Omega)$.

这些问题在高维情形的可解性条件比一维情形苛刻得多．

用两个全纯函数的商表示一个亚纯函数的问题称为 Poincaré 问题（Poincaré problem）．强 Poincaré 问题（strong Poincaré problem）是把亚纯函数表示为全纯函数的商，而这两个全纯函数在每个点 $z \in \Omega$ 的芽是在 O_z 里互素的．Poincaré 问题在一个紧的连通复流形上是不可解的，如果在这个复流形上存在非常数的亚纯函数．不过，这个问题在每个区域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 内是可解的，而且事实上在 **Stein 流形**（Stein manifold）上的任意区域内都是可解的（见［7］）．强 Poincare 问题的可解性可由 Cousin 问题Ⅱ的可解性推出（反之则不然）．

函数 $f_1, \cdots, f_k \in M(\Omega)$ 称为代数相关的（algebraically dependent），如果存在 k 个变量的复系数多项式 $F \not\equiv 0$，使得 $F(f_1(z), \cdots, f_k(z)) \equiv 0$ 在函数 f_v 的公共定义域内成立．Ω 上代数无关的亚纯函数的最大个数称为域 $M(\Omega)$ 的超越次数（transcendence degree）．在紧流形上，这个个数不超过流形的（复）维数（Siegel 定理（Siegel theorem））；而且，域 $M(\Omega)$ 有有限个生成元（见［6］）．

在一些具体的流形上，亚纯函数可以有一些补充的性质．例如，在复射影空间 $\mathbf{C}P^n$ 内，任何非常数亚纯函数的不确定性集都是非空的．射影代数簇上的每个亚纯函数都是有理的，即可以表示成关于齐次坐标的齐次多项式的商 p/q．在代数簇上，域 $M(\Omega)$ 的内容是很丰富的．另一方面，存在这样的复流形（例如，某些非代数环面），在其上的每个亚纯函数都是常数．Riemann-Roch 定理到高维的推广成效甚微，而关于种种亚纯函数类的存在性定理只在某几类复流形上才能得到．

亦见 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem）；**Mittag-Leffler 定理**（Mittag-Leffler theorem）；**Riemann-Roch 定理**（Riemann-Roch theorem）．

参考文献

［1］Nevanlinna，R.，Analytic functions，Springer，1970（译自德文）．

［2］Forster，O.，Lecture on Riemann surfaces，Springer，1981（译自德文）．

［3］Hayman，W.，Meromorphic functions，Clarendon Press，1964．

［4］Шабат，Б．В．，Введение в комплексный анализ，ч．1－2，М．，1976．

［5］Hörmander，L.，An introduction to complex analysis in several variables，North-Holland，1973．

［6］Шафаревич，И．Р．，Основы алгебраической геометрии，М．，1972（英译本：Shafarevich，I．R．，Basic algebraic geometry，Springer，1977）．

［7］Kajiwara，J．and Sakai，E．，Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions，*Nagoya Math．J．*，**29**（1967），75－84．

Е．М．Чирка 撰

【补注】 亚纯函数的 Abel 定理（Abel theorem on meromorphic functions）叙述如下．设 S 是一个紧 Riemann 曲面．使得除子 D 成为一个亚纯函数的除子的充分必要条件是：存在一个奇异 1 链 γ（见**流形上的积分法**（integration on manifolds）），它的边界是 D，$\partial\gamma = D$，并且使得 $\int_\gamma \varphi = 0$ 对 S 上的所有第一类微分（见 **Abel 微分**（Abelian differential）和**流形上的积分法**（integration on manifolds））成立．Abel 定理的另一个叙述亦见 **Jacobi 簇**（Jacobi variety）．

参考文献

［A1］Springer，G.，Introduction to Riemann surfaces，Addison-Wesley，1957，Sect．10－7．

［A2］Farkas，H．M．and Kra，I.，Riemann surfaces，Springer，1980，Sect．Ⅲ．6．

陈怀惠 译

亚纯映射［**meromorphic mapping**；**мероморфное отображение**］，复空间的

亚纯函数（meromorphic function）概念的一个拓广．令 X 和 Y 为**复空间**（complex space），令 A 为 X 的一开子集，使得 $X \setminus A$ 是一无处稠密的解析子集（见**解析集**（analytic set）），并假设给定一**解析映射**（analytic mapping）$f: A \to Y$．那么，f 称为 X 到 Y 内的一个亚纯映射（meromorphic mapping），如果 f 在 $X \times Y$ 内的图 A^* 的闭包 Γ_f 是 $X \times Y$ 的一个解析子集，并且射影 $\pi: \Gamma_f \to X$ 是一真映射（亦见**真态射**（proper morphism））．集合 Γ_f 称为亚纯映射 f 的

图(graph of the meromorphic mapping f). 映射 $\pi:\Gamma_f \to X$ 是满射并定义不可约分量的集合的一个一一映射. 如果 $A_f \subset X$ 表示 f 能够拓展为一解析映射的最大开子集, 那么 $I_f = X \setminus A_f$ 是 X 的一无处稠密的解析子集, 称为 f 的不确定性集合(set of indeterminacy of f). 集合 $\pi^{-1}(A_f) = A_f$ 是开的并在 Γ_f 内稠密; 而且, $A^* \subseteq A_f^*$ 和 $\Gamma_f \setminus A_f^*$ 是解析的并在 Γ_f 中无处稠密. 限制 $\pi: A_f \to A_f$ 是解析空间的一个同构. 如果 X 是一正规复空间(见**正规解析空间**(normal analytic space)), 那么 $\operatorname{codim} I_f \geq 2$ 和 $\dim_z \pi^{-1}(x) > 0$, 当且仅当 $z \in \pi^{-1}(x)$ 和 $x \in I_f$. 如果 X 不是正规的, 即使 $x \in I_f$, $\pi^{-1}(x)$ 也可以由有限个点构成. 当 $Y = \mathbf{C}P^1$ 时, 亚纯映射的概念约化为正纯函数的概念.

令 $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$, $k:X \to Z$ 为复空间的亚纯映射. 映射 f 和 g 的合成 $g \circ f$ 是有定义的并且等于 k, 如果存在 X 的一个开稠密子集 U, 使得 $U \subseteq A_f$, $f(U) \subset A_f$, $U \subset A_0^k$, 并且 $k|_U = g \circ f|_U$. 一亚纯映射 $f: X \to Y$ 称为双亚纯的(bimeromorphic), 如果存在一亚纯映射 $g: Y \to X$, 使得 $f \circ g = 1|_Y$ 和 $g \circ f = 1|_X$. 两个双亚纯映射 $X \to Y$ 和 $Y \to Z$ 的合成总是有定义的.

参考文献

[1] Andreotti, A. and Stoll, W., Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, Springer, 1971.

[2] Remmert, R., Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, *Math. Ann.*, **133** (1957), 3 328-370.

Д. А. Пономарев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitney, H., Complex analytic varieties, Addison-Wesley, 1972, Set. 6. 3.

钟同德 译

Mersenne 数[Mersenne number; Мерсенна число]

形如 $M_n = 2^n - 1$ 的素数, 其中 $n = 1, 2, \cdots$. M. Mersenne 在 17 世纪研究了这类数. 仅当 n 取素数值时, 数 M_n 才能是素数. 对于 $n = 2, 3, 5, 7$, 得到 $M_n = 3, 7, 31, 127$. 但是, 对于 $n = 11$, 数 M_n 是合数. 对于大于 11 的素数 n, 在数 M_n 中既有素数, 又有合数. 由于数 M_n 增长很快, 不易进行研究. 考虑具体的数 M_n, 已经证明, 例如, M_{31}(L. Euler, 1750) 和 M_{61}(И. М. Первушин, 1883) 都是 Mersenne 数. 使用计算机求出了另外一些非常大的 Mersenne 数, 其中包括 M_{11213}. 是否存在 Mersenne 数的无限集合, 仍然是一个未解决的问题(1989). 这个问题同完满数的存在性问题密切相关.

参考文献

[1] Hasse, H., Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950.

[2] Бухштаб, А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 目前(1989)已经知道, 对于下列 n 值 M_n 是 Mersenne 数: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 132049, 216091, 见[A1].

Lucas 检验(Lucas test)提供了一种证明这些数是素数的非常简单的方法. 这个检验如下所述(见[A2]): 定义 $S_1 = 4$ 和 $S_{k+1} = S_k^2 - 2$, $k \geq 1$. 这时, M_n 是素数, 当且仅当 M_n 可以整除 S_{n-1}(n 为素数).

参考文献

[A1] Riesel, H., Prime numbers and computer methods for factorisation, Birkhäser, 1986.

[A2] Shanks, D., Solved and unsolved problems in number theory, Chelsea, reprint, 1978.

【译注】 很多文献中, 广义地定义数 $M_p = 2^p - 1$(p 为素数)为 Mersenne 数.

张鸿林 译

亚 Abel 群[meta-Abelian group 或 metabelian group; метабелева группа]

导出长度为 2 的**可解群**(solvable group), 即具有交换换位子群(commutator subgroup)的群. 全体亚 Abel 群的族构成一个由等式

$$[[x, y], [z, t]] = 1$$

定义的簇(见**群的簇**(variety of groups)). 人们对于有限生成亚 Abel 群有特殊的兴趣. 它们都是剩余有限的(见**剩余有限群**(residually-finite group))且满足正规子群的极大条件(见**链条件**(chain condition)). 作为这类群的一个推广, 对其某个交换正规子群的商群为**多循环群**(polycyclic group)的有限生成群也具有类似的性质.

在俄文的数学文献中, 亚 Abel 群有时也指一个幂零类 2 的**幂零群**(nilpotent group).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

[2] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп. 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1980.

王 杰 译 石生明 校

元语言 [meta-language; метаязык]

一种逻辑数学语言，用于建立元理论（meta-theory）. 更一般地说，元语言是一种非形式化的语言，用来陈述元数学（meta-mathematics）的命题.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

沈复兴 译

元逻辑 [meta-logic; металогика]

在某种**元理论**(meta-theory)的框架内对形式公理理论进行讨论所使用的逻辑. 在数学基础中，人们时常对元理论加上一些特殊的要求，这关系到否定某些通常的数学抽象，目的是改进元理论在哲学上的可接受性. 例如，**实无穷的抽象**(abstraction of actual infinity)，与**悖论**(antinomy)的出现相关的抽象推理等都是受到批评的数学抽象. 一般说来，这就导致使用不同于经典逻辑的逻辑，例如**模态逻辑**（modal logic）或者当元理论是建立在**直觉主义**（intuitionism）框架中时，使用直觉主义逻辑.

另一方面，在**证明论**（proof theory）中，我们用不加任何限制的传统数学方法来研究直觉主义逻辑和其他非经典逻辑的理论，例如用集合论方法来研究它们. 在这种情况下，经典逻辑就起着元逻辑的作用.

А. Г. Драгалин 撰 卢景波 译

元数学 [meta-mathematics; метаматематика]

对研究形式理论（演算）所用的全部数学理论的总称. 研究某个特定的形式理论的元数学就称之为这一形式理论的**元理论**（meta-theory）.

在狭义的情况下，“元数学”这一术语也被当作**证明论**（proof theory）的同义语.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rasiowa, H. and Sikorsky, R., The mathematics of metamathematics, PWN, 1963.

沈复兴 译

元定理 [meta-theorem; метатеорема]

在一定的**元理论**（meta-theory）中得到的关于形式公理理论的命题.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】 在**范畴**（category）论中，“元定理”这个术语已经有了更特殊的意义：它所指的是这样一种形式的结论，如果 P 是关于一种给定类型的范畴（例如 Abel 范畴或者正则范畴）的任何一个命题（用给定的形式语言表示），则 P 在某个特定的范畴中（例如 Abel 群的范畴或集合的范畴中）成立，蕴涵它在这种给定类型的所有的范畴中都成立. 这一类结果一般都由嵌入定理推出，嵌入定理指的是给定类型的任意一个范畴都能够（用一种结构保持方法）嵌入所考虑的特殊范畴（的幂）中去.

参考文献

[A1] Freyd, P., Abelian categories, Harper & Row, 1964.

[A2] Freyd, P. and Scedrov, A., Geometric logic, North-Holland, 1989.

沈复兴 译

元理论 [meta-theory; метатеория]

试图对某一形式公理理论进行描述和定义以及对其性质进行研究的数学方法的全体. 元理论是形式化方法的重要组成部分，该方法是数理逻辑中最重要的方法之一.

此方法的本质可以扼要地叙述如下：假定对某一有意义的数学理论 T_1 感兴趣. 这个理论可能是很复杂的，其**语义学**（semantics）直观上不是十分清楚的（例如，T_1 可以是集合论、数学分析、二阶算术，等等）. 人们感兴趣的是，T_1 是否无矛盾以及是否同某一数学原理（例如**选择公理**（axiom of choice））相容. 为了弄清这个问题，首先构造一个精确的逻辑数学语言 Ω，使得 T_1 中所有感兴趣的数学命题都可以用 Ω 的公式加以描述. 然后，把在此理论中用以导出新事实的逻辑原理形式化为公理和推导法则；这些是用来由公理和已经推出的公式以推演 Ω 中的新公式. 这样就构成一个形式系统（formal system）（或换句话说，一个形式公理理论（formal axiomatic theory），一个演算（calculus））$\widetilde{T}_1$，它精确地描述人们感兴趣的理论 T_1 的某一个片段. 这样做的一个基本想法是，在描述 $\widetilde{T}_1$ 时不必去探究（可能非常复杂）$\widetilde{T}_1$ 的语义. 演算 $\widetilde{T}_1$ 由纯符号系统的简单规则构成，并且对其运算的理解不需要探究在其中可推出的公式的意义.

这种方法首先开辟了数学地陈述关系到 $\widetilde{T}_1$ 中某些公式的可推导性问题的可能性，其次是用某一具有意义的理论 T_2 研究 $\widetilde{T}_1$ 的可能性. 在这种情况下，$\widetilde{T}_1$ 叫做对象理论（object theory），而 T_2 是它的元理论（meta-theory）.

从数学基础的观点来看，重要的是 T_2 比 T_1 联系到更可靠的理论，因此用 T_2 研究 $\widetilde{T}_1$ 可以视为用更令人信服的理论 T_2 作为对 T_1 的尚未明了的语义部分的实质性澄清及合法化. 在这方面，人们特别倾向于选择数学中反映有限性的那些部分作为充分可靠的元理论，以及选择在直觉主义或构造数学的框架内形成的定理. 但是，在数学基础范围之外，这个限制是多余的. 如果人们对 T_1 的直观明晰性不感兴趣，而仅仅对 $\widetilde{T}_1$ 中某些公式的是否可推导出这样一些简单问题感兴趣，自然是用已经建立的任一令人信服的数学理论 T_2 去研究 $\widetilde{T}_1$，不必对 T_2 附加任何先验的限制.

人们也可以类似地进一步通过构造一个形式系统

$\widetilde{T}_2$以研究元理论 T_2，以及用某一个元元理论（meta-meta-theory）T_3研究 $\widetilde{T}_2$，**证明论**（proof theory）中的研究就具有这种性质．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985）．

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rasiowa, H. and Sikorsky, R., The mathematics of metamathematics, PWN, 1963.

[A2] Suppes, P., Introduction to logic, v. Nostrand, 1957.

卢景波 译

亚循环群[**metacyclic group**; **матациклическая группа**]

具有一个循环**正规子群**（normal subgroup）使得关于该正规子群的商群亦为**循环群**（cyclic group）的群．其阶无平方因子（即阶不能被自然数的平方整除）的有限群是亚循环的．**多循环群**（polycyclic group）是亚循环群的推广．　　А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 有时亚循环这个术语被用来指一类较为特殊的群，其导群和导商群皆为循环的．

参考文献

[A1] Hall, M. Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1982）．

王 杰 译　石生明 校

气象学中的数学问题[**meteorology, mathematical problems in**; **метеорологии математические задачи**]

大气的物理学、化学和生物学领域中，借助于数学方法进行求解的问题．气象学中的数学问题，大多数以其复杂性以及所涉及信息处理的庞大数量为特征．因此，为了解决这些问题，在应用解析方法的同时，还广泛应用计算机上的数值模拟方法．

大气物理学的数学问题，主要是分层流体的流体热力学问题；这些分层流体具有与众不同的特色，它们是由地球的自转、地形和地温的不均匀性产生的．数学模型的理论基础是质量、动量和能量的守恒定律，以及描述发生于大气中的过程和大气与海洋及地表相互作用的热力学和化学的定律．用数学术语表达，这是一个非线性偏微分方程组，必须在外能源是太阳的假设下来求解．除了描述大气的状态和行为的函数（温度、压强、密度、风速等等）以外，这些方程还包含一些参数．所谓参数，通常意味着方程的系数，而在非定态问题中，还包括描述大气状态、地面特性以及外源等的函数的初值．初值条件根据真实物理系统“大气 - 地球”中的测量结果来确定．数学模型建立的过程包括几个阶段：数学模型的定性分析（问题的适定性，用物理上合理的函数求解的可能性，等等），其离散模拟的构造，离散模型在计算机上实现的计算算法和程序的发展，模型对参数变化的敏感性分析，基于先验信息和测量的参数估计，等等．数学模型的结构依赖于大气中所研究过程的时空尺度以及描述它们的方法．

数值模拟是解决天气预报和气候理论中问题的基本方法之一．具有特别重大意义的是，在天然和人为因素影响下和在人类活动对环境的影响的估计下，气候变化研究中的数值模拟问题．对于给定一类问题，物理模型的选择和证实与由大气、海洋、雪被、大陆和生物圈组成的物理系统（通常称为气候系统）的稳定性、可预报性和敏感性的基本问题的深入研究紧密相联系．可预报性确定对物理过程的预报的充分决定论性方法的可能性，同时确定，对于气候系统或其局部的行为的描述和预报，构造数学模型的可能性，敏感性表征系统相对于外界影响和内部参数变化的稳定程度．如果将人为因素的作用解释为对系统的微扰，则对其影响的估计可以认为是敏感性理论的一个应用方面．

短期（几小时直至几天的）天气预报问题，是寻求在给定边值条件和初值条件下大气的流体热力学非线性偏微分方程组的非定态解．在长期天气预报问题中，确定的是大气行为的某些一般性或平均的特征．一般大气环流的数值实验包括在理想初值条件下在很长一段时期对相应方程组求积分．寻求定态解或一年期解是气候背景下的数值实验．

大气过程具有波结构．各种类型大气波的构造通过应用按小参数幂的渐近级数展开的非线性力学方法来实现．线性化模型大气波的数学理论已经得以充分发展．在流体动力学方程组的解中分离出了几类波（声波、引力波、Rossby 波）．在非线性波之中，只有个别例子曾经研究过（Gerstner 引力波、非线性 Rossby 波等等）．为了阐明大气运动的结构，广泛应用数值方法来求解流体热力学算子及其离散模拟的本征值和本征函数问题．大气声学的数学问题是波在分层介质中传播的研究．这里应用解析方法（WKB 方法，等等）和数值方法．对大气波的流体动力学不稳定性及各种尺度波的相互作用的深入研究具有重要作用，特别是在大气中气旋和气锋的动力学模拟研究方面．

大气光学领域中，出现条件适定问题类中的特定逆问题．一个典型例子是按卫星遥测探空数据恢复大气参数的问题．大气中光的多次散射过程，曾经用各种渐近和数值方法研究过．对于大气中辐射转移方程的求解，应用数值方法，特别有效的是**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method）．

气象学的许多理论和应用问题与大气湍流问题相联系．大气中湍流尺度谱非常宽广．在大气与海洋和地面的相互作用中，在大气杂质的扩散中，在飞机和

其他航空器的颠簸中，在风压下建筑物的振动中，在来自地面源和宇宙源的光信号和无线电信号的涨落中等等这样一些问题中，湍流都起着决定性作用．关于湍流数学模型和参数化法的创立，有好几种途径．

在解决气象学问题时，出现许多问题，它们在数学物理的复杂问题中具有典型性．这首先是输入数据的准备（客观分析，测量网上**时间序列**（time series）的统计处理，时空分析和气象场的相容性），以及还有应用敏感性理论和最优化的方法来按测量数据鉴定模型的参数．气象学中的数学模型具有大量自由度，因而出现约化的问题（例如，通过参数化法或通过考虑到信息性广义变量的应用）．

属于气象学中的数学问题的还有与人类活动对大气的影响的研究和估计相联系的问题．这些问题是：适当考虑到人为因素下对市镇和工业区的微气候模拟问题，工业废料对大气污染的估计问题，地表变化对大气的动力学和热行为的影响的估计问题，等等．选择一个有效的经济政策的问题，通过最优化理论的方法应用于气象学问题而予以定形．特别是，适当考虑到环境污染的卫生许可规范下，工业综合体的最优布局问题，可以数学上表述为约束变分问题．

一个综合数学问题，实际上包括上面列出的所有那些问题，出现在监视或实现局域尺度上或总体尺度上跟踪大气过程的步骤的问题方面．

参考文献

[1] Белов, П. Н., Практические методы численного прогноза погоды, 2 изд., Л., 1967.

[2] Блинова, Е. Н., 《Докл. АН СССР》, **39** (1943), 7, 284-287.

[3] Гандин, Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963.

[4] Голицын, Г. С., Введение в динамику планетных атмосфер, Л., 1973.

[5] Кибель, И. А., Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., 1957.

[6] Кондратьев, К. Я., Актинометрия, Л., 1965.

[7] Лайхтман, Д. Л., Физика пограничного слоя атмосферы, 2 изд., Л., 1970.

[8] Lorenz, E. N., The nature and theory of the general circulation of the atmosphere, Techn. Papers 115, WMO, 1967.

[9] Малкевич, М. С., Оптические исследования атмосферы со спутников, М., 1973.

[10] Марчук, Г. И., Численные методы в прогнозе погоды, Л., 1967.

[11] Матвеев, Л. Т., Основы общей метеорологии. Физика атмосферы, Л., 1965.

[12] Монин, А. С., Яглом, А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1-2, М., 1965-1967.

[13] Нелинейные системы гидродинамического типа, М., 1974.

[14] Thompson, P. D., Numerical weather analysis and prediction, MacMillan, 1961.

[15] Эккарт, К., Гидродинамика океана и атмосферы, пер. с англ., М., 1963 (译自英文).

[16] Юдин, М. И., Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды, Л., 1963.

Г. И. Марчук 撰

【补注】 处理大量信息和求解大耦合微分方程组的数值格式的发展，形成数学对气象学的主要贡献．这个发展从 L. F. Richardson 的数值积分步骤开始（[A9]），并在像博尔德的国家大气研究中心（科罗拉多，美国）和雷丁的欧洲中期天气预报中心（英国）这样一些国家的和国际的研究所达到现在的发展程度，见[A3]．近来，曾经发展了使观测数据与该数据所指模型相一致的方法（[A1]）．数学家从气象学学习到，在三个或三个以上耦合常微分方程的方程组中可能出现一个本质非线性现象．那就是可能出现**奇异吸引子**（strange attractor）．它是由 E. N. Lorenz（[A7]）在大气的局地竖向环流的大大截短的谱模型中首先注意到的．全球环流的谱模型自那时以后曾经广泛研究过，关于其综观见[A4]和[A2]．大气物理学的一般理论在[A5]和[A6]中可以找到，而 J. Pedlosky（[A8]）的引论是更加着重数学的．参考文献[A10]和[A11]讨论与气象学问题有关的边界层现象和湍流．

参考文献

[A1] Bengtsson, L., Ghil, M. and Källén, E. (eds.), Dynamic meteorology: data assimilation methods, Springer, 1981.

[A2] De Swart, H. E., Low-order spectral models of the atmospheric circulation. A survey, *Acta Applic. Math.*, **11** (1988), 49-96.

[A3] Seminar: Numerical methods for weather prediction, European Centre for Medium-Range Weather forecasts, Berkshire, Reading, 1984.

[A4] Ghil, M. and Childress, S., Topics in geophysical fluid dynamics: Atmospheric dynamics, dynamo theory and climate dynamics, Springer, 1987.

[A5] Gill, A., Atmosphere-ocean dynamics, Acad. Press, 1982.

[A6] Holton, J. R., An introduction to dynamic meteorology, Acad. Press, 1979.

[A7] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atom. Sci.*, **20** (1963), 130-141.

[A8] Pedlosky, J., Geographical fluid dynamics, Springer, 1979.

[A9] Richardson, L. F., Weather prediction by numerical process, Cambridge Univ. Press, 1922.

[A10] Stull, R. B., Introduction to boundary layer meteorology, Kluwer, 1988.

[A11] Tennekes, H. and Lumley, J. L., A first course in turbulence, M.I.T., 1972.

[A12] Haltiner, G. J. and Williams, R. J., Numerical Weather prediction, Wiley, 1980.

徐锡申 译

边界积分法 [**method of boundary integration**; **контурного интегрирования метод**], 围道积分法 (method of contour integration)

复变函数几何理论的重要方法，用这种方法能得到描述单叶和多叶函数极值性质的各种不等式，以及保形映射理论中区域映射函数（基本区域函数）间的等式. 方法主要利用函数性质把已知区域保形地映射到各典型区域. 利用这类映射人们可能构造具有下述边界性质 (boundary property) 的区域函数：在区域的每个边界分支上，函数值与另一个这种函数的复共轭值相差一个加性常数. 边界积分法基本上包括下面的内容：

所研究的积分是取在已知区域的整个边界上（边界一般取为有限段简单闭解析曲线）. 选取这个积分使其被积函数为包含具有上述边界性质的因子，而且在应用这个性质之后，积分值可用留数定理得到（见**围道积分法** (contour integration, method of), **Cauchy 积分定理** (Cauchy integral theorem)). 另一方面，假如原来的积分值或其符号已经知道，则作为结果人们可以得出所用函数之间的一些关系或联系着它们的若干不等式. 通常能够使用上述方法的边界积分是作为根据非负二重积分 Green 公式所作变换的一个结果，即在给定区域上正则的某函数的导数模平方的积分. 这样一来就把边界积分法与**面积法** (area method) 联系起来了. 使用边界积分法，可得下面有关结果：多连通区域间单叶保形映射的**畸变定理** (distortion theorems) （见[1]，[2]）；单叶函数系数的充要条件（见[3]）；有关保形映射理论中基本区域函数的若干恒等式（见[4]）.

在研究单叶函数时边界积分法还采用下面形式. 假设，例如 B 是 w 平面内边界 C 由有限简单闭解析曲线组成的区域；假设 $S(w)$ 是在除去 B 的有限个点以外的整个 w 平面内调和的函数；又设 $p(w)$ 为具有下面性质的函数：差 $S(w)-p(w)$ 在区域 B 内调和，闭区域上连续，且 $p(w)|_C=0$，则

$$\int_C S\frac{\partial p}{\partial n}\,ds\leqslant 0,$$

这里 $\partial/\partial n$ 表示 B 的外法向微分. 若 $\sigma(w)$ 和 $q(w)$ 为解析函数，$S=\mathrm{Re}\,\sigma$，$P=\mathrm{Re}\,g$，则上面不等式可以写成如下形式

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\int_C(\sigma-q)\sigma' dw\right\}\leqslant 0.$$

此不等式中的积分可由留数定理计算. 选取与所论函数有适当联系的各种函数 $S(w)$ 和 $p(w)$，就可能得出单叶函数的许多新的不等式（见[5]－[7]）.

边界积分法也成功地用来研究非单叶保形变换. 于是，使用这种方法已经得到满足一些附加条件的多连通区域亚纯函数的许多新极值性质（见[8]）；在圆盘上 p 叶函数的 Голузин 面积定理诸推广工作已经完成：在多连通区域对有几个极点的情形，以及对适当扩充意义下的 p 叶函数（见[9]）. 上面提到的区域函数与 **Bergman 核函数** (Bergman kernel function) 关系密切，用边界积分法得到的结果常常可以用它们表示. 因此，边界积分方法和解析函数标准正交系理论之间也有一定的联系.

参考文献

[1] Grunsky, H., Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein-und mehrfachzusammenhängender Bereiche, *Schriften Math. Sem. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin* (1932), 95 – 140.

[2] Голузин, Г. М., 《Матем. сб.》, **2** (1937), 1, 37 – 63.

[3] Grunsky, H., Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen, *Math. Z.*, **45** (1939), 26 – 61.

[4] Garabedian, P. R. and Schiffer, M., Identities in the theory of conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 2, 187 – 238.

[5] Nehari, Z., Some inequalities in the theory of functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 2, 256 – 286.

[6] Аленицын, Ю. Е., 《Матем. сб.》, **39** (1956), 3, 315 – 336.

[7] Аленицын, Ю. Е., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **94** (1967), 4 – 18.

[8] Meschkowski, H., Beiträge zur Theorie der Orthonomalsysteme, *Mat. Ann.*, **127** (1954), 107 – 129.

[9] Аленицын, Ю. Е., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **37** (1973), 5, 1132 – 1154.

[10] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966 (中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956).

Ю. Е. Аленицын 撰

【补注】 区域映射函数 (mapping functions) 或基本区域函数 (fundamental domain functions) 是由已知区域到某些标准区域上的单叶保形映射，例如从一个单连通区域到单位圆盘（见 **Riemann 定理** (Riemann theorem)）或从双连通区域到一个标准的圆环（[10]）.

张宝琳、袁国兴 译

特征线法 [**method of characteristics**; **характеристик метод**]

双曲型方程数值积分的一种方法. 在双曲区域中，有初始方程的一个线性组合，其中只有沿特征曲

面的内导数．这时，要解的方程可充分地简化．在特征线方法中，在特征网格上计算解，而特征网格是在计算过程中构造的，所以解的依赖区可以精确地确定．对特征线法，已经证明了解的存在性和收敛性．特征线法应用最广的领域是求解连续介质力学问题（见[1]）．例如，特征形式的方程

$$\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial p}{\partial x} \pm \rho c\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \quad (2)$$

是气体动力学传统方程的线性组合：连续性方程，动量方程和能量方程．其中 ρ 是密度，u 是速度，J 是单位质量的内能，$p=p(\rho, J)$ 是压力，T 是温度，x 是空间坐标，t 是时间．在区域 $t>0$ 中，对时刻 $t=0$ 给定的数据，求解 Cauchy 问题．把方程

$$dJ - \frac{p(\rho, J)}{\rho^2}d\rho = 0$$

的积分 $S(\rho, J) =$ 常数称为熵．那么（1）变为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (1')$$

（1′）和（2）的左边有导数 $dS/dt, dp/dt, du/dt$，它们取在沿如下的所谓**特征线**（characteristics）方向

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (3)$$

和

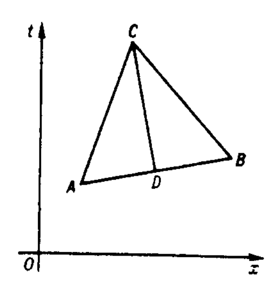
$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \quad (4)$$

上．方程组（1），（2）有三族实特征线．沿特征线（3），关系式

$$dS = 0$$

成立，而沿特征线（4），关系式

$$dp \pm \rho c du = 0 \quad (5)$$



成立．经过点 A（见上图），在 t 增长的一边通过一条特征线（4）

$$\frac{x - x_A}{t - t_A} = u_A + c_A.$$

经过靠近 A 右面的点例如 B，通过另一族的一条特征线（4）

$$\frac{x - x_B}{t - t_B} = u_B - c_B,$$

其中 C 是这两条特征线的交点．当用差分代替沿特征线成立的微分关系式（5）时，得到代数方程组

$$(p_C - p_A) + \rho_A c_A(u_C - u_A) = 0,$$

$$(p_C - p_B) - \rho_B c_B(u_C - u_B) = 0,$$

由上面的方程组，可以确定 p_C 和 u_C．从 C 引特征线（3）

$$\frac{x - x_C}{t - t_C} = u_C,$$

使它与 AB 相交于点 D．可以用点 A 和点 B 之间的插值确定在点 D 处熵 S 的值（此处 $S_C = S_D$）．由方程

$$p(\rho_C, J_C) = p_C,$$

$$S(\rho_C, J_C) = S_C,$$

可以求出在点 C 处内能 J_C 和密度 ρ_C 的值．当已知 A 和 B 两个点上的值时，可以对大的 t 求出点 C 上的解．这种求解过程是对每一对点重复进行的．因此，用新的点 C 替代原来的点 A 和 B，可以把计算推进到 t 的下一个时间步．这样，计算一直进行到要求的时刻 t．但是，因为气体动力学方程是非线性方程，如果一族特征线彼此相碰或相交，在某个时刻计算可能会中止．

这样，所叙述的差分格式是一阶精度（一种类似的解常微分方程的折线 Euler 方法）．可以用重复计算等来提高精度．

可以用特征线法解双曲区域中的定常多维问题（超声流气动力问题）．也可以确定单族特征线相交或相碰处二次激波的位置．用特征线法，仅能处理具有间断少的问题，因为在奇性累积的过程中，计算变得冗长．特征线法的计算由若干基本问题组成：内点的计算，激波点的计算，流绕物体运动的计算，等等．

可以构造特征线法的数值格式，使之可能一层一层计算，并称它为**网格特征线法**（grid-characteristic method）（见[2]）．

参考文献

[1] Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик, М., 1961.

[2] Magomedov, K. M. and Kholodov, A. S., The constructions of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations, *USSR Math.*

Math. Comp., **9** (1969), 2, 158 − 176 (*Zh. Vyshch. Mat. i Mat. Fiz.* **9** (1969), 2, 373 − 386).

Ю. М. Давыдов 撰

【补注】 特征线法可追溯到 J. Massau (见 [A2]).

参考文献

[A1] Ames, W. F., Numerical methods for partial differential equations, Acad. Press, 1977.

[A2] Massau, J., Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux derivées partielles, F. Mayer-van Loo, Ghent, 1899.

袁国兴、张宝琳 译

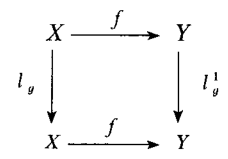
扩张和限制方法 [method of extensions and restrictions; продолжений и охватов метод]

研究光滑流形及其子流形上各式各样**微分-几何结构** (differential-geometric structure) 的一种方法. 这种方法的核心内容是对下述运算的一种微分代数法则, 这种运算以一种不变的 (即与坐标无关的) 方式对给定的结构赋于一个与之有内在关系的结构, 比如, 其**微分不变量** (differential invariant). 历史上, 它起源于**活动标架法** (moving-frame method), 而后者是以与坐标无关的方式研究齐次空间或带有联络的空间的子流形的一种方法. 后来, 扩张与限制方法也被用来研究任意**纤维空间** (fibre space) 的几何. 活动标架法是用对应主纤维空间的一系列限制来构造典则标架场及未知结构的微分不变量. 扩张与限制方法的目的则与之截然不同, 它的目的是构造不变量以及与坐标无关的结构而不必限制标架丛的主纤维. 这种方法的一个特例是标架的典则化过程.

设 G 是 **Lie 群** (Lie group), $K(G)$ 为允许 G 左作用的 G 空间的类. G 限制 (G-restriction) 是一个光滑的满映射

$$f: X \to Y, X, Y \in K(G)$$

使得对任何 $g \in G$, 下面的图表交换:



这里 l_g 和 l_g^1 是 g 在 G 空间 X 和 Y 上决定的变换. 此时说 Y 是 X 在映射 f 下的限制 (restriction) 或 X 是 Y 的扩张 (extension). 以 G 限制为态射, 则类 $K(G)$ 成为一个范畴.

G 限制的例子.

1) 设 $T(p, q) \in K(\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}))$ 是 (p, q) 型张量的空间, $p, q \geqslant 1$. 收缩映射

$$T(p, q) \to T(p-1, q-1)$$

是限制, 而 $T(p, p)$ 的张量的完全收缩

$$T(p, p): T(p, p) \to \mathbf{R}$$

则是限制不变量的例子.

2) 若 $X, Y \in K(G)$, 则 $X \times Y$ 经 pr_X 和 pr_Y 分别限制到 X 和 Y. 换句话说, $X \times Y$ 是 X 和 Y 二者的扩张.

限制的概念可自然地推广到与主丛相伴的纤维空间. 设 $\pi: P(M, H) \to M$ 为一个主丛, 其结构群 H 右作用在 P 上, 又设 $F \in K(H)$ 为左 H 空间, 利用 P 可构造如下形式的纤维空间

$$F(P) = (P \times F)/H,$$

其中 H 按下法作用在 $P \times F$ 上:

$$(\xi, Y)h = (\xi h, h^{-1}Y), (\xi, Y) \in P \times F, h \in H.$$

这种空间的全体记为 $K(P)$. 空间 $F(P) \in K(P)$ 是底空间 M 上纤维为 F 的纤维丛. $(\xi, Y) \in P \times F$ 所决定的元素 $y \in F(P)$ 写作 $y = \xi Y$. 若 $F, \Phi \in K(H)$, 且 $f: F \to \Phi$ 为 H 限制映射, 则由 $F(P)$ 与 $\Phi(P)$ 的构造知, f 诱导出映射 $\tilde{f}: F(P) \to \Phi(P)$, 它在每根纤维上皆为满射, 这个映射称为 P 限制 (P-restriction). P 限制 $\tilde{f}$ 由下式定义

$$\tilde{f}(\xi Y) = \xi f(Y), \xi \in P, Y \in F.$$

因此, 由 P 构造出来的纤维丛的类 $K(P)$ 是一个范畴, 它以 P 限制 $\tilde{f}$ 作为态射. 对应 $F \mapsto F(P)$, $f \mapsto \tilde{f}$ 是范畴 $K(H)$ 到范畴 $K(P)$ 的双射函子. 因此只需在 H 空间的范畴里研究限制运算.

如果 $s: M \to F(P)$ 是纤维丛 $F(P)$ 的截面, 即 F 型几何对象场 (field of geometric objects), 则 P 限制 $\tilde{f}: F(P) \to \Phi(P)$ 将 s 映为被限制的纤维丛 $\Phi(P)$ 的截面 $\tilde{s} = \tilde{f} \circ s$. 换句话说, 几何对象场 $s(x)$, $x \in M$, 限制到几何对象场 $\tilde{f} \circ s(x)$. 如果 $s(x)$ 是 G 结构的结构对象, 则关于 G 结构及其不变量的研究很大程度上归结为寻找限制几何对象. 在后一过程中起重要作用的是关于限制的微分法则, 描述这个法则要用到构成限制与开拓方法的基础的纤维空间上的结构微分形式.

参考文献

[1] Лаптев., Г. Ф., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **2** (1953), 275 − 382.

[2] Лаптев, Г. Ф., Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда. Москва, 1956, т. 3, М., 1958, 409 − 418.

Л. Е. Евтушик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jensen, G., Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces, Lecture note in Math., 610, Springer, 1977.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1 – 2, Interscience, 1979.

潘建中 译 沈信耀 校

最速下降法(关于积分的)[method of steepest descent (for integrals); метод скорейшего спуска]

见**鞍点法**(saddle point method).

待定系数法[method of undetermined coefficients; неопределенных коэффициентов метод]，构造数值算法的构造算法的特殊方法，使得用这种方法构造出的算法应该是精确的，或者对某类问题的误差有规定的精确阶.

可以用待定系数法解的问题的一个典型例子如下(见[1],[2]).(亦可以用其他方法来解.)设一个函数的值 $f(P_1),\cdots,f(P_N)$ 已知.要求构造一个公式逼近这个函数:

$$f(P)\approx g(f(P_1),\cdots,f(P_N),P);$$

构造一个公式计算函数的导数:

$$Df(P)\approx g_D(f(P_1),\cdots,f(P_N),P);$$

和构造一个公式计算函数的积分:

$$I(f)=\int_\Omega f(P)p(P)dP\approx g_1(f(P_1),\cdots,f(P_N)).$$

为了求解上述最后这个问题，给出某种形式的近似解，例如，线性情况:

$$g_1=\sum_{n=1}^{N}C_nf(P_n),$$

而且为了确定系数 C_n，要求近似式 $I(f)\approx g_1$ 对某类函数严格相等；例如，对下列形式的函数

$$f(P)=\sum_{m=1}^{M}a_m\omega_m(P),$$

其中 $\omega_m(P)$ 是固定的，而 a_m 是任意的.通常取 $M=N$.为了使等式

$$I\left[\sum_{m=1}^{M}a_m\omega_m\right]=\sum_{n=1}^{N}C_n\left[\sum_{m=1}^{M}a_m\omega_m(P_n)\right]$$

对所有 a_m 均成立，只要

$$I(\omega_m)=\sum_{n=1}^{N}C_n\omega_m(P_n),\ m=1,\cdots,M,$$

成立就足够了.

由此确定 C_n(如果这是可能的).

有时，给出了一个更复杂的依赖关系.例如，通常知道所讨论的函数有一个好的近似，这个近似函数的形式为

$$g(a_1,\cdots,a_M,P),$$

其中 a_m 已知.参数 a_m 可由方程组

$$g(a_1,\cdots,a_M,P_n)=f(P_n),\ n=1,\cdots,N,$$

来选定.

在数值积分情况，积分结点的坐标常常视为未知参数.例如，在 **Gauss 求积公式**(Gauss quadrature formula)

$$I(f)=\int_a^b f(x)p(x)dx\approx\sum_{n=1}^{N}C_nf(P_n),$$

中，把结点 P_n 的坐标看作自由参数；由此，成功地构造了求积公式，它对 $2N-1$ 次多项式是精确的.在用待定系数法构造微分方程的逼近时，要求将问题的解代入有限差分格式后，给出与网格步长有关小量规定阶的相容(**偏差**(discrepancy))值.这种方式是构造 Runge-Kutta 法和有限差分法的基础(见[1],[2]).

待定系数法也用来构造偏微分方程的逼近(见[3]).

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т.1, М., 1966., 2 изд., т.2, М., 1962(英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975(英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, 2 изд., М., 1977(中译本: С.К.戈杜诺夫, В.С.李亚宾基，差分格式理论导引，上海科学技术出版社，1966).

Н. С. Бахвалов 撰

【补注】 曲线和曲面拟合技术可以认为是这里所谓的待定系数法的一种形式. 袁国兴、张宝琳 译

度量[metric; метрика]，距离(distance)，集合 X 上的一个非负实值函数 ρ，定义在 Descartes 乘积 $X\times X$ 上，对任何 $x,y,z\in X$ 满足下列条件:

1) $\rho(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$(恒等公理(identity axiom));

2) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$(三角形公理(triangle axiom));

3) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$(对称公理(symmetry axiom)).

一个集合 X，如果可以在其上引进一个度量，则称为可度量化的(metrizable)(见**可度量化空间**(metrizable space)).配备了度量的集合 X 称为**度量空间**(metric space).

例 1)任何集合上都有离散度量(discrete metric)

$$\rho=0(x=y),\ \rho=1(x\neq y).$$

2)空间 $\mathbf{R}^n$ 中可以配备多种度量，其中有

$$\rho(x,y)=\sqrt{\Sigma(x_i-y_i)^2};$$

$$\rho(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|;$$

$$\rho(x,y)=\Sigma|x_i-y_i|;$$

这里 $\{x_i\},\{y_i\}\in\mathbf{R}^n$.

3)在 Riemann 空间中，度量由**度量张量**(metric tensor)或二次微分形式来定义(在某种意义下，这个度量类似于例 2)中第一个度量)．这种度量的一个推广见 **Finsler 空间**(Finsler space).

4)在(可数)紧空间 X 上的函数空间中也有各种各样的度量，例如一致度量(uniform metric)

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

(类似于例 2)中第二个度量)，以及积分度量(integral metric)

$$\rho(f,g)=\int_X|f-g|dx.$$

5)在 $\mathbf{R}$ 上的赋范空间中，用范数 $|\cdot|$ 可以定义一个度量

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

6)度量空间的闭子集组成的空间中有 **Hausdorff 度量**(Hausdorff metric).

如果在条件 1)中只要求

1′)若 $x=y$，则 $\rho(x,y)=0$(所以，从 $\rho(x,y)=0$ 未必有 $x=y$)，那么函数 ρ 称为伪度量(pseudo-metric)([2],[3])或有限差距([4]).

X 上有了度量(甚至伪度量)，便可以在其上定义一系列附加结构．首先是拓扑结构(见**拓扑空间**(topological space))，还有一致结构(见**一致空间**(uniform space))和邻近结构(见**邻近空间**(proximity space))．度量一词也用来表示并不完全具有性质 1)－3)的某些更一般的概念，例如**不定度量**(indefinite metric)，**集合上的对称性**(symmetry on a set)，等等．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Kelley, J. C., General topology, Springer, 1975(中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).

[3] Kuratowski, K., Topology, I, Acad. Press, 1966(译自法文).

[4] Bourbaki, N., Topologie générale, Hermann, Paris, 1971.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 任何度量空间 (X,ρ) 都可能有第二个自然配备的度量 $\sigma\geqslant\rho$，称为内蕴度量(intrinsic metric)或**内度量**(internal metric)．之所以说可能，是因为按其定义对某些点对 x,y 也许有 $\sigma(x,y)=\infty$．一条连续道路 $f:[0,1]\to X$ 的长度(length)定义为 $L(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\sup L_\varepsilon(f)$(可能是 ∞)，其中 $L_\varepsilon(f)$ 是所有有限和 $\sum\rho(f(x_i),f(x_{i+1}))$ 的下确界，而子集 $\{x_i\}$ 是 $[0,1]$ 的有限 ε 网(见**度量空间**(metric space))，按自然次序排列．于是 $\sigma(x,y)$ 就是满足 $f(0)=x$ 和 $f(1)=y$ 的所有道路 f 之长的下确界，但是，如果没有这样的长度有限的道路，则定义 $\sigma(x,y)=\infty$.

(X,ρ) 上任何合理的拓扑限制都不足以保证内蕴"度量"(或差距(écart)) σ 取有限值．如果 σ 取有限值，则适当的紧性条件可以保证存在最小长度的道路，即是从 x 到 y 的长度为 $\sigma(x,y)$ 的道路．当每一对点 x,y 都用长度为 $\sigma(x,y)$ 的一条(一般不是唯一的)道路联接时，这个度量往往称为凸(convex)度量(这比曲面论中的**凸度量**(convex metric)弱得多)．这方面的主要定理是：任何局部连通度量**连续统**(continuum)均有凸度量([A1],[A2]).

参考文献

[A1] Bing, R. H., Partitioning a set, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**(1949), 1101－1110.

[A2] Moïse, E. E., Grille decomposition and convexification, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**(1949), 1111－1121.

胡师度、白苏华 译

度量联络 [**metric connection**; **метрическая связность**]

在其纤维中装备一双线性型的向量丛 $\pi: X\to B$ 上的线性联络，使得沿着 B 中任意一条分段光滑曲线的平行移动保持该双线性型不变，即两个向量的标量积在平行移动下保持为常数．如果双线性型由分量 $g_{\alpha\beta}$ 给出，而线性联络由 1 形式的矩阵 ω_α^β 给出，则当

$$dg_{\alpha\beta}=g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma+g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma$$

时，该联络是度量联络．在非退化对称双线性型的情形，即 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$ 且 $\det|g_{\alpha\beta}|\neq0$ 时，该度量联络称为 **Euclid 联络**(Euclidean connection)．在非退化反对称双线性型的情形，该度量联络称为向量丛上的辛联络(symplectic connection).

在向量丛射影化之下，当对称双线性型在每一个纤维中(即在射影空间中)生成某个射影度量时，射影-度量联络扮演着度量联络的角色．

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】在正定双线性型的情形，度量联络也称为 **Riemann 联络**(Riemannian connection).

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Wiley (Interscience), 1969.

陈维桓 译

度量维数 [**metric dimension**; **метрическая размерность**]

紧集的数值特征，借助于“标准测度”的覆盖来定义，覆盖的个数也就确定了度量维数. 设 F 是紧集、$N_F(\varepsilon)$ 是覆盖 F 所需的、直径不超过 ε 的集合的最少个数. 这个函数依赖于 F 中的度量，对所有 $\varepsilon>0$ 取整数值，并且随着 $\varepsilon\to 0$ 无限增大，它称为 F 的体积函数 (volume function). 数

$$k=\varliminf\left[-\frac{\ln N_F(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}\right]$$

称为紧集 F 的度量阶 (metric order). 这个量还不是拓扑不变量. 例如，具有 Euclid 度量的一条 Jordan 曲线 (见**线 (曲线)** (line (curve))) 的度量阶数等于 1，而通过 $\mathbf{R}^n$ 中一个具有正测度的全不连通的完满集的 Jordan 曲线，其度量阶数等于 n. 不过，就 F 上所有的度量而言，度量阶数的下确界 (称为度量维数 metric dimension)) 等于 **Lebesgue 维数** (Lebesgue dimension) (Понтрягин-Шнирельман 定理 (Pontryagin-Shnirel'man theorem), 1931，见 [1]).

参考文献

[1] Hurevicz, W. and Wallman, G., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948. М. И. Войцеховский 撰

【补注】 度量维数对非紧的可分可度量化空间也有意义 (利用全有界度量)，而 Понтрягин-Шнирельман 定理也可以推广至这些空间上. 这是由 E. Szpilrajn-Marczewski 证明的. 见 [A2].

还有另外一些依赖于度量的维数函数.

Hausdorff 维数 (Hausdorff dimension) 是一个例子.

另一个例子是修改覆盖维数 dim (见**维数** (dimension)) 的定义而得. 如果 (X, d) 是度量空间，定义 $\mu\dim(X, d)$ 如下：$\mu\dim(X, d)\le n$，当且仅当对每个 $\varepsilon>0$，存在 X 的一个开覆盖 $\mathfrak{U}$，使得 $\operatorname{mesh}\mathfrak{U}<\varepsilon$ 而 $\operatorname{ord}\mathfrak{U}\le n+1$. 这里 $\operatorname{mesh}\mathfrak{U}=\sup\{\operatorname{diam}(U): U\in\mathfrak{U}\}$, $\operatorname{ord}\mathfrak{U}\le n+1$ 意指 X 的任何一点都至多属于 $\mathfrak{U}$ 中 $(n+1)$ 个集合. 可以证明 $\mu\dim(X, d)\le\dim X\le 2\mu\dim(X, d)$，这个不等式是不可改进的，见 [A1].

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North-Holland, 1978.

[A2] Nagata, J. I., Modern dimension theory, Interscience, 1965.

胡师度、白苏华 译

度量熵 [**metric entropy**; **энтропия метрическая**], *动力系统的*

遍历理论 (ergodic theory) 中最重要的不变量之一. **Lebesgue 空间** (Lebesgue space) (X, μ) 的自同态 S (见**度量同构** (metric isomorphism)) 的熵 $h(S)$ 概念是基本的. 对任何有限**可测分解** (measurable decomposition) (可测分划 (measurable partition)) ξ，极限

$$h(S,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\xi_S^n),$$

$$\xi_S^n=\xi\vee S^{-1}\xi\vee\cdots\vee S^{-n+1}\xi$$

(ξ 在单位时间关于 S 的熵) 恒存在，这里 $H(\xi)$ 为 ξ 的熵 (见**可测分解的熵** (entropy of a measurable decomposition))，并且 $\xi\vee\eta$ 是以 ξ 与 η 的元素的交为元素的分划. (此定义可逐字转移到 $H(\xi)<\infty$ 的 ξ；据其他方法 $h(S,\xi)$ 可以对任何可测的 ξ 定义.) 熵 $h(S)$ 定义为 $h(S,\xi)$ 关于一切可能的有限可测的 ξ 的最小上界 (它可能为 ∞；利用对 $H(\xi)<\infty$ 的一切 ξ 或一切可测的 ξ 能产生同样的熵).

原先由 А. Н. Колмогоров 定义的熵有所不同 (见 [1])；上面所给的样式来得晚些 (见 [2]). 在 Lebesgue 空间的**非周期自同构** (aperiodic automorphism) 的基本情形下，两种定义是完全等价的 ([3]).

我们有 $h(S^n)=nh(S)$，并且若 S 为自同构，则 $h(S^{-1})=h(S)$. 因此，**瀑布** (cascade) $\{S^n\}$ 的熵自然取为 $h(S)$. 对于**可测流** (measurable flow) $\{S_t\}$ 有 $h(S_t)=|t|h(S_1)$. 因此，流的熵自然取为 $h(S_1)$. 对具有不变测度的其他变换群的熵的定义是有所不同的 (它不化为群中单一变换的熵；见 [5], [6]). 关于无限不变测度情形有熵的某些变形 ([7])；另一个变形是 A 熵 (A-entropy) (这里 $A=\{k_n\}$ 为自然数的减小序列)，它是将 ξ_S^n 换为 $S^{-k_1}\xi\vee\cdots\vee S^{-k_n}\xi$ 且将 lim 换为 $\overline{\lim}$ 而得到的 (见 [8]).

熵是动力系统的一个度量同构不变量，并且与早先知道的与**动力系统的谱** (spectrum of a dynamical system) 有关的一些不变量有根本的不同. 特别，利用 **Bernoulli 自同构** (Bernoulli automorphism) (见 [1]) 的熵，首先建立了：具有同样连续谱 (与离散谱情形相对比) 的非同构遍历系统存在. 在更广的设置下熵的作用关连着在遍历理论中产生的新动向即动力系统的熵理论 (entropy theory) 这一事实 (见 [3], [4] 与**遍历理论** (ergodic theory)).

熵给人们提供一个工具去刻画小测度集的**混合** (mixing) 速率 (更确切说，构成分划的那些集的族). 与“整体”作用一起，熵也扮演“局部”作用，这就是 Breiman 遍历定理 (Breiman ergodic theorem) (信息论中个别遍历定理)：对遍历 S 与几乎所有 x 有

$$\frac{1}{n}\,|\log\mu(C_{\xi_S^n}(x))|\to h(S,\xi)\text{ 对 } n\to\infty,$$

其中 $C_\eta(X)$ 为含有 x 的分划 η 的元而对数取与 H

的定义中相同的底（见[9],[4]).（Breiman 定理对满足 $H(\xi)<\infty$ 的 ξ 是真的（[10]），但一般说，对满足 $H(\xi)=\infty$ 的可数的 ξ 不真（[11]）；有关于非遍历 S 的变量（见[4],[12]）与无限的 μ([13]).对某些一般类变换群，依 l_1 意义的收敛性的较弱论断，已被证明（[6])).

关于具有光滑不变测度的光滑动力系统，已经建立熵与变分中方程的 **Ляпунов 特征指数**（Lyapunov characteristic exponent）之间的联系（见[14]-[16]).

术语"熵"是根据动力系统的熵与**信息论**（information theory)、统计物理中的熵之间的类比来解释的，这是考虑到在一些范例中这些熵是相同的事实（例如见[4],[17]).与统计物理的类比是刺激人们在遍历论（甚至在非纯度量对象中以及对于**拓扑动力系统**（topological dynamical system))中去引进新概念如"Gibbs 测度"，"拓扑压"（自由能量的类似)与其中的"变分原理"（见 Y 系统（Y-system)；**拓扑熵**（topological entropy）的参考文献).

参考文献

[1A] Колмогоров, А. Н.,《Докл. АН СССР》, **119** (1958), 5, 861 - 864.

[1B] Колмогоров, А. Н.,《Докл. АН СССР》, **124** (1959), 4, 754 - 755.

[2] Синай, Я. Г.,《Докл. АН СССР》, **124** (1959), 4, 768 - 771.

[3] Рохлин, В. А.,《Успехи матем. наук》, **22** (1967), 5, 3 - 56.

[4] Billingsley, R., Ergodic theory and information, Wiley, 1965.

[5] Сафомов, А. В.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **47** (1983), 2, 421 - 426.

[6] Kieffer, J. C., A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space, *Ann. of Probab.*, **3** (1975), 6, 1031 - 1037.

[7] Krengel, V., Entropy of conservative transformations, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **7** (1967), 3, 161 - 181.

[8] Кушниренко, А. Г.,《Успехи матем. наук》, **22** (1967), 5, 37 - 65.

[9A] Breiman, L., The individual ergodic theorem of information theory, *Ann. Math. Stat.*, **28** (1957), 3, 809 - 811.

[9B] Breiman, L., Correction to 'The individual ergodic theorem of information theory', *Ann. Math. Stat.*, **31** (1960), 3, 809 - 810.

[10] Chung, K. L., A note on the ergodic theorem of information theory, *Ann. Math. Stat.*, **32** (1961), 3, 612 - 614.

[11] Пинкель, Б. С.,《Проблемы передачи информации》, **12** (1976), 2, 98 - 103.

[12] Ionesco-Tulcea, A., Contributions to information theory for abstract alphabets, *Arkiv for Mat.*, **4** (1961), 2 - 3, 235 - 247.

[13] Klimko, E. M. and Sucheston, L., On convergence of information in spaces with infinite invariant measure, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **10** (1968), 3, 226 - 235.

[14] Миллионщиков, В. М.,《Дифференциальные уравнения》, **12** (1976), 12, 2188 - 2192.

[15] Песин, Я. Б.,《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 4, 55 - 112.

[16] Mané, R., A proof of pesin's formula, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.*, **1** (1981), 1, 95 - 102.

[17] Robinson, D. W. and Ruelle, D., Mean entropy of states in classical statistical mechanics, *Comm. Math. Phy.*, **5** (1967), 4, 288 - 300.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 在英语文献中 A 熵用术语序列熵（sequence entropy）代替.例如见[A1]，§4.11.关于熵的计算的一些有益的新近文献，见[A2].

参考文献

[A1] Walters, P., An introduction to ergodic theory, Springer, 1982.

[A2] Wojtkowski, M. P., Measure theoretic entropy of the system of hard spheres, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.*, **8** (1988), 133 - 153.

郑维行 译 沈祖和 校

度量同构[**metric isomorphism**; **метрический изоморфизм**]

两个度量空间 $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$ 之间的度量同构是一个一一映射 $f: X_1 \to X_2$，使得可测集的象与逆象都可测，而且测度相同（这里 $\mathfrak{B}_i$ 是集合 X_i 的子集构成的某个 Bool σ 代数或 σ 环，$\mathfrak{B}_i$ 中的元素称为可测的，μ_i 是 $\mathfrak{B}_i$ 上的一个给定测度).还有一个更广泛的概念：测度空间的（度量）同态（metric homomorphism)，也就是一个映射 $f: X_1 \to X_2$，使得可测集的逆象可测，而且测度相同.如果 $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)=(X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$，则用（度量）自同构（metric automorphism）与自同态（endomorphism）来代替同构与同态.

在测度理论中，常常忽略测度为零的集合.同这种倾向相对应，所有上述观点有一个（最初就被利用）"模 0"的样式.比如，设 $N_i \subset X_i$，$\mu_i(N_i)=0(i=1,2)$，并设 $f: X_1 \backslash N_1 \to X_2 \backslash N_2$ 是度量同构，那么就称 f 是原来两个度量空间的模 0 同构（"模 0"常被省略).

对 X_i 中给定的一些对象（子集，函数，变换以及这些构成的系），可以给出下面论断一个解释：在度量同构 f 下，这些对象互相转换.因此可以称 f 是相应对象的度量同构，也可以称它们是模 0 度量同构.它的意思是，对某个测度为 0 的集合 N_i，相应

对 O_t 可以被认为是 $X_t \setminus N_t$ 中的对象 O_t'（对于变换，意为 $X_t \setminus N_t$ 对这些变换不变．而对子集和函数，这对任何 N_t 都有意义：取考虑的子集和 $X_t \setminus N_t$ 的交或把函数限制在 $X_t \setminus N_t$ 上），而且 f 是对象 O_t' 的度量同构．称所有互相模 0 度量同构的对象构成的类为一个（度量）型（metric type）；该类中的两个对象被称为同型．

与 $(X_t, \mathfrak{B}_t, \mu_t)$ 相联系的是 Hilbert 空间 $L_2(X_t, \mathfrak{B}_t, \mu_t)$，在这个空间中，除了通常的 Hilbert 空间结构以外，还有一般的函数乘法运算（其实也不是总有定义，因为 L_2 函数的乘积不一定属于 L_2）．还有 Bool 测度 σ 代数 $\mathfrak{M}_t$，它是通过把对称差为零测集的集合视为相同得到的（也就是与零测集环的商）．模 0 度量同构 f 诱导出 Bool 测度代数 $\mathfrak{M}_t$ 的一个同构以及 Hilbert 空间 $L_2(X_t, \mu_t)$ 的一个酉同构，而且这个酉同构也是乘性的（multiplicative），也就是说，把原象的乘积映成象的乘积．如果 $(X_t, \mathfrak{B}_t, \mu_t)$ 是 **Lebesgue 空间**（Lebesgue space），则反过来也是对的：所有 Bool 测度 σ 代数 $\mathfrak{M}_t$ 的同构，或者空间 $L_2(X_t, \mu_t)$ 的可乘酉同构都是通过某个模 0 度量同构诱导出来的．

参考文献

[1] Рохлин，В．А．，《Матем．сб．》，**25**（1949），1，107－150．

Д．В．Аносов 撰

【补注】 要想了解更多，也可参见**遍历理论**（ergodic theory）．事实上修饰词"度量"已不再用，只是简称为测度空间的同构（isomorphism of measure space），测度空间的同态（homomorphism of measure space），等等．

参考文献

[A1] Halmos，P．，Measure theory，v．Nostrand，1950（中译本：R．哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）．

刘建明 译 苏维宜 校

度量射影 [**metric projection**；**метрическая проекция**]，最佳逼近算子（operator of best approximation）

将度量空间 $X=(X,\rho)$ 中的每个元素 x 与集合 $M \subset X$ 中的**最佳逼近元素**（element of best approximation）的总体

$$P_M x = \{m \in M : \rho(x,m) = \rho(x,M)\}$$

进行对应的一种多值映射 $P_M : x \to P_M x$．如果 M 是 **Чебышев 集**（Chebyshev set），则度量射影是单值映射．最佳逼近元的构造问题常常是近似求解的，即在集合

$$P_M^t x = \{m \in M : \rho(x,m) \leqslant t + \rho(x,M)\}$$

中确定一个元素，其中 t 充分小．有时，从映射 $P_M^t : x \to P_M^t x$ 的性质可以得到集合 M 的性质．例如，若对赋范空间 X 中的任何元素 x，存在某个数 $t=t(x)>0$，使得 $P_M^t x$ 是凸（连通）的，则 M 也是凸（连通）的．

从应用的观点来看，了解度量射影是否具有线性性、连续性、一致连续性等性质是有益的．在赋范空间的 Чебышев 子空间上的度量射影，一般来说，不是线性的．如果在每个固定维数的子空间上的度量射影都是单值的和线性的，那么，X 便线性同构于一个内积空间．度量空间中非空**逼近紧集**（approximately-compact set）上的度量射影是上半连续的；特别地，在赋范空间中有限维 Чебышев 子空间上的度量射影是连续的；如果不是 Чебышев 子空间，则度量射影可能不下半连续．存在一个度量射影为间断的自反严格凸空间及其无穷维子空间．Hilbert 空间中任何闭凸集 M 上的度量射影均满足 Lipschitz 条件：

$$\| P_M x - P_M y \| \leqslant K \| x - y \| ,$$

其中常数 $K=1$．

度量射影的连续性及其推广已在不适定问题，Чебышев 集的凸性问题，最佳逼近元的构造等方面得到了应用．

参考文献

[1] Singer，I．M．，The theory of best approximation and functional analysis，SIAM．1974．

[2] Власов，Л．П．，《Успехи матем．наук》．**28**（1973），6，3－66．

[3] Бердышев，В．И．，в кн．：Теория приближения функций．Тр．Международной конференции по теории приближения функций．Калуга．1975，М．，1977，37－41．

В．И．Бердышев 撰 王仁宏、檀结庆 译

度量空间 [**metric space**；**метрическое пространство**]

赋予**度量**（metric）ρ 的集合 X．研究图形（空间）的集论方法，是以对它们的基本组成成分的相对位置的研究为基础的．空间中点的相对位置的基本特征是它们之间的距离．这一方法导致了度量空间的概念，最早由 M．Fréchet（[2]）在有关函数空间的讨论中提出．结果发现，全然不同类型的对象的集合都具有自然度量．可以把状态集合、函数集合和映射集合，Euclid 空间的子集和 Hilbert 空间的子集视为度量空间．度量对于研究（级数、函数的）收敛性和解决涉及逼近的问题十分重要．

度量空间理论的主要发展方向如下．

度量空间的一般理论．研究度量空间关于等距（保持距离的一对一的且满的映射（见**等距映射**（isometric mapping）））不变的性质．这些性质包括完全性、有界性、全有界性和宽度．这类性质称为度量（metric）

性质.

度量空间的拓扑理论. 研究度量空间在**同胚**(homeomorphism)下保持不变的性质. 包括紧性、可分性、连通性、Baire 性质和零维性质等. 这类性质称为拓扑(topological)性质.

其度量与某个附加代数结构(例如, 向量空间或群)相容的度量空间理论. 这涉及 Euclid 空间, 准 Hilbert 空间和 **Hilbert 空间**(Hilbert space)(任意权的), **Banach 空间**(Banach space), **Banach 代数**(Banach alegebra), **Banach 格**(Banach lattice), 以及**可数赋范空间**(countably-normed space). 这里成立的事实实质上与度量或范数的重要性质的探讨有关, 但总的来说, 其内容属于代数和泛函分析的相应领域.

在非 Euclid 几何学、微分几何学、力学和物理学的研究中, 特殊度量的讨论起着重要作用. 这里, Riemann 空间(见 **Riemann 几何学**(Riemannian geometry))中 Riemann 度量的概念居中心地位. 在微分几何学中产生的研究曲面和图形的较广泛的方法与 G 空间的概念有关, G 空间是对度量公理(见**测地几何学**(geodesic geometry))添加某些条件而得的, 在其存在性和优美性质得到保证下, 它奠定了在 G 空间中讨论测地学的基础. 最具代表性的是不使用微分学的方法. 由此发现, 微分几何学的许多性质与可微性条件无关, 仅由几何公理确定. 测地几何学的意义不仅在于它是 Riemann 几何学的推广, 还在于它是不用复杂的计算而更几何地研究几何对象的一种尝试.

在每个集合 X 中, 可以用下列规则定义一个度量 ρ_T: $x=y$ 时 $\rho_T(x, y)=0$, $x\neq y$ 时 $\rho_T(x, y)=1$. 这称为平凡度量(trivial metric). 在集合 X 上给出的每一个度量 ρ 都自然地产生 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T}_\rho$. 度量空间的概念将点的相对接近性的概念形式化, 而**拓扑空间**(topological space)的概念则将点到集合的绝对接近性的关系公理化. 在度量空间 (X, ρ) 中点 x 到集合 A 的距离(distance) $\rho(x,A)$ 定义为 $\inf\{\rho(x, y): y\in A\}$. 如果 $\rho(x, A)=0$, 则称点 x 绝对接近于集合 A. A 在 (X, ρ) 中的闭包(closure) [A] 是 X 的所有绝对接近于 A 的点的集合. X 中唯一与此闭包运算有关的拓扑称为 X 中由度量 ρ 生成的拓扑. 平凡度量导致平凡拓扑, 其中它的所有集合都是闭的.

在度量空间(特别是对它的拓扑性质)的研究中, 收敛序列的思想起着重要作用. 这是因为度量空间的拓扑可以完全用序列的语言来描述.

设 $\xi=\{x_n: n=1, 2, \cdots\}$ 是度量空间 (X, ρ) 中的点列. 它称为收敛于点 $x\in X$, 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在一个整数 N, 使得对所有 $n>N$ 有 $\rho(x, x_n)<\varepsilon$. 序列 ξ 称为基本的(fundamental), 如果对每个 $\varepsilon>0$, 存在一个整数 N, 使得对所有 $m, n>N$ 有 $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$.

一个重要的度量性质是完全性. 度量空间 (X,ρ) 称为完全的(complete), 如果它的每个基本序列都收敛于 X 的点. 空间 (X, ρ_T) 总是完全的. 度量空间的完全性不是拓扑性质: 同胚于完全度量空间的度量空间可以是不完全的, 例如, 具有通常度量 $\rho(x, y)=|x-y|$ 的实直线 $\mathbf{R}$ 同胚于具有相同度量的区间 $(0, 1)=\{x\in\mathbf{R}: 0<x<1\}$; 然而, 第一个度量空间是完全的, 第二个则不是.

完全度量空间的例子有 Euclid 空间和 Banach 空间. 完全度量空间在同胚下保持不变的一个重要性质是 **Baire 性质**(Baire property), 根据这一性质可知, 所有无孤立点的完全度量空间都是不可数的. 因此, 通常的有理数的拓扑空间不能由任何完全度量生成. 但每一个度量空间都可以用完全化的标准构造来表示为某个完全度量空间的子集. 度量空间 (X, ρ) 的两个基本序列 $\xi=\{x_n\}$ 和 $\eta=\{y_n\}$ 称为等价的(equivalent), 如果

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=0.$$

设 $\widetilde{X}$ 为由此得到的等价类组成的集合. 在 $\widetilde{X}$ 上引入度量 $\widetilde{\rho}$ 如下: 若 $a', a''\in\widetilde{X}$. 且 $a'\ni\xi'=\{x'_n\}$, $a''\ni\xi''=\{x''_n\}$, 则

$$\widetilde{\rho}(a', a'')=\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n, x''_n).$$

对 $x\in X$, 令 $i(x)=\{x_n\}$, 其中对所有 n, $x_n=x$. 则 $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ 是一个完全度量空间且 $i: X\to\widetilde{X}$ 是 (X, ρ) 到 $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ 的处处稠密子集上的一个等距 ($(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ 称为 (X, ρ) 的完全化(completion)).

涉及完全化讨论的是有关同胚扩张的 **Лаврентьев 定理**(Lav'rent'ev theorem). 此定理蕴涵, 度量空间在它的完全化中为 G_δ 集的性质是一个拓扑不变量(与度量完全性自身关于同胚的非不变性相反).

集合 X 上的两个度量 ρ_1 和 ρ_2 称为拓扑等价的(topological equivalent), 如果它们生成的拓扑 $\mathcal{T}_{\rho_1}$ 和 $\mathcal{T}_{\rho_2}$ 相同. 一个有限集上的所有度量都是等价的, 它们生成离散拓扑. Александров-Hausdorff 定理(Aleksandrov-Hausdorff theorem): 集合 X 上的度量 ρ 拓扑等价于某个完全度量的充要条件是, X 在 (X, ρ) 的完全化中是 G_δ 集. 特别地, 具有通常度量的无理数空间是不完全的, 但它同胚于这样一个完全度量 Baire 空间, 后者的点是自然数的无穷数列 $\{n_i\}$, 距离为 $\rho(\{n_i\}, \{m_i\})=\frac{1}{k}$, 这里 k 是使 $n_k\neq m_k$ 而对所有 $i<k$, $n_i=m_i$ 的自然数.

完全度量空间的下列例子是重要的: $[0, 1]$ 上所有连续函数的空间 $C[0, 1]$, 其度量定义为

$$\rho(f, g)=\max\{|f(x)-g(x)|: x\in[0,1]\},$$

对所有 $f, g \in C[0,1]$. 空间 $C[0,1]$ 是可分的——它有一个处处稠密的可数集（见**可分空间**（separable space））. 由此可知，所有可分度量空间都与 $C[0,1]$ 的某个子集等距（Banach-Mazur 定理（Banach-Mazur theorem））. 此结果表明，生成可分拓扑空间的所有度量都可以用在连续函数集合上限制自然度量的方式得到.

完全度量空间 (X, ρ) 的赋予相同度量 ρ 的子集 Y（确切地说，是 ρ 在 $Y \times Y$ 上的限制）为完全度量空间的充要条件是 Y 为 (X, ρ) 中的闭集.

度量空间的完全性和紧性概念之间有一个基本的联系. 度量空间 (X, ρ) 的紧性（compactness）等价于下列条件之一：1) (X, ρ) 的任意序列都包含一个收敛的子序列；2) (X, ρ) 的每个可数开覆盖（见**覆盖（集合的）**（covering (of set)））都包含一个有限子覆盖；3) (X, ρ) 的任意开覆盖都有一个有限子覆盖；4) (X, ρ) 中每个递减的非空闭集序列都有一个非空交；5) (X, ρ) 的所有离散闭子集都是有限的.

最简单的紧度量空间的例子是：有限离散空间、任意区间（加上其端点）、正方形、圆和球面. 一般地，具常用度量的 Euclid 空间 E^n 的子集为紧集，当且仅当它是有界闭集.

上列条件在度量空间类之外不是等价的（见**紧空间**（compact space））. H. Lebesgue (1911) 证实，对紧度量空间 (X, ρ) 的每个开覆盖 γ，存在数 $\delta > 0$，使得直径 $\leqslant \delta$ 的每个集合 $A \subset X$ 都包含于 γ 的某个元素中. 这蕴涵了紧度量空间的如下基本性质：把紧度量空间映入任意度量空间中的所有连续映射都是一致连续的（见**一致连续性**（uniform continuity））. 进而，度量空间为紧的充要条件是，它上面的所有实值连续函数都是有界的（且达到其最小值和最大值）.

所有紧度量空间都是完全的，但其逆不真；最简单的例子是具有平凡度量的无限离散空间. 然而，下列特征性质成立：度量空间为紧的充要条件是，与它同胚的所有度量空间都是完全的.

除开完全性之外，紧性显然还蕴涵某一类有界性，这是考察 E^n 的紧子集而证实的. 通常，度量空间 (X, ρ) 称为有界的，如果存在一个实数 a，使得 $\rho(x, y) < a$ 对所有 $x, y \in X$ 成立. 所有紧度量空间都是有界的. 空间 (X, ρ_T) 是完全且有界的，但当 X 为无限时它就不是紧的；因此在度量空间类中，完全性加有界性不是紧性的充分条件. 一般说来，集合上的每个度量拓扑等价于某个有界度量，当已给度量完全时该有界度量就是完全的. 因此有所谓全有界性这一重要概念. 度量空间 (X, ρ) 称为全有界的（totally bounded），如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在有限集 $A_\varepsilon \subset X$，使得 $\rho(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$ 对所有 $x \in X$ 成立. 这里，集合 A_ε 称为 (X, ρ) 中的 ε 网（ε-net）. 度量空间 (X, ρ) 是紧的，当且仅当它是完全且全有界的；(X, ρ) 是全有界的，当且仅当它与某个紧度量空间的子集等距. 更确切地说，度量空间的全有界性等价于其完全化 $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ 的紧性. 全有界度量空间的每个子空间都是全有界的. 所有全有界度量空间（特别，所有紧度量空间）都是可分的且具有可数基. 紧性通常不被子集继承. 如果集合 $A \subset X$ 在度量空间 (X, ρ) 中的闭包是紧度量空间，则 A 称为在 (X, ρ) 中是相对紧的. 若 (X, ρ) 是完全的，则 (X, ρ) 中集合 $A \subset X$ 的相对紧性等价于 A 关于度量 ρ 的全有界性.

度量空间 $C[0, 1]$ 中 $[0, 1]$ 上的某连续函数集 A 的紧性判别准则在泛函分析中有重要作用. 此判别准则如下（Arzelà-Ascoli 定理（Arzelà-Ascoli theorem））：集合 A 在 $C[0, 1]$ 中相对紧的充要条件是：1) 存在数 M，使得 $|f(x)| < M$ 对所有 $x \in [0, 1]$ 和所有 $f \in A$ 成立；2) 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 对所有 $f \in A$ 和满足 $|x' - x''| < \delta$ 的所有 $x', x'' \in [0, 1]$ 成立.

度量空间 (X, ρ) 到它自身的映射 f 称为一个压缩（contraction），如果存在正实数 $\lambda < 1$，使得

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$$

对所有 $x, y \in X$ 成立. 完全度量空间的一个重要定理是**压缩映射原理**（contracting-mapping principle）：每个把（非空）完全度量空间映入自身中的压缩映射都恰有一个**不动点**（fixed point）.

度量空间的拓扑理论比拓扑空间的一般理论简单得多. 以下给出度量空间 (X, ρ) 的最重要的那些拓扑性质. 这里考虑由度量 ρ 生成的拓扑 $\mathscr{T}_\rho$ 的性质.

每个度量空间都是正规的，甚至是集体正规的（见**正规空间**（normal space））. 这使得能够把度量空间闭子集上的连续实值函数扩张到整个空间. 更强的结果是：对度量空间 (X, ρ) 的每个闭子集 Y，存在一个由 (Y, ρ) 上所有连续实值函数构成的空间到 (X, ρ) 上所有连续实值函数构成的空间的线性映射 φ，使得（对任何 f）$\varphi(f)$ 是 f 的扩张，且

$$\sup\{|f(x)| : x \in Y\} = \sup\{|\varphi(f)(x)| : x \in X\}$$

（Dugundji 定理（Dugundji theorem）. 此定理与下面的关于度量扩张的 Hausdorff 定理（Hausdorff theorem on extension of metrics）有关：如果可度量化空间 X 的闭子集 Y 按照度量 ρ_1 已经是可度量化的（ρ_1 在 Y 上生成作为 X 的子空间的拓扑），则可以把 ρ_1 扩张成在整个 X 上生成原始拓扑的度量 ρ. 类似结论对全有界度量和完全度量成立.

对度量空间的拓扑性质的研究大都以下述的 Stone 定理（Stone theorem）为依据：度量空间是仿紧的

paracompact)，即它的任意开覆盖 γ 具有局部有限开加细 λ (局部有限的意思是，每个点都具有仅与 λ 的有限个元素相交的某一邻域．亦见**仿紧空间** (paracompact space))．長田-Смирнов 度量化准则 (Nagata-Smirnov metrization criterion) (见**可度量化空间** (metrizable space)) 的依据是度量空间的仿紧性．

度量空间有一些关于拓扑性质等价的重要定理，而这些性质在一般拓扑空间中是不同的．例如，对度量空间，下列基数值不变量是一致的：密度、特征标、权、Суслин 数和 Lindelöf 数 (亦见**基数特征** (cardinal characteristic))．对于度量空间，可数紧性、伪紧性和紧性是等价的．对于度量空间，维数 dim (覆盖维数) 和 Ind (大归纳维数) 是一致的，对于可分度量空间，小归纳维数 ind 与 dim 和 Ind 一致 (见**维数论** (dimension theory))．

每个度量空间 (X, ρ) 都是星正规的；(X, ρ) 的任一开覆盖 γ 都具有开的星加细 λ，即是说，对每个点 $x \in X$，存在 $U \in \gamma$，使 U 包含满足 $x \in V$ 的所有 $V \in \lambda$．与此定理有关的是下述可度量化性准则 (Stone-Архангельский) (metrizability critation (Stone-Arkhangel'skiĭ))：如果一个**正则空间** (regular space) 具有可数基，则此空间可由全有界度量来度量化．但甚至可数的正则空间也不必是可度量化的．最简单的例子是：对离散的自然数加上它的 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) 中的一个外点．度量空间 X 可否用一个完全度量来度量化的判别准则令人意外：其充要条件是，X 是它的某个 (因而是所有的) Hausdorff 紧化的 G_δ 集．而且，度量空间的 Hausdorff 紧化具有关于度量空间上拓扑结构的全部信息；由 Čech 定理 (Čech theorem)：度量空间是同胚的，当且仅当它们的 Stone-Čech 紧化是同胚的，上述论断是显然的．

度量空间不必具有可数基，但它总是满足**第一可数公理** (first axiom of countability)：它在每一点都具有可数基．而且，度量空间中的每个紧集都有一个可数基．此外，每个度量空间都有一个基——点可数基，使得空间的每一个点都仅属于此基的可数多个元素，但此性质比可度量化性更弱，甚至对仿紧 Hausdorff 空间亦如此．满足第一可数公理的正则可分空间不必是可度量化的．

分离拓扑群的可度量化条件较易得到：其必要充分条件是，此群的空间满足第一可数公理；于是，生成该拓扑的左不变和右不变度量都存在．

每个度量空间 (X, ρ) 都按标准方式联系着另一个度量空间，即具有 **Hausdorff 度量** (Hausdorff metric) 的 (X, ρ) 的非空有界闭子集空间 $F(X)$，该度量定义如下：

$$\rho_H(A, B) =$$
$$= \max(\sup\{\rho(a, B): a \in A\}, \sup\{\rho(b, A): b \in B\}).$$

空间 (X, ρ) 与 $(F(X), \rho_H)$ 的一个闭子空间等距．若 ρ 是完全的，则 ρ_H 是完全的．但 X 上两上度量 ρ' 和 ρ'' 的拓扑等价性，一般说来，并不蕴涵相应 Hausdorff 度量 ρ'_H 和 ρ''_H 的拓扑等价性．

度量空间的连续象不必同胚于任何度量空间，即使满足 Hausdorff **分离公理** (separation axiom)．此结论也适用于度量空间的商空间．例如，若把平面上一条定直线压缩成一点，再把定直线外的所有点都视为此分解的单个元素，则得到一个不可度量化的可分空间，在它的特殊点处第一可数公理不满足．关于度量空间的商空间的可度量化性质有一般的判别准则 (见 [6])．特别，关于把一个度量空间分解为紧集的**连续分解** (continuous decomposition) 的商空间总是可度量化的．作为紧度量空间的连续象的每个 Hausdorff 空间都是可度量化且紧的．这是拓扑空间在将其映入紧集的连续映射之下，其权不增的一般命题的特别情形．但甚至在度量空间 (X, ρ) 的象 Y 可度量化的情形，使 Y 度量化的度量也不必用任何公式由 ρ 得到．代替 $Y \times Y$ 上的度量，相对于 ρ 自然地定义函数 d 如下：对 $y', y'' \in Y$，$d(y', y'')$ 等于点 y', y'' 在所讨论的映射下的逆象之间按 ρ 确定的距离．通常 (例如，若 Y 是度量空间到紧集的分解空间) d 与 Y 的拓扑密切相关且是对称的 (symmetric)．这意味着对所有 $y', y'' \in Y$ 有 $d(y', y'') = d(y'', y')$，当且仅当 $y' = y''$ 时 $d(y', y'') = 0$．这样定义的对称关系 d 几乎都不满足三角形公理 (见**度量** (metric))，但若到紧集的分解是连续的，则 d 具有这样一些拓扑性质，它们成功地代替了三角形公理且保证了象在"真实"度量下的可度量化性．作为度量空间在连续开闭映射下之象的拓扑空间本身就同胚于一个度量空间．然而，在连续开映射之下，可度量化性不一定保持：所有且仅有满足第一可数公理的空间是度量空间在连续开映射下的象．

度量空间的各种推广之中，最重要的是伪度量空间、具有对称关系的空间和具有 0 度量的空间 ([7])．这些都是对度量空间的公理作自然的削弱后被公理式地定义的．然而，在这里距离照例由一个非负实数表示．可以考查在有序半群内、半域内等取值的广义度量 (见 [8])．用这种方法可得到任意完全正则空间的广义度量化．

度量空间概念的有重大价值的推广是**一致空间** (uniform space) 的概念．此外，度量空间类还有纯拓扑的扩张，其中重要的空间类是具有一致基的空间类、**Moore 空间** (Moore space) 类、**羽状空间** (feathered space) 类和仿紧羽状空间类、以及格空间类．仿紧空间类是度量空间类的一种过宽的推广，因为仿紧性甚至对有限积也不保持．反之，仿紧羽状空间类则成功地同时推广了度量空间的同胚空间类和紧空间类，

在另一方向，度量的概念推广为 κ 度量和 δ 度量([4])．由 K. Menger 引入的统计度量空间的概念原来是拓扑等价于具有对称关系的空间的概念．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Fréchet, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **22**(1906), 1－74.

[3] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974（英译本：Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）.

[4] Щепин, Е. В., 《Успехи матем. наук》, **31**(1976), 5, 191－226.

[5] Engelking, R., General topology, Helderman, 1989.

[6] Архангельский, А. В., 《Докл. АН СССР》, **155**(1964), 2, 247－250.

[7] Недев, С. Й., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **24**(1971), 201－236.

[8] Антоновский, М. Я., Болтянский, В. Г., Сарымсаков, Т. А., 《Успехи матем. наук》, **21**(1966), **4**, 185－218.

[9] Недев, С. Й., Чобан М. М., 《Сердика》, **1**(1975), 12－28.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 平凡的度量也称为离散度量(discrete metric)．**基本序列**(fundamental sequence)也称为 Cauchy 序列(Cauchy sequence)．星正规空间也称为全正规(fully normal)空间．

度量空间有一些十分明显的数值不变量，例如宽度(直径)和各种维数．一个较隐蔽的数值不变量是 Gross 离差数(Gross dispersion number)或会合数(rendezvous number)，其存在唯一性由下列定理保证([A12])．设 (X, d) 为紧连通度量空间，则存在一个唯一的数 $a(X, d)\in\mathbf{R}$，使得对所有 $n\in\mathbf{N}$ 和所有的 n 个点 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 的集合，存在一个点 $y\in X$ 满足

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y)=a(X,d). \tag{A1}$$

实例如下：若 (X, d) 是 n 维 Euclid 空间中半径为 1/2 的球，则 $a(X, d)=1/2$；若 S^n 是 $(n+1)$ 维 Euclid 空间中具单位直径的 n 维球面，则([A15])

$$a(S^n, d)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\frac{2n+1}{2}\right]^{-1}2^{n-1}\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]^2,$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Γ **函数**(gamma-function)；若 X 为 $\mathbf{R}^2$ 中的等边三角形，则 $d(X, d)=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}$．保证 $a(X, d)$ 之存在性的定理在两个方面有所推广．首先，$d: X\times X\to\mathbf{R}$ 可以换成任意对称函数 $f: X\times X\to\mathbf{R}$(这里，对称的意思是 $f(x, y)=f(y, x)$)([A13])，其次．(A1)左端的平均值可以换成一个积分([A14])．于是，对于紧连通 Hausdorff 空间 X 和对称函数 $f: X\times X\to\mathbf{R}$、存在唯一的实数 $a(X, f)$，使得对 X 上的任意正则 Borel 测度 μ，存在一个点 $y\in X$ 满足

$$a(X, f)=\int_X f(x, y)\,d\mu(x).$$

[A2]中研究了这样的度量空间，在它上面的所有连续函数(取值于任意度量空间，或正好取值于实直线)都是一致连续的．最简单的描述是：存在一个紧子集 C，使得 C 的每个邻域的补集都是离散的．

除了度量空间 (X, ρ) 的完全化之外还有内射包络(injective envelope) (I, d)．一般说来 X 在 I 中不稠密(例如，若 X 是圆，I 是无限维的)，但 I 是 X 的本质扩张(essential extension)；对于到 X 的限制保持全部距离的任意度量空间 M，由 I 到 M 的非扩张映射 f 必定保持 I 中的全部距离不变(非扩张是指：对所有 $x, y\in I$ 有 $d(f(x), f(y))\leqslant d(x, y)$)．$I$ 被作为没有更大范围本质扩张的 X 的本质扩张来刻画，准确到唯一的等距．这等价于在映射的可扩张性意义下的内射性，也等价于下列 Helly 型性质：对所有 α, β，满足相容性条件 $d(X_\alpha, X_\beta)\leqslant\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta$ 的任何球型邻域族 $O(X_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ 都有一个公共点．由于这个等价性，内射度量空间也称为超凸的(hyperconvex)．见[A1]，[A5]．

在唯一相容的意义下，实 Banach 空间的内射包络本身就是实 Banach 空间．此结论仅有一个综合以下诸项而得的高度非构造性的证明：实 Banach 空间范畴中相对内射包络的 H. Cohen 构造[A3]，Aronszaĭn-Panitchpakdi 定理(Aronszaĭn-Panitchpakdi theorem)——内射实 Banach 代数是内射度量空间([A1])，和 Mazur-Ulam 定理(Mazur-Ulam theorem)——实 Banach 空间的每个等距都是仿射的([A9])．对照[A6]．

内射空间具有一个较压缩映射定理更强的不动点定理：把有界内射度量空间映入自身的每个非扩张映射都有一个不动点(Sine-Soardi 定理(Sine-Soardi theorem))．然而，非扩张映射不动点理论的广泛发展大多限于 Banach 空间凸子集这一重要的特殊情形．到 1980 年的有关综述见[A8]．对照[A7]．

有必要指出，Stone-Архангельский 度量化准则(Stone-Arkhangel'skiĭ metrization criterion)中的 Stone 是 A. H. Stone，他还证明了度量空间的仿紧性，在 **Stone-Čech 紧化**(Stone-Čech compactification)中则是 M. H. Stone．

前面指出过，空间 X 上两个拓扑等价的度量一般不会给出在超空间 $F(X)$ 上拓扑等价的 Hausdorff 度量．事实上，当且仅当它们一致等价时才成立([A4])．

参考文献

[A1] Aronszajn. N. and Panitchpahdi. P., Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex matric spaces, *Pacific J. Math.*, **6**(1956), 405–439.

[A2] Atsuji, M., Uniform continuity of continuous functions of metric spaces, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 11 – 16.

[A3] Cohen, H., Injective envelopes of Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**(1964), 723 – 726.

[A4] Hammond Smith, D., Hyperspaces of a uniformizable space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **62** (1966), 25 – 28.

[A5] Isbell. J., Six theorems about injective metric spaces, *Comment. Math. Helv.*, **39**(1964), 65 – 76.

[A6] Isbell. J., Three remarks on injective envelopes of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **66** (1969), 301 – 306.

[A7] Istratescu. V. I., Fixed point theory, Reidel, 1981.

[A8] Kirk, W. A., Fixed point theory for nonexpansive mappings, in Fixed Point Theory, Lecture notes in math. Vol. 886, Springer, 1981, 484 – 505.

[A9] Mazur, S. and Ulam, S., Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **194**(1934), 946 – 948.

[A10] Dugundji. J., Topology, Allyn & Bacon, 1966.

[A11] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975(中译本: J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).

[A12] Gross, O., The rendezvous value of metric space, in M. Drester, L. S. Shapley and A. W. Tucker (eds.): Advances in Game Theory, Princeton Univ. Press, 1964, 49 – 53.

[A13] Stadje, W., A property of compact connected spaces, *Arch. Math.*, **36**(1981), 275 – 280.

[A14] Cleary, J., Morris, S.A. and Yost, D., Numerical geometry—numbers for shapes, *Amer. Math. Monthly*, **93**(1986), 260 – 275.

[A15] Morris, S. A. and Nickolas, P., On the average distance property of compact spaces, *Arch. Math.*, **40** (1983), 459 – 463.

白苏华、胡师度 译

度量张量 [**metric tensor**; **метрический тензор**], 基本张量 (basic tensor, fundamental tensor)

n 维微分流形 $M^n(n\geqslant 2)$ 上的一个二阶协变对称张量场 $g=g(X,Y)$. 在 M^n 上给定一个度量张量，便在点 $p\in M^n$ 的切空间 M_p^n 上引进了逆变向量 $X,Y\in M_p^n$ 的数量积 $\langle X,Y\rangle$, 定义为双线性函数 $g_p(X,Y)$, 其中 g_p 是指张量场 g 在点 p 的值. 用坐标表示，则是

$$\langle X,Y\rangle=g_{ij}(p)X^iY^j,\quad X=\{X^i\},$$
$$Y=\{Y^j\},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n.$$

赋以这种数量积的 M_p^n 中的度量被看成流形 M^n 的度量的无穷小情形，表示成取二次微分形式

$$ds^2=g_{ij}(p)dx^idx^j \qquad (*)$$

作为 M^n 中从点 p 出发沿方向 $dx^1,\cdots,dx^n$ 引出的曲线的弧长微分的平方. 由于这个几何意义，形式 (*) 称为 M^n 上对应于度量张量 g 的度量形式 (metric form) 或第一基本形式 (first fundamental form). 反过来，如果在 M 上给定一个对称的二次形式 (*), 则就有一个伴随的 2 阶协变对称张量场 $g(X,Y)=g_{ij}X^iY^j$, 其对应的度量形式是 (*). 这样，在 M^n 上指定一个度量张量等价于在 M^n 上指定一个形如 (*) 的二次线素的度量形式. 度量张量完全决定了 M^n 的内蕴几何.

度量张量 g 及其确定的度量形式的全体分为两类: 当 $\det(g_{ij})=0$ 时为退化度量，当 $\det(g_{ij})\neq 0$ 时为非退化度量. 具有退化度量形式 (*) 的流形 M^n 称为迷向的. 在非退化度量张量中，当二次型 (*) 正定时为 Riemann 度量张量 (Riemannian metric tensor). 当 (*) 的符号可变时为伪 Riemann 度量张量 (pseudo-Riemannian metric tensor). 在 M^n 上用 Riemann (伪 Riemann) 度量张量引进的 Riemann (伪 Riemann) 度量确定了 M^n 的 Riemann (伪 Riemann) 几何.

通常，若无特别说明，度量张量总是指 Riemann 度量张量; 但是，如果要强调讨论是关于 Riemann 度量张量而不是伪 Riemann 度量张量进行的，则可以说真 Riemann 度量张量. 在任何仿紧微分流形上都能够引进真 Riemann 度量张量.

参考文献

[1] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[2] Рашевский, П. К., Римaнова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

[3] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer. W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

陈维桓 译

函数的度量理论 [**metric theory of functions**; **метрическая теория функций**], 亦称度量函数论

实变函数论 (functions of a real variable, theory of) 的一分支，其中在集合的**测度** (measure) 概念的基础上研究函数的性质.

19 世纪许多数学家的研究创立了一个新的数学方向——实变元函数论. 在 19 世纪末十分明确地提出一些要解决的问题: 集合的测度，曲线长度与曲面面积，用级数 (尤其用三角级数) 表示函数，原函数与积分，积分与微分关系，级数的逐项积分问题，等等. 这些问题的解有普遍的数学重要性; 一些杰出的

数学家在此方向工作，特别是阐明了函数的度量理论在 20 世纪前 30 年的巨大发展．函数论的基础为 E. Borel, R. Baire, H. Lebesgue 以及其他人所奠定．

1902 年 Lebesgue 引进了异常重要的集合的测度概念（**Lebesgue 测度**（Lebesgue measure））．在此概念的基础上他创立了积分论（**Lebesgue 积分**（Lebesgue integral））．这两个基础概念——测度与积分——构成了函数的度量理论的基础，其中研究函数的性质，导数，积分、函数的级数（特别是三角级数与一般直交级数），曲面面积，等等．

Lebesgue 测度与积分的许多基本性质是 Lebesgue 自己在 20 世纪初建立的（测度与积分的可数可加性，积分号下取极限，不定积分的微分，等等）．此外、Lebesgue 给出了他的研究对数学分析中各种问题（曲面面积，三角级数的种种性质，奇异积分等）的广泛应用．G. Vitali (1904) 独立地发现了与 Lebesgue 测度等同的测度，并且稍后 W. H. Young (1905) 也构造出与 Lebesgue 积分、测度等价的积分与测度．然而，他们没有发展他们的理论并且在那一时期也未作出重大的应用．在俄罗斯函数的度量理论发展的起点必然与 20 世纪初叶相关．然而当一个新的重要研究中心进到函数的度量理论被形成之时，在此领域的一些最重要成果是由俄罗斯数学家在 20 世纪 20 年代获得的（Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин）、函数的度量理论学派的创始人与领袖在前苏联是 Лузин.

函数的度量理论的发展可以用两个主要方向来阐明．第一个方向是以集合的测度与 Lebesgue 积分以及它们的推广为基础去研究．函数的一般性质，积分，三角级数，直交级数等以及它们的更具体精细的性质两个方面，这些课题的发展与研究光靠经典分析方法几乎是不能达到的．这个方向，确切地说，是函数的度量理论．第二个方向，不失重要性，是函数的度量理论方法到其他数学分支的渗透，并且也是其他新的数学领域在原有概念的基础上的创建，后者又反过来对函数论本身产生一种刺激性效应．

在函数的度量理论的基础上、开始了**解析函数的边界性质**（boundary properties of analytic functions）的深入研究以及创始了在方法上与函数的度量理论有不可分割联系的**数的度量理论**（metric theory of numbers）．函数论对泛函分析的创立的影响是巨大的．

下面给出函数的度量理论中某些典型结果，每个结果标志某一中心问题的解并且带来许多后继的研究．这样，1911 年 Егоров 证明了每个收敛的可测函数列是一致收敛的，如果不计一个测度任意小的集合（见 **Егоров 定理**（Egorov theorem））．Лузин (1912) 建立了每个可测函数成为连续的，如果不计某个测度任意小的集合（见 **Лузин C 性质**（Luzin C-property））．这两个成果的重大意义是难以估计的，因为一方面，他们表明函数的度量理论与经典分析基本概念之间的确定的内在联系，且另一方面，它们是函数论中不时产生的许多成果的基础．

Лузин 证明了（1915）关于可测函数类原函数的存在性．就是说，他证明了对每个有限可测函数 f，存在连续函数 F 使几乎处处有 $F'=f$. 在此结果的基础上他解决了关于可测函数类的 Dirichlet 问题．这便是当时莫斯科学派关于复变元函数论的活跃发展的开端，而且特别是解析函数的边界性质研究的开端．

Lebesgue 积分不能用来解由有限的精确导数 $F'=f$ 去求原函数 F 的问题．此问题为 A. Denjoy (1912) 以一种特殊积分（狭义 Denjoy 积分）为基础解决的．狭义 Denjoy 积分自然地推广了 Lebesgue 积分而且与之不矛盾（见 **Denjoy 积分**（Denjoy integral））．1916 年 Denjoy 与 А. Я. **Хинчин** 构造了甚至更一般的积分，称为广义 Denjoy 积分；它同**近似可微性**（approximate differentiability）相关．

在 20 世纪 30 年代之初，Д. Е. Меньшов 与 H. Rademacher 建立了序列 $\{\log^2 n\}$ 是关于任何直交系几乎处处收敛级数的 Weyl 乘子．此外（这是特别重要的与基本的），Меньшов 证明了（1923）上述结果不真，如果将序列 $\{\log^2 n\}$ 换成满足 $\omega(n)=o(\log^2 n)$ $(n\to\infty)$ 的任何序列 $\{\omega(n)\}$．这些结果对于已经和正在建立的直交级数的收敛性以及求和法理论的研究是基础的．

1926年 Колмогоров 构造出一个可和函数的处处发散的三角级数（Fourier 级数）的例子．然而，1914 年 Лузин 提出的 L^2 中函数的三角 Fourier 级数的几乎处处收敛性问题，很长时间都没有解决．此问题的肯定解答到了 1966 年才为 L. Carleson 给出（见 **Carleson 定理**（Carleson theorem））．P. du Bois-Reymond, Lebesgue 与 Ch. de la Vallée-Poussin 解决了收敛于可和函数的三角级数的系数的还原问题．在 20 世纪 40 年代 Denjoy 构造了一种积分，它可以用来解决任何处处收敛的三角级数的和中系数的还原问题．与此同时，Меньшов 证明了每个有限可测函数能用几乎处处收敛的三角级数来表示．

G. Cantor, Young, Н. К. Бари 等曾建立了三角函数的唯一性理论的基础．

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la réchcrche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

[2] Лузин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951.

[3] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961（英译本：Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）.

[4] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).
[5] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958).
[6] Паплаускас, А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966.
[7] Песин, И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966 (英译本: Pesin, I. N., Classical and modern integration theories, Acad Press, 1970).
[8] Меньшов, Д. Е., Ульянов, П. Л., 《Вестн. Моск. ун-та. Матем., Мех.》, 1967, 5, 24 – 36.
[9] Колмогоров, А. Н., Теория функций действительного переменного, в кн., Наука в СССР за пятнадцать лет. Математика, М.-Л., 1932.
[10] Метрическая теория функций действительного переменного, в кн., Математика в СССР за тридцать лет, М.-Л., 1948.
[11] Лозинский, С. М., Натансон, И. П., Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной, в кн., Математика в СССР за сорок лет, т. 1, М., 1959.
[12] Ульянов, П. Л., Метрическая теория функций, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968.
[13] Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971.

П. Л. Ульянов 撰

【补注】 关于 Weyl 乘子概念, 见**乘子理论** (multiplier theory).

郑维行 译 沈祖和 校

数的度量理论 [**metric theory of numbers**; **метрическая теория чисел**], 亦称度量数论

数论 (number theory) 中研究并且度量地 (亦即基于**测度** (measure) 论) 刻画具有固定的算术性质的数集的一个分支. 数的度量理论即度量数论与概率论关系密切, 概率论有时显示出应用它的方法和结果分析数论模型的可能性.

许多涉及个别数的算术性质的问题也可以度量地表述; 例如, 在研究分数部分数列 $\{\alpha n\}$, $(n=1,2,\cdots)$ 当 $\alpha=\sqrt{2}$ 或 $\log 3$ 时的一致分布问题的同时, 可以提出这样的问题: 在 $(0,1)$ 中使这个数列一致分布的数 α 的 Lebesgue 测度是什么? 一个问题的这样的度量性推广常常显示出非常有用, 并且提供整体地表现一种现象的可能性. 有时基于度量性论证, 我们能够相当容易地证明某些具有一定的算术性质的数的存在性, 但直接构造这些数却是复杂的, 例如 Borel **正规数** (normal number), 具有某些逼近性质的数, 等等.

度量数论的最主要的结果与 **Diophantos 逼近的度量理论** (Diophantine approximation, metric theory of) 数列的**一致分布** (uniform distribution) 理论, **连分数** (continued fraction) 论, 以及数论的其他一些分支有关.

度量数论的早期定理之一是 Borel 定理 (Borel theorem) (E. Borel, 1909): 当以任意固定整数 g 为底记数时, 区间 $(0,1)$ 中几乎所有 (在 Lebesgue 测度意义下) 的实数 α 都是**正规数** (normal number). 等价地说, 此定理断言, 分数部分 $\{\alpha g^n\}(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $(0,1)$ 中一致分布. Borel 定理已被许多数学家推广和扩充. 把 α 以 g 为底的表达式 (g 进位制) 中的 "数字" $0,\cdots,g-1$ 看成独立随机变量的观点显示出是富有成效的. 或隐或显地基于这种情况, 并且应用在概率论中发展起来的求独立或弱相关随机变量之和的渐近分布的方法, 即可解决关于从 $(0,1)$ 中 "随机" 选取一个数, 其 g 进制展开中 "数字" $0,\cdots,g-1$ 或任意的"数字"组的分布的基本问题. 例如, 令

$$\alpha=\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g^2}+\cdots,$$

其中 a_i 是 $0,\cdots,g-1$ 中的数, 于是可将 $a_i=a_i(\alpha)$ 看成定义在 $(0,1)$ 上的独立随机变量, 并将 Lebesgue 测度作为概率测度. 如果 a 是 $0,\cdots,g-1$ 中的任意一个数, $k_n(\alpha)$ 表示对于给定的 a 适合 $a_i(\alpha)=a$ 的 $i\leqslant n$ 的个数, 那么

$$(k_n(\alpha)-n/g)g/\sqrt{n(g-1)}$$

是渐近正态分布的, 这就是说, 对任何实数 x, 当 $n\to\infty$ 时, 适合

$$k_n(\alpha)-\frac{n}{g}<\frac{x}{g}\sqrt{n(g-1)}$$

的数 α 的集合之测度趋于极限

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt.$$

H. Weyl (1916) 证明了若 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 是任意的自然数递增序列, 则对几乎所有的 α, 分数部分 $\{\alpha a_n\}$ 在区间 $(0,1)$ 中一致分布. 若假定 a_n 是某个定义在无穷区间 $(1,\infty)$ 之上且满足某些特殊解析条件的函数的值, 那么这个定理有一个涉及一致分布的 "品质" 的更为精细的变体. J. Koksma ([8]) 证明了一个关于二变量函数 $f(\alpha,n)$ 的分数部分分布的一般性定理, 此处 α 是一个实数, 取区间 $(1,\infty)$ 中几乎所有的值, 而 $n=1,2,\cdots$ (见**模 1 分布** (distribution modulo one)). 例如, 对几乎所有的 $\alpha>1$, 分数部分 $\{\alpha^n\}$ 在区间 $(0,1)$ 一致分布.

除了与 Borel 正规数有关的问题外, 连分数的度量理论从度量数论一开始发展起就是其基本问题之一. 设 α 是区间 $(0,1)$ 中的一个实数, $\alpha=[0,a_1,\cdots]$ 是它的**连分数** (continued fraction) 展开, 记 $r_n(\alpha)=[a_n,a_{n+1},\cdots]$, 并令 $q_n(\alpha)$ 是第 n 个渐近分数 $[0,a_1,\cdots,a_n]$ 的分母. А. Я. Хинчин 在 1935 年证明了对几

乎所有的 α，当 $n\to\infty$ 时

$$(a_1\cdots a_n)^{1/n}\to K=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)^{\ln k/\ln 2}$$

$$=2.68545\cdots,$$

并且存在绝对常数 γ 使对几乎所有的 α，当 $n\to\infty$ 时 $(q_n(\alpha))^{1/n}\to\gamma$. P. Lévy 求得 $\gamma=\exp(\pi^2/12\ln 2)$. 另外、Хинчин([5]) 应用其关于连分数度量性质的结果证明了一个用有理数逼近实数的定理．设 f 是正变量 x 的正连续函数，且 $xf(x)$ 是非增函数，则当对某个 $c>0$ 积分

$$\int_c^{\infty} f(x)dx$$

发散时，对几乎所有的 α 不等式

$$\left|\alpha-\frac{r}{q}\right|<\frac{f(q)}{q} \qquad (*)$$

有无穷多组整数解 p 和 $q(q>0)$；反之，当上述积分对所有 $c>0$ 均收敛时，对几乎所有的 α 不等式 $(*)$ 至多有有限多组整数解 p 和 $q(q>0)$.

这个定理已被从不同观点加以扩充和推广，并成为 Diophantos 逼近的度量理论深入发展的出发点．P. Erdös([7]) 通过一系列论文最终得到下列结果：对几乎所有的 α，一个任意序列 $n_1<n_2<\cdots$ 中含有无穷多个 $q_i(\alpha)$ 的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi(n_i)}{n_i^2}=\infty,$$

此处 $\varphi(n)$ 是 **Euler 函数** (Euler function). 在相同条件下，对几乎所有的 α 不等式

$$\left|\alpha-\frac{m}{n_i}\right|<\frac{\varepsilon}{n_i^2},(m,n_i)=1$$

有无穷多个解，其中 m 是整数，而 $\varepsilon>0$ 是任意的．这个结果接近下列猜想 (1982)：若 $n_1<n_2<\cdots$ 是任意整数列，而 $\delta_i>0$ 是任意的，则当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta_i\varphi(n_i)}{n_i}=\infty$$

时，对几乎所有的 α 不等式

$$\left|\alpha-\frac{m}{n_i}\right|<\frac{\delta_i}{n_i},\ (m,n_i)=1$$

有无穷多个解．Р. О. Кузьмин(1928) 证明了对任何 $x\in(0,1)$，适合 $r_n(\alpha)-a_n<x$ 的 α 的集合之测度 $m_n(x)$ 等于

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}+O(e^{-\lambda\sqrt{n}}),$$

其中 $\lambda>0$ 是一个绝对常数．C. F. Gauss 早就得到渐近关系式

$$m_n(x)\sim\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}\quad(n\to\infty),$$

但未加公布，只是在给 P. Laplace 的一封信中提到估计差 $m_n(x)-\ln(1+x)/\ln 2$ 是一个非常诱人的问题．Кузьмин 的估计 $O(e^{-\lambda\sqrt{n}})$ 被 Lévy (1929) 改进为 $O(e^{-\lambda n})$. Кузьмин 的方法是许多其他的连分数度量定理的源泉．

与 Borel 正规数及连分数理论有关的度量问题的现代处理应用了**遍历理论** (ergodic theory) 的思想．它是以下列事实为基础的：区间 $(0,1)$ 到自身的映射 $\alpha\to\{\alpha g\}$ 及 $\alpha\to\{1/\alpha\}$ 分别与 g 进小数及连分数密切相关，它们保持测度并且是遍历的；第一个映射保持 Lebesgue 测度，第二个映射保持对 $(0,1)$ 中每个可测集 A 定义的测度

$$\mu(A)=\frac{1}{\ln 2}\int_A\frac{dx}{1+x}.$$

由这个观点，无余项估计的 Gauss-Кузьмин 定理可以立即由 Birkhoff 的**个体遍历定理** (individual ergodic theorem) 推出．基于遍历理论的论证甚至对于获得某些极限定理的余项估计也是有用的．例如，Хинчин 的一些结果可以改进为

$$(a_1\cdots a_n)^{1/n}=K+O(n^{-1/2}(\ln n)^{3/2+\varepsilon}),$$

$$(q_n(\alpha))^{1/n}=\exp\left(\frac{\pi^2}{12\ln 2}\right)+O(n^{1/2}(\ln n)^{2+\varepsilon}),$$

此处 $\varepsilon>0$ 是任意的 (见 [10]). 遍历理论思想对度量数论的许多其他问题 (线性 Diophantos 方程，矩阵指数函数的值分布，Jacobi-Perron 算法、等等) 也有用．

在某些情形下，基于 Lebesgue 测度的数集的度量特征显得太粗糙，因而需要更精细的特征，例如，**Hausdorff 维数** (Hausdorff dimension). 这种方法在 Diophantos 逼近论及超越数论中特别有用．例如，已经证明 ([6])，对任何固定的 n 及 $w\geq n+1$，使不等式

$$|x-a|<h_\alpha^{-w}$$

有无穷多个次数为 n、高为 h_α 的代数数解 α 的实数 x 的集合，其 Hausdorff 维数为 $(n+1)/w$. 如果 $w<n+1$，则对几乎所有的 x 相应的不等式有无穷多个解，而同时我们猜测这对于所有的 x 都是对的 (Wirsing 猜想 (Wirsing conjecture)). 对于复数也有类似的结果．它们与超越数分类的基本问题直接相关 ([3]).

不仅与实数和复数有关的问题，而且关于 p 进数、赋值向量、形式幂级数等的问题，并且更一般地，对于任何可以引进测度且可提出某个"算术"问题的空间中的元素，都可从度量的观点加以分析．特别地，对于 p 进数，有许多与一致分布论及实数的 Diophantos 逼近论的度量定理相类似的结果，虽然 p

进数区域在其度量和拓扑方面与通常情形是不同的(见[3],[9]).

当我们假设从某个适当的研究对象的集合中“随机”地选取对象,以此来弥补研究对象信息的短缺时,度量方法对于解决“提法不适当”的问题是有效的.当然,在此我们不能成功地研究原始对象,由于缺乏关于它的信息,有时本质上是不可能对它加以研究的,但是我们可以作出所考虑的集合中“几乎所有”的对象都有某种性质的结论.例如,设 $A^* = \{1 < a_1^* < a_2^* < \cdots\}$ 是某个自然数序列,它增长的速度慢于某个幂,亦即 $a_i^* < i^\mu$, μ 是一个常数.我们提出这样的问题:是否存在数 r,使任何自然数都可表示成至多 r 个 A^* 中的元素之和?显然,所给出的关于 A^* 的信息不足以解决这个问题.

令 $\mathscr{U}$ 是整数列 $A = \{1 < a_1 < a_2 < \cdots\}$ 的集合,其中每个 a_i 是由区间 $[a_i^*, a_{i+1}^*)$ 中“随机”地选出.可以在 $\mathscr{U}$ 上定义 Lebesgue 测度,并且可以证明对几乎所有的 A,所要的数 r 存在且 $r < \infty$(见[4]).

度量数论中的“整体”结果与它们的“个体”实现之间的关系是极有意义而又深奥的.尽管某个集合中几乎所有的元素都有给定的性质,但要确定这个集合的某个具体元素是否具有这个性质却可能是非常困难的.例如,Borel 猜测诸如 $\sqrt{2}$, e, π, $\log 3$ 等等这样的数都是正规数,并且虽然几乎所有的数都是正规数,但迄今(1993)为止我们还不知道这些数中的任何一个是否是正规数.在许多情况下,证明一个度量定理要比证明一个类似的“个体”定理容易.然而,这并不意味着度量数论中没有深刻的问题,因为度量数论中许多问题与某些有时被相当快地解决的“个体”问题紧密相关.另一方面,“个体”问题的解决又揭示出它们与度量问题的关系.

度量数论的思想在**解析数论**(analytic number theory)的许多领域中起着基本作用,特别是当含有关于某个测度的积分时.在这种情形下,某些度量定理的结论不可能是研究的目的,但度量性的理解被用作论证的一个中间性步骤.这些定理可能是作为论证基础的主要原则,当然,结果的最终叙述将不包含任何度量概念.系统应用这种类型的论证的一个例子是 Hardy-Littlewood-Виноградов 方法,用有理分数逼近数的度量性质在此方法中起着本质的作用(Hardy-Littlewood 的“优”弧和“劣”弧).这个情况使 И.М.Виноградов 能够把他的 Weyl 和估计定理叙述为某些度量定理([1]).另外,Виноградов 估计 Weyl 和的方法具有清晰表达的度量特征,他建立了积分的“整体”估计与具体和的“个体”估计间的联系.这种类型的例子在数论中是罕见的.

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: И. М. 维诺格拉多夫, 数论中的三角和法, 数学进展, **1** (1955), 3 – 106).

[2] Постников, А. Г., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **82** (1966), 3 – 111.

[3] Спринджук, В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967 (英译本: Sprindzhuk, V. G., Mahler's problem in metric number theory, Amer. Math. Soc., 1969).

[4] Спринджук, В. Г., 《Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук》, 1970, 1, 5 – 14.

[5] Хинчин, А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М.1978 (中译本: А. Я. 辛欣, 连分数, 上海科学技术出版社, 1965).

[6] Baker, A. and Schmidt, W., Diophantine approximation and Hausdorff dimension, *Proc. London Math. Soc.* (3), **21** (1970), 1 – 11.

[7] Erdös, P., On the distribution of the convergents of almost all real numbers, *J. Number Theory*, **2** (1970), 425 – 441.

[8] Koksma, J. F., Diophantische Approximationen, reprint, Springer, 1974.

[9] Lutz, E., Sur les approximations diophantiennes linéaires *p*-adiques, Hermann, 1955.

[10] Philipp, W., Some metrical theorems in number theory, *Pacific J. Math.*, **20** (1967), 1, 109 – 127.

[11] Cigler, J. and Helmberg, G., Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, *Jhber. Deutsch. Math. Verein.*, **64** (1961), 1, 1–50.

В. Г. Спринджук 撰

【补注】关于测度论及遍历理论的思想在数论中的引人注目的应用,还可见[A1].

参考文献

[A1] Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton Univ. Press, 1981.

【译注】

参考文献

[B1] Спринджук, В. Г., Метрическая теория диофантовых приближений, М., 1977 (英译本: Sprindzhuk, V. G., Metric theory of diophantine approximations, John Wiley & Sons, 1979).

[B2] Спринджук, В. Г., 《Успехи Матем. Наук》, **35** (1980), 3 – 68.

[B3] Schmidt, W. M., Diophantine approximation, Lecture Notes in Math. **785**, Springer, 1980.

[B4] Берник, В. И., Мельничук, Ю. В., Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа, Минск, 1988.

朱尧辰 译

度量传递性[**metric transitivity**; **метрическая транзитивность**],具有(拟)不变测度 μ 的动力系统 $\{T_t\}$ 的

$\{T_t\}$ 的下述性质:关于 T_t 不变的相空间 W 的

任何可测子集 A(意为它与它的完全逆象 $(T_t)^{-1}A$ 相合)或者具有测度零，或者除零测度集不计外与 W 相合．此性质的形式上更强的叙述为，用模 0 不变集（指一集 A，它对每个 t 与 $(T_t)^{-1}A$ 相差一个零测度集）代替定义中的不变集．若 μ 是 σ 有限测度且"时间" t 取遍一个具有可数基的局部紧群（见[1]中关于流的证明）时，两个叙述是等价的，但对任意的变换群则不然（例如见[2]中以另外的理由所说的）．

代替度量传递性也可以称度量不可分解性（metric indecomposability），或**遍历性**（ergodicity）．若在给定动力系统中考虑若干个（拟）不变测度而 μ 是其中之一，那么代替关于 μ 的度量传递性（遍历性）可以称 μ 的度量传递性（遍历性）．当然，正规化不变测度 μ 的可分解性的含意有所不同，即 μ 可能表示为 $a_1\mu_1+a_2\mu_2$，这里 μ_i 是异于 μ 的标准化不变测度，且 $a_i>0$．μ 的不可分解性等价于度量传递性的第二个（更强的）定义（见[2]，[3]）．

若 W 上赋有拓扑，则在自然假设下（见[1]中关于流的讨论）度量传递性蕴含：对几乎所有 $w\in W$，w 的轨道处处稠密（此时度量传递性蕴含**拓扑传递性**（topological transitivity））．反之不然．

从 J. von Neumann（[4]，[5]）开始，关于非遍历系统分为遍历分量的分解的许多结果已经得到．关于传统的、纯度量的叙述（W 为 **Lebesgue 空间**（Lebesgue space）且仅含一个（拟）不变测度），见[5]，[6]．Н. М. Крылов 与 Н. Н. Боголюбов（[7]）获得关于双层类度量紧统上拓扑流与级联的一些更强的结果（亦见[8]，[9]）：1）将与拓扑相协调的标准化不变测度分为遍历测度的分解；以及 2）所有这些分解立即利用**遍历集**（ergodic set）的"几何"实现．关于这些结果到其他变换群的推广，已知 1）比 2）在更宽的条件下成立（见[2]，[3]）．关于在适当**可测空间**（measurable space）的动力系统（目前只是级联与流）以及（或者）关于拟不变测度，也有一些类似的结果（见[9]－[10]）．

测度空间 (W,μ) 的分划的度量传递性意为：任何全由 ξ 的元组成的可测子集 $A\subset W$ 或者有零测度或者除去一零测度集不计外与 W 相合．人们也用 ξ 的绝对不可测性（absolute non-measurability）一词来代替度量传递性．由变换群生成的动力系统的度量传递性，当它的轨道构成相空间的一分划时，便与此分划的度量传递性相合．若构成动力系统的变换是不可逆的，则它们的度量传递性也化为某个分划的度量传递性；可是，它的描述更为复杂：含有某一点的元由此点的所有象以及这些象的所有逆象构成．

参考文献

[1] Hopf, E., Ergodentheorie, Springer, 1937.

[2] Фомин, С. В.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **14** (1950), 3, 261－274.

[3] Боголюбов, Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, 561－569.

[4A] Neumann, J. von, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 3, 587－642.

[4B] Neumann, J. von, Zusätze zur Arbeit "Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik", *Ann. of Math.*, **33** (1933), 4, 789－792.

[5] Рохлин, В. А.,《Успехи матем. наук》, **4** (1949), 2, 57－128.

[6] Рохлин, В. А.,《Матем. сб.》, **25** (1949), 2, 235－249.

[7] Bogolyubov, N. N. and Krylov, N. M., La theorie général de la measure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire, *Ann. of Math.* (2), **38** (1937), 65－113.

[8] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (英译本: Nemytskiĭ, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960).

[9] Oxtoby, J., Ergodic sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 116－136.

[10] Кифер, Ю. И., Пирогов, С. А.,《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 1, 77－80.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 术语"遍历"多半用于度量传递性的第一种方式中；关于第二种（较强的）方式有时则用"不可约"一词；例如见[A4]．两个概念在下述情形下相合：若对 W 的每个 mod 0 不变的可测子集 A，存在 W 的一个不变可测子集 A_1 使 $\mu(A\Delta A_1)=0$．使此满足的条件，亦见[A8]的第 1 章 § 2 中引理 1(的证明)，并且例如[A6]中引理 3.3．两个概念不相合的一个简单例子，见[A5]，p. 84．

上述所谓"不可分解性"通常用来表示 μ 是 W 上所有不变概率测度（**概率测度**（probability measure）为标准化测度）的（凸）集 $J(W)$ 的一个极值点（extreme point）．在 W 或 $\{T_t\}$ 满足各种条件下，一个不变概率测度为不可分解的（即为 $J(W)$ 的一个极点），当且仅当它是不可约的（依上述定义），此命题的证明，也可在[A1]与[A6]中找到；又[A7]中定理 6.10 (iii) 的证明能容易地适用于一般半群 $\{T_t\}$ 与任意 W 的情形．

至于将相空间分为遍历分量的分解，亦见[A6]与[A2]．这种分解导致不变测度作为遍历测度的积分的表示；若相空间 W 是紧的，这是 Choquet 理论的简易推论，见[A5]，p. 82．关于随机变换论述中的

这种表示，见[A3]中附录A1.

参考文献

[A1] Blum, J. R. and Hanson, D. L., On invariant probability measures I, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1125 – 1129.

[A2] Farrell, R. H., Representation of invariant measures, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 447 – 467.

[A3] Kifer, Yu., Ergodic theory of random transformations, Birkhäuser, 1986 (译自俄文).

[A4] Mackey, G. W., Point realizations of transformation groups, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 327 – 335.

[A5] Phelps, R. R., Lectures on Choquet,s theorem, v. Nostrand, 1966.

[A6] Varadarajan, V. S., Groups of automorphisms of Borel spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109** (1963), 191 – 220.

[A7] Walters, P., An introduction to ergodic theory, Springer, 1982.

[A8] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinaĭ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982 (译自俄文).

郑世骏 译 苏维宜 校

可度量化空间 [metrizable space; метризуемое пространство]

其拓扑由某个**度量**(metric)按下述规则生成的空间：点属于一个集合的闭包的充要条件是，它与此集合的距离为零．这样的度量如果存在就不是唯一的，除非空间是空集或仅由一个点构成．特别地，每个可度量化空间的拓扑都由一个有界度量生成．可度量化空间满足强**分离公理**(separation axiom)：它是正规的，甚至是集体正规的．每个可度量化空间都是仿紧的．所有可度量化空间都满足**第一可数公理**(first axiom of countability)．但是，这些条件之一或任何一组都不足以保证一个空间是可度量化的．可度量化性的一个充分条件由 П. С. Урысон(1923)得到：具有可数**基**(base)的每个**正规空间**(normal space)(甚至每个**正则空间**(regular space)，А.Н. Тихонов, 1925)都是可度量化的．1923年，П.С. Александров 和 П.С. Урысон 提出了空间可度量化的第一个一般的判别准则(见[1])．在此基础上，发展了两个后继的、更完善的可度量化判别准则：1)一个空间是可度量化的，当且仅当它是集体正规的且具有开覆盖的可数加细集；2)一个空间是可度量化的，当且仅当它具有开覆盖的可数基本集且满足 T_1 分离公理(Stone-Архангельский 准则(Stone-Arkhangel'skiĭ criterion))．这里，空间 X 的开覆盖的一个集合 ξ 称为基本的(fundamental)，如果对每个点 $x\in X$ 和 x 的每个邻域 O_x，存在一个覆盖 $\gamma\in\xi$ 和 x 的一个邻域 O_{1x}，使得与 O_{1x} 相交的 γ 的每一个元素都含于 O_x．这些判别准则与无限制可除性(unrestricted divisibility)的性质及可度量化空间的全正规性(full normality)的下述基本性质有关．可度量化空间 X 的每个开覆盖 γ 都可以加细为一个开覆盖 γ'，使得对任一 $x\in X$，存在 $U\in\gamma$ 满足 $\bigcup\{W\in\gamma', x\in W\}\subset U$.

基于另一个重要的思想——局部有限性，有一个重要的关于可度量化性的一般判别准则．長田-Смирнов 准则(Nagata-Smirnov criterion)：空间 X 是可度量化的，当且仅当它是正则的且具有分解为局部有限集族(见**局部有限族**(locally finite family))之可数集的基．Bing 准则(Bing criterion)与此类似，但它使用**离散集族**(discrete family of sets)来代替局部有限集族．上述可度量化性判别准则的方便说法与一致基和正则基的概念有关．空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为正则的(regular)(一致的(uniform))，如果对每一点 $x\in X$ 及其任一邻域 O_x，存在 x 的邻域 O_{1x}，使得同时与 O_{1x} 和 O_x 的补集相交的基 $\mathscr{B}$ 的元素个数是有限的(特别地，如果集合 $\{U\in\mathscr{B}: U\ni x, U\not\subset O_x\}$ 是有限的)．空间 X 是可度量化的，当且仅当它是集体正规的且具有一致基．最后，T_1 空间可度量化的充分必要条件是它具有正则基．正则基的方便之处在于它揭示了任意可度量化空间的仿紧性结构：为了在空间 X 的具有正则基 $\mathscr{B}$ 的任一开覆盖 γ 中，内接一个局部有限开覆盖，只需考虑族

$$\mathscr{B}_\gamma=\{U\in\mathscr{B}:\text{存在 } W\in\gamma \text{ 使 } U\subset W\}$$

的所有极大元的全体即可．

在许多特殊的空间类中，可度量化判别准则变得非常简单．例如，紧统 X 可度量化的充分必要条件是下列四个条件之一：a) X 有可数基；b) X 有点可数基；c) X 中有可数网络(见**网(拓扑空间中集合的)**(net (of set in a topological space))；**网络**(network))；d) $X\times X$ 中的对角线是 G_δ 集．拓扑群空间可度量化的充分必要条件是此群满足第一可数公理；此外，该空间还可用一个不变度量来度量化(例如，关于左乘不变)．

可度量化空间的一个特有性质是若干基数性性质的一致性．特别地，在可度量化空间中，Суслин 数、Lindelöf 数、密度、特征标、展形和权都相同．这些数的不一致性是相应的空间不可度量化的一个标志．

不是每个可度量化空间都可以用完全度量来度量化：有理数空间即为一例．一个空间可以用完全度量来度量化，当且仅当它是可度量化的且在包含它的某个紧空间中是 G_δ 型集．可用完全度量来度量化的空间的一个重要的拓扑性质是 Baire 性质(Baire property)：任一可数的处处稠密开集族的交集是处处稠密的．

与可度量化空间在性质方面非常接近的是所谓 Moore 空间(Moore spaces)，即具有可数加细开覆盖族的完全正则空间，还有格空间．

如果改变度量公理，用某种方式削弱它，或者考虑用这样的 v 度量生成的拓扑，则得到可度量化空间概念的广泛推广．放弃三角形公理便得到可对称化空间（symmetrizable spaces）．Moore 空间适合这个模式．可度量化性的另一个重要的推广是关于在半域或其他一般性代数结构上取值的“度量”的讨论．

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениям, М., 1974（英译本：Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）.

[2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[3] Антоновский, М. Я., Болтянский, В. Г., Сарымсаков, Т. А., Метрические пространства над полуполями, Таш., 1961.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 可度量化空间的拓扑在这里是用闭包运算来描述的．较常见的是使用开球：对 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，如果 $B(x, \varepsilon)$ 表示与 x 之距离小于 ε 的点集（中心为 x 的 ε 球），则集合 U 称为开集，当且仅当对每个 $x \in U$，存在 $\varepsilon > 0$ 使 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$．

可度量化判别准则 1）属于 R. H. Bing（[A1]）．可数加细开覆盖族也称为展开列（development）．定义与详细信息见 **Moore 空间**（Moore space）的补注．

基本集有时称为局部加星集（locally starring set）．全正规空间也称为星正规空间（star-normal space）（每个开覆盖都允许一个星加细（star refinement）），在翻译的俄文文献中特别爱这样用．正则拓扑空间是全正规的，当且仅当它是仿紧的．

无约束可除性是［A4］中定义的性质；它类似于上面定义的全正规性，但显然是不等价的．

广义可度量化空间的综述（部份地，简要概述）见［A3］．可度量化空间见［A5］．

参考文献

[A1] Bing, R. H., Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.*, 3 (1951), 175－186.

[A2] Burke, D. K., Covering properties, in J. Barwise (ed.): Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 347－422.

[A3] Gruenhage, G., Generalized metric spaces, in J. Barwise (ed.): Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 423－501.

[A4] Aleksandrov, P. S. and Ponomarev, V. I., Some classes of n-dimensional spaces. *Sib. Mat. Zh.*, 1 (1960), 3－13（俄文）.

[A5] Nagata, J.-I., Modern general topology, North-Holland, 1985.

白苏华、胡师度 译

Meusnier 定理 [Meusnier theorem; Мёнье теорема]

如果 γ 是落在曲面上的一条曲线，P 是 γ 上一点，则 γ 在点 P 的曲率 k、曲面上由过 γ 在点 P 的切线的法平面 N 所截的法截线的曲率 k_N，以及 γ 在点 P 的密切平面与法平面 N 之间的夹角 α 满足关系式

$$k_N = k \cos \alpha .$$

特别地，曲面上每一条斜截线的曲率可以用有相同切线的法截线的曲率来表示．

该定理由 J. Meusnier 在 1779 年证明（发表在［1］）．

参考文献

[1] Meusnier, J., Mém. prés. par div. Etrangers. Acad. Sci. Paris, **10** (1785), 477－510.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976, p. 142（中译本：多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988）.

[A2] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differential geometrie, Springer, 1973.

陈维桓 译

微丛 [micro-bundle; микрорасслоение]

一个映射 $p: E \to X$，它是**保核收缩**（retraction）（那就是，存在 $g: X \to E$，使 $pg = 1_X$），并且在下面的意义下是局部平凡的：对每个 $x \in X$，E 中存在 $g(x)$ 的一个邻域 U，它可以表示为直积 $U = V \times \mathbf{R}^n$，使 $p|_U$ 为到 V 上的投影．如果对每一个这样的邻域 U，在每个纤维 $(p|_U)^{-1}(x)$ 中总存在固定的分片线性结构，更进一步，如果 U 到 $\mathbf{R}^n$ 上的投影是分片线性的，并且对两个邻域 U_1 和 U_2 及任意 $x \in p(U_1) \cap p(U_2)$，在 $(p|_{U_1})^{-1}(x)$ 和 $(p|_{U_2})^{-1}(x)$ 上的结构在 $g(x)$ 的一个邻域中是一致的，那么微丛就称为分片线性的（piecewise linear）．其他的结构可以类似引进．

微丛的概念是为了给拓扑或分片线性流形 N 定义**切丛**（tangent bundle）的模拟而引进的．即这里 $E = N \times N$，$p(x, y) = y$ 和 $g(x) = (x, x)$．每一个拓扑的微丛等价于具有相应维数的纤维 $\mathbf{R}^n$ 的唯一的局部平凡丛，那就是，存在 $g(x)$ 在 E 中的某个邻域 W 到具有纤维 $\mathbf{R}^n$ 的某个丛 $\bar{p}: E \to X$ 的零截面的邻域 $\bar{W}$ 中的一个同胚 h．这事实对分片线性的微丛也是真的．尽管由于有这个定理，微丛的概念已经失去它的理论价值，但在具体问题中它仍是有用的．

А. В. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milnor, J., Microbundles, Part I, *Topology*, **3**. Suppl., **1** (1964), 53－80.

[A2] Kirby, R. C. and Siebenmann, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and tria-

ngulations, Princeton Univ. Press, 1977.　徐森林 译

微局部分析 [microlocal analysis]

【补注】 微局部分析在局部范围内考察(广义、超)函数，算子等等. 在此"微局部"意指，由在每一点引进(余切)方向比通常更局部地观察事物. 在 Fourier 分析中相应在 x 和 ξ 两者局部地观察事物. 鉴于不确定性原则，这只有考虑对象模正则部分才有可能. 这个思想首先被 P. D. Lax，溝畑茂，L. Hörmander 等人用来研究拟微分算子. V. P. Maslov 由于引进一个规范结构丰富了这个理论. 佐藤幹夫构造了底空间为 M 的余切球丛 S^*M 上的微函数的层作为微局部分析的基本对象.

超函数的微解析性. 一个**超函数**(hyperfunction) $f\in\mathscr{B}(M)$ 称为在 $(x_0,\xi_0)\in S^*M$ 是微解析的(micro-analytic)，如果在 x_0 的一个邻域，它容许**解析延拓**(analytic continuation)到半空间 $<\mathrm{Im}\,z,\xi_0><0$，在它容许一边值表示 $\sum_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j 0)$，使得对每一 j，$\Gamma_j\cap\{<\mathrm{Im}\,z,\xi><0\}\neq\varnothing$ 的意义下. 这等于说，在 x_0 附近，$f=\mathscr{F}^{-1}(g)+h$，其中 h 是实解析函数的芽，又 g 是一 Fourier **超函数**(hyperfunction)在 ξ_0 的一维邻域中是指数递减的. 在 f 不是微解析的点 $(x_0,\zeta_0)\in\Omega\times S^{n-1}$ 的集合称为 f 的奇异谱(singular spectrum)，并记为 S.S.f. 由定义

$$\mathrm{S.S.}\ F(x+i\Gamma 0)\subset\Omega\times(\Gamma^0\cap S^{n-1}),$$

其中 $\Gamma^0=\{\xi\in\mathbf{R}^n:<y,\xi>\geqslant 0$ 对所有 $y\in\Gamma\}$ 是 Γ 的对偶锥. 反之，一超函数满足这个估计就可以写成形式 $F(x+i\Gamma 0)$.

运算和奇异谱. 下列包含关系是成立的:

$$\begin{aligned}&\mathrm{S.S.}(fg)\subset\\ &\subset\{(x,\xi+\eta):(x,\xi)\in\mathrm{S.S.}f,(x,\eta)\in\mathrm{S.S.}g\}\cup\\ &\cup\{(x,\xi):x\in\mathrm{supp}f,(x,\xi)\in\mathrm{S.S.}g,\\ &\text{或 } x\in\mathrm{supp}\,g,(x,\xi)\in\mathrm{S.S.}f\};\\ &\mathrm{S.S.}f(\Phi(\tilde{x}))\subset(\Phi^{-1}\times{}^t d\Phi)(\mathrm{S.S.}f).\end{aligned}$$

在此，运算是合法的，如果向量 $\mathbf{0}$ 没有出现在右端的 ζ 分量中. 特别地，在坐标变换奇异谱起了 $S^*\mathbf{R}^n$ 的子集的作用. 限制 $f(x,0)=f(x,t)|_{t=0}$ 是可以的，如果 $\mathrm{S.S.}f\cap S^*_{\{t=0\}}M=\varnothing$，在这种情形下 f 称为包含 t 作为在 $t=0$ 的实解析参数(real-analytic parameter)，且因此

$$\mathrm{S.S.}f(x,0)\subset\rho_*(\mathrm{S.S.}f)|_{t=0},$$

其中 ρ 是在 dx 分量上的投影. 对偶断言是

$$\begin{aligned}&\mathrm{S.S.}\int f(x,t)dx\subset\\ &\subset\{(t,\theta):(x,t,0,\theta)\in\mathrm{S.S.}f\text{对某些 }x\}.\end{aligned}$$

联合这些断言就得到一对合，对偶于乘积:

$$\begin{aligned}&\mathrm{S.S.}(f\star g)\subset\\ &\subset\{(x+y,\xi):(x,\xi)\in\mathrm{S.S.}f,(y,\xi)\in\mathrm{S.S.}g\}.\end{aligned}$$

令 $P(x,\partial)$ 为一**线性微分算子**(linear differential operator)，具有实解析系数，并令 $\mathrm{Char}\,P=\{(x,\xi):P_m(x,\xi)=0\}$ 为它的**特征流形**(characteristic manifold). 那么

$$\begin{aligned}&\mathrm{S.S.}P(x,\partial)u(x)\subset\mathrm{S.S.}\ u(x)\subset\\ &\subset\mathrm{S.S.}\ P(x,\partial)u(x)\cup\mathrm{Char}\,P\end{aligned}$$

(佐藤基本定理(Sato fundamental theorem)). 因此，对解的 Cauchy 数据可以规定在一非特征流形上. Holmgren 唯一性定理(Holmgren uniqueness theorem)对这些数据成立. 更一般地，对任何超函数 u，$0\in\mathrm{supp}\,u\subset\{x_1\geqslant 0\}$ 蕴含 $(0,\pm dx_1)\in\mathrm{S.S.}\,u$(柏原-河井 Holmgren 型定理(柏原-河井 Holmgren-type theorem)); 再者，S.S.u 的纤维 E 在 0 具形式 $\rho^{-1}\rho(E\setminus\{\pm dx_1\})\cup\{\pm dx_1\}$，其中 $\rho:S^{n-1}\setminus\{\pm dx_1\}\to S^{n-2}$ 表示在赤道 $\xi_1=0$ 的投影(Watermelon 定理(Watermelon theorem)).

奇异谱的分解. 现有

$$\delta(x)=\int_{S^{n-1}}W(x,\omega)d\omega,$$

$$W(x,\omega)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\ \frac{\det(\mathrm{grad}_\omega\psi(x,\omega))}{(\varphi(x,\omega)+i0)^n},$$

其中扭转相(twisted phase) $\varphi(x,\omega)$ 是 (x,ω) 的一实解析函数，它对 x 是正型的(即 $\mathrm{Re}\,\varphi(x,\omega)=0$ 蕴含 $\mathrm{Im}\,\varphi(x,\omega)\geqslant 0$)，对 ω 是 1 次齐次的，又 $\varphi(0,\omega)=0$，$\mathrm{grad}_x\varphi(0,\omega)=\omega$; 又向量 $\psi(x,\omega)$ 使得 $<\psi(x,\omega),x>=\varphi(x,\omega)$，这是经典 Radon 分解(Radon decomposition)的一个拓广，其中

$$W(x,\omega)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\ \frac{1}{(x\omega+i0)^n}.$$

其分量，看成是 x 的一超函数，只有一个 ω 方向的奇异谱. 通过对合它给出广义超函数的一个类似分解. 如果对 $x\neq 0$，$\varphi(x,\omega)$ 也满足 $\varphi(x,\omega)\neq 0$，那么分量的奇异谱作为 x 的一个超函数恰好是一点 $(0,\omega)$; 这在应用中是有用的. 典型的例子是:

$$\begin{aligned}&W(x,\omega)=\\ &=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\ \frac{(1-ix\omega)^{n-1}-(1-ix\omega)^{n-2}(x^2-(x\omega)^2)}{(x\omega+i(x^2-(x\omega)^2+i0)^n}\end{aligned}$$

(柏原例子(Kashiwara example));

$$W(x,\omega)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\ \frac{1+i\alpha x\omega}{(x\omega+i\alpha x^2+i0)^n},\quad \alpha>0,$$

(Bony 例子(Bony example)). 对这样的分解 f 在 (x_0,ξ_0) 是微解析的，当且仅当 $f_x\star_x W(x,\omega)$ 对 (x,ω) 在 (x_0,ω_0) 是实解析的.

超函数 f 的 Fourier-Bros-lagolnitzer变换（Fourier-Bros-lagolnitzer transform）（f 的 FBI 变换（FBI-transform））为

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x,y,\xi,\alpha)} f(y)\,dy,$$

其中 $\varphi(x,y,\xi,\alpha)$ 为一实解析函数，满足：1)对 $x=y=\alpha$ 有 $\varphi=0$ 和 $\varphi_x=-\varphi_y=\xi$；及2) $\operatorname{Im}\varphi \geqslant C(|x-\alpha|^2+|y-\alpha|^2)$ 对某些 $C>0$. 这样的 φ 的典型例子是

$$\varphi(x,y,\xi,\alpha)=(x-y)\xi+i((x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2).$$

一个超函数 f 在 (x_0,ξ_0) 是微解析的，当且仅当对 f 的某些（等价地，任意的）具紧支集的修改，它的 FBI 变换在 (x_0,ξ_0,x_0) 的一邻域中关于 λ 对 (x,ξ,α) 一致地指数递减. 反演公式对径向变量积分给出公式

$$=\frac{2^n\Gamma(3n/2)}{(-2\pi i)^{3n/2}}\times$$

$$\times\int_{\mathbf{R}^n\times S^{n-1}}\frac{1+(i/2)(x-y)\omega}{((x-y)\omega+i((x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2)+i0)^{3n/2}}\,d\alpha\,d\omega.$$

这就提供层 $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ 的一个单位分解. 所有这些论点和相应的广义函数的（解析）**波前**（wave front）理论是一致的.

S^*M 上的微函数的层 $\mathscr{C}$（sheaf $\mathscr{C}$ of micro-functions）是关联于预层

$$S^*M\supset\Omega\times\Delta\mapsto\mathscr{C}(\Omega\times\Delta)=$$
$$=\mathscr{B}(\Omega)/\{f\in\mathscr{B}(\Omega):\mathrm{S.S.}f\cap\Omega\times\Delta=\varnothing\}.$$

M 上的层序列

$$0\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\xrightarrow{\mathrm{sp}}\pi\cdot\mathscr{C}\to 0$$

是正合的. 在此 $\pi:S^*M\to M$ 表示投影. 由定义对于一超函数 f, $\mathrm{S.S.}f=\operatorname{supp}\mathrm{sp}[f]$. 层 $\mathscr{C}$ 是散射的，它蕴含超函数的任意修改都保持奇异谱的可能性. 解析拟微分算子（参见**拟微分算子**（Pseudo-differential operator））和微微分算子（micro-differential operators）自然地作用在 $\mathscr{C}$ 上成为层同态. 它们同构地作用在一非特征点. 规范变换诱导拟微分算子的层的环同构. 利用这些，拟微分方程的一个简单特征系统可以局部约化为 de Rham、Cauchy-Riemann 和 Lewy-Mizohata 方程的副本的直接和（基本结构定理（fundamental structure theorem））.

层 $\mathscr{C}$ 是从层 $\mathscr{O}$ 按佐藤微局部化（micro-localization）构造出来的：令 M 为一实解析流形，又 X 为一复邻域. 令 ${}^M\tilde{X}=(X\setminus M)\sqcup S_MX$ 为实爆破，$\iota:X\setminus M\to X$, $j:X\setminus M\to{}^M\tilde{X}$ 为规范包含，又令 DM 为 S_MX 和 S_M^*X 在 M 上由 $\langle\xi,\eta\rangle\leqslant 0$ 定义的纤维乘积的子集；令 φ,τ 为在因子上的规范投影. 令 ω 为 M 的**定向**（orientation）层. 那么

$$*\mathscr{C}=\mathbf{R}\tau\cdot\pi^{-1}\mathbf{R}\Gamma_{S_MX}(j*\iota^{-1}\mathscr{O})\otimes_\omega[n]=$$
$$=\mathbf{R}^{n-1}\tau*\pi^{-1}\mathscr{H}^1{}_{S_MX}(j*\iota^{-1}\mathscr{O})\otimes\omega$$

（基本消灭定理（fundamental vanishing theorem））. 这个论据可以拓广到微函数关于一全纯参数或任何层的微局部化的二次微局部化（second micro-localization）.

另外的参考文献亦见**超函数**（Hyperfunction）.

参考文献

[A1] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, in H. Komatsu (ed.): Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations, Part II, Lecture notes in math., Vol. 287, Springer, 1973, 263–529.

[A2] Kashiwara, M., Systems of micro-differential equations, Birkhäuser, 1983（译自法文）.

[A3] Sjöstrand, J., Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, **95** (1982).

[A4] Laurent, Y., Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe, Birkhäuser, 1985.

[A5] Kashiwara, M. and Schapira, P., Microlocal study of sheaves, *Aistérisque*, **128** (1986).

A. Kaneko 撰 钟同德 译

Михайлов 准则 [**Mikhaĭlov criterion**; **Михайлова критерий**]

实系数多项式

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$$

的所有根都具有严格负实部，当且仅当实变量 $\omega\in[0,\infty)$ 的复值函数 $z=P(i\omega)$ 在复 z 平面上描绘了一条始于正实半轴、不通过原点的曲线（Михайлов 速端曲线（Mikhaĭlov hodograph）），它逐次生成穿过 n 个象限的运动.（一个等价的条件是：当 ω 从 0 增大到 $+\infty$ 时，径向量 $P(i\omega)$ 不为零，且沿正向穿过角 $n\pi/2$ 单调旋转.）

这个准则是由 А. В. Михайлов 首先提出的（[1]）. 它等价于 **Routh-Hurwitz 准则**（Routh-Hurwitz criterion）；不过，它具有几何特征，不必用行列式的不等式来验证（见[2]，[3]）. 对于 n 阶常系数线性微分方程

$$x^{(n)}+ax^{(n-1)}+\cdots+a_0x=0,$$

或具有常数矩阵 A 的、以 $P(z)$ 为特征多项式的线性方程组

$$\dot{x}=Ax,\ x\in\mathbf{R}^n,$$

Михайлов 准则给出了渐近稳定性的必要和充分条件（见[4]）.

Михайлов 准则是自动控制线性系统稳定性的一条频率准则（例如，与 **Nyquist 准则**（Nyquist criterion）密切相关）．对于具有迟滞的自动控制系统以及脉冲系统，已经知道 Михайлов 准则的一个推广（见[5]），对于非线性控制系统也有与 Михайлов 准则类似的准则（见[6]）．

参考文献

[1] Михайлов, А. В.,《Автоматика и телемеханика》, 1938, 3, 27－81.

[2] Чеботарев, Н. Г., Мейман, Н. Н., Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, М.-Л., 1949.

[3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973（中译本：М. А. 拉甫伦捷夫，Б. В. 沙巴特，复变函数论方法，人民教育出版社，上册 1956，下册 1957）.

[4] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

[5] Гноенский, Л. С., Каменский, Г. А., Эльсгольц, Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, М., 1969.

[6] Blaquiére, A., Mécanique non-lineaire, Gauthier-Villars, 1960.

Н. Х. Розов 撰

【补注】 最近已有关于多项式根的稳定性准则的推广．它以 В. Л. Харитонов 的名字命名（[A1]）．这个推广是：多项式 $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 的系数 a_i 在给定的区间 $[a_i^-, a_i^+]$ $(i=0, \cdots, n-1)$ 上取值．Харитонов 提出的问题是：所有以 $a_i\in[a_i^-, a_i^+]$ 为系数的多项式 $p(z)$ 是否都是严格稳定的．结果表明，为了回答上述问题，只须研究四类特殊多项式的稳定性．

参考文献

[A1] Kharitonov, V. L., Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Differential Eq.*, **14** (1978), 11, 1483－1485.

[A2] Barmish, B. R., New tools for rohustness analysis, in IEEE Proc. 27th Conf. Decision and Control, Austin, Texas, December 1988, IEEE, 1988, 1－6.

[A3] LaSalls, S. and Lefschetz, S., Stability by Liapunov's direct method, Acad. Press, 1961.

唐 云 译

Milne 法 [Milne method; Милна метод]

解一阶常微分方程

$$y'=f(x,y),\ y(a)=b$$

的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）的一种有限差分方法．

此方法利用有限差分公式

$$y_i-y_{i-2}=2hf(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

其中

$$x_i=a+ih,\quad i=0,1,\cdots.$$

按该式进行计算，必须利用其他某种方法找出补充的初始值 $y_1\approx y(x_1)$．Milne 法具有二阶准确度且 Dahlquist 稳定，即对于任意固定区间 $[a, A]$，齐次方程 $y_i-y_{i-2}=0\,(i=0,1,\cdots,[(A-a)/h])$ 的全部解关于 h 一致有界．Dahlquist 稳定的充分条件是，差分方程左侧特征多项式的单根的绝对值不大于 1，重根的绝对值严格小于 1．这里，特征多项式 $\rho(\lambda)=\lambda^2-1$ 的根为 $\lambda=\pm1$，从而满足上述稳定性条件．不过，对于有负特征值的矩阵 A，在解方程组 $y'=Ay$ 时，计算误差迅速增长．

预报校正 Milne 法（predictor-corrector Milne method）利用两个差分公式：预报式

$$\overline{y_i}=y_{i-4}+\frac{4h}{3}(2f_{i-3}+f_{i-2}+2f_{i-1}),\ i=4,5,\cdots,$$

和校正式

$$\overline{\overline{y_i}}=y_{i-2}+\frac{h}{3}(f_i+4f_{i-1}+f_{i-2}),\quad i=4,5,\cdots,$$

其中

$$f_i=f(x_i, y_i),\ \overline{f_i}=(x_i, \overline{y_i}).$$

用量

$$\varepsilon_i=\frac{1}{29}(\overline{y_i}-\overline{\overline{y_i}})$$

做误差的近似表达式．补充初始值 $y_j\approx y(x_j)(j=1,2,3)$ 可用某种其他方法来计算，例如用具有四阶准确度的 **Runge-Kutta 法**（Runge-Kutta method），该方法由[3]提出．

参考文献

[1] Бахвалов, Н.С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. C., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir., 1977）.

[2] Демидович, Б.П., Марон, И.А., Шувалова, Э.З., Численные методы анализа, Приближение функций, Дифференциальные уравнения, М., 1962.

[3] Milne, W.E., Numerical solution of differential equations, Dover, reprint, 1970.

В.В.Поспелов 撰

【补注】 这称为"Milne 法"的方法，在西方文献中称为（显）中点规则（midpoint rule）．代替"预报-校正 Milne 方法"中的校正式称为 Milne 法（Milne method 或 Milne device）．该方法是微分方程的 Simpson 求积法则的直接推广．术语"Dahlqust 稳定性"现今在英语文献中很少使用．较常使用"零稳定性"（zero-stability）、"根稳定性"（root-stability）或简称"稳定性"．

参考文献

[A1] Henrici, P., Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, 1962.

周概容 译

Milne 问题 [Milne problem; Милна проблема]

辐射转移理论 (radiative transfer theory) 中关于量子或粒子的单速动理输运方程在半空间中求解的一个问题．零入射辐射通量下，无穷远处具源的 Milne 问题的积分方程是由 E. Milne ([1]) 对于恒星大气中无吸收扩散的量子的各向同性散射情况首先引进的．

Milne 方程 (Milne equation) 取下列形式

$$B(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty B(t)E_1(|x-t|)dt, \qquad (1)$$

其中 $B(x)$ 是辐射 (或粒子) 密度，而

$$E_1(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}d\mu$$

是指数积分函数 ($E_1(x)=-\mathrm{Ei}(-x)$)．

在中子物理中，Milne 问题用于有界域中扩散近似的方程求解时近似边界条件的表述；在这方面，人们考虑到介质的中子俘获，各向异性散射和边界的曲率．

这里，Milne 问题是要求解下列积分微分方程：

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}p(\mu,\mu')\psi(x,\mu')d\mu',$$

带有介质所占据的半空间的边界上的边界条件，对于真空

$$\psi(0,\mu)=0,\ 对\ 0<\mu\leqslant 1, \qquad (2)$$

其中 c 是与一个核碰撞一次时的平均次级中子数 (对介质的散射中子和吸收中子，有 $c<1$)，$p(\mu,\mu')$ 是散射指示量 (对各向同性散射 $p(\mu,\mu')=1$)．关于吸收球或吸收柱外空间中的球形或柱形 Milne 问题，可类似地予以表述．

Milne 问题的解可通过对积分微分转移方程应用 **Laplace 变换** (Laplace transform) (见 [3])，再使用 **Wiener-Hopf 法** (Wiener-Hopf method) 去求解这样得到的泛函方程而方便地给出．

为了求解 Milne 问题，曾经建议应用相对于广义本征函数的展开和求解奇异积分方程的方法 (见 [4])．对 $p(\mu,\mu')=1$，$c<1$，Milne 问题的解求出为下列形式：

$$\psi(x,\mu)=\psi_{0-}(x,\mu)+a_{0+}\psi_{0+}(x,\mu)+\int_0^1 A(\nu)\psi_\nu(x,\mu)d\nu,$$

其中

$$\psi_\nu(x,\mu)=\varphi_\nu(\mu)e^{-x/\nu},$$

$$\varphi_\nu(\mu)=\frac{c\nu}{2}P\frac{1}{\nu-\mu}+\lambda(\nu)\delta(\nu-\mu)$$

是连续谱的本征函数，P 表 Cauchy 主值，$\delta(\nu-\mu)$ 是 Dirac δ 函数，以及

$$\lambda(\nu)=1-\nu c\,\mathrm{Artanh}\frac{1}{\nu},\quad \psi_{0\pm}=\varphi_{0\pm}(\mu)e^{\mp x/\nu_0}.$$

离散本征值 $\pm\nu_0$ 是特征方程

$$\nu c\,\mathrm{Artanh}\frac{1}{\nu}=1$$

的根．离散谱的本征函数采取形式

$$\varphi_{0\pm}(\mu)=\pm\frac{c\nu_0}{2}\frac{1}{\pm\nu_0-\mu}.$$

结果弄清楚的是，本征函数系 $\varphi_{0+}(\mu)$ 和 $\varphi_\nu(\mu)$ ($0\leqslant\nu\leqslant 1$)，在广义函数空间中 $0\leqslant\mu\leqslant 1$ 区间上是完全的，它们对权函数 $W(\mu)$ 是正交的，$W(\mu)$ 是奇异积分方程的解 (见 [4])．

Milne 问题的边界条件 (2) 给出 ($\mu\geqslant 0$)：

$$-\varphi_{0-}(\mu)=a_{0+}\varphi_{0+}(\mu)+\int_0^1 A(\nu)\varphi_\nu(\mu)d\nu,$$

也就是说，a_{0+} 和 $A(\nu)$ 定义为函数

$$\varphi_{0-}(\mu)=\frac{c\nu_0}{2}\frac{1}{\nu_0+\mu}$$

的展开式中的系数．中子的渐近密度

$$B_{ac}(x)=2\pi\int_{-1}^{+1}\left[\psi_{0-}(x,\mu)+a_{0+}\psi_{0+}(x,\mu)\right]d\mu=$$

$$=4\pi e^{-x_0/\nu_0}\sinh\frac{x+x_0}{\nu_0},$$

当

$$x=-x_0=\frac{\nu_0}{2}(\ln a_{0+}-i\pi)$$

时变为零．对 $c=0$，$p(\mu,\mu')=1$，Hopf 常数 (Hopf constant) $x_0=0.710446$．

参考文献

[1] Milne, E. A., *Mon. Notices Roy. Astron. Soc.*, **81** (1921), 361-375.

[2] Hopf, E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Univ. Press, 1934.

[3] Sneddon, I., Fourier transforms, McGraw-Hill, 1951.

[4] Case, K. M. and Zweifel, P. F., Linear transport theory, Addison-Wesley, 1967.

В. А. Чуянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Greenberg, W., Mee, C. van der and Protopopescu, V., Boundary value problems in abstract kinetic theory, Birkhäuser, 1987.

[A2] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988.

[A3] Davison, B. and Sykes, J. B., Neutron transport theory, Clarendon Press, 1957 (中译本：B. 戴维逊，中子迁移理论，科学出版社，1961).

[A4] Williams, M. M. R., The slowing down and thermalization of neutrons, North-Holland, 1966.

徐锡申 译

Milnor 球面 [Milnor sphere; Милнора сфера]

同胚（和分片线性同构），但不微分同胚于球面 S^n 的一个光滑流形．这样的流形的第一个例子是由 J. Milnor 在 1956 年构造出来的（见 [1]）；这同一个例子也是同胚但不微分同胚流形的第一个例子．

Milnor 球面的构造．同伦等价于 S^n $(n \geqslant 5)$ 的任何紧光滑定向闭流形同胚（甚至分片线性同构）于 S^n（见推广的 **Poincaré 猜想**（Poincaré conjecture），h **配边**（h-cobordism））．维数为 $4k$ 的闭光滑殆**可平行流形**（parallelizable manifold）的指数可以被随 k 指数增长的数 σ_k 除．对任何 k，存在指数 8 的可平行流形 P^{4k}（即 Milnor 的铅垂化构造（plumbing construction）），对 $k>1$，它的边界 $M=\partial P$ 是一个同伦球面（见 [2]，[6]）．如果 M 微分同胚于球面 S^{4k-1}，则从 P^{4k} 的边界上附加一个锥而得到的流形 W^{4k} 是一个指数为 8 的光滑殆可平行闭流形．因此，M 是 Milnor 球面．

还有其他的 Milnor 球面的例子（见 [5]）．

Milnor 球面的分类．后来，术语"Milnor 球面"也用于标准的球面 S^n．有 28 种截然不同（不微分同胚）的 7 维 Milnor 球面．

在分片线性球面上的所有光滑结构的集合等价于群 $\pi_i(\mathrm{PL}/O)$ 的元素之集合．后面的群对 $i<7$ 是平凡的，所以在分片线性的情形，维数小于 7 的任何 Milnor 球面微分同胚于标准球面．

设 θ_n 是同伦等价于 S^n 的 h 配边的 n 维光滑流形的类的集合．**连通和**（connected sum）的运算将这个集合变换到一个群中，其中，零是 S^n 的 h 配边类．对 $n>5$，θ_n 的元素与 n 维 Milnor 球面的微分同胚类一一对应．为计算群 $\theta_n(n>5)$，人们对 Milnor 球面 M^n 的稳定法丛（一个框架）的平凡化作了详细的说明（见 [3]）．因为 M^n 是稳定可平行的，所以这是可能的．所得到的框架流形定义了稳定同伦群 $\Pi_n=\lim_i \pi_{i+n}(S^i)$ 的一个元素．一般地，这个元素依赖于框架的选择（$\theta_n \to \Pi_n$ 是"多值映射"）．设 $\theta_n(\partial\pi)$ 是 θ_n 中的由有界可平行流形的 Milnor 球面组成的子群．这个多值映射诱导了一个同态 $\alpha: \theta_n/\theta_n(\partial\pi) \to \operatorname{Coker} J_n$，其中 $J_n: \pi_n(\mathrm{SO}) \to \Pi_n$ 是固定的 **Whitehead 同态**（Whitehead homomorphism），而 α 是一个同构．群 $\theta_n/(\theta_n(\partial\pi))$ 的计算简化为计算 Π_n 和 $\theta_n(\partial\pi)$ 的问题（未解决，1989），它是通过流形（保边界）的割补术（见 **Morse 割补术**（Morse surgery））做到的．设 $[M^n] \in \theta_n(\partial\pi)$，即 $M^n=\partial W^{n+1}$ 和 W^{n+1} 是可平行的．如果 W 是可缩流形，则从 W 上切去一小盘后，流形 M h 配边于 S^n，说得更确切些，$[M^n]=0 \in \theta_n$．如果 n 是偶数，则用割补术可以修改 W，使得带有 $\partial W_1=M$ 的新流形 W_1 是可缩的（这里需要 W 的可平行性和 $n \geqslant 4$）．因此，$\theta_{2n}(\partial\pi)=0$．

$n+1=4k$ 的情形　如果 W 的指数 $\sigma(W)$ 是 0，则 W 可以通过割补术变成可缩流形，使得在这个情形下，M 是标准球面．如果 $M=\partial W$ 和 $M_1=\partial W_1$，则 $M \# (-M_1)=\partial(W \# (-W))$ 和 $\sigma(W \# (-W_1))=\sigma(W)-\sigma(W_1)$（这里，$A \# B$ 是两个流形 A 和 B 的连通和或者是边界连通和）．如果 $\sigma(W)=\sigma(W_1)$，则 $[M]=[M_1]$，如此，不变量 $\sigma(W)$ 定义了一个元素 $[M] \in \theta_n$．若 $[M]=0 \in \theta_{4k-1}(\partial\pi)$ 和 $M=\partial W$，则 $\sigma(W)$ 可被 σ_k 除．反之，对任何 $k>1$，存在一个具有 $\sigma(B^{4k})=\sigma_k$ 的光滑闭流形 B^{4k}；因此，若 $M=\partial W$ 和 $\sigma(W)=n\sigma_k$，则 $M=\partial(W \# (-nB^{4k}))$，其中 $W \# (-nB^{4k})$ 是可平行的，且 $\sigma(W \# (-nB^{4k}))=0$．元素 $[M] \in \theta_{4k-1}(\partial\pi)$ 完全由 $\sigma(W)$ 对模 σ_k 的剩余所决定，且不同的剩余决定不同的流形．因为 $\sigma(W)$ 取任何能被 8 除的值，故 $\operatorname{ord}\theta_{4k-1}(\partial\pi)=\sigma_k/8$，例如，$\theta_7(\partial\pi)=\mathbf{Z}_{28}$，且 $\operatorname{Coker} J_7=0$，所以 $\theta_7=\mathbf{Z}_{28}$．

$n=4k+1$ 的情形．设 $M=\partial W^{4k+2}$．如果 W 的 **Kervaire 不变量**（Kervaire invariant）是零，即 $\psi(W)=0$，那么 W 能用割补术变换为可缩流形，即 $[M]=0$．现在，设 $\psi(W) \neq 0$．因为对 $4k+2 \neq 2^i-2$，存在 Kervaire 不变量不等于零的非光滑闭殆可平行的（在 $4k+2$ 维时它等价于稳定平行）流形，所以 M 不微分同胚于 S^{4k+1}．在此情形中，$\theta_{4k+1}(\partial\pi) \neq 0$，即 $\theta_{4k+1}(\partial\pi)=\mathbf{Z}_2$．对 $4k+2=2^i-2$ 且对这些 i 存在一个具有非零的 Kervaire 不变量的流形，$M \approx S^{4k+1}$，即 $\theta_{4k+1}(\partial\pi)=0$，但是解释所有这样的 i 的问题没有解决（1989）．然而，对 $i \leqslant 6$，答案是肯定的．因此，$\theta_{4k+1}(\partial\pi)$ 是 $\mathbf{Z}_2$ 或 0．

Milnor 球面有另外的表示．设 W 是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中由方程

$$z_1^{a_1}+\cdots+z_{n+1}^{a_{n+1}}=0$$

确定的代数簇，S_ε 是中心在原点（小）半径为 ε 的 $2n+1$ 维球面，对 a_k 的适当的值，$M=W \cap S_\varepsilon$ 是 Milnor 球面（见 [4]）．例如，对 $n=4$ 和 $a_1=6k-1$，$a_2=3, a_3=a_4=a_5=2, k=1,\cdots,28$，就得到了所有 28 个 7 维 Milnor 球面．

参考文献

[1] Milnor, J. W., On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math.*, **64** (1956), 399 – 405.

[2] Kervaire, M. A. and Milnor, J. W., Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Cambridge 1958. Cambridg. Univ. Press, 1960, 454 – 458.

[3] Kervaire, M. A. and Milnor, J. W., Groups of homotopy spheres, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 504－537.

[4] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

[5] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

[6] Browder, W., Surgery on simply-connected manifolds, Springer, 1972. Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】在拓扑流形上构造不同光滑结构的一般问题从上述论文发表（大约 1982）以来，已受到众多的关注．特别地，已经证明 $\mathbf{R}^4$ 有不同的光滑结构（但对 $n \neq 4$ 的 $\mathbf{R}^n$ 就不是了）．普遍参考的文献是[A1]．

参考文献

[A1] Freed, D. S. and Uhlenbeck, K. K., Instantons and four-manifolds, Springer, 1984. 薛春华 译

极小偏差法 [minimal discrepancy method; минимальных невязок метод]，极小剩余法 (minimal residual method)

一个迭代法，用于解具有作用在 Hilbert 空间 H 上的自伴正定有界算子 A 和一个给定的元素 $f \in H$ 的算子方程

$$Au=f. \tag{1}$$

极小偏差法的公式取这种形式

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_k(Au^k-f),\quad k=0,1,\cdots, \tag{2}$$

其中参数

$$\alpha_k=\frac{(A\xi^k,\xi^k)}{(A\xi^k,A\xi^k)} \tag{3}$$

在每一步 $k \geqslant 0$ 按照偏差（或剩余向量）$\xi^{k+1}=Au^{k+1}-f$ 的范数的极大极小化条件选取；即要求

$$\|\xi^k-\alpha_k A\xi^k\|=\inf_\alpha\|\xi^k-\alpha A\xi^k\|. \tag{4}$$

如果 A 的谱属于实直线上的一个区间 $[m, M]$，其中 $m \leqslant M$ 均为正数，那么方法(2)－(3)中的逼近序列 $\{u^k\}$ 按具有乘子 $q=(M-m)/(M+m)<1$ 的几何级数的速度收敛到(1)的一个解 u^*．

定义 H 中内积的不同方法导致不同的迭代法．特别地，对特殊的内积极小偏差法的公式与**最速下降法** (steepest descent, method of) 和极小误差法（见[2]）一致．

如果在 H 的一定的子空间上考虑，极小偏差法的收敛条件与上面给定的条件相比可以减弱．例如，仅在实空间考虑极小偏差法，那么可以去掉 A 是自伴的要求（见[3]－[5]）．

参考文献

[1] Красносельский, М. А., Крейн, С. Г., 《Матем, сб.》, 1952, 31, 315－334.

[2] Красносельский, М. А., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969（英译本：Krasnosel'skii, M. A., Approximate solution of operator equations, Wolters－Noordhoff, 1972）.

[3] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

[4] Марчук, Г. И., Кузнецов, Ю. А., Итерационные методы и квадратичные функционалы, Новосиб., 1972.

[5] Marchuk, G. I. and Kuznetsov, Yu. A., Sur les méthodes numériques en sciences physique et economique, Dunod, 1974（译自俄文）.

Ю. А. Кузнецов 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

最小谓词演算[minimal functional calculus 或 minimal predicate calculus; минимальное функциональное исчисление]

一个谓词演算，它包括所有最小命题演算的公理模式，以及通常量词公理模式和推理规则，它们是：

$$\forall\, xA(x)\supset A(t),\ A(t)\supset\exists\, xA(x)$$

（t 是任意项），**分离法则** (modus ponens) 以及

$$\frac{C\supset A(a)}{C\supset\forall\, xA(x)},\quad\frac{A(a)\supset C}{\exists\, xA(x)\supset C}$$

（变元 a 不在 $A(x)$ 及 C 中出现）．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

С. К. Соболев 撰　王　驹 译

极小理想[minimal ideal; минимальный идеал]

给定类型的某代数系统的理想的**偏序集** (partially ordered set) 的一个极小元．由于理想的集合上的序是由包含关系定义的，极小理想是不包含异于自身的同类型理想的一个理想．对多算子群（特别是环）和格，总是假定这个理想的偏序集不包含零理想．这一点不同于半群．如果没有特别提到理想的类别，极小理想是取所有（非零）双边理想的集合中的极小者．

在**半群** (semi-group) S 中，一个极小双边理想如果存在，则是唯一的且是最小双边理想：它称为半群 S 的核 (kernel of the semigroup)．不是每一个半群都有核（例如，无穷**单演半群** (monogenic semi-group))，但是，举例说，在任何有限半群中核存在．核是一个理想单半群（见**单半群** (simple semi-group))．如果半群 S 的核是一个**群** (group)，则 S 称为同群 (homogroup)．半群 S 是同群，当且仅当在 S 中存在元素 z，它被 S 的任何元素从左边也从右边整除（即 $z \in xS \cap Sx$ 对任何 $x \in S$）；在这种情况下核由所有这样的元素组成．例如，每一有限交换半群是一同群．

如果半群 S 有一极小左理想 L，则对任何 $x \in S$ 积 Lx 也是极小左理想．此外，每一极小左理想能按

这种方式得到. 每一极小左理想是左单半群. 在一个具有极小左理想的半群中每一左理想包含极小左理想, 且所有极小左理想(它们是两两不相交的)的并是这半群的核. 如果半群 S 有一极小左理想 L 和一极小右理想 R, 则 $R\cap L=RL$ 是 S 中子群, 且 $L=Se, R=eS$, 这里 e 是这子群的单位元素; 积 LR 与 S 的核一致, 且在此情形下是一个**完全单半群**(completely-simple semi-group).

对具有零的半群, 值得关注的是考虑非零理想, 而在相应的理想的偏序集中的一个极小元称为0极小理想(0-minimal ideal)(左理想(left ideal), 右理想(right ideal), 双边理想(two-sided ideal)). 0极小理想的性质按很多方式是类似于极小理想的性质, 带有某些自然的限制. 例如, 一个0极小双边理想不必是唯一的且不必是0单半群; 它可以是有零乘法的半群(见**幂零半群**(nilpotent semi-group)). 所有0极小左理想(分别地, 0极小右理想)的并是具有零的半群, 称为它的左基座(left socle)(分别地, 右基座(right socle))(按定义, 如果在这半群中无相应的0极小理想, 则**基座**(socle)等于零). 一个半群与它的左和右基座一致, 当且仅当它是完全单半群和具有零乘法的半群的0直接并.

考虑极小理想和0极小理想在很多重要的半群类的结构理论中起着实质性的作用(例如, 见**完全单半群**; **正则半群**(regular semi-group), 亦见[1], §§2.5, 2.7, Chapt. 6, §§7.7, 8.2, 8.3; [2], Chapt. V).

Л. Н. Шеврин 撰

环(如同半群)不必有极小理想(最简单的例子是整数环), 且如果在环中存在极小理想, 不必是唯一的. 在一环中所有(左, 右, 双边)极小理想之和称为该环的(左(left), 右(right), 双边(two-sided))基座(socle of the ring). 一个 **Artin 环**(Artinian ring)显然有非零基座. 一个**准素环**(primative ring)中极小理想的存在性使得它在以下意义下接近于矩阵环: 有非零基座的一个准素环同构于一除环上某向量空间所有线性变换的环的一个包含所有有限秩变换的稠子环([3]).

В. Е. Говоров 撰

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961–1967.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

[3] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

【补注】在交换环理论中, 也在分配格理论中, 极小素理想(即在素理想的序集中的极小元)的研究起重要作用. 在很大程度上, 这简单地是这些结构的**极大理想**(maximal ideal)的研究的序论对偶, 但这种平行性不是确切的——例如, 一个分配格的极小素理想的空间总是 Hausdorff 的但不必是紧的, 而极大理想的空间总是紧的但不必是 Hausdorff 的.

参考文献

[A1] Henriksen, M. and Jerison, M., The space of minimal prime ideals of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 110–130.

[A2] Simmons, H., Reticulated rings, *J. Algebra*, **66** (1980), 169–192.

[A3] Sun, S.-H., A localic approach to minimal prime spectra, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **103** (1988), 47–53.

葛显良 译 李慧陵 校

极小迭代法 [**minimal iteration method**; **минимальных итераций метод**]

解线性代数方程 $Ax=b$ 的一种方法, 其中解 x 是基向量的线性组合, 该基向量在与方程组矩阵相关的某个度量空间是正交的.

在对称矩阵 A 的情况, 用三项递归公式

$$p_{k+1}=Ap_k-\alpha_k p_k-\beta_k p_{k-1},\ k=1,\cdots,n-2, \quad (1)$$

构造正交向量系 $p_0,\cdots,p_{n-1}$, 而 $p_1=Ap_0-\alpha_0 p_0$, p_0 是一个任意向量, 其中

$$\alpha_k=\frac{(Ap_k,p_k)}{(p_k,p_k)},\ k=0,\cdots,n-2,$$

$$\beta_k=\frac{(p_k,p_k)}{(p_{k-1},p_{k-1})},\ k=1,\cdots,n-2.$$

可用公式 $x=\sum_{k=0}^{n-1}c_k p_k$ 找出方程组 $Ax=b$ 的解, 而系数 c_k 是方程组

$$\left.\begin{aligned} c_{i-1}+\alpha_i c_i+\beta_{i+1}c_{i+1}&=\frac{(b,p_i)}{(p_i,p_i)},\\ i&=1,\cdots,n-2,\\ \alpha_0 c_0+\beta_1 c_1&=\frac{(b,p_0)}{(p_0,p_0)},\\ c_{n-2}+\alpha_{n-1}c_{n-1}&=\frac{(b,p_{n-1})}{(p_{n-1},p_{n-1})}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

的解.

如果标准正交化算法退化, 即如果对 $r<n$, $p_r=0$, 则必须挑选一个新的初始向量 $p_0^{(1)}$, 使之与 $p_0,\cdots,p_{r-1}$ 正交, 而且必须使基向量系成为完全系.

在非对称矩阵情况, 运用双正交算法.

如果 A 对称正定, 则用系数为

$$\alpha_k=\frac{(Ap_k,Ap_k)}{(Ap_k,p_k)},\ \beta_k=\frac{(Ap_k,p_k)}{(Ap_{k-1},p_{k-1})}$$

的公式(1)构造一个 A 正交系 $p_0,\cdots,p_{n-1}$, 使得可以避免解辅助方程组(2), 而且给出系数 c_k 的一个显式 $c_k=(b,p_k)/(Ap_k,p_k)$. 这里, 对 A 极小迭代法, 可以添加迭代

$$x_{k+1}=x_k+c_{k+1}p_{k+1},\ k=0,\cdots,n-2,$$
$$x_0=c_0p_0,$$

其中 $x=x_{n-1}$. 该方法这样修正不要求反复应用所有向量 $p_0,\cdots,p_{k-1}$. 极小迭代法也用来解完全本征值问题和求逆矩阵.

参考文献

[1] Lanczos, C., An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *Res. Nat. Bur. Stand.*, **45** (1950), 4, 255-288.

[2] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960 (中译本: Д. К. 法捷耶夫, В. Н. 法捷耶娃, 线代数计算方法, 上海科学技术出版社, 1965).

Е. С. Николаев 撰 袁国兴、张宝琳 译

极小模型 [minimal model; минимальная модель]

相对于到非异簇内的双有理态射的存在性来说为极小的**代数簇** (algebraic variety). 更精确地说, 设 B 是代数闭域 k 上所有双有理等价的非异射影簇的类, 它们的函数域都同构 k 上一个给定的有限生成扩域 . 类 B 里的簇称为这个类的射影模型 (projective models), 或称为域 K/k 的射影模型. 簇 $X\in B$ 被称为相对极小模型 (relatively minimal model), 如果每个**双有理态射** (birational morphism) $f: X\to X_1, X_1\in B$, 都是同构的话. 换句话说, 相对极小模型是关于以下偏序的 B 的极小元: 如果存在双有理态射 $h: X_1\to X_2$, 就定义 X_1 支配 X_2. 如果一个相对极小模型在 B 内唯一, 就称为极小模型.

在双有理等价曲线的每个类里, 存在有唯一的 (在同构意义下) 非异射影曲线. 所以每条非异射影曲线是一个极小模型. 在一般情形下, 如果 B 非空, 则它至少包含一个相对极小模型. 由于有了**奇点的分解** (resolution of singularities) 的定理, 对于特征数 0 的任意维数的簇以及对特征数 $p>5$ 的维数 $n\leqslant 3$ 的簇, B 的非空性就知道了.

代数曲面的极小模型的基本结果有以下一些:

1) 非异射影曲面 X 是相对极小模型当且仅当它不含第一类例外曲线 (见**例外子簇** exceptional subvariety)).

2) 每个非异完全曲面有一个到相对极小模型上的双有理态射.

3) 除了有理和直纹曲面的类以外, 双有理等价曲面的每个非空类 B 里有一个 (唯一的) 极小模型.

4) 如果 B 是具有亏格 $g>0$ 的基曲线 C 的**直纹曲面** (ruled surface) 的类, 则 B 内所有相对极小模型都是几何直纹曲面 $\pi: X\to C$.

5) 如果 B 是有理曲面的类, 则 B 里面的所有相对极小模型就是射影平面 P^2 以及极小有理直纹曲面 $F_n=P(\mathcal{O}_{P^1}+\mathcal{O}_{P^1}(n))$, 对所有的整数 $n\geqslant 2$ 以及 $n=0$.

极小模型的理论已经被推广到正则二维概形 (见 [6], [7]). 任意域上有理曲面的极小模型也已经被描述了 (见 [2]).

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965.

[2] Исковских, В. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **43** (1979), 19-43.

[3] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

[4] Bombieri, E. and Husemoller, D., Classification and embedings of surfaces, in R. Hartshorne (ed.), Algebraic Geometry, Arcata 1974, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 329-420.

[5] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[6] Lichtenbaum, S., Curves over discrete valuation rings, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 2, 380-405.

[7] Shafarevich, I. R., Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.

В. А. Исковских 撰

【补注】从 1982 年以来, 在 (复数域上的) 高维簇, 尤其是三维簇的极小模型理论方面, 已经取得了重要的进展. 各种情况表明, 有必要允许温和类型的奇点, 即末端奇点和典范奇点. 它们的精确定义 (非常技术性的) 可参见下面列举的文献. (末端奇点是特殊的典范奇点, 对于曲面来说, 一个末端 (相应地, 典范) 奇点是光滑点 (相应地, 有理二重点).) 允许末端奇点后, 对于三维簇, 特别是非单直纹的 3 维代数簇, "极小模型问题" (minimal model problem) (即在双有理等价类内极小模型的存在性) 已经被森重文解决 ([A2]). 极小模型的不唯一性也是高维簇的新现象. 文献 [A1], [A2], [A4] 是这个新理论的很好的综述文献.

参考文献

[A1] Kollár, J., The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori's program, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **17** (1987), 211-273.

[A2] Mori, S., Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 117-253.

[A3] Mori, S., Classification of higher-dimensional varieties, in Algebraic Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46, Part 1, Amer. Math. Soc., 1987, 165-171.

[A4] Wilson, P. M. H., Towards a birational classification of algebraic varieties, *Bull. London Math. Soc.*, **19** (1987), 1-48.

[A5] Kollár, J., Minimal models of algebraic threefolds: Mori's program, *Sém. Bourbaki*, **712** (1989).

[A6] Kawamata, Y., Matsuda, K. and Matsuki K., Introduction to the minimal model problem, in T. Oda (ed.): Algebraic Geometry, Sendai 1985, North-Holland & Kinokuniya, 1987, 283-360.

陈志杰 译

极小正规子群 [**minimal normal subgroup**; **минимальная нормальная подгруппа**]

非平凡正规子群 H，在它与单位子群之间没有群的其他正规子群．并非所有的群都有极小正规子群．当群是有限的时候，其任一极小正规子群是同构单群的一个直积．如果极小正规子群存在且唯一，就称之为一个单块（monolith）（有时亦称之为基座（socle）），而群本身称为一个单块群（monolithic group）．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本：А. Г. 库洛什，群论，上、下，高等教育出版社，1987、1982）．

【补注】 极小正规子群是一个非平凡正规子群，它在以包含关系为序的全体这种子群构成的集合中极小．

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1980. 王 杰 译 石生明 校

极小性质 [**minimal property**; **минимальное свойство**]，正交展开式的部分和的

对于任意函数 $f \in L_2[a, b]$，$[a, b]$ 上的任意正交系 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 及任意 n，等式

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^{n}} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_a^b |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx$$

成立，其中的

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f) \varphi_k(x)$$

是函数 f 关于正交系 $\{\varphi_k\}$ 的展开式的 n 阶部分和，即

$$c_k(f) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

最小值恰好在和 $S_n(f, x)$ 处达到，并且

$$\int_a^b |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2, \ n = 1, 2, \cdots.$$

Bessel 不等式，关于完全系的 Parseval 等式以及正交展开式的某些其他基本性质本质上都是这个等式的推论（见 **Bessel 不等式**（Bessel inequality）；**Parseval 等式**（Parseval equality）；**完全函数系**（complete system of functions）；**正交级数**（orthogonal series）；**正交系**（orthogonal system））．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（英译本：Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V., Elements of the theory of functions and functional analysis, 1 – 2, Graylock, 1957 – 1961）.

[2] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

А. А. Талалян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1978, Sect. Ⅲ. 4（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）. 朱学贤 译 潘文杰 校

最小命题演算 [**minimal propositional calculus**; **минимальное пропозициональное исчисление**]，最小表达式演算（minimal calculus of expressions）

由**正命题演算**（positive propositional calculus）Π 加上一个新的联结词 $\neg$（否定）以及如下的公理模式：

$$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$$

而构成的逻辑演算．此公理模式称为归谬法（law of reductio ad absurdum）．

最小命题演算最大的特点是在该系统中，并不是每一个公式都可以从"假"推导出来，也就是说，从某一形为 $\neg A \& A$ 这样的公式推导出来．有另一种构成最小命题演算的办法：由 Π 加上一个新的命题常项 $\perp$（假），而不增加任何新的公理模式，也不增加否定联结词 $\neg$．在这样的系统中，公式 $A \supset \perp$ 将代替 A 的否定 $\neg A$．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

С. К. Соболев 撰 王 驹 译

极小集 [**minimal set**; **минимальное множество**]

1) Riemann 空间中的极小集是**极小曲面**（minimal surface）的推广．极小集是 Riemann 空间 M^n 中的 k 维闭子集 X_0，$n > k$、使得对某个 k 维 **Hausdorff 测度**（Hausdorff measure）为零的子集 Z 而言，集合 $X_0 \setminus Z$ 是 k 维可微极小曲面（即是定义在嵌入 M^n 的 k 维曲面上的 k 维体积泛函 Λ^k 的极值）．"极小集"的概念使所谓多维 **Plateau 问题**（Plateau problem）（亦见**多维 Plateau 问题**（Plateau problem, multi-dimensional））中特有的一些数学概念融合为一体．

А. Т. Фоменко 撰

2) 拓扑动力系统 $\{S_t\}$ 中的极小集是该系统的相空间 W 的一个非空且闭的不变（即全由轨道组成的）子集 F、它没有闭的不变真子集，也就是说，F 中每条轨道均在 F 中处处稠密．极小集的概念是 G.

D. Birkhoff 就流的情形引进的("时间"t 遍历实数集,见[1]).他证明(见[1],[2]),若 F 是紧的极小集且 $w \in F$,则对 w 的任何邻域 U、使得 $S_t w \in U$ 的那些 t 的集合是 $\mathbf{R}$ 中的相对稠密集(即存在一个 l,使得在长度为 l 的每个"时程"$[s, s+l]$ 中,至少有一个 t,使 $S_t w \in U$);反过来,若 W 是完全度量空间,w 是具有上述性质的一个点,则其轨道 $\{S_t w\}$ 的闭包是一个紧的极小集(对**瀑布**(cascade)的情形也对;至于更一般的变换群,例如见[3],[4]).Birkhoff 把 w(及其轨线)的这一性质称为回复(recurrence).W. H. Gottschalk 和 G. A. Hedlund([3])提出的另一个术语也在使用.上述性质称为点 w 的殆周期性(almost-periodicity of the point).若 $F = W$,则动力系统本身称为极小(minimal)动力系统.

若轨道具有紧的闭包,则它含有一个极小集 F(对于连续变换半群 $\{S_t\}$,其中 t 为非负实数或整数,一个类似的结果成立,这时变换 S_t 在 F 中甚至是可逆的([5])).可是对动力系统轨道的极限性态的研究并不归结为只研究轨道组成的极小集.二维闭曲面 S 上的 C^2 类光滑流的极小集有一种非常简单的结构:它或者是一个点,或者是一条闭轨道,或者是整个曲面,这时曲面是环面(Schwarz 定理(Schwarz theorem),([6])).在一般情形下,极小集的结构可以非常复杂(在这方面,除了[2]-[4]中所述外,还应指出,动力系统的极小性质对它关于其任何不变测度的遍历性质没有任何限制,([7])).极小集是**拓扑动力学**(topological dynamics)的基本研究对象.

参考文献

[1] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.

[2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949(中译本:B. B. 涅梅茨基,微分方程定性论,上、下册,科学出版社,1956,1959).

[3] Gottschalk, W. H. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

[4] Бронштейн, И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Киш., 1975(英译本:Bronšteǐn, I. U., Extensions of minimal transformations groups, Noordhoff & Sythoff, 1979).

[5] Левитан, Б. М., Жиков, В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978(英译本:Levitan, B. M. and Zhikov, V. V., Almost-periodic functions and differential equations, Cambridge Univ. Press, 1982).

[6] Hartman, P., Ordinary differential equations, Wiley, 1964.

[7] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129-262.

Д. В. Аносев 撰

【补注】 围绕拓扑动力系统中点的回复与殆周期性这些概念而产生的术语使人眼花缭乱.来自命名过程的有两个主流,一个以[1],[2]、[A8]为代表,另一个以[3],[A1],[A2]为代表.上面提到的那种点,即使得对于它的每个邻域 U,集合 $\{t: S_t w \in U\}$ 均在 $\mathbf{R}$ 中相对稠密的点 w,在[3],[4],[A1],[A2]中称为殆周期(almost periodic)点,而在[2],[A8]中称为殆回复(almost recurrent)点.(在[2]、[A8]中,殆周期性有另外的含义.)[1],[2],[A8]中定义的回复点的概念在形式上有所不同,见**回复点**(recurrent point).回复点总是[3]中的殆周期点(即殆回复点),但反之不然,对完全度量空间上的动力系统而言,这两个概念是一致的.(在[3]中,回复点的概念用来表示"正和负 Poisson 稳定".)Birkhoff 证明的是,点 w 的回复(按照[1]、[2]中的术语)等价于下述性质:w 具有紧的极小轨道闭包,只要相空间是完全度量空间.使用[3]中的术语可以证明:若 w 具有紧的极小轨道闭包,w 就是殆周期点(对相空间不加任何条件);反之,殆周期点总有极小轨道闭包,而且若相空间是局部紧的 Hausdorff 空间(不假定可度量化),这个闭包就是紧的.

拓扑动力系统中紧极小集的分类基本上是个未解决的问题.只是对特殊的几类可以有所议论(见**远离动力系统**(distal dynamical system)),见[4],[A2]和[A1].什么样的(紧)Hausdorff 空间可以成为极小流或极小瀑布的相空间,这也是一个未解决的问题.在这方面,上面提到的 Schwarz 定理对紧曲面给出部分解答;一种推广见[A4].Klein 瓶不可能是连续流的极小集(**Kneser 定理**(Kneser theorem),亦见[A6]),实投影平面亦不可能(见[A5]).仍然没有解决的是 Gottschalk 猜想(Gottschalk conjecture)(Seifert 猜想(Seifert conjecture)的特例):S^3 不可能是极小流的相空间,参考文献见[A7]的附录Ⅱ(Seifert 猜想说,S^3 上的任何光滑流具有周期轨道;有一个 C^1 类反例,[A9]).关于瀑布的结果见[A3],[A10].

参考文献

[A1] Auslander, J., Minimal flows and their extensions, North-Holland, 1988.

[A2] Ellis, R., Lectures on topological dynamics, Benjamin, 1969.

[A3] Glasner, G. and Weiss, B., On the construction of minimal skew products, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 321-336.

[A4] Gutierrez, C., Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **6** (1986), 17-44.

[A5] Lam, P.-F. Inverses of recurrent and periodic points under homomorphisms of dynamical systems, *Math. Systems Theory*, **6** (1972), 26-36.

[A6] Markley, N. G., The Poincare Bendixson theorem

for the Klein bottle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135** (1969), 159 - 165.

[A7] Markus, L., Lectures in differentiable dynamics, Amer. Math. Soc., 1980.

[A8] Sibirsky, K. S., Introduction to topological dynamics, Noordhoff, 1975(译自俄文).

[A9] Schweitzer, P. A., Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Amer. of Math.* (2), **100** (1974), 386 - 400.

[A10] Fahti, A. and Herman, M., Existence de diffeomorphismes minimaux, *Astérisque*, **49** (1977), 37 - 59.

胡师度、白苏华 译

极小单群[minimal simple group; минимальная простая группа]

所有真子群皆可解(见**可解群**(solvable group))的非交换**单群**(simple group). 已经得到有限极小单群的完整描述(见[1],[2]), 同时还有对于其局部子群(即 p 子群的正规化子)都可解的全体有限群的分类. 极小单群同构于下列射影特殊线性群之一:

$\mathrm{PSL}(2, 2^p)$, p任意素数;

$\mathrm{PSL}(2, 3^p)$, p任意奇素数;

$\mathrm{PSL}(2, p)$, 素数 $p \neq 3$ 且满足 $p^2 + 1 \equiv 0 (\bmod 5)$;

$\mathrm{PSL}(3, 3)$; 或者

铃木群(Suzuki group) $\mathrm{Sz}(2^p)$, p 为任意奇素数. 特别地, 每个有限极小单群由两个元素生成.

参考文献

[1] Thompson, J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 383 - 437.

[2A] Thompson, J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable Ⅱ, *Pacific J. Math.*, **33** (1970), 451 - 536.

[2B] Thompson, J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable Ⅲ, *Pacific J. Math.*, **39** (1971), 483 - 534.

[2C] Thompson, J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable Ⅳ, *Pacific J. Math.*, **48** (1973), 511 - 592.

[2D] Thompson, J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable Ⅴ, *Pacific J. Math.*, **50** (1974), 215 - 297.

[2E] Thompson, J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable Ⅵ, *Pacific J. Math.*, **51** (1974), 573 - 630.

С. П. Струнков 撰 王 杰 译 石生明 校

最小充分统计量[minimal sufficient statistic; минимальная достаточная статистика]

分布族 $\mathscr{P} = \{\mathrm{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ 的**充分统计量**(sufficient statistic) X, 对于任何其他充分统计量 Y, 有 $X = g(Y)$, 其中 g 为某一可测函数. 充分统计量是最小的, 当且仅当它所诱导的充分 σ 代数最小, 即它包含在任何其他充分 σ 代数中.

亦使用 $\mathscr{P}$ 最小充分统计量($\mathscr{P}$-minimal sufficient statistic)(或 σ 代数(σ-algebra))的概念. 充分 σ 代数 $\mathscr{B}_0$(及与其相对应的统计量)称为 $\mathscr{P}$ 最小的, 如果它包含在关于分布族 $\mathscr{P}$ 的任何充分 σ 代数 $\mathscr{B}$ 的完全化 $\overline{\mathscr{B}}$ 之中. 如果族 $\mathscr{P}$ 受 σ 有限测度 μ 控制, 则由密度族

$$\{p_\theta(\omega) = \frac{d\mathrm{P}_\theta}{d\mu}(\omega); \theta \in \Theta\}$$

产生的 σ 代数 $\mathscr{B}_0$ 是充分的和 $\mathscr{P}$ 最小的.

指数族

$$p_\theta(\omega) = C(\theta)\exp\{\sum_j Q_j(\theta) T_j(\omega)\}$$

的典型统计量 $T = (T_1, \cdots, T_n)$, 是最小充分统计量的一般例子.

参考文献

[1] Barra, J.-R., Mathematical bases of statistics, Acad. Press, 1981(译自法文).

[2] Schmetterer, L., Introduction to mathematical statistics, Springer, 1974(译自德文).

А. С. Холева 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E., Theory of point estimation, Wiley, 1983.

[A2] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

周概容 译

极小曲面[minimal surface; минимальная поверхность]

在所有点的**平均曲率**(mean curvature) H 为零的曲面.

关于极小曲面的首次研究可以回溯到 J.L.Lagrange (1768), 他考虑如下的变分问题: 求伸张在一条已知闭曲线上面积最小的曲面. 假设所求的曲面由 $z = z(x, y)$ 给出, Legrange 证明 $z(x,y)$ 必须满足所谓的 Euler-Lagrange 方程(Euler-Lagrange equation)

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{1}$$

后来 G. Monge (1776) 发现曲面的极小性条件导至 $H = 0$, 因而 $H = 0$ 的曲面称为"极小的". 然而, 在实际上必须区分极小曲面和面积最小曲面的概念. 因为 $H = 0$ 只是面积极小性的必要条件, 它是从曲面的面积在有给定边界的所有 C^2 类曲面中的第一变分化为零而得到的. 要证实在该类曲面中达到了即使是相对的(局部的)极小值, 也还必须研究曲面面积的第二

变分.

极小曲面理论有丰富多彩的历史；它吸引了 19 世纪和 20 世纪几乎所有的杰出数学家的关注. 它的问题刺激了数学的许多相近领域的发展. 积分 Euler-Lagrange 方程的一般方法首先是 Monge(1784) 和 A. Legendre(1787) 建议的，其解表示成从 (1) 的复特征线得到的所谓 Monge 公式 (Monge formula):

$$x = A(t) + A_1(\tau),\ y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau),$$

其中 t 和 τ 是复变量，$A(t), \cdots, C_1(\tau)$ 是满足条件

$$A'^2(t) + B'^2(t) + C'^2(t) = 0,$$
$$A_1'^2(\tau) + B_1'^2(\tau) + C_1'^2(\tau) = 0$$

的全纯函数. 但是，由于在当时复函数论尚未充分发展，这些方法在长时期内没有得到应用 (在 1832 年，S. Poisson 写道：很难从 Monge 公式得到任何好处，因为通过引进复变量它已经变复杂了).

关于极小曲面的新结果只是从 19 世纪 30 年代初开始出现的. Poisson 宣布了 (1832) 当曲面的边界接近于一条平面曲线时关于 Lagrange 变分问题的解. 过后不久，第三个极小曲面，即 **Scherk 曲面** (Scherk surface)(H. Scherk, 1834) 加入到已知极小曲面的行列：**悬链面** (catenoid)(L. Euler, 1774, J. Meusnier, 1776) 和**螺旋面** (helicoid)(Meusnier, 1776). 1842 年 E. Catalan 证明螺旋面是唯一的直纹极小曲面；1844 年提出并解决了 **Björling 问题** (Björling problem)；在 19 世纪 50 年代 O. Bonnet 在一系列文章中给出了当时关于极小曲面理论已知事实的新证明，并且发现了极小曲面的其他一些性质 (悬链面是唯一的旋转极小曲面，极小曲面的球面 Gauss 映射的共形性 (见**球面映射** (spherical map))，等等).

1866 年发现了 Weierstrass 公式 (Weierstrass formula):

$$x = x_0 + \mathrm{Re}\int_0^w (f^2 - g^2)\,dw,$$
$$y = y_0 + \mathrm{Re}\int_0^w i(f^2 + g^2)\,dw,$$
$$z = z_0 + 2\,\mathrm{Re}\int_0^w fg\,dw,$$

它用定义在圆盘或全平面上，以内蕴**等温坐标** (isothermal coordinates) (u, v), $w = u + iv$ 为变量的全纯函数 $f(w)$ 和 $g(w)$ 表示一个单连通的极小曲面 $S(x, y, z)$. 这些公式等价于极小曲面的所有其他的已知参数表示，或包含它们作为特殊情形 (B. Riemann (1860), A. Enneper (1864), K. M. Peterson (1866), 等等)，并且它们给出一个正则极小曲面，当且仅当 f 和 g 没有公共零点. 在 f, g 有公共零点的情形，曲面是在 f、g 的公共零点有退化度量

$$ds^2 = (|f|^2 + |g|^2)(du^2 + dv^2)$$

的所谓广义极小曲面 (generalized minimal surface). 在这样的点上，出现**分支点 (极小曲面的)** (branching point (of a minimal surface)). 利用 Weierstrass 公式就能够显式地构造并且研究许多具体的极小曲面；特别是，对于代数函数 f, g 便得到代数极小曲面.

1874 年 H. A. Schwarz 把极小曲面用等温坐标 (u, v) 表示为

$$r(w) = r(u + iv) = \mathrm{Re}\left[F(w) - i\int_0^w n(w)\,dF(w)\right],$$

其中 $F(w), n(w)$ 是有全纯坐标的三维向量，分别与 $r(u, 0)$ 和极小曲面的单位法向量 $n(u, 0)$ 相一致. 在 $\mathrm{Im}\,w = 0$ 下该公式给出了 Björling 问题的显示解，且容许极小曲面作 Schwarz 对称原理的延拓.

在同一个年代，S. Lie(1878) 发展了他对于 Monge 公式的解释：对于每一个有调和向径 $r(w)$ 的极小曲面指定了一条复解析曲线

$$z = R(w) \in \mathbf{C}^3,\ \mathrm{Re}\,R(w) = \frac{1}{2}\,r(w),$$

把极小曲面表示成曲线 $R(w)$ 及其复共轭曲线 $\overline{R(w)}$ 的平移曲面. 这可以看作在极小曲面与解析曲线之间建立富有成效的联系的起点. 于是，K. Weierstrass, Lie, Riemann, Schwarz 及其他一些人的工作造成 19 世纪末复函数论的方法和结果在极小曲面理论中的广泛应用.

J. Plateau 在他的实验中 (1849)，用张在各种形状的铜丝框架上的肥皂膜的形式在物理上实现了极小曲面. 他的实验激活了寻求有已知周界曲线的极小曲面这个古老问题的兴趣. 后来把这个问题称为 **Plateau 问题** (Plateau problem). 它的第一个解是对于各种多边形周界获得的；特别是，与此相关，发现了 **Riemann-Schwarz 曲面** (Riemann-Schwarz surface).

1816 年，极小曲面论中出现了新奇的 Gergonne 问题 (Gergonne problem)：求极小曲面，使得它的部分边界是已知的，而边界的其余部分位于某个预先给定的曲面上；这个问题后来称为有自由边界的极小曲面 (minimal surface with free boundary) 问题. 第一个结果是在下列情况下的解：部分已知的边界由直线段组成，而其余部分落在给定的平面上 (细节见 [1], [2]).

在 20 世纪初出现了研究"大范围"极小曲面的强烈兴趣. Euler-Lagrange 方程的 Dirichlet 问题被研究了 (A. Korn (1909), S. N. Bernstein (1910))，且 Bernstein 证明了他的关于极小曲面的定理 (1916，见 **Bernstein 定理** (Bernstein theorem))；一般地，以 Bernstein 关于极小曲面理论的工作为始端，偏微分方程理论的方法开始得到应用. H. Liebmann (1919) 建立了极小曲面与球面的无穷小变形之间的联系. 20 世纪上半叶极小曲面

理论方面的最高成就是 Plateau 问题的完全解决，起初是限于单连通曲面，随后可以是 Euclid 空间中或 Riemann 空间中任意拓扑类型的二维曲面（见[1]－[5]）. 关于极小曲面的结果已被拓展到更一般的变分问题（推广极小曲面的变分问题），更一般的微分方程（推广极小曲面的 Euler - Lagrange 方程）和更一般的曲面的类（例如有常平均曲率的曲面）（见[3]，[6]、[7]）.

根据极小曲面所得的结果及主要研究工作能够选出若干方向.

1. 极小曲面的内在几何. 不是每一个非正曲率的 Riemann 流形都能够等距地浸入到 Euclid 空间 $E^n(n \geqslant 3)$ 作为极小曲面的. E^3 中具有已知度量的极小曲面的存在性判定准则是下面的 Ricci 定理（Ricci theorem）：一个已知的度量 ds^2 等距于 E^3 中某个极小曲面的度量，其充要条件是它的曲率 K 是非正的，而且在 $K<0$ 的点度量 $d\sigma^2=\sqrt{-K}\,ds^2$ 是 Euclid 的.

对于一个已知的二维度量是 Euclid 空间 $E^n(n>3)$ 中一个极小曲面的度量也有充分必要条件. 特别是，满足 Ricci 条件（即满足 Ricci 定理的条件）的度量只能是 E^3 或 E^6 中极小曲面的度量，且具有同一个度量的所有极小曲面也有完全的描述：它们构成所谓的相伴等距极小曲面族（associated family of isometric minimal surfaces）；例如，设 E^3 中已知极小曲面 F 由 $X_k=\mathrm{Re}\,\Phi_k(w), w=u+iv$ 给出，其中 (u,v) 是等温参数，$\Phi_k(w)$ 是全纯函数，$1\leqslant k\leqslant 3$，则所有与它等距的极小曲面构成相伴极小曲面族 F_α，方程是 $x_k=\mathrm{Re}(\Phi_k(w)e^{-i\alpha})$，$F_0=F$. 这样，悬链面和正螺旋面是两个伴随的极小曲面（因而是等距的），对应于参数 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\frac{\pi}{2}$. 在度量 ds^2 作为极小曲面到 Euclid 空间 $E^n(n>3)$ 的浸入问题中，能用广义的 Ricci 条件表出 n 的下界和上界. 而且，借助于某类全纯映射，这个问题有一个完全的解答. 关于球面 $S^n(n\geqslant 3)$ 中二维极小曲面的度量的内在性质也有大量的结果（见[8]）. 关于高维极小曲面的度量，只知道在超曲面的情形有充分必要条件（[16]）. 极小曲面到另一外在构造的曲面的等距变形，即使在 E^3 的情形，也还没有做过非常多的研究.

极小曲面内在几何的另一范围的问题是**等周不等式**（isoperimetric inequality，亦见**经典等周不等式**（isoperimetric inequality, classical）），但是当它写成最确切、且最有意义的形式时，则依赖于极小曲面的外在结构（见[9]）.

2. 极小曲面的局部性质. 这里可以提到极小曲面和许多变分问题的解的解析性结果（极小曲面的定义只要求它属于 C^2 类），极小曲面在充分小邻域内实现所讨论区域上有相同边界的一切曲面中绝对最小面积的结果，极小曲面方程的解的孤立奇点或低阶奇点的可去性定理及其推广、广义极小曲面在分支点邻域内的结构研究，在高维 Euclid 空间和 Riemann 空间中极小曲面和所谓的椭圆变分问题的解的奇点的研究（见[2]，[3]，[6]，[10]，[12]）.

3. 具体的极小曲面的研究或有指定的边界性质、平面截线、球面 Gauss 映射等等的极小曲面的研究. 例如，关于有凸水平边界的双连通极小曲面的水平截线的凸性的定理；位于两个平面 $z=C_1$ 和 $z=C_2(-\infty\leqslant C_1<C_2\leqslant\infty)$ 之间、且有星形截线 $z=$常数的完全极小曲面与悬链面一致的定理；经典的 Enneper，Scherk，Riemann - Schwarz 等等极小曲面的详细研究. 特别要提到 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 4)$ 中极小锥的研究，它导至构造 $E^n(n\geqslant 9)$ 中 Bernstein 定理的反例，以及发现了 E^8 中超曲面的 Plateau 问题的非正则解的例子. 在高维 Riemann 空间中各种极小曲面的具体例子也已经开始研究了（见[1]，[2]，[6]，[12]，[13]）.

4. 利用与 $\mathbf{C}^1$ 中复变量函数的类比，$E^n(n\geqslant 3)$ 中极小曲面理论的发展. 在这里可以提到关于极小曲面的边界性质的结果、关于极小曲面越过边界的正则弧作解析延拓的定理，关于极小曲面的光滑性与其边界光滑性的依赖关系的定理（例如，若边界属于 $C^{n,\alpha}$ 类，$n\geqslant 1$、$0<\alpha<1$，则极小曲面也属于同一类），对极小曲面作类似于亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论的工作（见[2]，[6]，[13]，[15]）.

5. 关于 Euler - Lagrange 定理（Euler - Lagrange theorem）的工作. 在"大范围"研究极小曲面方程及其对于 $E^{n+k}(k\geqslant 1)$ 中 n 维极小曲面 $(x_1,\cdots,x_n, f_1(x),\cdots,f_k(x))$ 的推广

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=0 \tag{2}$$

（其中 $f=(f_1,\cdots,f_k)$，g^{ij} 是度量张量 g_{ij} 的逆变分量）的同时，大量的工作已致力于 Euler - Lagrange 方程及其推广（2）的局部性态. 关于余维 $k=1$ 时奇点的可去性、高余维时非正则解的存在性、以及 Dirichlet 问题的研究，存在着许多问题. 这个问题能用另一种方式处理成确定具有已知周界的极小曲面的 Plateau 问题，并且附加上该极小曲面包括周界在内到平面的单值投影的条件. 在许多情形下，这样一种处理容许得到基于 Plateau 问题已知结果的 Dirichlet 问题的结论（例如、E^3 中凸区域 D 上的 Dirichlet 问题的解的存在性和唯一性是 Plateau 问题的 Radó 定理的推论）.

在一般情形，已经建立有任意连续边界函数的、余维为 1 的 Dirichlet 问题的可解性的充分必要条件是边界 ∂D 的平均曲率向量指向区域 D 的内部（在 $n=2$ 时，这意味着 D 是凸的）；这时，问题的解也是唯一

的．至于非凸区域情形，已经证明对于有 Jordan 边界的非凸区域 D 能够找到一个连续函数 $\varphi(p), p\in\partial D$，使得对应的 Dirichlet 问题是不可解的．在高余维情形，即使是 E^n 中球域的情形，Dirichlet 问题也是不可解的．

在 D 外部的 Dirichlet 问题也已作过讨论．这里获得了一些新的事实（例如，解的唯一性丧失了，可解性不是处处都有的，等等）．关于有不完全的或部分有界边界值的 Dirichlet 问题也有一些结果（见[2],[6],－[8],[14]）．

6．完全极小曲面（complete minimal surface）．所谓完全极小曲面是指关于其**内在度量**（internal metric）作为度量空间是完全的极小曲面．完全极小曲面可以是紧的（无边的）和非紧的（即开的）．关于完全极小曲面的研究，兴趣基本上在于研究曲面的大范围度量性质、几何性质和拓扑性质之间的联系．

在 $E^n(n\geqslant3)$ 中的二维完全极小曲面的研究已经取得很大的进展，大多数结果是用复变函数论的方法获得的．特别是，已经证明在 E^3 中存在有任意指定亏格 g 和连通度 k 的完全极小曲面；已经获得完全极小曲面的曲率积分 $\iint KdS$ 和它的拓扑类型及共形类型之间关系的定理（例如，$\iint KdS\leqslant2\pi(\chi-k)$，$\chi$ 是曲面的 Euler 示性数，k 是边界的连通分支个数；若 $|\iint KdS|<\infty$，则曲面共形等价于去掉有限多个点的 Riemann 曲面；如果一个完全极小曲面 S 是无限连通的，或具有共形双曲度量，则其全曲率是无限的，并且 S 的法向量取所有的方向皆无限多次，例外的方向集至多具有零容量；等等）．球面 Gauss 映射的构造已经作过研究（例如、E^3 中完全极小曲面或者是平面，或者其球面象至多不含有一个零容量集；$E^n(n\geqslant3)$ 中的完全极小曲面或者是一个平面，或者它在广义球面 Gauss 映射下的象与处处稠密的超平面集相交；对于任意的 $r\leqslant4$，在 E^3 中存在完全极小曲面，使得它的球面映象恰好不包含 r 个预先指定的点；等等）．已经找到完全由它的全曲率和拓扑类型决定的曲面（它们是悬链面和 **Enneper 曲面**（Enneper surface））；已经证明了 $E^n(n\geqslant3)$ 中有界全曲率的完全极小曲面的外延无界性（见[2],[8],[18],[21] 中的参考文献）．

关于紧极小曲面的结果，总的说来是与位于球面 $S^n\subset E^{n+1}$ 内的完全极小曲面有关的．对这种极小曲面表现出兴趣，除了在一般 Riemann 空间情形的困难外，还因为 E^{n+1} 中的极小锥与 S^n 中的极小曲面之间的重要关系（E^{n+1} 中每一个以球面 S^n 的中心为顶点的超锥面是极小的当且仅当它与 S^n 的交是 S^n 中的极小曲面）．这里所剖析的问题，总的说来与 E^n 中的完全极小曲面是相同的．例如，已经证明除了二维射影平面外任意一个紧的二维流形都能够实现为 S^3 中的完全极小曲面；Bernstein 定理在 S^3 中的翻版也已经得到了：如果一个完全极小曲面的法向量落在一个开半球内，则该极小曲面是赤道超球面；S^n 中完全极小曲面是超球面的其他判别准则已找到了；S^n 中完全极小曲面依赖其数量曲率值的可能形状及唯一性问题已作过研究，等等（见[2],[6],[8],[13]）．

7．不同类型的广义极小曲面以及其解保持极小曲面性质的方程和变分问题的构造．这里，极小曲面的经典理论直接与下列方面的工作相衔接：关于有指定平均曲率的曲面的工作、关于拟共形球面 Gauss 映射的工作、以及关于具有 Euler-Lagrange 方程的许多性质的 2 个变量或多个变量的拟线性椭圆方程的工作．在把极小曲面与积分流或各种 Hausdorff 测度的极小化的集合联系起来的理论中、已经作出了走得更远的推广（见[2],[6],[7],[10],[11]）．

8．关于 2 维和高维极小曲面的 **Plateau 问题**（Plateau problem）的工作（见**高维 Plateau 问题**（Plateau problem, multi-dimensional））．

从列举的问题和结果可以十分清楚地看到在极小曲面理论中问题的范围是非常大的，所用的方法因而是多种多样的．总的来说，在经典的研究中运用了微分几何、复函数论和微分方程的方法，而现在，特别是高维空间中极小曲面的研究，拓扑、测度论、泛函分析方法的应用正在发展之中．

自从本文的准备和发表以来，在上面所提到的所有问题都已取得了重大的进展，参看[18]－[22]；此外，还应该提到关于极小曲面的计算机辅助研究的发展，见[17]．

参考文献

[1] Courant, R., Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces, Interscience, 1950.

[2] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

[3] Radó, T., On the problem of Plateau, Chelsea, reprint, 1951.

[4] Douglas, J., Solution of the problem of Plateau, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 263 － 321.

[5] Morrey, C., The problem of Plateau on a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 807 － 851.

[6] Nitsche, J. C. C., On new results in the theory of minimal surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 195 － 270.

[7] Osserman, R., A survey of minimal surfaces, v. Nostrand Reinhold, 1969.

[8A] Osserman, R., Minimal varieties, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1092 －1120.

[8B] Osserman, R., Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, *Ann. of Math.* (2), **80** (1964), 340－364.

[9] Osserman, R., The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84** (1978), 1182 － 1238.

[10] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[11] Morrey, C., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, 1966.

[12] Фоменко, А. Т., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 36 (1972), 5, 1049 – 1079.

[13] Lawson, H., Complete minimal surfaces in S^3, *Ann. of Math.*, 92 (1970), 335 – 374.

[14] Lawson, H. and Osserman, R., Non-existense, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system, *Acta. Math.*, 139 (1977), 1 – 17.

[15] Аминов, Ю. А., 《Укр. геом. сб.》, 19 (1976), 3–9.

[15A] Викарук, А. Я., 《Мат. сб.》, 100 (1976), 555 – 579.

[16] Chern, S.-S. and Osserman, R., Remarks on the Riemannian metric of a minimal submanifold, in E. Looijenga, D. Siersma and F. Takens (eds.): Geometry Symp. Utrecht 1980, Lecture notes in math., Vol. 894, Springer, 1981, 49 – 90.

[17] Hoffman, D., The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces, *Math. Intell.*, 9 (1987), 3, 8 – 21.

[18] Meeks, W. H., Ⅲ, A survey of the geometric results in the classical theory of minimal surfaces, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 12 (1981), 1, 29 – 86.

[19] Bombieri, E. (ed.), Seminar of minimal submanifolds, Anal. Math. Stud., 103, Princeton Univ. Press, 1983.

[20] Yau, S.-T., Minimal surfaces and their role in differential geometry, in T. J. Willmore and N. J. Hitchin (eds.): Global Riemannian geometry, Horwood, 1984, 99 – 103.

[21] Dao Chong Tkhi and Fomenko, A. T., Minimal surfaces and Plateau's problem, Amer. Math. Soc. Forthcoming.

[22] Fomenko, A. T., Variational problems in topology, Kluwer, 1990.

И. Х. Сабитов 撰　陈维桓 译

【校注】作为极小曲面 Bernstein 定理的一种推广，E^3 中完全极小曲面的 Gauss 映射的值分布一直引起不少数学家的极大兴趣．1987年，日本数学家藤本坦孝终于得到了这方面的最佳结果（[B1]）.他证明了：设 M 是 E^3 中的完全极小曲面，则 M 的 Gauss 映射至多不取球面 S^2 上的 4 个点．他的证明基本上遵循 R. Osserman 证明 Nirenberg 猜想的思路（见[B2]）. 有关藤本定理的进一步发展以及它与曲面全曲率的关系，可参见[B3, B4].

参考文献

[B1] Fujimoto, H., On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, 40 (1988), 235 – 248.

[B2] Osserman, R., Proof of a conjecture of Nirenberg, *Comm. Pure & Appl. Math.*, 12 (1959), 229 – 232.

[B3] Fujimoto, H., Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces, *J. Diff. Geom.*, 29 (1989), 245 – 262; 31 (1990), 365 – 385.

[B4] Mo, X. and Osserman, R., On the Gauss map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theorem, reprint.

沈一兵 校

极小化极大 [minimax; минимакс]

混合极值

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x, y),\ \min_{y\in Y}\max_{x\in X}F(x, y)$$

等（亦见**极大化极小**（maximin））；它可以解释（例如，在决策理论，**运筹学**（operations research）或统计学中）为在给定环境下作出决策所不能避免的损失中的最小者.　　Н. Н. Воробьев 撰

【补注】关于在统计学中的一个解释见**极小化极大统计程序**（minimax statistical procedure），关于对策论中的极小化极大值见[A1]，关于决策理论中极小化极大值和极大化极小值的讨论见[A2]，[A3]．极小化极大（和极大化极小）的考虑也出现于数学的其他部分，如在逼近论中（[A4]）.

参考文献

[A1] Szép, J. and Forgo, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985, Sect. 9.1.

[A2] Thierauf, R. J. and Grosse, R. A., Decision making through operations research, Wiley, 1970, Chapt. 3.

[A3] Sengupta, J. K., Stochastic optimization and economic models, Reidel, 1986, Chapt. Ⅳ.

[A4] Rivlin, Th. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1981.

葛显良 译　鲁世杰 校

极小化极大估计量 [minimax estimator; минимаксная оценка]

统计估计问题中，由**极小化极大统计程序**(minimax statistical procedure)的概念得到的统计估计量．

例 1．设随机变量 X 服从二项分布，参数为 n 和 θ，且 $\theta(0<\theta<1)$ 未知．统计量

$$t=\frac{X}{n}\ \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}+\frac{1}{2(1+\sqrt{n})}$$

关于损失函数

$$L(\theta,t)=(\theta-t)^2$$

是参数 θ 的极小化极大估计量．

例 2．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立随机变量，服从具有连续概率密度 $f(x-\theta)(|x|<\infty,\ |\theta|<\infty)$ 的同一概率律．Pitman 估计量 (Pitman estimator)

$$t=t(X_1,\cdots,X_n)=X_{(1)}-\frac{\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\prod_{i=2}^{n}f(x+Y_{(i)})dx}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\prod_{i=2}^{n}f(x+Y_{(i)})dx}$$

关于损失函数 $L(\theta,t)=(\theta-t)^2$ 是未知位移参数 θ 的极小化极大估计量，其中 $X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 是由样本 $X_1,\cdots,X_n$ 得出的**顺序统计量**(order statistic)，而 $Y_{(i)}=X_{(i)}-X_{(1)}$．特别地，如果 $X_1,\cdots,X_n\sim N(\theta,1)$，则 $t=(X_1+\cdots+X_n)/n$．

参考文献

[1] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971.

[2] Cox, D.R. and Hinkley, D., Theoretical statistics, Chapman & Hall, 1974.

М.С.Никулин 撰　周概容 译

极小化极大原理 [**minimax principle**; **минимакса принцип**]

一种对于**二人零和对策**(two-person zero-sum game)的最优性原理．它表达了每个局中人力求得到最大保证的支付．极小化极大原理在满足等式

$$v=\max_{a\in A}\min_{b\in B}H(a,b)=\min_{b\in B}\max_{a\in A}H(a,b)\quad(*)$$

的对策 $\Gamma=\langle A,B,H\rangle$ 中成立，上述等式即存在等于 v 的对策的值和两个局中人的最优策略．

对于**矩阵对策**(matrix game)和某些无限二人零和对策类(见**无限对策**(infinite game))，极小化极大原理在运用混合策略时成立．已知等式(*)等价于不等式(见**对策论中的鞍点**(saddle point in game theory))：

$$H(a,b^*)\leqslant H(a^*,b^*)\leqslant H(a^*,b)$$

对于所有 $a\in A$，$b\in B$ 成立，其中 a^* 和 b^* 分别是使(*)中外面的极值达到的策略．这样，极小化极大原理在数学上表达了稳定性概念的直观理解，因为每一个局中人偏离自己的最优策略 a^*(相应地 b^*)，都不会有利．同时，极小化极大原理对局中人 Ⅰ(Ⅱ)保证增益(损失)不少于(不多于)对策的值．对于矩阵对策极小化极大原理的公理化刻画已经给出(见[1])．

参考文献

[1] Вилкас, Э.,《Теория вероятн. и ее примен.》, **8** (1963), 3, 324－327.

Е. Б. Яновская 撰

【补注】 允许混合策略而使极小化极大原理成立的事实称为**极小化极大定理**；它归功于 von Neumann．

参考文献

[A1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1953(中译本：约翰·冯·诺意曼，奥斯卡·摩根斯特恩，竞赛论与经济行为，科学出版社，1963)．

史树中 译

极小极大性质 [**minimax property**; **минимаксное свойство**]，本征值的

联系于一个完全连续**自伴算子**(self-adjoint operator) A (亦见**完全连续算子**(completely-continuous operator))的本征值和相伴二次型 (Ax,x) 的极大和极小值的一种特殊类型的关系．设 A 是 Hilbert 空间 H 上的一个完全连续算子．A 的谱由有限个或以零为唯一极限点的可数个本征值组成．对应于非零本征值的根子空间由本征向量组成并且是有限维的；对应于不同本征值的本征子空间是相互正交的；A 有本征向量的一个完全系．A 的谱分解(见**线性算子的谱分解**(spectral decomposition of a linear operator))具有形式 $A=\sum\lambda_iP_i$，其中 λ_i 是不同的本征值，P_i 是到对应本征空间上的投影算子，并且这个级数按算子范数收敛．A 的范数与本征值的最大模和 $\max\{|(Ax,x)|:x\in H,|x|=1\}$ 一致．最大值在对应的本征向量达到．

设 $\lambda_1^+\geqslant\lambda_2^+\geqslant\cdots$ 是 A 的正本征值，其中每一个本征值按其重数重复，那么

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^+&=\max_{x\in H}\frac{(Ax,x)}{|x|^2},\\ \lambda_{n+1}^+&=\min_{y_1,\cdots,y_n}\max_{\substack{(x,y_i)=0\\ i=1,\cdots,n}}\frac{(Ax,x)}{|x|^2},\quad n>1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中 $x,y_1,\cdots,y_n$ 是 H 中任意的非零向量．类似的关系对负本征值 $\lambda_1^-\geqslant\lambda_2^-\geqslant\cdots$ 成立．

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^-&=\min_{x\in H}\frac{(Ax,x)}{|x|^2},\\ \lambda_{n+1}^-&=\max_{y_1,\cdots,y_n}\min_{\substack{(x,y_i)=0\\ i=1,\cdots,n}}\frac{(Ax,x)}{|x|^2},\quad n>1.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

关系式(1)和(2)用于寻求带对称核的积分算子的本征值．如果 A 和 B 是完全连续自伴算子，$A\leqslant B$ (即，$(Ax,x)\leqslant(Bx,x)$)，λ_n 和 μ_n 是它们的正本征值序列，按减序排列，每一本征值按其重数重复，那么 $\lambda_n\leqslant\mu_n$．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 2, Spectral theory, Wiley, 1988.

А.И.Логинов 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

极小化极大统计程序 [**minimax statistical procedure**; **минимаксность статистической процедуры**]

数理统计中最优性的形式之一．称统计程序在极小化极大意义下为最优的，如果它使极大风险最小．用**决策函数**(decision function)的语言，极小化极大程序定义如下．设随机变量 X 取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathsf{P}_\theta)(\theta\in\Theta)$；又设 $\Delta=\{\delta\}$ 是决策函数类，用于根据 X

的实现在行动空间 D 中选择决策 d，即 $\delta(\cdot): \mathfrak{X} \to D$．这里假设给定某一定义在 $\Theta \times D$ 上的损失函数 $L(\theta, d)$．在此情形下，称统计程序 $\delta^* \in \Delta$ 关于损失函数 $L(\theta,d)$ 为统计判定问题中的极小化极大程序(minimax procedure)，如果对于一切 $\delta \in \Delta$，有

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta^*(X)) \leqslant \sup_{\theta\in\Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)),$$

其中

$$\mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)) = R(\theta, \delta) = \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, \delta(x)) d\mathsf{P}_\theta(x)$$

是对应于统计程序(决策规则) δ 的风险函数．这时，对应于观测结果 x 和极小化极大程序 δ^* 的决策 $d^* = \delta^*(x)$ 称为极小化极大判决(minimax decision)．因为量

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X))$$

表示用程序 $\delta \in \Delta$ 时的期望损失．故极小化极大程序说明，如果在由判决空间 D 选择判决 d 时采用程序 δ^*，则最大期望风险

$$\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta^*)$$

将尽可能地小．由极小化极大程序并不总能得出合理的推断(见图 1)．

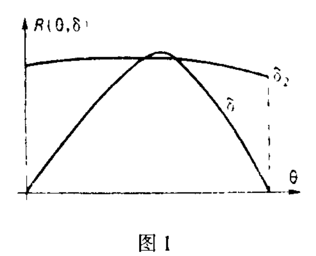


图 1

在此情形下，尽管

$$\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta_1) > \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta_2),$$

但应立足于程序 δ_1 而不是程序 δ_2．在无关于参数 θ 的验前信息的情形下，极小化极大统计程序的概念在统计判定问题中是有用的．

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

[2] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971.

М.С. Никулин 撰 周概容 译

极小化方法（强依赖于多个变量的函数的）[minimization methods for functions depending strongly on a few variables; овражных функций методы минимизации]，谷函数的极小化方法（minimization methods of valley functions）

求多元函数极小值的数值方法．假设给定一个下有界且二次连续可微函数

$$J(x) = J(x_1, \cdots, x_m),$$

且已知在向量 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_m^*)^T$（这里 T 表示转置）上取到它的最小值．要求构造一个向量序列 $\{x_n\}$ $(x_n = (x_{1n}, \cdots, x_{mn})^T)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} J(x_n) = J(x^*).$$

有许多方法可以得到这样的一个序列．然而，当被极小化的函数的等位曲面 $J(x)=$ 常数有与球面相差很远的结构时，大部分算法有急速退化的缺点．这种情况下，一个区域 Q 称为一个谷底（bottom of a valley），如果梯度向量

$$J'(x) = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial T}{\partial x_m}\right]^T$$

在其中的范数本质上小于在空间其余部分的范数，而这函数本身称为谷函数（valley function）．如果被极小化函数的自变量空间的维数超过二，谷函数等位面的结构可以很复杂．有 $(m-k)$ 维山谷（valleys）出现，这里 k 从 1 变到 $m-1$．例如，在三维空间中，一维和二维山谷是可能的．

谷型函数被一个病态的二阶导数矩阵（Hesse 矩阵（Hesse matrix 或 Hessian））

$$J''(x) = \left\| \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \ i, j = 1, \cdots, m,$$

局部地刻画其特征，它导致 $J(x)$ 沿着与对应于 Hesse 矩阵的大本征值的本征向量相一致的方向上有强变化，而沿着与小本征值对应的方向上有小变化．

大部分已知的最优化方法允许有一个到谷底 Q 的相当急速的下降，有时引起 $J(x)$ 的值与在出发点的值相比下有相当大的减小（下降到谷底中）．然而，这个过程后来明显地变慢，而实际上在 Q 的某个可能与所要求的极小点相差很远的点上停止．

二次连续可微函数 $J(x)$ 称为谷函数（valley function）（见[1]），如果存在区域 $G \subset \mathbf{R}^m$，在其中 Hesse 矩阵 $J''(x)$ 的本征值，按模减小的次序，在任何点 $x \in G$，满足不等式

$$0 < |\min_i \lambda_i(x)| \ll \lambda_1(x). \qquad (1)$$

山谷的陡度由数

$$S = \frac{\lambda_1}{|\min\limits_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i|} \qquad (2)$$

刻画．如果 $J''(x)$ 在 G 内的本征值满足不等式

$$|\lambda_m(x)| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_{m-r+1}(x)| \ll$$
$$\ll \lambda_{m-r}(x) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1(x),$$

则数 r 称为函数 $J(x)$ 在 $x \in G$ 的谷维数(dimension of the valley)(见[1]).

描述 $J(x)$ 的下降轨道的微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = -J'(x),\ x(0) = x_0, \tag{3}$$

是一个**刚性微分方程组**(stiff differential system).

特别地,当 $J(x)$ 是严格凸的且其 Hesse 矩阵是正定的(它的本征值是严格正的)时候,不等式(1)与熟知的 Hesse 矩阵的病态要求:

$$k(J''(x)) = \frac{\max_i \lambda_i(x)}{\min_i \lambda_i(x)} \gg 1$$

一致.在这情况下谱条件数与山谷的陡度相同.

坐标方式的下降法(coordinate-wise descent method)(见[2])

$$J(x_{1,k+1}, \cdots, x_{i-1,k+1}, x_{i,k+1}, x_{i+1,k}, \cdots, x_{m,k})$$

$$= \min_y J(x_{1,k+1}, \cdots, x_{i-1,k}, y, x_{i+1,k}, \cdots, x_{m,k}),$$

$$k = 0, 1, \cdots, \tag{4}$$

不管其简单性和普遍性,仅当山谷的位置处于罕见情况下,即当山谷的方向是沿着坐标轴时才有效.

[2]中提出了方法(4)的一个现代化版本,它包括坐标轴的一个旋转,使得一个轴沿 $x_k - x_{k-1}$ 伸展,此后搜索在第 $(k+1)$ 步开始.这样的一个办法导致一个坐标轴有一种与谷底的一条母线一致的趋向,使在若干情况下能顺利实现带有一维山谷的函数的极小化.这方法对多维山谷是不适用的.

最速下降法(steepest descent, method of)的方案是由差分方程

$$x_{k+1} = x_k - h_k J_k',\ J_k' = J'(x_k) \tag{5}$$

给出的,这里 h_k 由条件

$$J(x_{k+1}) = \min_{h>0} J(x_k - hJ_k')$$

选取.对严格凸的谷函数,特别对二次函数

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T D x - b^T x, \tag{6}$$

由算法(5)构造的序列 $\{x_k\}$ 几何地收敛于函数的极小值点 x^*(见[3]):

$$\| x_k - x^* \| \leqslant C q^k,$$

这里 $C=$ 常数且

$$q = \frac{k(J''(x^*)) - 1}{k(J''(x^*)) + 1}.$$

由于对谷函数,$k(J''(x)) \gg 1$,$q \simeq 1$,从而收敛性在实际上是不存在的.

对简单梯度方案(见[4]);**梯度法**(gradient method))

$$x_{k+1} = x_k - hJ_k'',\ J_{k+1} = J(x_{k+1}),\ h = \text{常数}, \tag{7}$$

类似的情况也能看到.加速其收敛性的基础在于用以前迭代的结果使得谷底更精确.梯度法(7)能够同每一次迭代的比率 $q = \| J_k' \| / \| J_{k-1}' \|$ 的计算一起应用(见[4],[5]).当它变得稳固地接近于常数值 $q=1$ 时,按照表达式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h}{1-q} J_k'$$

执行一个大的加速步长.然后用梯度法的下降一直延续到下一个加速步长.

平行切线法的各种形式(见[4]-[6])的基础是沿着梯度法中由点 x_k, x_{k+2} 给出的方向 $x_{k+2} - x_k$ 实行加速步骤.在**重球法**(heavy sphere, method of the)(见[4])中,下一步的逼近具有形式

$$x_{k+1} = x_k - \alpha J_k' + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

在山谷法(valley method)(见[7])中,局部下降用梯度法(7)从两个任意选取的出发点进行,然后在谷底的两点给出的方向作出加速步长.

这些方法并不比梯度法(7)复杂很多,且它们以梯度法为基础.对一维山谷得到了加速收敛性.在更一般的多维山谷的情况下,这些方法的收敛性明显地变慢,必须转向更有力的二次逼近法,它们以 Newton 的方法(见 **Newton 法**(Newton method))

$$x_{k+1} = x_k - (J_k'')^{-1} J_k',\ J_k'' = J''(x_k) \tag{8}$$

为基础.函数(6)的极小值点满足线性方程组

$$D\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{9}$$

且在所有计算绝对精确的条件下,对二次函数 Newton 的方法不依赖于山谷(2)的陡度和山谷的维数,且一步就引导到极小值.实际上,带有大的条件数 $k(D)$ 和计算中数字的限制数,解(9)的问题可能是不适定的,且矩阵 D 和向量 $\mathbf{b}$ 的元素的微小变化能导致 $\mathbf{x}^*$ 中的大变差.

在凸的带有中等陡度的情形下,Newton 的方法在收敛速度方面比其他方法(如梯度法)常常是更可取的.

一大类二次(拟 Newton 的)方法基于利用**共轭方向**(conjugate directions)(见[2],[3],[8]).对凸函数的极小化情形,这些算法是很有效的;由于有一个二次的结果,它们不需要二阶导数矩阵的计算.

有时(见[8])迭代是按方案

$$x_{k+1} = x_k - (\beta_k E + J_k'')^{-1} J_k'' \tag{10}$$

实行的,这里 E 是单位矩阵.标量 β_k 是这样选取

的，使得矩阵 $J_k'' + \beta_k E$ 是正定的，且

$$\| x_{k+1} - x_k \| \leqslant \varepsilon_k.$$

有几种类似的基于对 Hesse 矩阵得到严格正定逼近的方法（见[8]）．对谷函数的极小化，由于选取参数 β_k，ε_k 的困难等原因，这种算法原来是无效的．这些参数的选择要根据 Hesse 矩阵具有最小模的本征值大小的信息，而对实际计算和高的陡度这个信息是强烈地失真了．

Newton 的方法对谷函数极小化情形的一个更合适的推广基于最优化的连续原理．把函数 $J(x)$ 并列到一个微分方程组（3），它可用微分方程组方法积分（见**刚性微分方程组**（stiff differential system））．极小化算法取以下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&x_{k+1} = x_k - \Phi(2^N h_k^0) J_k', \\
&\Phi(2^N h_k^0) = \int_0^{2^N h_k^0} \exp(-J_k'' \tau)\, d\tau, \\
&J_{k+1} = \min_N J(x_k - \Phi(2^N h_k^0) J_k') \\
&h_k^0 \leqslant \frac{1}{\| J_k'' \|}, \\
&\Phi(h_k^0) = h_k^0 \left[E - \frac{h_k^0}{2} J_k'' + \frac{(h_k^0)^2}{6} - \cdots \right], \\
&\Phi(2^{s+1} h_k^0) = \Phi(2^s h_k^0)\,[2E - J_k'' \Phi(2^s h_k^0)], \\
&s = 0, \cdots, N-1.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

在[1]中，基于利用刚性方程组的性质已经提出了一种对谷函数极小化的算法．设函数 $J(x)$ 在 x_0 的邻域内用二次函数（6）逼近．矩阵 D 和向量 $\mathbf{b}$，用譬如有限差分逼近法计算．从这矩阵元素的表示

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^{m} u_{is} u_{js} \lambda_s,$$

其中 $u_s = (u_{1s}, \cdots, u_{ms})^T$ $(s = 1, \cdots, m)$ 是 D 的本征向量的规范正交基，可推出这些元素的不精确测量，使得关于一个病态矩阵的最小本征值的信息失真，因此导致（6）的极小化问题的不适定性．

此外，对谷函数（6）的下降微分方程组，

$$\frac{dx}{dt} = -Dx + b,\ x(0) = x_0$$

有解，其中由于条件（1），带有因子 $\exp(-\lambda_1 t)$ 的项仅在长度 $\tau_{ps} = O(\lambda_1^{-1})$ 的小初始区间上有影响．

换句话说，向量 $x(t)$ 的分量满足方程

$$x^T(t) u_1 - \lambda_1^{-1} b^T u_1 =$$
$$= (x_0^T u_1 - \lambda_1^{-1} b^T u_1) \exp(-\lambda_1 t),$$

它很快地转向稳定关系

$$\sum_{i=1}^{m} u_{i1} \bar{x}_i + \lambda_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} b_i u_{i1} = 0, \qquad (12)$$

这里 $\bar{x}_i$ 是满足（12）的向量的分量．这个性质用于这个算法中．通过把向量 u_1 的最大分量与之对应的向量 $\bar{\mathbf{x}}$ 的第 j 个分量用其余分量来表示，把 $J(x)$ 换成带 $(m-1)$ 维自变量的一个新函数：

$$J\left[\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{j-1}, - \right.$$
$$\left. - u_{j1}^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} (u_{i1} \bar{x}_i - \lambda_1^{-1} b_i u_{i1}),\ x_{j+1}, \cdots, x_m \right] =$$
$$= \bar{J}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_m). \qquad (13)$$

然后由函数（13）用有限差分逼近找到一个新的 $(m-1)$ 阶矩阵和一个新向量 $\bar{\mathbf{b}}$．这里搜索空间维数减小的重要性不如陡度的减少，所以新函数在正交于向量 u_1 的子空间中的极小化过程中，最大本征值不再影响计算．$\bar{D}$ 和 $\bar{\mathbf{b}}$ 是用函数（13）得出的而不是用 D 和 $\mathbf{b}$ 得出这一要求，在此是很重要的要点．关系式（12）中系数用幂法求得，如同方程组

$$D^k \mathbf{x} = D^{k-1} \mathbf{b}$$

的任意一个方程的系数一样．如果陡度不减小或无足轻重地减小，则这个向量 $\mathbf{x}$ 的坐标的消去过程递归地继续直到获得必需的减小．

参考文献

[1] Ракитский, Ю. В., Устинов, С. М., Черноруцкий, И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979.

[2] Céa, J., Optimisation: théorie et algorithmes, Dunod, 1971.

[3] Пшеничный, Б. Н., Данилин, Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975 (英译本: Pshenichnyĭ, B. N. and Danilin, Yu. M., Numerical methods in extremal problems, Mir, 1978).

[4] Поляк, Б. Т., 《Экономика и математич. методы》, 3 (1967), 6, 881 – 902.

[5] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963 (英译本: Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N., Computational methods of linear algebra, Freeman, 1963).

[6] Wilde, D. J., Optimum seeking methods, Prentice Hall, 1964.

[7] Гельфанд, И. М., Цетлин, М. Л., 《Докл. АН СССР》, 137 (1961), 2, 295 – 298.

[8] Gill, P. E. and Murray, W. (eds.), Numerical methods for constrained optimization, Acad. Press, 1974.

Ю. В. Ракитский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luenberger, D. G., Linear and nonlinear programming, Addison-Wesley, 1984.

葛显良 译 鲁世杰 校

面积的极小化 [minimization of an area; **минимизация площади**]

寻求 z 平面给定区域 B 在给定类 R 的一个一对一正则函数 F 映射下的 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 的面积 $A(F)$ 的极小值问题，即求

$$\min_{F\in R} A(F) = \min_{F\in R} \iint_B |F'(z)|^2 d\sigma \qquad (*)$$

的问题 ($d\sigma$ 是面元素). (*) 中在 B 上的积分应理解为区域 $B_n (n=1, 2, \cdots)$ 上的积分的极限，这些 B_n 穷竭区域 B，即使得 $\overline{B}_n \subset B$, $B_n \subset B_{n+1}$，而且从某个 n 起任一闭集 $E \subset B$ 均位于 B_n 内.

当 R 是给定的包含 $z=0$ 且边界点多于一个的单连通区域 B 内正则的函数 $F(z)$, $F(0)=0$, $F'(0)=0$，组成的类时，在类 R 中 B 的象的面积 $A(F)$ 的极小值 A 由把 B 单叶映射成整个圆盘 $|z|<r$ 的唯一函数给出，其中 r 是 B 在 $z=0$ 的共形半径 (见**共形半径** (conformal radius))；而且 $A=\pi r^2$.

寻求多连通区域象的极小面积问题亦已被考虑过 (见 [1]).

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

Е. Г. Голузина 撰 杨维奇 译

计算量的极小化 [minimization of the labour of calculation, minimization of the computational work; **минимизация вычислительной работы**]

现代计算数学的一个分支，它致力于制订和研究按预定的精度 $\varepsilon>0$、以最少的计算费用 (最少的计算量) 来求得类 $\{P\}$ 中的问题 P 的近似解的方法. 这一计算数学分支可以联系更一般的致力于方法优化问题的分支 (例如见 [1], [2])，其中除所指出的计算量极小化问题以外，还考虑这一问题的对偶问题，即在大致需要同样计算量的近似方法中，求具有最大精度 (最小误差) 的方法. 后一问题例如对于数值积分问题尤为突出，在那里度量计算量的积分节点数是固定的.

令 $\varepsilon \geqslant 0$ (通常 $\varepsilon>0$，对于 $\varepsilon=0$，寻求的是 P 的精确解) 是对给定的有关问题类 $\{P\}$ 中的问题 P 的解所要求的精度，m 是一种允许对 $\{P\}$ 中任何问题求解的方法；这样的方法的集合表示为 $\{m\}$. 令数 $W_m(P, \varepsilon)>0$ 刻画当运用方法 m 以精度 ε 对 P 求解的计算费用，并置

$$W_m(\{P\}, \varepsilon) = \sup_{P\in\{P\}} W_m(P, \varepsilon).$$

那么极小化问题在于求出方法 m_0，使得

$$W_{m_0}(\{P\}, \varepsilon) = \inf_{m\in\{m\}} W_m(\{P\}, \varepsilon),$$

即，本质上是寻求并非只对固定的问题 P，而是对整个问题类的最优求解方法 (对于类的最优化). 在多数情况下，计算量的极小化是以 $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ 时的渐近意义下给出的，这里 N 是确定所解问题的"维数"的参数.

方法 m_0 称为阶最优 (order optimal) 方法，如果它的计算费用至多是量 $\underline{W}(\{P\}, \varepsilon)$ 的有限多倍，后者是任何可能的方法的计算费用的下界估计；方法 m_0 称为对数最优 (logarithmically optimal) 方法，如果

$$\ln W_{m_0}(\{P\}, \varepsilon) = (1+o(1)) \ln \underline{W}(\{P\}, \varepsilon).$$

计算量 $W_m(P, \varepsilon)$ 本身通常是由在一台常规计算机上实现为达到精度 ε 而使用方法 m 时所产生的算术运算的次数来刻画的. 在某种程度上，这样的简化是合理的，因为在实际的计算机上许多方法中所完成的逻辑运算至多是算术运算的有限多倍. 对于可接受的方法，作为一条法则，要求它们关于舍入误差有稳定性. 其重要性在于这些方法中所使用的机器的内存量的渐进增长不会太大.

为使这一计算量极小化问题具体化，既须确切描述类 $\{P\}$，还须提出用来确定原问题的解的精度的距离空间 H.

许多这样的具体的极小化问题的解答不仅有理论兴趣，并且也有巨大的应用意义，它经常会使得在计算机上求解问题时耗费较少的机时. 这不仅对需要大计算量的问题 (例如数学物理中的多维问题，见 [2]－[8])，也对类似于计算初等函数和求离散 Fourier 变换之类的问题 (它们是标准的，并且反复应用于另一些更复杂的问题的求解，见 [1], [9]) 来说，都是特别重要的. 计算量极小化问题是非常复杂的，在许多情形只能得到部分解答，甚至完全不知道解答.

在实践中，对于维数相对较低、精度要求不高的问题的求解，有时具有较差的渐近特征的方法可能需要较少的机时. 通常，如果计算费用是可接受的，那么在选择方法时，首先要考虑的是简单性和可靠性.

假设原问题是有限维的，并且当运算执行中完全没有舍入误差时，存在用有限次算术运算就能得到精确解的方法. 以下是一些例子：对于给定的有 $|x| \leqslant 1$ 的 x 值，求 N 次多项式 $p_N(x)$ 的值的计算问题；两个 N 阶方阵的相乘；有给定的 N 阶方阵的代数方程组 $Ax=b$ 的求解；以及求离散 Fourier 变换 (见 [1], [9]) 问题：

$$v_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2\pi n i/N},\ n = 0, \cdots, N-1, \quad (1)$$

这里 i 是虚数单位，向量 $u=(u_0, \cdots, u_{N-1})$ 是给定的，而向量 $v=(v_0, \cdots, v_{N-1})$ 是所求的，$N=2^r$，$r=0, 1, \cdots$. 在 $p_N(x)$，$x\in[-1, 1]$，A，b，数 r 以及向量 u 的形式上，没有任何具体的限制，因此，这些问题中的每一个都可允许有由所有这种形式的问题所组成的类 $\{P\}$. 在类似的问题中，N 起着参数的作用，并且特别要考虑当 $N\to\infty$ 时计算费用 $W_m(P, 0)\equiv W_m(P)$ 的性态. 对于这些问题中的第一个，Horner 方法把 $p_N(x)$ 记为下列形式：

$$a_0 + x(a_1 + x(\cdots + x(a_{N-1} + xa_N))\cdots),$$

使得用 N 次乘法和 N 次加法就能计算 $p_N(x)$. 已经证明（见[9]），这一方法是最优的：不存在其他方法，使得它只要求更少的加减法或更少的乘除法，条件是 $\sum_i |a_i|$ 不太大（见[1]）.

对于第二与第三个问题，存在许多使得当 $N\to\infty$ 时，以 $W(N)\sim N^3$ 次算术运算来给出解的方法（见[1]），它们实际上都在实算中被应用. 当前在所有已知的方法中，已知的最小费用在某一方法中以估计 $W(N)\sim N^\alpha$，$\alpha\approx 2.5$ 来达到（见[9]，[10]）. 这一方法相当复杂，出于一系列原因，目前只是从理论观点上来看使人感兴趣. 还不知道（1989）是否有对数最优方法. 有人猜想，存在具有 $W(N)$ 次算术运算的对数最优方法，其中

$$\ln W(N) = 2\ln N + o(\ln N).$$

问题（1）是调和分析的研究对象，对于它最简单的方法需要 $\sim N^2$ 次复数算术运算. 1965 年，一种允许以 $W(N)\sim N\ln N$ 次算术运算来求得向量的方法被提出（见[1]，[9]）；这就是所谓**快速离散** Fourier **变换法**（method of the fast discrete Fourier transform）. 这一方法是对数最优的，它在实际中被广泛地应用. 存在大量类似的已解决与未解决的最小化问题（见[9]，[10]）；对于求类似问题的解的计算费用的阶最优或对数最优的估计可以看作它们的复杂性的指标.

对于强椭圆型方程或方程组的边值问题的近似解来说，无论是差分法，还是射影网格法（有限元法）都会引起网格方程组的求解问题；对于这类问题的计算量极小化有特殊的理论与应用意义，它们通常是随 $N\to\infty$（N 是方程组中的未知量的个数）和随 $\varepsilon\to 0$ 来渐近实现的. 对于 Poisson 方程的某些边值问题的最简单的矩形或平行六面体的差分类似，有些直接方法已经成功地被应用，它们是对数最优的，只需要 $O(N\ln N)$ 次算术运算（见[3]，[5]，[8]，[11]，[12]）. 在矩形情形下（见[13]），已知有一种只需要 $O(N)$ 次运算的阶最优方法. 利用同样的迭代法，对于非常广泛的一类在某些理想区域（例如，在平面 Q 上，它们可以由有限个各边平行于坐标轴的矩形来生成；在三维空间 Q 中，它们可以用有限个平行于给定的坐标平面的平面截面分解为一些边界平行于坐标平面的平行六面体）中被考虑的线性与非线性强椭圆组的平行体格式的离散边值问题，可以得到型为

$$W = O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$$

的对数最优估计，这里 ε 是方程组的解按某种尺度的精度（见[2]－[8]，[14]）. 对于更复杂的区域 Ω，利用拓扑上等价于上述理想区域 Q 的网格，以及某些类型的有限元法，可以得到如理想情形一样有效可解的方程组（见[3]，[8]，[15]，[16]）. 这里这些方程组的右端可以是任意向量；如果考虑到它们是以充分光滑的函数的泛函那样的特殊形式出现时，那么在条件 $\varepsilon\sim N^{-\alpha}(\alpha>0)$ 下，已经构造出具有计算费用为 $O(N\ln N)$ 甚至 $O(N)$ 的方法. 后一类型的方法，对于在给定网格上的问题的求解，利用了一系列在稀疏网格上的类似问题（见[8]，[16]）.

有一些方法可用来对精度 $\varepsilon(\varepsilon\sim N^{-\alpha}, \alpha>0)$ 以耗费 $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ 甚至 $O(N\ln N)$ 次运算来求得关于某些椭圆本征值问题的网格类似的最小本征值和本征函数（见[8]，[15]，[16]）.

设问题 P 是解适定算子方程

$$L(u) = f, \quad (2)$$

这里算子 L 由 H 作用到 F，而 H 和 F 是无限维 Banach 空间. 设类 $\{P\}$ 由这样的带不同的 f 的问题所组成，其中要求方程（2）的解属于某个紧集 U. 通常 U 是由条件

$$\|u\|_{H'} \leqslant R \quad (3)$$

来给定的，这里 H' 是某个嵌入在 H 中的 Banach 空间. 如果 $u\in U$ 是以按 H 的范数的精度 $\varepsilon>0$ 来寻求的，那么关于所有 $u\in U$ 一致的信息估计往往是对于由此可得到元素

$$\hat{v}_{\underline{N}} \equiv \sum_{i=1}^{N} v_i \psi_i(z) \in H \text{ 满足 } \|u - \hat{v}_{\underline{N}}\|_H \leqslant \varepsilon \quad (4)$$

的向量 $v_{\underline{N}} \equiv (v_1, \cdots, v_N)$ 的最小维数 $\underline{N}\equiv\underline{N}(\varepsilon)$ 来作出的（见[1]，[2]，[8]，[17]，[18]）. 对于 $N(\varepsilon)$ 的这些下界估计也给出了用任何可允许的方法所要求的计算费用的显然的下界估计. 对于一系列强椭圆边值问题，已经构造出一些有限元法的变种，它导致 N 个未知量的代数方程组

$$L_N(\bar{u}_N) = \bar{f}_N, \quad (5)$$

对于它，首先，近似解的阶最优的迭代法是已知的，其次，向量 $\bar{u}_N$ 的对应函数 $\hat{u}_N$(见[4])是方程(2)的解在 H 中的 ε 近似，其中 $N \leqslant k\underline{N}(\varepsilon)$，而 k 是不依赖于 ε 的常数(见[7]，[8]，[16])．如果不计形成(5)的计算量，那么这些方法导出计算费用的阶最小估计．例如，对于二阶椭圆方程情形，这里 $H = W_2^1(\Omega)$，$H' = W_2^2(\Omega)$ ($W_2^k(\Omega)$ 是 Соболев 空间[19])，如果 Ω 是平面区域，那么可得到算术运算次数的估计 $\sim \varepsilon^{-2}$．形成(5)的计算量在利用对应空间中的给定函数的信息时，也往往可估计为 $O(N\ln N)$．特别是，在上述例子中，f 必须考虑为 $F = W_2^{-1}(\Omega)$ 的元素，而不是 $L_2(\Omega)$ 的元素(见[8]，[15])．

关于积分方程、常微分方程和非定常偏微分方程的求解的计算量极小化的问题也已讨论过(见，例如，[1]－[4]，[20]－[22])．

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975(英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[2] Traub, J. F. and Wozniakowski, H., A general theory of optimal algorithms, Acad. Press, 1980.

[3] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1977(英译本: Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1975).

[4] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

[5] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978(英译本: Samarskiǐ, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1-2, Birkhaüser, 1989).

[6] Glowinski, R., Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer, 1984.

[7] Корнеев, В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977.

[8] Дьяконов, Е. Г., Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальный алгоритм для эллиптических задач, М., 1989.

[9] Borodin, A. and Munro, I., The computational complexity of algebraic and numeric problems, Amer. Elsevier, 1975.

[10] Traub, J. F. (ed.), Analytic computational complexity, Acad. Press, 1976.

[11] Concus, P. and Golub, G., Use of fast direct methods for the efficient numerical solution of nonseparable elliptic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 1103－1120.

[12] Barker, R. I., Advanced techniques for the direct numerical solution of Poisson,s equation, in Mathematical Models and Numerical Methods, Banach Center Publ., Vol. 3, PWN, 1978, 255－268.

[13] Bank, R. E. and Rose, D. J., Extrapolated fast direct algorithms for elliptic boundary value problems, in Algorithms and Complexity. Proc. Symp. Carnegic-Mellon Univ., Acad. Press, 1976, 201－249.

[14] Marchuk, G. I., Kuznetsov, Yu. A. and Matsokin, A. M., Fictitious domain and domain decomposition methods, Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1 (1986), 1, 3－35.

[15] D'yakonov, E. G., Effective methods for solving eigenvalue problems with fourth-order elliptic operators, Soviet J. Anal. Math. Modelling, 1 (1986), 1, 59－82.

[16] Hackbusk, W. and Trottenberg, U. (eds.), Multigrid methods, Lecture notes in math., 960, Springer, 1982.

[17] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики, М., 1979, 45－118.

[18] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[19] Соболев, С. Г., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962(中译本: С. Г. 索伯列夫，泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959；英译本: Sobolev, S. L., Applications of functional analysis in mathematical physics, Amer. Math. Soc., 1963).

[20] Емельянов, К. В., Ильин, А. М., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 7 (1967), 905－910.

[21] Иванов, В. В., в кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972, 209－219.

[22] Акопян, Ю. Р., Оганесян, Л. А., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 17 (1977), 109－118.

Е. Г. Дьяконов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Traub, J. F. and Wozniakowski, H., Information, uncertainty, complexity, Addison-Wesley, 1983.

极小化序列 [minimizing sequence; минимизирующая последовательность]

集合 M 中的序列 y_n，它使相应的函数序列 $\varphi(y_n)$ 趋于 φ 在 M 中的下确界，即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(y_n) = \inf_{y\in M}\varphi(y).$$

极小化序列的紧性，即存在一个子序列收敛于 M 中的某个元素，和 φ 的下半连续性保证了最优元素

$$y^n \in M, \varphi(y^n) = \min_{y\in M}\varphi(y)$$

的存在性．在逼近论中，对度量空间 $X=(X,\rho)$ 中某个给定的元素 x，极小化序列 $\{y_n\}\in M$ 指的是满足

$$\rho(x,y_n) \to \rho(x,M)=\inf\{\rho(x,y):y\in M\}$$

的序列. 见**逼近紧集**(approximately-compact set).

Ю. Н. Субботин 撰 王仁宏、檀结庆 译

极小化序列(算子的)[minimizing sequence (for an operator); минимизирующая последовательность]

元素序列 $\{z_n\}$ $(z_n \in Z)$, 能够使连续泛函 $I[z]$ $(z\in Z)$ 极小化:

$$I[z_n] \to \inf_{z\in Z} I[z],\ n\to\infty.$$

泛函极小化问题一般分为两类. 第一类是求泛函的极小值, 而不去关心这个最小值是在哪一个元素 z 处达到. 在这种情况下有关泛函的任一个极小化序列都可以作为近似解. 另一类问题则涉及到需要选取元素 z^* 使在其上泛函 $I[z]$ 达到最小值

$$\inf_{z\in Z} I[z]=I[z^*]=I^*. \qquad (1)$$

这样, 可能存在着极小化序列, 它们不收敛到元素 z^*.

设极小化问题(1)存在唯一解 z^*, 而且设 $\{z_n\}$ 是一个极小化序列, 即它满足

$$\lim_{n\to\infty} I[z_n]=I^*. \qquad (2)$$

极小化问题(1)称为是稳定的(stable), 如果每一个极小化序列(2)都收敛到元素 $z^*\in Z$.

在稳定问题的解法中极小化序列是由构造一个迭代的序列得到的, 使得关于 z_n(第 n 次迭代)的一个"方向" y_n 能够找到, 而元素

$$z_{n+1}=z_n-f(\rho_n)y_n$$

是从元素集合 $z_n-f(\rho)y_n$ 中来选取, 要求作为变数 ρ 的函数 $I[z_n-f(\rho)y_n]$ 最小.

对于稳定问题(1)构造极小化序列的方法可分为三种. 第一种不使用导数; 它们是一些直接方法. 第二种应用泛函的一阶导数; 这类方法一般称为下降法. 第三种方法包括使用泛函二阶导数的算法.

在不稳定极小化泛函问题中, 是用正规化方法构造收敛到 z^* 的一个序列 $\{z_n\}$.

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974 (英译本: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya, Solution of ill-posed problem, Winston, 1977).

[2] Céa, J., Optimisation, Théorie et algorithmes, Dunod, 1971.

Ю. В. Ракитский 撰 张宝琳、袁国兴 译

极小值[minimum; минимум]

见**函数的极大值和极小值**(maximum and minimum of a function); **极大点和极小点**(maximum and minimum points).

Minkowski 几何学[Minkowski geometry; Минковского геометрия]

一个有限维**赋范空间**(normed space)即一个具有 Minkowski 度量(Minkowski metric)——在平行移动下不变的度量——的仿射空间的几何学, 其中一个给定的中心对称的**凸体**(convex body)起着单位球的作用.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 应注意, 特殊相对论的几何学(见**空时**(spacetime))不是这种类型, 但也被称为 Minkowski 几何学.

参考文献

[A1] Benson, R. V., Euclidean geometry and convexity, McGraw-Hill, 1966. Chapt. 6.

杨路、曾振柄 译

Minkowski 假设[Minkowski hypothesis; Минковского гипотеза], 关于非齐次线性型之积的

如下陈述: 对于 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的具有非零行列式 Δ 的实线性型

$$L_j(\bar{x})=a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n,\ 1\leqslant j\leqslant n,$$

以及任何实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 存在整数 $x_1, \cdots, x_n$, 使得不等式

$$\prod_{j=1}^{n}|L_j(\bar{x})-\alpha_j|\leqslant 2^{-n}|\Delta| \qquad (*)$$

成立. H. Minkowski(1918)证明了 $n=2$ 时的这个假设. 已知(1982) $n\leqslant 5$ 时这个假设的证明; 对于 $n>5$, 在某些附加的限制下, $(*)$ 也已得到证明(见[2]).

参考文献

[1] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1972.

[2] Скубенко, Б. Ф., в кн.: Исследования по теории чисел, 2, Л., 1973, 6–36 (《Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР》, т. 33).

Э. И. Ковалевская 撰

【补注】 亦见**数的几何**(geometry of numbers).

参考文献

[A1] Gruber, P. M., Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Erdös, P., Gruber, P. M., Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.

沈永欢 译

Minkowski 不等式[Minkowski inequality; Минковского неравенство]

1) 原意 Minkowski 不等式: 对实数 $x_i, y_i\geqslant 0$ $(i=1,\cdots,n)$ 与 $p>1$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}. \qquad (1)$$

它是 H. Minkowski ([1]) 导出的. 对 $p<1$, $p\neq 0$, 此不等式应取反向 (对 $p<0$ 必须要求 x_i, $y_i>0$). 在任一情形下等式成立, 当且仅当行 $\{x_i\}$ 与 $\{y_i\}$ 成比例. 对 $p=2$, Minkowski 不等式称为三角不等式 (triangle inequality). Minkowski 不等式能作种种推广 (也称 Minkowski 不等式). 其中一些可列举如下.

2) 关于和的 Minkowski 不等式. 设 $x_{ij}\geq 0 (i=1, \cdots, n, j=1, \cdots, m)$, 并设 $p>1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)^{p}\right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{p}\right)^{1/p}. \quad (2)$$

此不等式对 $p<1$, $p\neq 0$ 是反向的, 且对 $p<0$ 应假定 $x_{ij}>0$. 在任一情形下等式成立, 当且仅当行 $\{x_{i1}\}$, $\cdots$, $\{x_{im}\}$ 成比例. (1) 还有对多重和与无限和的推广. 然而, 在取极限过程中对等式成立的叙述要特别留意 (见[2]).

不等式 (1) 与 (2) 关于 $\sum$ 是齐次的, 因而它们有关于各种平均的类似. 例如, 若 $M_{\varphi}(x_i)=\varphi^{-1}(\sum \varphi(x_i))$, 这里 $\varphi(t)=\log t$, 则

$$M_{\varphi}\left(\frac{x_i+y_i}{2}\right) \leq \frac{1}{2} M_{\varphi}(x_i)+\frac{1}{2} M_{\varphi}(y_i);$$

详见[2].

3) 关于积分的 Minkowski 不等式与 (2) 类似, 它的正确性是由于关于 $\int$ 的齐次性. 设 f, g 在域 $X\subset \mathbf{R}^n$ 中关于体积元 dV 为可积函数, 则对 $p>1$ 有

$$\left(\int_X |f+g|^p dV\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p dV\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p dV\right)^{1/p}. \quad (3)$$

(3) 到更一般的函数的推广能自然地得到. 进一步的推广为: 若 $k>1$, 则

$$\left(\int\left(\int f(x, y) dy\right)^k dx\right)^{1/k} \leq \int\left(\int f^k(x, y) dx\right)^{1/k} dy,$$

这里, 只当 $f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$ 时等式成立.

4) 其他 Minkowski 型不等式:

a) 关于乘积: 若 x_i, $y_i\geq 0$, 则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{1/n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}+\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n}.$$

b) Mahler 不等式 (Mahler inequality): 设 $F(x)$ 为 E^n 上的广义范并设 $G(y)$ 为它的极函数, 则

$$(x, y) \leq F(x) G(y),$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 为**内积** (inner product).

c) 关于行列式: 若 A, B 为 $\mathbf{C}$ 上非负 Hermite 矩阵, 则

$$(\det(A+B))^{1/n} \geq (\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}.$$

5) 最后, 与 Minkowski 的名字有关的其他不等式; 特别地, 在凸分析与数论之中. 例如, **Brunn-Minkowski 定理** (Brunn-Minkowski theorem).

参考文献

[1] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.
[2] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本: G. H. 哈代等, 不等式, 科学出版社, 1965).
[3] Beckenbach, E. F. and Bellman, R., Inequalities, Springer, 1961.
[4] Marcus, M. and Minc, H., Survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn and Bacon, 1964.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 E^n 上的广义范 (generalized norm) 指的是满足下列条件的函数 F: 1) $F(x)>0$, 对 $x\neq 0$; 2) $F(tx)=tF(x)$, 对 $t\geq 0$; 与 3) $F(x)+F(y)\geq F(x+y)$. 广义范 F 的极形式 (polar form) 或极函数 (polar function) 由

$$G(y)=\max_x \frac{(x, y)}{F(x)}$$

定义, 其中 $(\cdot, \cdot)$ 为内积.

参考文献

[A1] Bullen, P. S., Mitrinović, D. S. and Vasić, P. M., Means and their inequalities, Reidel, 1988.

郑维行 译 沈祖和 校

Minkowski 问题 [Minkowski problem; Минковского проблема]

是否存在凸闭超曲面 F, 使得它的 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) $K(\xi)$ 是单位外法向量 ξ 的一个已知函数? 此问题是由 H. Minkowski 提出的 ([1]); 它在下述意义下的广义解也属于 Minkowski: 即使 $K(\xi)$ 是解析函数, 其解也不含有 F 的正则性的任何信息. 他证明: 若定义在超球面 S 上的连续正函数 $K(\xi)$ 满足条件

$$\int_S \xi \cdot \frac{ds}{K(\xi)}=0,$$

则存在一个、且只有一个 (至多差一个平移) 凸闭曲面 F, 使得 $K(\xi)$ 是以 ξ 为外法向量的点处的 Gauss 曲率.

Minkowski 问题的正则解已由 А.В.Погорелов 在 1971 年给出 (见[2]); 他还考虑几何学及微分方程理论中与这个问题有关的某些问题. 例如, 他证明: 若

$K(\xi)$ 属于 $C^m(m \geqslant 3)$，则曲面 F 属于 $C^{m+1,\alpha}(\alpha > 0)$；若 $K(\xi)$ 是解析的，则 F 也是解析的．

Minkowski 问题的一个自然推广是有任何已知阶 v 的给定初等对称主曲率函数 $\varphi_v(\xi)$ 的凸超曲面存在性问题的解，其中 $v \leqslant n = \dim F$．特别是 $v = 1$，这便是由其平均曲率来重构曲面的 Christoffel 问题．这个广义 Minkowski 问题可解性的必要条件与（1）类似，它表示为

$$\int_S \xi \varphi_v(\xi) dS = 0.$$

但是，该条件并不是充分的（А.Д.Александров，1938，见[3]）．可例举的充分条件是：

$$\int_S \xi \Phi_v(\xi) dS = 0,$$

$$[1 - \frac{1}{n}]^{1/2(v-1)} \max(\Phi_{v,t} - \Phi''_{v,t}) < \Phi_{v,t}(\xi),$$

其中 $\Phi_{v,t} = (\varphi_{v,t}/C_n^v)^{1/n}$，$\varphi_{v,t} = t\varphi_v + 1 - t, 0 \leqslant t \leqslant 1$．此时，$F$ 的正则性和 Minkowski 问题是一样的．借助于逼近方法，这些结果最终对于非负的、对称的凹函数 $\varphi(\xi)$ 也是成立的．

参考文献

[1] Minkowski, H., Volumen und Oberfläche, *Math. Ann.*, 57(1903), 447 − 495.

[2] Погорелов, А. В., Многомерная проблема Минковского, М., 1971（英译本：Pogorelov, A. V., The Minkowski multidimensional problem, Winston, 1978）.

[3] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1973（译自俄文）.

[A2] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988（译自法文）.

[A3] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in Tölke, J. and Wills, J. M.(eds.), Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13 − 59.

陈维桓 译

Minkowski 空间 [Minkowski space; Минковского пространство]

符号差为（1，3）的四维伪 **Euclid 空间**（pseudo-Euclidean space），由 H. Minkowski（1908）作为狭义相对论中时空的一个几何模型引入（见[1]）．每一事件对应于 Minkowski 空间的一个点，其三个坐标表示事件在三维空间的坐标；第四个坐标是 ct，其中 c 是光的速度，而 t 是事件的时间．两个事件的时空关系由所谓的平方间距刻画：

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

间距在 Minkowski 空间中的作用类似于 Euclid 空间中的距离．具有正的平方间距的向量称为类时向量（time-like vector），负平方间距的称为类空向量（space-like vector），而零平方间距的称为零向量（null vector）或者迷向向量（isotropic vector）．在每一点的切向量为时间型的曲线叫做类时曲线（time-like curve）．类空曲线（space-like curve）和迷向曲线（isotropic curve）可类似定义．

在一给定时刻的事件叫世界点（world point）；描述某一过程或现象随时间发展的世界点的一个集合叫做世界线（world line）．如果连接两个世界点的向量是时间型的，则存在一个参考标架，使两事件投影到三维空间的同一个点．此参考标架中分隔两事件的时间等于 $\Delta t = \tau = s/c$，其中 τ 是所谓的真时间（proper time）．没有任何参考标架能使该两事件同时（即具有相同的时间坐标 t）．如果连接二事件的世界点的向量是空间型的，则存在参考标架使此二事件同时发生；它们不以因果关系相联系；平方间距的模数定义了此参考标架中点（事件）的时空距离．世界线的切向量是时间型向量．光线的切向量是迷向向量．

Minkowski 空间的运动，即保持间距的变换，是 **Lorentz 变换**（Lorentz transformation）．

Minkowski 空间的推广之一是引力理论的构造中所用的伪 **Riemann 空间**（pseudo-Riemannian space）．

参考文献

[1A] Minkowski, H., Raum und Zeit, *Phys. Z. Sowjetunion*, **10** (1909), 104−(Reprint in: Lorentz−Einstein−Minkowski, Teubner, 1922).

[1B] Minkowski, H., Das Relativitätsprinzip, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, **24** (1915), 372.

[2] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973（英译本：Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., The classical theory of fields, Addison-Wesley, 1962）.

[3] Фов, В. А., Теория пространства, Времени и тяготения, 2 изд., М., 1961（英译本：Fock, V. A. [V. A. Fok], The theory of space, time and gravitation, Macmillan, 1954）.

[4] Рашевский, П. К., Риманова, геометрия и тензорный аналнз, 3 изд., М., 1967.

[5] Synge, J. L., Relativity: the general theory, North-Holland, 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 有关引力理论的构造中所用的伪 Riemann 空间的材料，特别参见[A3]第 10 − 11 页和第三章，以及[A4] − [A6]．

参考文献

[A1] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleik, M., Analysis, manifolds and physics, North-Holland, 1977（译自法文）.

[A2] Weinberg, S., Gravitation and cosmology, Wiley,

1972.
[A3] Besse, A., Einstein manifolds, Springer, 1987.
[A4] Hawking, S. and Ellis, G., The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.
[A5] Misner, C.. Thorne, K. and Wheeler, J., Gravitation, Freeman, 1973.
[A6] O'Neill, B., Semi-riemannian geometry, Acad. Press, 1983.
杨路、曾振柄 译

Minkowski 定理 [Minkowski theorem; Минковсккого теорема]

1) Minkowski 凸体定理(Minkowski theorem on convex bodies)是**数的几何**(geometry of numbers)中最重要的定理, 并且是数的几何得以发展为数论的一个独立分支的基础. 它是 H. Minkowski 在1896年建立的(见[1]). 设 $\mathfrak{R}$ 是闭凸体, 对于原点0对称, 且有体积 $V(\mathfrak{R})$. 那么每个行列式为 $d(\Lambda)$ 且适合

$$V(\mathfrak{R}) \geqslant 2^n d(\Lambda)$$

的点格 Λ 必含有一个不同于原点 0 的 $\mathfrak{R}$ 的点.

Minkowski 定理的一个等价叙述是:

$$\Delta(\mathfrak{R}) \geqslant 2^{-n} V(\mathfrak{R}),$$

其中 $\Delta(\mathfrak{R})$ 是体 $\mathfrak{R}$ 的临界行列式(见**数的几何**(geometry of numbers)). Minkowski 定理到非凸体的推广称做 Blichfeldt 定理(见**数的几何**(geometry of numbers)). Minkowski 定理和 Blichfeldt 定理可用来估计距离函数算术极小值的上界.

参考文献

[1] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.
A. B. Малышев 撰

【补注】C.L.Siegel 应用 Fourier 级数改进了 Minkowski 定理. 一个不同的改进是 Minkowski 的相继极小定理(见**数的几何**(geometry of numbers)). 这些改进在代数数论及 Diophantine 逼近中有其应用. 关于保证凸体中存在格点的其他一些条件, 可见[A2].

2) Minkowski 线性型定理(Minkowski theorem on linear forms): 不等式组

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j\right| \leqslant c_1, \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| < c_i, 2 \leqslant i \leqslant n,$$

其中 a_{ij}, c_i 是实数, 当 $c_1 \cdots c_n \geqslant |\det a_{ij}|$ 时有一组整解 $(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$. 这是 Minkowski 在1896年建立的(见[1]). Minkowski 线性型定理是更一般的 Minkowski 凸体定理的推论(见第1部分).

参考文献

[1] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.
[2] Minkowski, H., Diophantische Approximationen, Chelsea, reprint, 1957.
[3] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1972.
Э. И. Ковалевская 撰

【补注】何时 Minkowski 线性型定理中的第一个不等式能用严格不等式代替的问题, 已由 G.Hajós 解决.

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.
[A2] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.
朱尧辰 译

子式 [minor; минор], 亦称子行列式, k 阶的

一个**矩阵**(matrix)的**行列式**(determinant), 这个矩阵的元素是处于给定矩阵的 k 个相异行和 k 个相异列的交点上的那些元素. 如果行指数与列指数相同, 则该子式称为主子式(principal minor), 而如果它们属于前 k 行和前 k 列, 则该子式称为角子式(corner minor). 矩阵的基本子式(basic minor)是最大阶的非零子式. 为使一个非零子式是基本子式, 必要和充分条件是它的所有加边子式(即包含它的高一阶的子式)都等于零. 一个矩阵的与基本子式相联系的行(列)的系统构成了该矩阵的所有行(列)的系统的极大线性无关子系统. В. Н. Ремесленников 撰

【补注】"k 阶子式"也可称为"k 次子式". 有时, 子式不是指行列式(如上面所定义的), 而是指相应的子矩阵("加边"的概念就使用这种解释).

杜小杨 译

图的减缩图(或称图子式)[minor of a graph; минор графа]

【补注】 设 G 是一个图(graph)(可以有环及多重边). G 的一个减缩图(minor)是从 G 中接连进行下述运算而得的任何一个图:

i) 删去一条边;

ii) 收缩一条边;

iii) 去掉一个孤立顶点.

N. Robertson 与 P. D. Seymour 的图减缩定理(graph minor theorem)如下所述: 已知有限图的无穷序列 $G_1, G_2, \cdots$, 则存在指标 $i<j$, 能使 G_i 同构于 G_j 的一个减缩图. 这定理原是 K. Wagner 的一个猜想(Wagner 的**良拟序猜想**(Wagner well-quasi-ordering conjecture)).

设 P 是图的一种性质, 它在图取减缩图时保持不变. 例如, 可以嵌入一个紧 Riemann 曲面这种性质. 以 L 表示不具有性质 P 的全体极小减缩图的同构类所组成的集合, 则图减缩定理断言 L 是有限集合. 这个事实表明, 性质 P 可以这样刻画: 一个图具有性质 P 当且仅当它不含有取自有限集 L 中的一个减缩图. 在此性质取为"可平面性"的情形, 集合 L 由两个图 $K_{3,3}$ 及 K_5 给出, 参见 **Kuratowski 图**

(Kuratowski graph).

图减缩定理的有限形式如下:

a) 对于一切 k 都有一个 n, 能使对于满足 $|G_i| \leqslant k+i$ 的 n 个图的序列 $G_1, \cdots, G_n$, 存在一对指标 $i<j$ 使得 G_i 同构于 G_j 的一个减缩图. 这里, $|G_i|$ 表示 G_i 的顶点数与边数之和.

b) 对于一切 k, 存在一个 n, 使得对于一切满足 $|G_i| \leqslant i$ 的 n 个图的序列 $G_1, \cdots, G_n$, 有 $i_1 < \cdots < i_k$ 能使对于一切 $j=1, \cdots, k-1$, G_{i_j} 同构于 $G_{i_{j+1}}$ 的一个减缩图.

对于无限图的 Wagner 猜测在下述意义下一般不成立: 存在由无限图组成的序列 $G_1, G_2, \cdots$, 使得对于一切 $i \neq j$, G_i 不是 G_j 的一个减缩图. 对于可数图, 这个猜测尚待解决(1988).

一个推论(应用)是, 在取减缩图时保持不变的每个图论性质是可以在多项式时间内加以检定的. 例如, 可平面性因此可以在多项式时间内作检定. 下述问题有**多项式时间算法**(polynomial-time algorithm): 已知一个图 G 及 G 的顶点 $r_1, s_1, \cdots, r_k, s_k$, 寻找路 $P_1, \cdots, P_k$ 使得对于一切 $i=1, \cdots, k$, P_i 连接 r_i 与 s_i 并且 $P_1, \cdots, P_k$ 是顶点不交的. 这种问题产生于超大规模集成电路(VLSI)的设计之中.

参考文献

[A1] Friedman, H., Robertson, N. and Seymour, P. D., The mathematics of the graph minor theorem, *Contempory Math.*, **65** (1987), 229–261.

[A2] Robertson, N. and Seymour, P. D., Graph minors — a survey, in I. Anderson (ed.): Surveys in Combinatorics 1985, Cambridge Univ. Press, 1985, 153–171.

[A3] Thomas, R., A counter-example to "Wagner's conjecture" for infinite graphs, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **103** (1988), 55–57.

【译注】

参考文献

[B1] Robertson, N. and Seymour, P. D. (ed.), Graph structure theory, *Contempory Math.*, **147** (1993).

陶懋颀 译 李 乔 校

弱函数 [minorant; миноранта]

见**强函数和弱函数**(majorant and minorant).

分 [minute; минута]

平面角的度量单位, 等于 1 度(degree)的 1/60, 用符号 ′ 来表示. 1 分等于 60 秒(60″). **公制分**(metric minute)是直角的 1/10000, 用符号 ^{c} 来表示. 1 公制分等于 100 公制秒(100^{cc}).

Mittag-Leffler 函数 [Mittag-Leffler function; Миттаг-Леффлера функция]

由 G. Mittag-Leffler([1]) 作为指数函数的推广而引入的复变量 z 的整函数 $E_\rho(z)$:

$$E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k/\rho)},\quad 1 \leqslant \rho < \infty.$$

由于 Mittag-Leffler 函数以及更一般的 Mittag-Leffler **型函数**(function of Mittag-Leffler type)

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)},\quad \mu, \rho \in \mathbf{C}$$

广泛地应用于解析函数的积分表示和积分变换, 所以对于它们的性质, 特别是渐近性质, 已进行了详细的研究(见[2], [3]).

参考文献

[1] Mittag-Leffler, G., Sur la répresentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, *Acta Math.*, **29** (1905), 101–181.

[2] Джрбашян, М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

[3] Гольдберг, А. А., Островский, И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cartwright, M. L., Integral functions, Cambridge Univ. Press, 1962.

张鸿林 译

Mittag-Leffler 星形 [Mittag-Leffler star; Миттаг-Леффлера звезда]

同**函数元的星形**(star of a function element).

Mittag-Leffler 求和法 [Mittag-Leffler summation method; Миттаг-Леффлера метод суммирования]

由函数序列

$$g_k(\delta)=\frac{1}{\Gamma(1+\delta k)},\quad \delta>0,\ k=0, 1, \cdots$$

定义的求数项或函数项级数之和的一种**半连续求和法**(semi-continuous summation method), 其中 $\Gamma(x)$ 是 Γ 函数. 称级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

按 Mittag-Leffler 法**可求和**, 其和为 s, 如果

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{\Gamma(1+\delta k)}=s$$

且极限号后的级数收敛. 此方法系 G. Mittag-Leffler([1]) 起初为级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

而引入的. Mittag-Leffler 求和法是正则的(见**正则求和法**(regular summation methods))且用来作为函数**解析延拓**(analytic continuation)的工具. 如果 $f(z)$ 是一个解析函数的主支, 在零点处正则且对小的 $|z|$ 可表为级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

则此级数在函数 $f(z)$ 的整个星形(见**函数元的星形**(star of a function element))内按 Mittag-Leffler 法可求和到 $f(z)$, 而且在包含于此星形内部的任一有界闭域上是一致的.

对于由通过形如

$$a_k(\omega)=\frac{c_{k+1}\omega^{k+1}}{E(\omega)}$$

的半连续矩阵 $a_k(\omega)$ 所作的序列变换定义的求和法(其中

$$E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\omega^k$$

是整函数), Mittag-Leffler 考虑了

$$E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega^k}{\Gamma(1+ak)}$$

的情形. $E(\omega)$ 取这样的整函数的矩阵 $a_k(\omega)$, 称为 Mittag-Leffler 矩阵(Mittag-Leffler matrix).

参考文献

[1] Mittag-Leffler, G., Atti del Ⅳ congresso Internationale, Vol. 1, Rome, 1908, 67 – 85.

[2] Mittag-Leffler, G., Sur la répresentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, *Acta Math.*, **29** (1905), 101 – 181.

[3] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon Press, 1949.

[4] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.

И. И. Волков 撰

【补注】 Mittag-Leffler 所考虑的函数 $E(\omega)$ 称为 **Mittag-Leffler 函数**(Mittag-Leffler function).

沈永欢 译

Mittag-Leffler 定理[Mittag-Leffler theorem; Миттаг-Леффлера теорема]

1) 关于亚纯函数展开式的 Mittag-Leffler 定理(见[1],[2])是解析函数理论中的基本定理之一, 它给出亚纯函数的一种类似于有理函数展成最简单的部分分式的展开式. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是互异复数序列,

$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty,$$

又设 $\{g_n(z)\}$ 是形如

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{l_n}\frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k}\tag{1}$$

的有理函数序列, 因而 a_n 是其相应的函数 $g_n(z)$ 的唯一的极点. 则存在复数 z 平面 $\mathbf{C}$ 内的亚纯函数 $f(z)$ 在且仅在这些 a_n 处有极点, 并且相应于这些点 a_n 的 **Laurent 级数**(Laurent series)具有给定的主部(1). 所有这些函数 $f(z)$ 可以表示为 Mittag-Leffler 展开(Mittag-Leffler expansion)的形式

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[g_n(z)+p_n(z)],\tag{2}$$

其中 $p_n(z)$ 是多项式, 其选定与 a_n 和 $g_n(z)$ 有关, 使得级数(2)在任一紧集 $K\subset\mathbf{C}$ 上一致收敛(除去有限项之后), $h(z)$ 是任意的整函数.

Mittag-Leffler 定理意味着 $\mathbf{C}$ 内任一给定的具有极点 a_n 且在 a_n 的邻域内的 Laurent 展开式有相应的主部 $g_n(z)$ 的亚纯函数 $f(z)$ 可以展开成级数(2), 其中整函数 $h(z)$ 由 $f(z)$ 确定. G. Mittag-Leffler 曾给出多项式 $p_n(z)$ 的一般性的构造; 对于给定的 $f(z)$ 求相应的整函数 $h(z)$, 有时是一个更困难的问题. 为得到(2), 可应用留数理论的方法(见**解析函数的留数**(residue of an analytic function), 亦见[3]–[5]).

约化定理的一种推广亦归功于 Mittag-Leffler, 它指出: 对于扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 的任何区域 D, 对于所有极限点都在边界 ∂D 上的任何点列 $\{a_n\}$, $a_n\in D$, 以及相应的主部(1), 存在 D 内亚纯函数 $f(z)$ 在且仅在 $\{a_n\}$ 有极点, 而且具有给定的主部(1). 以这种形式, Mittag-Leffler 定理可推广于开 Riemann 曲面 D(见[7]); 关于紧 Riemann 曲面上具有给定奇异性的亚纯函数的存在性, 见 **Abel 微分**(Abelian differential); **Riemann 曲面上的微分**(differential on a Riemann surface); **Riemann-Roch 定理**(Riemann-Roch theorem). Mittag-Leffler 定理对于在 Banach 空间 F 中取值的抽象亚纯函数 g_n, $f:D\to F$, $D\subset\overline{\mathbf{C}}$, 仍然成立(见[8]).

Mittag-Leffler 定理的另一推广指出: 对于任一序列 $\{a_n\}\subset\mathbf{C}$, $|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, 及相应的函数

$$g_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k}$$

是变量 $w_n=1/(z-a_n)$ 的整函数, 存在一单值解析函数 $f(z)$ 在且仅在 a_n 处有奇点, 并且具有主部 $g_n(z)$(见[3]).

对于多复变解析函数, 关于具有给定奇性函数的构造的 Mittag-Leffler 问题的一种推广是第一(加性) **Cousin 问题**(Cousin problems). 在这种关系下, Mittag-Leffler 定理的下述等价陈述是常用的. 设 $\Omega=\bigcup_j\Omega_j$, 其中 Ω_j 是 $\mathbf{C}$ 中开集, 并设在集合 Ω_j 上分别有给定的亚纯函数 g_j, 其中对所有的 j 和 k, 差 g_j-g_k 是

交集 $\Omega_j \cap \Omega_k$ 上的正则函数，则在 Ω 上存在亚纯函数 f 使对所有的 j、差 $f-g_j$ 在 Ω_j 上是正则的（见[5]，[6]）.

2）关于星形中解析函数的单值分支的展开的 Mittag-Leffler 定理，见**函数元的星形**（star of a function element）.

参考文献

[1] Mittag-Leffler, G., En metod att analytisk framställa en funktion at rationel karacte, Öfversigt Kongl. Vetenskap-Akad. Förhandlinger, **33**(1876), 3－16.

[2] Mittag-Leffler, G., Sur la représentation analytique des fonctions monogénes uniformes d'une variable indépendante, *Acta Math.*, **4**(1884), 1－79.

[3] Goursat, E., Cours d'analyse mathématique, Gauthier-Villars, 1927.

[4] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968（英译本：Markushevich, A. I., The theory of functions of a complen variable, 2, Chelsea, 1977）.

[5] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1-2, М., 1976.

[6] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variable, North-Holland, 1973.

[7] Behnke, H. and Sommer, F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veranderlichen, Springer, 1972.

[8] Schwartz, L., Analyse mathématique, 2, Hermann, 1967.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978（中译本：J. B. 康威，单复变函数，上海科学技术出版社，1985）.

[A2] Heins, M., Complex function theory, Acad. Press, 1968.

杨维奇 译

双曲型方程及方程组的混合和边值问题[mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems; смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем]

寻找双曲型偏微分方程（组）在其区域的边界上（或其一部分）满足规定条件的解的问题.（见**边界条件**（boundary conditions）；**初始条件**（initial conditions）.）

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内某区域 D 上，双曲型方程（组）的边值问题称为混合问题（mixed problem）或初始边值问题（initial boundary value problem），如果所求的解连同边界条件同样必须满足初始条件，或者如果边界数据的支集 ∂D 同时由特征及非特征定向流形组成.

对二阶双曲型方程，初始数据的支集在混合问题中是 ∂D 的空向部分. 在 ∂D 的时向部分上，此边界条件通常是与抛物型方程的条件同类型的，见**抛物型方程及方程组的混合和边值问题**（mixed and boundary value problems for parabolic equations and systems）.

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中带有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域，其中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，且令

$$D=\{(x,x_0):x\in\Omega,\ 0<x_0<T\},$$

$$S=\{(x,x_0):x\in\partial\Omega,\ 0<x_0<T\},$$

$$\Omega_0=\{(x,x_0):x\in\Omega,\ x_0=0),$$

$$\Omega_T=\{(x,x_0):x\in\Omega,\ x_0=T\}.$$

在 D 内考虑二阶线性双曲型方程

$$u_{x_0x_0}-a^{ij}(x,x_0)u_{x_ix_j}+a^i(x,x_0)u_{x_i}+$$
$$+a^0(x,x_0)u_{x_0}+a(x,x_0)u=f(x,x_0),\quad(1)$$

其中求和是从 1 到 n，它在重复的下标 i,j 上进行，且形式 $a^{ij}(x,x_0)\xi_i\xi_j$ 必须是正定的.

方程（1）的基本的混合问题组成如下：要找方程（1）在 D 内的解 $u=u(x,x_0)$，使它在 Ω_0 上满足初始条件

$$u|_{x_0=0}=\tau(x),\ u_{x_0}|_{x_0=0}=\nu(x)\qquad(2)$$

且在 S 上满足下面边界条件中的一个：

$$u|_S=\varphi_1(x,x_0),\qquad(3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S=\varphi_2(x,x_0),\qquad(4)$$

$$\left.\left[\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma(x,x_0)u\right]\right|_S=\varphi_3(x,x_0),\qquad(5)$$

其中 N 是关于算子 $a^{ij}(\partial/\partial x_i)(\partial/\partial x_j)$ 的一个余法向. 问题（2），（3）；（2），（4）；及（2），（5）通常分别地称为方程（1）的第一，第二及第三混合问题（first, second and third mixed problem）.

在对（1）的系数，边界 ∂D 以及给定的函数作了较为一般的假定后，人们能证明所有这三类混合问题的广义解及正则解的存在性和唯一性. 对闭域 $\bar{D}$ 内的这些解，其依赖于边界光滑性的解的结构上的性质以及可微性质已在[8]中讨论. 当 $n=1$ 时，混合问题的解可由显式得出.

对广泛一类线性及非线性双曲型方程和方程组，它的混合问题业已讨论，见**拟线性双曲型方程和方程组**（quasi-linear hyperbolic equations and systems）. 对形如

$$u_{x_0x_0}=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x,x_0)\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}+f(x,x_0)$$

的严格双曲型方程及方程组，若其初始条件于 D 在平面 $x_0=0$ 内边界的空向部分上提出，则这种混合问

题已存在令人满意的理论．同样对双曲型方程及方程组的如此的混合问题也已有了成功的研究：此时初始或边界条件的支集是这些方程的型或阶数发生退化的曲面，见**退化偏微分方程**(degenerate partial differential equation)．最为实质的结果是对形如

$$u_{x_0x_0}-\frac{\partial}{\partial x_j}[a^{ij}(x,x_0)u_{x_i}]+b^i(x,x_0)u_{x_i}+$$
$$+b^0(x,x_0)u_{x_0}+c(x,x_0)u=f(x,x_0)$$

的二阶线性方程所得到，此中系数满足条件

$$a^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda_0\mu_0x_0(b^i\xi_i)^2-\mu_0a^{ij}_{x_0}\xi_i\xi_j$$
$$(\text{对所有 }\xi\in\mathbf{R}^n),$$

λ_0和 μ_0 是正常数．并且特别地对形如

$$y^mu_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+$$
$$+c(x,y)u=f(x,y),\qquad(6)$$
$$x_1=x,\ x_0\equiv y\geqslant0,\ m=\text{常数}$$

的方程得到了结果．

带有内部或外部边界条件的混合问题(见**外部和内部边值问题**(exterior and interior boundary value problems))可由阻碍物上波的散射理论中一些过程的数学模型导出．例如，Sommerfeld **辐射条件**(radiation conditions)可由寻找波动方程

$$\Box u\equiv u_{x_0x_0}-\cdots-u_{x_nx_n}=0$$

的如下的问题的解而导出：其中所有点 $x\in\mathbf{R}^n$ 位于一有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 的外部；对任一瞬间 $x_0\geqslant0$，u 关于 $\partial\Omega$ 的外法向的导数为零；而初始条件对应于在 x_1 轴方向由无穷处而来的一个平面波．

双曲型方程及方程组的基本边值问题是 Goursat 问题及 Darboux-Picard 问题，还有它们的多维的类似问题，见 **Goursat 问题**(Goursat problem)；**Cauchy 特征问题**(Cauchy characteristic problem)及[1]．

对于形如

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=$$
$$=f(x,y)$$

的分离主部的二阶双曲型方程和方程组，它们的 Goursat 和 Darboux-Picard 问题以及它们的各种推广已被彻底地讨论，此中 a, b 及 c 是给定的实 $(m\times m)$ 矩阵，f 是一给定向量，而 u 是所求的 m 维向量．对于适当广泛一类二阶双曲型方程组，若它带有非分离主部组无抛物型退化，则也已得到了重要的结果．对于具两自变量 x, y 的双曲型方程组

$$\frac{\partial^2u_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u_i}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2u_j}{\partial x\partial y}=0,\ i=1,2,\ i+j=3,$$

它的特征 Goursat 问题

$$u_i(x,x)=\varphi_i(x),\ u_i(x,-x)=\psi_i(x),$$
$$x\geqslant0,\ i=1,2,$$

已被证明不存在唯一解，且已知最低项在问题的适定性上的作用([3])．对于退化双曲型方程和方程组而言，抛物型退化性态在局部及非局部边值问题的适定性上的影响业已彻底讨论([3])．这特别应用到形如

$$u_{yy}-k(x,y)u_{xx}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+$$
$$+c(x,y)u=f(x,y)$$

的线性退化双曲型方程的基本(局部)边值问题，其中方程确定在带有一任意的逐段光滑边界的有界区域内．并且，非特征退化的阶数在 Darboux 问题适定性上的影响以及作为边界条件支集的特征线的非等价性已经阐明了(见[10])．

至于找 Darboux 及 Tricomi 问题的高维类似问题(参见**混合型微分方程**(mixed-type differential equation))，在非局部边值问题方面已作了许多工作，并且特别对双曲型方程如此的带有移位的问题已作出工作([9])：它在边界的特征部分上有给定的条件，且此条件逐点连结所求解的值及它的(分数阶)导数或某特定阶的积分．

在方程(1)情况下，带有移位的一些边值问题已很完全且一般地研究了．这些问题被包含在下面的提法之内．在由特征

$$\Gamma_0:\ x-\frac{2}{m+2}\,y^{(m+2)/2}=0,$$
$$\Gamma_1:\ x+\frac{2}{m+2}\,y^{(m+2)/2}=1$$

和直线 $y=0$ 上区间 I：$0<x<1$ 所界的区域内，人们求方程(1)的一个(充分光滑)的解 $u(x,y)$，使在区间 I 上满足局部条件

$$\lim_{y\downarrow0}\left[A_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\frac{\partial u}{\partial y}+A_3u\right]=A_4(x),$$
$$x\in I,\qquad(7)$$

且在 $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ 上满足非局部条件

$$B_1(x)D^{\alpha}_{0x}u[\theta_0(x)]+B_2(x)D^{\alpha}_{1x}u[\theta_1(x)]+$$
$$+\lim_{y\downarrow0}\left[a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x)\frac{\partial u}{\partial y}+a_3(x)u\right]=B_3(x),$$
$$x\in I,\qquad(8)$$

其中 A_i, B_i, a_i 为给定的函数，D^{ε}_{jx} 是由下面定义的 $|\varepsilon|$ 阶分数的积分-微分算子：

当 $\varepsilon<0$ 时，

$$D_{jx}^{r}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(-\varepsilon)}\int_{j}^{x}|x-t|^{-r-1}\varphi(t)dt,$$

而当 $\varepsilon>0$ 时,

$$D_{jx}^{r}\varphi(x)=\frac{d^{[r]+1}}{dx^{[r]+1}}D^{r-[r]-1}\varphi(x),$$

$$j=0,1.$$

此处 $\Gamma(z)$ 是 Γ 函数, $[\varepsilon]$ 是 ε 的整数部分, $\theta_j(x)$ 是由 $x\in I$ 所出发的特征与方程(1)的特征 Γ_j 的交点:

$$u[\theta_j(x)]=u(\mathrm{Re}\,\theta_j,\mathrm{Im}\,\theta_j).$$

关于形如(1)的方程的带移位的边值问题,按特征坐标 ξ 及 η 方程化为 Euler-Darboux-Poisson 方程

$$(\xi-\eta)u_{\xi\eta}-\beta u_{\xi}+\beta' u_{\eta}=0,$$

对它们已有了详尽的研究.

问题(7),(8)的一个特殊情形是 Darboux 问题(Darboux problem),它要求找方程(6)的一个(充分光滑)的解 $u(x,y)$,使其满足(局部)边界条件

$$u[\theta_0(x)]=\psi(x),\ u(x,0)=\tau(x),\ x\in I,$$

或

$$u[\theta_1(x)]=\varphi(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ x\in I.$$

为使 Darboux 问题适定,条件 $m<2$ 或 Gellerstedt 条件(Gellerstedt condition) $a(x,y)=O(1)y^p$, $p>(m/2)-1$, $m\geqslant 2$ 是本质的([3],[10]).

一个在本质上新的 Darboux 问题的高维类似问题是 Бицадзе 问题(Bitsadze problem).在波动方程 $\square u=f(x,x_0)$ 情形下,此问题以下述方式提出(见[1]).在由平面 $x_n=0$ 的一部分 S_0 及两特征曲面

$$S_1:\ x_0=|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},\ x_n\leqslant 0$$

和

$$S_2:\ 1-x_0=|x|,\ x_n\leqslant 0$$

所界的区域 $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 内,要找方程的解使其满足 $u|_{S_0}=0$, $u|_{S_2}=0$ 或 $u_{x_n}|_{S_0}=0$, $u|_{S_2}=0$.

另外一些高维的类似问题也已被研究,这些问题对一些特殊区域内的双曲型方程来说,既是 Darboux 问题,又是非局部问题((2),(3)型)的高维类似问题.而这些特殊区域的边界上的非特征部分通常是空向曲面.对 Euler-Darboux-Poisson 方程 $x_0\square u=ku_{x_0}$ 最为完全的结果已经得到.

对于形如

$$u_{xy}+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+c(x,y)u=$$
$$=f(x,y) \tag{9}$$

的方程,人们将注意力专注于下面的非局部问题.在区域 $\{(x,y):\ 0<x<h,\ 0<y<T\}$ 内要找方程(9)的一个(充分光滑)解 $u(x,y)$,使得对所有 $y\in[0,T]$ 满足

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant h,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{x_0}u(x,y)dx=\tau(y),$$

或

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant h,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{q}\alpha_i(y)u(x^i,y)=\tau(y),$$

其中 $x_0,\cdots,x_q$ 是区间 $[0,h]$ 中给定的点.

在边值问题理论中的一个新的侧面是形如

$$u_{xxy}+A(x,y)u_{xx}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+$$
$$+c(x,y)u=f(x,y) \tag{10}$$

的三阶双曲型方程的研究.这些问题是由多孔介质内质量或热量传递理论中一些过程和现象所对应的数学模型的基础上出现的.对于形如(10)的双曲型方程的局部及非局部线性边值问题已发展了一个广泛的理论并且特别地,**Riemann 法**(Riemann method)的一个类似已经设计出.

对于一阶线性对称双曲型组(见**线性双曲型偏微分方程和方程组**(linear hyperbolic partial differential equation and system)),在一阶方程组理论和在 $\partial\Omega$ 上带有可允许边界条件的边值问题理论的限制内,已进行了研究(见[6]).

Dirichlet 问题(Dirichlet problem)对任意区域内双曲型方程及方程组而言一般是不适定的.利用能量估计及积分方程的方法,此问题的适定性已对一些特殊柱形区域内的广泛一类二阶双曲型方程建立了.

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981 (英译本: Vlagimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mır, 1984).

[3] Gellerstedt, S., Sur une équation linéaire aux dérivées partielles du type mixte, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **25A** (1937), 29, 1-23.

[4] Годунов, С. К., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1979.

[5] Джураев, Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979.

[6] Дезин, А. А., Общие вопросы теории граничных задач, М., 1980.

[7] Лаврентьев, М. М., Романов, В. Г., Васильев, В. Г., Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосиб., 1969 (英译本: Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G., Vasil'ev, V. G., Multidimensional inverse problems for differential equations, Springer, 1970).

[8] Ладыженская, О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953.

[9] Нахушев, А. М., 《Дифференциальные уравнения》, **5** (1969), 1, 44 – 59.

[10] Нахушев, А. М., 《Дифференциальные уравнения》, 7 (1971), 1, 49 – 56.

[11] Салахитдинов, М. С., Уравнения смешанно-составного типа, Ташкент, 1974.

[12] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (中译本: А. Н. 吉洪诺夫, А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程 (上、下册), 高等教育出版社, 1956, 1957).

[13] Шхануков, М. Х., 《Дифференциальные уравнения》, **18** (1982), 4, 689 – 699.

А. М. Нахушев 撰

【补注】 关于术语“混合”可见**抛物型方程和方程组的混合和边值问题**.

仇庆久 译

抛物型方程及方程组的混合和边值问题[mixed and boundary value problems for parabolic equations and systems; смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем]

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ (其中点 $(x, t) = (x_1, \cdots, x_n, t)$) 的区域 D 内找抛物型方程组, 或当 $m = 1$ 时找抛物型方程的解

$$u(x, t) = (u_1(x, t), \cdots, u_m(x, t)),$$

使在区域 D 的边界 ∂D 的某部分上满足附加的一些条件.

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内具充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域. D 是一柱体 $\{x \in \Omega: 0 < t < T\}$, 它带有侧面 $\Gamma = \{x \in \partial\Omega: 0 < t < T\}$, 下底 $\Omega_0 = \{x \in \Omega: t = 0\}$ 及上底 $\Omega_T = \{x \in \Omega: t = T\}$. 在此柱体 D 内关于线性抛物型组

$$u_t + \sum_{|\alpha| \leq 2p} A_\alpha(x, t) D_x^\alpha u = f(x, t), \ (x, t) \in D,$$
$$f(x, t) = (f_1(x, t), \cdots, f_m(x, t)) \qquad (1)$$

的混合 Петровский 问题是要找此方程组的解, 使其满足初始条件

$$u|_{\Omega_0} = \varphi(x), \ \varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)) \qquad (2)$$

和边界条件

$$B\left[x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right] u \bigg|_\Gamma = \psi(x, t), \qquad (3)$$

其中 $\psi(x, t) = (\psi_1(x, t), \cdots, \psi_p(x, t))$, 且 $B(x, t, \partial/\partial x)$ 是一个元素为

$$B_{ij}\left[x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right] = \sum_{|\alpha| \leq q_{ij}} b_\alpha^{i,j}(x, t) D_x^\alpha,$$
$$i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, p$$

的长方矩阵. 设所研究的方程组是一致抛物型的.

混合问题 (1) – (3) 的古典解是属于

$$C_{x,t}^{2p,1}(D) \cap C_{x,t}^{q,0}(D \cup \Gamma) \cap C(D \cup \Gamma \cup \bar{\Omega}_0),$$
$$q = \max q_{i,j}, \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq p$$

的向量函数 $U(x, t)$, 使其在 D 内满足 (1), 且在 Ω_0 和 Γ 上分别满足条件 (2) 和 (3). 有时人们考虑比这更为一般的解. 特别地, 人们放弃解在 $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Omega}_0$ 的点处是连续的要求而代之以在 D 内有界的条件.

若加上补充 (或 Лопатинский) 条件 (且若为简单计, 设 Ω 是有界的), 则对充分光滑的数据 ((1) 和 (3) 的系数, 以及向量函数 f, φ 和 ψ) 及在某些相容性条件下, 古典解是存在和唯一的.

对一个一般的一致的线性抛物型的二阶方程

$$u_t - Lu \equiv u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} -$$
$$- \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} - c(x, t) u = f(x, t), \ (x, t) \in D,$$
$$a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \ i, j = 1, \cdots, n, \qquad (1')$$

其基本的混合问题是找 (1′) 的解, 使其满足初始条件

$$u|_{\Omega_0} = \varphi(x) \qquad (2')$$

及下面边界条件中的一个: 第一混合问题 (first mixed problem)

$$u|_\Gamma = \psi(x, t), \qquad (4)$$

第二混合问题 (second mixed problem)

$$\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_\Gamma = \psi(x, t), \qquad (5)$$

第三混合问题 (third mixed problem)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x, t) u\right]\bigg|_\Gamma = \psi(x, t), \qquad (6)$$

其中 N 是椭圆型算子 L 的余法向.

这些问题中每一个要满足补充条件, 因而当数据是充分光滑且相容性条件成立时, 每一问题均有古典解. 这个解可由位势方法, 有限差分法及 **Галеркин 法** (Galerkin method) 得到, 或者, 当函数 a_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$, c 和 σ 不依赖于 t 且 $b_i \equiv 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ 时可用 **Fourier 法** (Fourier method) 得到. 例如, 为求解方程 (1) 的第一混合问题, 只须要求方程

的系数属于某 α 阶 Hölder 空间 $C^{\alpha}(\bar{D})$ $(\alpha>0)$，系数 $a_{ij}(x,t)$ 有在 $C^{\alpha}(\bar{D})$ 内的导数 $\partial a_{ij}/\partial x_i(i,j=1,\cdots,n)$，$f(x,t)$ 属于 $C^{\alpha}(\bar{D})$ 且 φ 和 ψ 分别在 $\bar{\Omega}_0$ 和 $\bar{\Gamma}$ 上连续，$\varphi|_{\partial\Omega}=\psi(x,0)$．对此还要求 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 满足下面条件：对任意 $x^0\in\partial\Omega$，存在一个闭球 S，它与 Ω 仅有一个共同点 x^0，即 $S\cap\Omega=x^0$．在对侧面加上某些条件（不包含特征点，即不包含与平面 $t=$ 常数的切触点）后，类似的叙述同样对非柱形区域 D 成立．

（1′）的基本混合问题的存在性定理也对在给定函数及区域 Ω 上的另外一些条件情况下成立．例如，对齐次**热传导方程**（thermal-conductance equation）的一个柱形区域 D 内的第一混合问题，其中连续函数 φ 和 ψ 满足相容性条件 $\varphi|_{\partial\Omega}=\psi(x,0)$．若 Ω 是这样的区域，它关于 **Laplace 方程**（Laplace equation）的 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）对任意连续边界函数来说在 Ω 内是可解的（存在古典解），则此第一混合问题的解是存在的．

令系数 a_{ij}、b_i 和 c 在 Ω 内可测且有界，σ 在 Γ 上可测且有界．进而设 $f\in L_2(D)$，$\varphi\in L_0(\Omega)$，且在第一混合问题中设 ψ 是 **Соболев 空间**（Sobolev space）$W_2^{1,0}(D)$ 中某函数在 Γ 上的迹，而在第三（或第二）混合问题中设 ψ 属于 $L_2(\Gamma)$．

一个属于 $W_2^{1,0}(D)$ 且它在 Γ 的迹是 ψ 的函数 $u(x,t)$，$u|_{\Gamma}=\psi$．若对 Соболев 空间 $W_2^1(D)$ 内的任一具 $v|_{\Gamma}=0$，$v|_{\Omega_T}=0$ 的 v 成立积分恒等式：

$$\int_D\left[-uv_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}-\left[\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu\right]v\right]dxdt=$$

$$=\int_D fv\,dxdt+\int_{\Omega_0}\varphi v\,dx,$$

则称此 $u(x,t)$ 是第一混合问题（1′），（2′），（4）的广义解．

属于 $W_2^{1,0}(D)$ 的函数 $u(x,t)$ 若满足积分恒等式：

$$\int_D\left[-uv_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}-\left[\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu\right]v\right]dxdt+$$

$$+\int_{\Gamma}\sigma uv\,dS=\int_D fv\,dxdt+\int_{\Omega_0}\varphi v\,dx+\int_{\Gamma}\psi v\,dS,$$

则称此 $u(x,t)$ 是第三（第二，若 $\sigma\equiv0$）混合问题（1），（2），（6）的广义解，其中 v 是 W_2^1 中有 $v|_{\Omega_T}=0$ 的任何函数．

这些问题的广义解都是存在和唯一的；并且，若对充分大的 p 而言，$f\in L_p(D)$，且在 D 内连续，则此解甚至满足关于某指数 $\alpha>0$ 的 Hölder 条件．随着在相容性条件成立的前提下给定函数和区域边界的光滑性的增加，广义解的光滑性也将增加．例如，考虑热传导方程，且 $\varphi\equiv0$ 及 $\psi\equiv0$，$\partial\Omega$ 是一个充分光滑的曲面，若 $f\in W_2^{2s,s}(D)$ 且成立相容性条件

$$f|_{\partial\Omega_0}=(\Delta f+f_t)|_{\partial\Omega_0}=\cdots=\sum_{i=0}^{s-1}\Delta^i\frac{\partial^{s-1-i}f}{\partial t^{s-1-i}}\Bigg|_{\partial\Omega_0},\tag{7}$$

则第一类混合问题的广义解属于 $W_2^{2(s+1),s+1}(D)$．

特别地，若 $f\in L_2(D)$，则解属于 $W_2^{2,1}(D)$，此时对 $(x,t)\in D$ 解满足热传导方程，且在 Ω_0 上的迹为零．若对充分大 s 有 $f\in W_2^{2s,s}$ 且成立相容性条件（7），则由**嵌入定理**（imbedding theorems），此广义解是古典的．当（1′）中系数充分光滑时，类似的叙述对方程（1′）的基本混合问题的广义解也成立．

令 $\Omega=\mathbf{R}^n$，则对于抛物组（1）找带形 $D=\mathbf{R}^n\times(0,T)$ 内的解使在特征 $\Omega_0=\{x\in\mathbf{R}^n,\ t=0\}$ 上满足初始条件（2）的问题，称为（1）的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）．Cauchy 问题（1），（2）的古典解是一个向量函数 $u(x,t)$，它属于 $C^{2p,1}(D)\cap C(D\cup\Omega_0)$，且在 D 内满足（1），而在 Ω_0 上满足（2）．若右边项 $f(x,t)$ 属于某 $\alpha>0$ 阶的 Hölder 空间 $C^{\alpha}(\bar{D})$，且在 $\bar{D}$ 内系数充分光滑（它们及其导数均有界），则对 $\mathbf{R}^n$ 上任一有界连续的初始向量函数 $\varphi(x)$ 而言，在 D 上存在 Cauchy 问题的一个有界解，并且此有界解是唯一的．

有界性条件能用"不太快速增长"的条件去替代．对二阶方程来说，下述是正确的．令方程（1′）的系数 $a_{ij}(x,t)$，$b_i(x,t)$，$c(x,t)$ 及 $\dfrac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial x_i}$ 属于某 $\alpha>0$ 阶的 Hölder 空间 $C^{\alpha}(\bar{D})$．进而令 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 内连续，$f(x,t)$ 在 $\bar{D}$ 内连续，且对 $t\in[0,T]$ 一致地是 x 的局部 Hölder 连续函数（对某指数 $\alpha>0$），并且有

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{h|x|^2},\ x\in\mathbf{R}^n,$$

$$|f(x,t)|\leqslant Ce^{h|x|^2},\ (x,t)\in D.$$

则对充分小的 T（依赖于 h），在带形 $D=\mathbf{R}^n\times(0,T)$ 内存在 Cauchy 问题（1′），（2′）的解．此解可写为

$$u(x,t)=\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

其中 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 是（1′）的基本解．并且有如下估计

$$|u(x,t)|\leqslant C_1e^{k|x|^2},\tag{8}$$

其中 C_1、k 为正常数．条件（8）保证了 Cauchy 问

题解的唯一性.

在一个具常系数的方程情况下，可以找到一个形如(8)的解的增长条件，且此条件对唯一性是充分必要的条件. 例如，对于热传导方程的 Cauchy 问题的一个解 $u(x,t)$，使在满足不等式

$$|u(x,t)| \leqslant Ce^{|x|h(|x|)}$$

的函数类内此 u 是唯一的解，则其充分必要条件是积分 $\int_0^\infty dr/h(r)$ 发散，此处 $h(|x|)$ 是 $[0,\infty)$ 上的一个正的连续函数.

对于抛物型方程，人们同样能考虑不带初始条件的问题(Fourier 问题). 例如，在柱体 $D=\{x\in\Omega, -\infty<t<+\infty\}$ 内找齐次热传导方程的解，使之满足边界条件

$$u(x,t)|_{x\in\partial\Omega}=\psi(x,t),$$

其中 Ω 是带有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的一个有界区域. 若 ψ 连续且有界，则存在 Fourier 问题的一个有界解，并且这是唯一的有界解.

对抛物型方程和方程组，同样可考虑这样的非柱形区域 D 内的第一混合问题，这里的 D 的侧面包含了特征点(和平面 $t=$ 常数切触的点). 特别地，可考虑 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem)，此时边界条件在整个边界 $\partial\Omega$ 上给出. 当在特征点集上以及在 $\partial\Omega$ 的特征点与特征平面的切触阶数上给定了特定的条件后，Dirichlet 问题有唯一解(在空间 $W_2^{B^0}$). 例如，假设(为简单起见) $D\subset\mathbf{R}^2$ 是一个严格凸域，且在上特征点 (x^0,t^0) 的邻域内边界的方程是

$$x-x^0=\varphi_1(x),\ \text{当}\ x\leqslant x^0\ \text{时},$$

$$x-x^0=\varphi_2(x),\ \text{当}\ x\geqslant x^0\ \text{时},$$

其中 $t^0-\delta<t\leqslant t^0$，则下面积分

$$\int_{t^0-\delta}^{t^0}|\varphi_i(t)^{-2p}|dt,\ i=1,2$$

的发散性保证了二阶抛物型方程 Dirichlet 问题解的存在性和唯一性. 这些条件在这类方程中同样也是必要的.

参考文献

[1] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981(英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[2] Ильин, В. А., 《Успехи матем. наук》, **15** (1960), 2, 97 – 154.

[3] Ильин, А. М., Калашников, А. С., Олейник, О. А., 《Успехи матем. наук》, **17** (1962), 3, 3 – 146.

[4] Кружков, С. Н., 《Матем. сб.》, **65** (1964), 4, 522 – 570.

[5] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967(英译本: Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N., Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., 1968).

[6] Ладыженская, О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973(英译本: Ladyzhenskaya, O. A., The boundary value problems of mathematical physics, Springer, 1985).

[7] Ладыженская, О. А., 《Матем. сб.》, **27** (1950), 2, 173 – 184.

[8] Михайлов, В. П., 《Матем. сб.》, **61** (1963), 1, 40 – 64.

[9] Михайлов, В. П., 《Матем. сб.》, **62** (1963), 2, 140 – 159.

[10] Nash, J., Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, **80**(1958), 931 – 954.

[11] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961(中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 高等教育出版社, 1956).

[12] Петровский, И. Г., 《Бюлл. Моск. ун-та (А)》, **1** (1938), 7, 1 – 72.

[13] Petrovskiĭ, I. G., Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, *Comp. Math.*, **1** (1934), 383 – 419.

[14] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966(中译本: С. Л. 索伯列夫, 数学物理方程, 高等教育出版社, 1954).

[15] Солонников, В. А., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, **83** (1965), 3 – 163.

[16] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977(中译本: А. Н. 吉洪诺夫, А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程(上、下册), 高等教育出版社, 1956, 1957).

[17] Тихонов, А. Н., 《Бюлл. Моск. ун-та (А)》, **1** (1938), 9, 1 – 43.

[18] Тихонов, А. Н., 《Матем. сб.》, **42** (1935), 2, 199 – 216.

[19] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964.

[20] Эйдельман, С. Д., Параболические системы, М., 1964(英译本: Eĭdel'man, S. D., Parabolic systems, North-Holland, 1969).

В. П. Михайлов 撰

【补注】 在现时文献中，不称初始边值问题(1′),(2′),(4)−(6)为"混合"问题. 有时用像 Cauchy-Dirichlet 或 Cauchy-Neumann 来表示. 一个抛物型方程带有 Dirichlet 数据的问题常常是指这样的问题，在其中此数据被提在抛物型边界上. 除了第一、第二和第三类边界数据外，高阶问题也已考虑. 进一步的评述以及更多的参考文献可见**线性抛物型偏微分**

方程和方程组 (linear parabolic partial differential equation and system).　　仇庆久 译

混合自回归滑动平均过程 [**mixed autoregressive moving-average process; смешанный процесс авторегрессии скользящего среднего**], 自回归滑动平均过程 (autoregressive moving-average process), ARMA 过程 (ARMA process)

一类离散时间 $t=0, \pm 1, \cdots$ 宽义平稳**随机过程** (stochastic process) $X(t)$, 其值满足差分方程

$$X(t)+a_1 X(t-1)+\cdots+a_p X(t-p)=$$
$$=Y(t)+b_1 Y(t-1)+\cdots+b_q Y(t-q), \quad (1)$$

其中 $\mathrm{E}Y(t)=0$, $\mathrm{E}Y(t)Y(s)=\sigma^2\delta_{ts}$, δ_{ts}为 Kronecker 记号 (即 $Y(t)$ 是有谱密度 $\sigma^2/2\pi$ 的白噪声), p 与 q 为非负整数, 而 $a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q$ 为常系数. 如果方程

$$\varphi(z)=1+a_1 z+\cdots+a_p z^p=0$$

的全部根都有异于 1 的模, 那么平稳的自回归滑动平均过程 $X(t)$ 必存在, 且有**谱密度** (spectral density)

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\psi(e^{i\lambda})|^2}{|\varphi(e^{i\lambda})|^2},$$

其中 $\psi(z)=1+b_1 z+\cdots+b_q z^q$. 但是, 为了使方程 (1) 给定初值 $X(t_0-1), \cdots, X(t_0-p)$ 的解当 $t-t_0\to\infty$ 时趋于平稳过程 $X(t)$, 必须方程 $\varphi(z)=0$ 的全部根都位于单位圆 $|z|\leqslant 1$ 外 (例如, 见[1]与[2]).

Gauss 自回归滑动平均过程类与有谱密度且为一多维 Марков 过程的单维分量的平稳过程类是重合的 (见[3]). 自回归滑动平均过程的特殊情形是**自回归过程** (auto-regressive process) (当 $q=0$) 与**滑动平均过程** (moving-average process) (当 $p=0$).

由 G. E. P. Box 与 G. M. Jenkins 引进的自回归求和滑动平均过程 (见[1]), 是自回归滑动平均过程的推广, 并常被用于应用问题. 这是一种有平稳增量的非平稳过程, 其某一固定阶增量形成一自回归滑动平均过程.

参考文献

[1] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Time series analysis. Forecasting and control, 1-2, Holden-Day, 1976.

[2] Anderson, T. W., The statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

[3] Doob, J. L., The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.*, **15** (1944), 229-282.

A. M. Яглом 撰

【补注】 自回归滑动平均过程类的重要性在于它们表示有有理谱密度的平稳过程. 表一平稳过程为自回归滑动平均过程的问题在西方文献中称为随机实现问题 (stochastic realization problem); 关于此问题的参考文献见[A2], [A4].

自回归滑动平均过程已被统计学家[A3], 经济学家[A1]及工程师[A5]所利用.

参考文献

[A1] Aoki, M., Notes on economic time series analysis: system theory perspectives, Lecture notes in economics and math. systems, 220, Springer, 1983.

[A2] Faurre, P., Clerget, M., Germain, F., Opérateurs rationnels positifs, Dunod, 1979.

[A3] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1970.

[A4] Lindquist, A., Picci, G., Realization theory for multivariate stationary Gaussian processes, *SIAM J. Control Optim.*, **23** (1985), 809-857.

[A5] Ljung, L., Söderström, T., Theory and practice of recursive identification, M. I. T., 1983.

汤一民 译

混合群 [**mixed group; смешанная группа**]

既包含无限阶元素又包含非单位元的有限阶元素的**群** (group) (见群中元素的**阶** (order)).

O. A. Иванова 撰

【补注】 这一术语并不常用.

参考文献

[A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: A. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987、1982).

王 杰 译 石生明 校

混合积分方程 [**mixed integral equation; нагруженное интегральное уравнение**]

一个**积分方程** (integral equation), 在一维情形其形式为

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds-$$
$$-\lambda\sum_{j=1}^m K_1(x,s_j)\varphi(s_j)=f(x), \quad (1)$$

其中 φ 是未知函数, f 是 $[a,b]$ 上给定的连续函数, $s_j\in[a,b]$, $j=1,\cdots,m$ 是给定的点, K 和 K_1 是矩形 $[a,b]\times[a,b]$ 上给定的连续函数. 如果

$$K_1(x,s_j)=a_j K(x,s_j),$$

其中 a_j 是正常数, 则 (1) 可写为

$$\varphi(x)-\lambda\,{}^*\!\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\ x\in[a,b], \quad (2)$$

式中新的积分符号作用于任一有限可积函数 ψ 由

$${}^*\!\int_a^b\psi(s)ds=\int_a^b\psi(s)ds+\sum_{j=1}^m a_j\psi(s_j)$$

定义 (见[1]). 对于方程 (2), **Fredholm 方程** (Fred-

holm equation）理论成立；而在对称核的情形，**具有对称核的积分方程**（integral equation with symmetric kernel）理论成立．

在多维混合积分方程情形中，未知函数可以是不同维流形上积分的被积函数的一部分．例如，2维情形的混合积分方程可有形式

$$\varphi(x)-\lambda\iint_D K_1(x,y)\varphi(y)d\sigma_y+$$
$$+\lambda\int_\Gamma K_2(x,y)\varphi(y)ds_y+\lambda\sum_{j=1}^m K_3(x,y_j)\varphi(y_j)=$$
$$=f(x),\ x\in D,$$

其中 D 是平面上的某个区域，Γ 是 D 的边界，y_j 是 $D\cup\Gamma$ 上取定的点．如果相应地定义函数 K 和体积元 $d\omega_y$，此方程也可写成

$$\varphi(x)-\lambda\iint_{D\cup\Gamma}K(x,y)\varphi(y)d\omega_y=f(x).$$

对于这种情形，Fredholm 积分方程理论仍然成立．

参考文献

[1] Kneser, A., Belastete Integralgleichungen, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, **37** (1914), 169－197.

[2] Lichtenstein, L., Bemerkungen über belastete Integral-gleichungen, *Studia Math.*, **3** (1931), 212－225.

[3] Gunter, N. M., Sur le problème des "Belastete Integ-ralgleichungen", *Studia Math.*, **4** (1933), 8－14.

[4] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т.4, ч.1, М., 1974（中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一分册，高等教育出版社，1958）．

Б. В. Хведелидзе 撰　沈永欢 译

混合问题［mixed problem；смешанная задача］

关于偏微分方程（组）的、具有**初始条件**（initial conditions）和**边界条件**（boundary conditions）的问题，以及在特征和非特征定向流形上具有给定数据的问题（见**双曲型方程和方程组的混合边值问题**（mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems）；**抛物型方程和方程组的混合边值问题**（mixed and boundary value problems for parabolic equations and systems）；**混合型微分方程**（mixed-type differential equation））．混合问题一词也适用于椭圆型方程的边值问题，如果在边界的不同部分上给定不同类型的条件（见**椭圆型方程边值问题**（boundary value problem, elliptic equations））．

А. М. Нахушев 撰　张鸿林 译

混合积（a, b, c）［mixed product；смешанное произведение］，标量三重积（**scalar triple product**）向量 **a**，**b**，**c** 的

向量 **a** 与向量 **b** 和 **c** 的**向量积**（vector product）［**b**，**c**］构成的**内积**（inner product）：

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]).$$

见**向量代数**（vector algebra）．

混合型微分方程［mixed-type differential equation；смешанного типа уравнение］

一个在其定义域内变型的（椭圆型、双曲型或抛物型的）偏微分方程．设带有二个自变量的二阶线性（或拟线性）微分方程

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=f(x,y,u,u_x,u_y),\qquad(1)$$

其系数确定在区域 Ω 内，若特征形式

$$Ady^2+2Bdxdy+Cdx^2=Q$$

的判别式 $\Delta=AC-B^2$ 在 Ω 内取到零值而又不恒为零，则此方程是一个混合型方程．

由方程 $\Delta=0$ 所确定的曲线 δ 称为方程（1）的抛物线（parabolic line）或型的退化（变更）线（line of degeneracy (change) of type）．

若当点 (x,y) 在 Ω 内跨越抛物线 δ 时 Δ 不改变符号，则方程（1）是一个椭圆-抛物型的退化方程（$\Delta\geqslant0$）或是双曲-抛物型的退化方程（$\Delta\leqslant0$），见**退化偏微分方程**（degenerate partial differential equation）．

在对 A、B、C 及 δ 加上一些光滑性条件后，存在自变量的一个非奇异实变换，它将方程（1）（在下述情形下，即 Δ 的符号在 δ 的一个所选取的点的邻域内交替变化着，而该所选取点处 $A^2+B^2\neq0$）变为下面典范形式中的一个（仍保持自变量的记号）：

$$y^{2m+1}u_{xx}+u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y),\qquad(2)$$

$$u_{xx}+y^{2m+1}u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y).\qquad(3)$$

方程（2）和（3）在包含退化线 $y=0$ 上一线段的任一区域内是混合（椭圆-双曲）型的．

一个混合型方程的定义域有时称为混合区域（mixed domain），而在混合区域内的边值问题称为混合边值问题（mixed boundary value problems）．混合区域 Ω 内方程是椭圆（双曲）型的部分 $\Omega^+(\Omega^-)$ 称为椭圆性（双曲性）区域（domain of ellipticity (hyperbolicity)）．

一些具应用特性的问题归结为找混合型方程的特定的解；特别地，像可压缩介质的平面跨音速流问题以及包络理论中的问题．

若在抛物线上处处有特征形式 $Q\neq0$（$Q=0$），则称此混合型方程是第一类（第二类）方程（equation of the first kind (second kind)）．Чаплыгин 方程（Chaplygin equation）

$$k(y)u_{xx}+u_{yy}=0\qquad(4)$$

是第一类混合型方程的一个典型的例子，其中 $k(y)$

是一个连续可微的单调函数且使当 $y \neq 0$ 时 $yk(y) > 0$. 当 $k(y) = y$ 时, 方程 (4) 通常称为 **Tricomi 方程** (Tricomi equation).

混合型方程的一个重要模型 (在此方程中一个最高阶导数前带有一个间断系数) 是 Лаврентьев-Бицадзе 方程 (Lavrent'ev-Bitsadze equation)

$$(\operatorname{sign} y) \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{5}$$

(第一类) 混合型方程的一个基本的边值问题是 Tricomi 问题 (Tricomi problem). 对形如 (2) 的方程, 此问题提法如下. 设 Ω 是带有二个自变量 x, y 的 Euclid 平面中的一个有限的单连通区域, 此区域由一简单的 Jordan 曲线 (Jordan curve) σ 及方程 (2) 的特征线的 AC 及 BC 二段所围成, 此处曲线 σ 带有端点 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ 且位于半平面 $y > 0$ 内, AC 及 BC 是由 $C(1/2, y_C)$ 点发出的特征线上的二段, $y_C < 0$. Tricomi 问题就是要找方程 (2) 的解 $u(x, y)$, 使得它在 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 内连续且在曲线 $\sigma \cup AC$ 上取给定值.

在 Tricomi 问题理论中, Бицадзе 极值原理 (Bitsadze, extremun principle) 起着本质的作用. 对方程 (5) 而言, 此极值原理是: 对于方程 (5) 在 $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ 类内的解 $u(x, y)$, 若它在特征 AC: $x + y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1/2)$ 上为零, 则在椭圆性区域的闭包 $\bar{\Omega}^+$ 内 $(\Omega^+ = \Omega \cap \{y < 0\})$ 此解在曲线 σ 上达到其极值.

这个原理保证了 Tricomi 问题的解的唯一性 (且同样为用交替法证明存在性时提供了一个基本的估计). 此原理可推广到非常广泛一类混合型线性及拟线性方程. 特别地, 它可应用到 Чаплыгин 方程 (和 Tricomi 方程), 此时要求 $k(y)$ 二次连续可微且对 $y < 0$ 有 $5k'^2 \geqslant 4kk'$. Бицадзе 极值原理还对方程

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^\alpha u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \alpha = \text{常数} > 0 \tag{6}$$

成立. 方程 (6) 的 Tricomi 问题在对应的混合区域 Ω 内的解可表为显式形式, 此时这区域边界的椭圆部分 σ 要重合于所谓的正规围道 (normal contour) σ_0:

$$x^2 + \left[\frac{2}{\alpha + 2}\right]^2 y^{\alpha + 2} = \frac{1}{4}.$$

在一般情况下, 若关于曲线 σ 及所找的解的类满足一些特定的条件, 则方程 (6) 的 Tricomi 问题归结为一个无条件可解的**奇异积分方程** (singular integral equation) (由于唯一性条件), 积分方程方法可应用于对较一般的方程

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^\alpha u_{xx} + u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y),$$

证明其 Tricomi 问题及另外一些混合问题的解的存在性, 其中 α 是退化的次数.

函数论方法及泛函分析, 特别是利用先验估计, 使有可能有效地推广混合型方程和混合区域的类, 使得对它们而言, 无论 Tricomi 问题还是各种其他的混合问题, 它们的 (广义) 解的存在性及唯一性能被证明.

Tricomi 问题的一个重要推广是一般的混合 Бицадзе 问题 (general mixed Bitsadze problem), 对方程 (5) 此问题提法如下. 令 Ω 是一个单连通混合区域, 它由位于半平面 $y > 0$ 且端点是 $A(0, 0)$ 和 $B(1, 0)$ 的一条简单 Jordan 曲线 σ 与过此二点的 (光滑) 单调曲线 Γ_0, Γ_1 围成, 且此两条曲线交于点 $C(x_1, y_1)$ $(y_1 < 0)$. 假设 Γ_0 和 Γ_1 位于由特征 $x + y = 0$, $x - y = 1$ 和 x 轴上区间 $AB(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 所围成的区域内. 令 B_0 和 B_1 表示特征 $x - y = x_0$ 和 $x + y = x_0$ 与曲线 Γ_0 和 Γ_1 的交点, 此处 x_0 是半区间 $x_1 + y_1 < x_1 \leqslant x_1 - y_1$ 的任一固定点. 用 γ_0 和 γ_1 分别表示 Γ_0 和 Γ_1 在 A、B_0 和 B、B_1 间的部分. 则一般的混合 Бицадзе 问题是要找方程 (5) 在 Ω 内的正则解 (当 $y \neq 0$, $x \pm y \neq x_0$ 时), 使得它在 $\bar{\Omega}$ 内连续, 在 Ω 内有连续的一阶导数 (当 $x \pm y \neq x_0$ 时), 且在 σ, γ_0 和 γ_1 上满足给定的边界条件. 无论对方程 (5) 还是较一般的方程, 在对 Ω 的边界, 特别在曲线 σ 上, 加上某些几何条件后, 能证明此问题的解的唯一性和存在性. 在 Γ_1 重合于过 B 的特征 $BC(x_0 = 1)$ 的特殊情形, 一般的混合 Бицадзе 问题被认为已完全解决. 一般的混合 Бицадзе 问题被正确地提出, 例如在方程 (5) 的情形, 这一事实的一个重要结果是形如 Ω 的混合区域内提 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 是不正确的, 而不管双曲性区域 Ω^- 的形式及大小如何.

对于相当大一类的线性方程

$$k(y) u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + c u = f,$$

已知系数 $a(x, y)$ 对在相应的形如 Ω 的混合区域内提出 Dirichlet 问题的正确性有本质的影响.

另一类混合问题是 Frankl 问题 (Frankl problem). 令 Ω 是带有如下边界的一个单连通区域: 直线 $x = 0$ 上的区间 $A'A$: $-1 \leqslant y \leqslant 1$, 以 $A(0, 1)$ 和 $B(a, 0)$ 为端点且位于第一象限: $x > 0$, $y > 0$ 内的一条光滑曲线 σ、直线 $y = 0$ 上的区间 CB: $a_1 \leqslant x \leqslant a$, 以及由 $A'(0, -1)$ 及 $C(a_1, 0)$ 两点出发的所考虑的混合型方程 (例如方程 (4)) 的特征线. Frankl 问题就是要在 Ω 内找混合型方程的解 $u(x, y)$, 使在 $\sigma \cup CB$ 上取给定的值, 且在 $A'A$ 上满足条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(0, y) - u(0, -y) = f(y),$$

$$-1 \leqslant y \leqslant 1, x = 0.$$

此问题基本上已对混合型的模型方程进行了讨论，并且当曲线 $\sigma: x = x(s), y = y(s)$ 有 $dy/ds \geqslant 0$ 情况下对方程（5）已完全解决，其中 s 是从点 $B(a, 0)$ 开始测量的 σ 的弧长.

第一类混合型方程的基本的边值问题已经阐明，并对第二类混合型方程可将这些问题进行适当的修改. 这些修改是必须的，这是因为对具特征退化的椭圆型方程而言，Dirichlet 问题不总是可正确地提出的.

在混合区域内方程（1）的边值问题的提法中，若变型线 δ 同时又是方程的阶数的退化线的话，则一个新的方面就产生了. 例如，对方程

$$y^{2p} u_{xx} + y u_{yy} + \beta u_y = 0 \qquad (7)$$

就发生此种情形，其中 p 是一个自然数，β 是常数且满足 $1 - 2p \leqslant 2\beta < 1$.

对方程（5），（6），（7），除了上述之外，还存在许多本质上是新的边值问题. 这些可主要由这样的事实所表征，即 Ω 的整个边界 $\sigma \cup AC \cup BC$（在其上我们已提出了 Tricomi 问题）上带有如下的边界条件：例如，在 σ 上给出 Dirichlet 条件，而在 $AC \cup BC$ 上给出某非局部条件，此条件逐点连结着所求解的值或它的一个具确定阶数的（分数）导数. 特别地，这些问题包含一个有正确提法的自伴混合边值问题的简单例子.

对于混合型方程（方程组），其区域内部含有几条型的退化线或者一条单一的闭抛物线情况下的边值问题已经作了研究.

对于某些具两自变量的混合型方程和方程组类，以及对高阶混合型方程，已研究了类似于 Tricomi 问题的边值问题.

在研究具多个变量的混合型方程的适定性问题时将发生重大的困难. 虽然如此，在此方向上同样已得到若干重要的结果. 对于方程

$$(\operatorname{sign} z) \cdot u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \quad (8)$$

它以 $z = 0$ 作为型退化的类时平面. 此方程是具有此性质的混合型方程的一个简单模式. 已知下述问题的提法是正确的. 令 Ω 是一个有限的单连通的三维区域，它由一分段光滑曲面 $z = f(x, y) \geqslant 0$ 及方程（8）的特征曲面

$$S_1: x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$S_2: x - x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$$

围成. 人们要找 Ω 内的一个连续可微函数，使得在 Ω 内 $z \neq 0$ 处满足方程（8），而在 σ 及特征曲面 S_1，S_2 中一个曲面上为零. 关于这个问题的弱解的存在性和强解的唯一性已对较一般的方程

$$(\operatorname{sign} x_n) \cdot u_{x_n x_n} + \Delta_x u = f(x_0, x),$$

$$x = (x_1, \cdots, x_n),$$

得到了证明，此处 Δ_x 是关于变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 **Laplace 算子**（Laplace operator）.

对于方程

$$x_0^{2m} \Delta_x u - x_0 u_{x_0 x_0} + \left[m - \frac{1}{2} \right] u_{x_0} = 0, \quad (9)$$

设型式及阶数均发生退化的类空超平面 $x = 0$ 的部分包含在混合区域 Ω 内，对此情形业已研究了一个特殊形式的边值问题. 在此 $\partial\Omega$ 在半空间 $x_0 < 0$ 的部分带有数据 $u(x_0, x)$，而在半空间 $x_0 > 0$ 部分（方程（9））的特征角面（characteristic conoid）带有 $u(x_0, x)$ 的某积分平均值.

在有界及无界三维区域内另外一些混合型模型方程也已经研究了，其中包括方程

$$z^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

$$z^{2m+1}(u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz} = 0.$$

对柱形区域内一大类自伴的混合型方程同样存在一个 Dirichlet 问题解的唯一性准则.

参考文献

[1] Bers, L., Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958.

[2] Бицадзе, А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959（中译本：А. В. 比察捷，混合型微分方程，科学出版社，1955）.

[3] Бицадзе, А. В., К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа, в сб: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972.

[4] Бицадзе, А. В., Нахушев, А. М., 《Докл. АН СССР》, **205** (1972), 1.

[5] Векуа, И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959（中译本：依·涅·维库阿，广义解析函数，上，下册，人民教育出版社，1960）.

[6] Каратопраклиев, Г. Д., 《Дифференциальные уравнения》, **5** (1969), 1, 199 - 205.

[7] Келдыш, М. В., 《Докл. АН СССР》, **77** (1951), 2, 181 - 183.

[8] Салахитдинов, М. С., 《Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук》, 1969, 1, 27 - 33.

[9] Смирнов, М. М., Уравнения смешанного типа, М., 1970（英译本：Smirnov, M. M., Equations of mixed type, Amer. Math. Soc., 1978）.

[10] Солдатов, А. П., 《Дифференциальные уравнения》, **9** (1973), 2, 325 - 332.

[11] Tricomi, F., *Atti Accad. Naz. Lincei, Ser.* 5, **14**

(1932), 134 – 247.

[12] Франкль, Ф. И., Избранные труды по газовой динамике, М., 1973.

[13] Friedrichs, K. O., Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333 – 418.

[14] Gellerstedt, S., Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, *Ark. Mat. Astr. Fysik*, **26A** (1937), 3, 1 – 32.

[15] Germain, P., Bader, R., Sur le problème de Tricomi, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 463 – 465.

А. М. Нахушев 撰

【补注】 较近的工作偏爱于泛函-解析的方法，见[A1]. 用 Fourier 积分算子方法进行构造性的处理，可见[A2].

参考文献

[A1] Schneider, M., Ueber Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom gemischten Typ im $\mathbf{R}^3$, *Math. Nachr.*, **66** (1975), 57 – 66.

[A2] Groothuizen, R. J. P., Mixed elliptic-hyperbolic partial differential operators: a case-study in Fourier integral operators, CWI Tract, 16, CWI, Amsterdam, 1985.

仇庆久 译

混合体积理论 [mixed-volume theory; смешанных объемов теория]

凸体理论的一个分支，研究凸体线性组合问题中出现的泛函（见**集合的加法**（addition of sets））.

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中凸体 K_i 的具有正的组合系数的线性组合 $\sum_{i=1}^r \lambda_i K_i$ 的体积 V 是关于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 的 n 次齐次多项式:

$$V\left[\sum_{i=1}^{r} \lambda_i K_i\right] = \sum_{i_1=1}^{r} \cdots \sum_{i_n=1}^{r} V_{i_1 \cdots i_n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}. \qquad (*)$$

系数 $V_{i_1 \cdots i_n}$ 假定关于下标的置换是对称的，记为 $V(K_{i_1}, \cdots, K_{i_n})$，因为它们仅依赖于凸体 $K_{i_1}, \cdots, K_{i_n}$. 这些系数称为是凸体 $K_{i_1}, \cdots, K_{i_n}$ 的混合体积（mixed volumes）.

该理论的意义在于混合体积这一概念的广泛性：将 $V(K, K_1, \cdots, K_{n-1})$ 中的 $K_1, \cdots, K_{n-1}$ 换成具体的凸体，可得到有关体 K 的种种性质. 包括：其体积，其表面积，其主曲率的初等对称函数的曲面积分（在 C^2 光滑体的情形下），及其向 i 维平面（$0 < i < n$）的投射的相应特征. 表达式（*）的一个特殊情形是关于 $\mathbf{R}^3$ 中平行凸体体积的 Steiner 公式（Steiner formula）:

$$V_\varepsilon = V + S\varepsilon + \pi B \varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

其中 V 是体积，S 是表面积，B 是原凸体的全平均曲率，V_ε 是其 ε 邻域的体积. 混合体积 $V(K_1, \cdots, K_n)$ 关于任意 K_i 平移不变，关于凸体间的包含关系单调，它连续且非负；$V(K_1, \cdots, K_n) > 0$，当且仅当可以在每一个 K_i 中选取一条线段，使得这些线段彼此线性无关（见[1]）.

如果 K' 是 K 向垂直于单位长线段 e 的超曲面的投影，则

$$V(K_1, \cdots, K_{n-1}, e) = n V(K'_1, \cdots, K'_{n-1}).$$

K 的向一个 p 维子空间的投影的体积称为它的第 p 截面测度（p-th cross-sectional measure），或者第 p 层质量（p-quermass）. 在这些测度的平均值 $W_p(K)$ 间建立关系式是**积分几何学**（integral geometry）考虑的问题之一. 在相差一个常数因子意义下，泛函 $W_p(K)$ 可等同于第 p 个积分曲率:

$$V_p(K) = V(K, \cdots, K, U, \cdots, U)$$

（p 个 K，$n-p$ 个 U），其中 U 是单位球. 对于一个 C^2 光滑的严格凸凸体 K，其混合体积 $V_p(K)$（$0 < p < n$）等于主曲率半径的第 p 个初等对称函数 D_p（它被看作球面 S^{n-1} 的法向量的函数）的积分. 对于一般的凸体，$V_p(K)$ 是 S^{n-1} 上测度 μ_p 的总值，它定义如下，并被称为曲率函数（curvature function）.（在光滑的情形，D_p 是 μ_p 的密度.）正如凸体 K 的体积是其**支撑函数**（support function）$K(u)$ 关于其曲面函数（surface function）（即在**球面映射**（spherical map）下凸体 K 的象在 S^{n-1} 上的曲面面积）的积分的 $\frac{1}{n}$，n 个凸体的混合体积可以写成其中某个凸体 K_1 的支撑函数 $K_1(u)$ 关于 S^{n-1} 上依赖于其余凸体的某一测度 $\mu(\omega) = \mu(K_2, \cdots, K_n, \omega)$ 的积分. 该测度称为 $K_2, \cdots, K_n$ 的混合曲面函数（mixed surface function）:

$$V(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} K_1(u) d\mu.$$

曲率函数 $\mu_p(\omega)$ 由以下方程定义:

$$\mu_p(\omega) = \mu(K, \cdots, K, U, \cdots, U, \omega)$$

（p 个 K，$n-p-2$ 个 U）.

不同混合体积间的不等式构成了混合体积理论的主要内容（见[2]，[3]）. 它们包括 Minkowski 不等式（Minkowski inequality）:

$$V^n(K, L, \cdots, L) \geqslant V(K) V^{n-1}(L),$$

以及二次 Minkowski 不等式（quadratic Minkowski inequality）:

$$V^2(K, L, \cdots, L) \geqslant V(L) V(K, K, L, \cdots, L).$$

这些不等式都与 **Brunn-Minkowski 定理**（Brunn-Minkowski theorem）有紧密联系，而该定理不仅是对凸体才成立. Александров-Fenchel 不等式（Aleksandrov-

Fenchel inequality) 是对上述不等式的推广. 它具有以下的修正形式 (见 [2]):

$$V^m(K_1,\cdots,K_m,L_1,\cdots,L_{n-m})\geqslant$$
$$\geqslant\prod_{i=1}^{m}V(K_i,\cdots,K_i,L_1,\cdots,L_{n-m}).$$

特别地,

$$V^n(K_1,\cdots,K_n)\geqslant V(K_1)\cdots V(K_n).$$

在两个凸体的情形下, 已得到刻画混合体积 $V(K_1,\cdots,K_n)$ 的完整的不等式系统, 并建立了更为一般的不等式 (见 [4]).

许多几何不等式, 例如**经典等周不等式** (isoperimetric inequality, classical) 以及它的几个精细化不等式都是凸体混合体积不等式的特例. $V_p(K)$ 中某一泛函的极值, 当与它同类的某个其他泛函固定时, 由球面取得. 混合体积理论中的不等式可用来证明广义 **Minkowski 问题** (Minkowski problem) 解的唯一性 (见 [2]), 可用来建立 Minkowski 问题及 Weil 问题中的稳定性性质 (见 [6]), 还可用来彻底解决 van der Waerden 问题 (见 [7]). 混合体积理论概念的无穷维类似在 Gauss 型随机过程理论中已找到了应用 (见 [7]).

混合体积理论与代数几何学有着深刻的联系. 给定一个 n 个复变数的多项式 $f(z_1,\cdots,z_n)$, 用下列方式定义它的 Newton 多面体 Nw (f). 对出现在 f 中的每个系数不为零的单项式 $z_1^{a_1}\cdots z_n^{a_n}$, 指定一个点 $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$, 并定义 Nw$(f)$ 为所有这些点的凸包. 多项式方程组 $f_1=\cdots=f_n=0$ 的解的特征数等于多面体 Nw$(f_1\cdots f_n)$ 的混合体积除以 $n!$. 它众多应用之一是可用来给出 Александров-Fenchel 不等式的一个代数证明 (见 [10]).

在混合体积理论中, 一个凸体被等同于它的支撑函数. 由此进而推广到考虑这些函数的差, 以及球面上的任意连续函数 (见 [2], [9]). 使用与分解凸体 $\sum_{i=1}^{r}\lambda_iK_i$ 的引力中心乘以其体积这一向量相同的做法, 可以定义所谓混合方向向量 (mixed direction vectors), 它是混合体积的向量类似. 凸体 K 的引力中心在相差一个常数因子意义下, 与凸体 K 和球面 U 的混合方向向量一致 (见 [11]).

参考文献

[1] Minkowski, H., Theorie der konvexen Körpern, insbesonder der Begründung ihres Oberflächenbegriffs, in Gesammelte Abh., Vol. 2, Teubner, 1991, 131 - 229.

[2A] Aleksandrov, A. D., Zur Theorie gemischter Volumina von konvexen Körpern Ⅰ. Verallgemeinerungen einiger Begriffe der Theorie von konvexen Körpern. *Mat. Sb.*, **2** (1937), 5, 947 - 972.

[2B] Aleksandrov, A. D., Zur Theorie gemischter Volumina von konvexen Körpern Ⅱ. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen, *Mat. Sb.*, **2** (1937), 6, 1205 - 1238.

[2C] Aleksandrov, A. D., Zur Theorie gemischter Volumina von konvexen Körpern Ⅲ. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowski's über die konvexen Polyedern auf die beliebigen konvexen Körper, *Mat. Sb.*, **3** (1938), 1, 27 - 46.

[2D] Aleksandrov, A. D., Zur Theorie gemischter Volumina von konvexen Körpern Ⅳ. Die gemischten Diskriminanten und die gemischten Volumina, *Mat. Sb.*, **3** (1938), 2, 227 - 251.

[3] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

[4] Shephard, G., Inequalites between mixed volumes of convex sets, *Mathematika*, **7** (1960), 14, 125 - 138.

[5] Дискант, В. И., 《Сиб. матем. ж.》, **14** (1973), 3, 669 - 673.

[6] Волков, Ю. А., 《Укр. геометр. сб.》, **5-6** (1968), 44 - 69.

[7] Knuth, D. E., A permanent inequality, *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981), 731 - 740.

[8] Судаков, В. Н., 《Докл. АН СССР》, **197** (1971), 1, 43 - 45.

[9] Busemann, H., Ewald, G. and Shepard. G., Convex bodies and convexity on Grassmann cones Ⅰ - Ⅳ. *Math. Ann.*, **151** (1963), 1, 1 - 41.

[10] Хованский, А. Г., 《Успехи матем. наук》, **34** (1979), 4, 160 - 161.

[11] Schneider, R., Krümmungsschwerpunkte konvexen Körper Ⅰ, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **37** (1972), 112 - 132.

Ю. Д. Бураго 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schneider, R., On the Aleksandrov-Fenchel inequality, *Ann. New York Acad. Sci.*, **440** (1985), 132 - 141.

[A2] McMullen, P. and Schneider, R., Valuations on convex bodies, in Gruber, P. M. and Wills, J. M. (eds.): Convexity and its Applications, Birkhäuser, 1983, 170 - 247.

成 斌 译

混合 [mixing; перемешивание]

具有有限**不变测度** (invariant measure) μ 的动力系统 (**瀑布** (cascade) $\{S^n\}$ 或**流** (**连续时间动力系统**) (flow (continuous-time dynamical system)) $\{S_t\}$) 的一个性质, 在该系统中对于相空间 W 的任意两个可测子集 A 和 B, 测度

$$\mu((S^n)^{-1}A\cap B),$$

或相应地,

$$\mu((S_t)^{-1}A\cap B),$$

当 $n\to\infty$ 或 $t\to\infty$ 时, 分别趋向于

$$\frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(W)},$$

如果变换 S 与 S_t 是可逆的，则在混合的定义中，可以用易于表示的直接象 S^nA 与 S_tA 去代替关于这些变换的原集合 A 的前象. 如果一个系统具有混合性质，亦称该系统是混合的. 而在混合瀑布 $\{S^n\}$ 的情形下，测度空间 (W,μ) 中生成 $\{S^n\}$ 的自同态 S 也称为混合的（具有混合性）.

在遍历理论中，考虑与混合有关的性质：多重混合（multiple mixing）和弱混合（weak mixing）（见[1]；在早期的文献中后者常称为广义混合或简称为混合，而混合被称为强意义下的混合）. 介于混合与弱混合之间的性质已经有所讨论（[2]）. 所有这些性质都比**遍历性**（ergodicity）强.

对具有无限不变测度的系统，也有类似于混合的性质.

参考文献

[1] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan, 1956.

[2] Furstenberg, H. and Weiss, B., The finite multipliers of infinite ergodic transformations, in N. G. Markley, J. C. Martin and W. Perrizo (eds.), The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lecture notes in math., Vol. 668, Springer, 1978, 127 – 132.

[3] Krengel, U. and Sucheston, L., On mixing in infinite measure spaces, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **13** (1969), 2, 150 – 164.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 对有限测度空间 (W,μ) 上的一个瀑布 $\{S^n\}$，如上定义的弱混合概念等价于在测度空间 $(W\times W,\mu\otimes\mu)$ 上由 $S\times S$ 生成的瀑布是遍历的，其中 $\mu\otimes\mu$ 是乘积测度（见**遍历性**（ergodicity）；**度量传递性**（metric transitivity））. 见[1].

对拓扑动力系统，强混合与弱混合的概念已有定义（[A2]）. 拓扑空间 W 上的一个流称为拓扑弱混合的（topologically weakly mixing），如果 $W\times W$（具有通常的乘积拓扑）上的流 $\{S_t\times S_t\}$ 是拓扑遍历的；等价地，对 W 中任选的四个非空开子集 U_i，$V_i\,(i=1,2)$，存在一个 t，使得 $S_tU_i\cap V_i\neq\phi$ $(i=1,2)$. 在紧空间上，弱混合极小流是没有非平凡等度连续因子的极小流，见[1]，133页. 空间 W 上的一个流 $\{S_t\}$ 称为拓扑强混合（topologically strongly mixing），如果对 W 的任意一对非空开子集 U 和 V，存在值 t_0，使得对所有 $|t|>t_0$，有 $S_tU\cap V\neq\phi$. 例如，具有常负曲率的完全二维 Riemann 流形上的测度流是拓扑强混合的，见[A3]，13.49. 对于瀑布，相应的定义可类似地给出.

参考文献

[A1] Auslander, J., Minimal flows and their extensions, North-Holland, 1988.

[A2] Furstenberg, H., Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximations, *Math. System Th.*, **1** (1967), 1 – 49.

[A3] Gottschalk, W. H. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

束立生 译 苏维宜 校

Möbius 函数 [Möbius function; Мёбиуса функция]

自然数自变量的**算术函数**（arithmetic function）：$\mu(1)=1$，当 n 被一素数平方整除时 $\mu(n)=0$，其他情形下 $\mu(n)=(-1)^k$，这里 k 是数 n 的素因子个数. 这个函数是 A. Möbius 于 1832 年引进的.

Möbius 函数是**乘性算术函数**（multiplicative arithmetic function）；当 $n>1$ 时 $\sum_{d|n}\mu(d)=0$. 它被用于研究其他算术函数，并出现在反转公式中（例如，见 **Möbius 级数**（Möbius series））. 下面对 Möbius 函数均值的估计是已知的（见[2]）：

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\right|\leqslant\exp(-c\ln^{3/5}x(\ln\ln x)^{-1/5}),$$

此处 c 是常数. 均值当 $x\to\infty$ 时趋于零这一事实蕴含着自然数列中**素数分布**（distribution of prime numbers）的渐近规律.

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981.（中译本：И. М. 维诺格拉陀夫，数论基础，高等教育出版社，1952）.

[2] Walfisz, A., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Deutsche. Verlag Wissenschaft, 1963.

Н. И. Климов 撰

【补注】乘性算术函数在卷积（convolution product）运算 $(f\star g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g(n/d)$ 下形成一个**群**（group）. **Möbius 函数实际上是常数乘性函数** E（定义为对所有 $n\in N$，$E(n)=1$）在卷积下的逆，由此得出许多"反演公式"，例如见 **Möbius 级数**（Möbius series）.

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1979.

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

Möbius 平面 [Möbius plane; Мёбиуса плоскость]，圆平面（circular plane），反演平面（inverse plane）

一个平面，其元素组成两个不相交的集合：点的集合和圆的集合，且被赋予一个（关于点和圆的）对称关联关系. 关联关系满足以下公理：

1）任意三个不同的点与一个而且仅仅一个圆关联；

2）给定在圆 γ 上一点 A 和不在圆 γ 上的一点 B，存在唯一的圆通过点 B 而且与圆 γ 的唯一公共点是 A；

3）存在至少四个不同的点不与同一个圆关联. 每一圆至少与三个不同的点关联.

如果把 Möbius 平面的一个点称为理想点，而把与该点关联的圆称为直线，则可得一仿射平面.

在三维射影空间 P_3 中，一个**卵形面** (ovoid) o 的点和与此卵形面在多于一点相交的所有平面，赋予从 P_3 继承的关联关系，形成一 Möbius 平面 $M(o)$ (见[1]). 一个 Möbius 平面称为卵形的，如果它同构于某一卵形面 o 的 $M(o)$. 所有卵形 Möbius 平面中最著名的是模型 $M(S)$，其中 S 是三维 Euclid 空间的球面，此平面同构于 $M(c)$，此处 c 是实数域上三维射影空间中的一个非直纹二次曲面.

一个 Möbius 平面称为有限的，如果它含有有限个点和圆. Möbius 平面中每个圆所含的点数相同，而且通过此平面上每一点的圆的数目相同. 由定义，Möbius 平面的阶是其圆上所含点的数目减一. 一个 n 阶 Möbius 平面含有 n^2+1 个点和 $n(n^2+1)$ 个圆；经过每一点有 $n(n+1)$ 个圆. 下述的 $n=p^h$ 阶 Möbius 平面是熟知的. 此平面上的点是 **Galois 域** (Galois field) $\mathrm{GF}(p^{2h})$ 的元素和理想点 $\{\infty\}$；其圆是集合 $K=\mathrm{GF}(p^h)\cup\{\infty\}$ 在如下形式的置换群之下的象:

$$x\to(x^\alpha a+c)/(x^\alpha b+d),\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathrm{GF}(p^{2h}),$$
$$ad\neq bc,\ \alpha\in\mathrm{Aut}(\mathrm{GF}(p^{2h})).$$

阶数为 n 的 Möbius 平面存在的一个必要条件是同一阶数的有限仿射平面的存在性. 阶数为 $n=2, 3, 4, 5, 7, 11$ 的 Möbius 平面的唯一性已经证明 ([5]). 如果一阶数为 n 的 Möbius 平面包含一阶数为 m 之真子平面，则 $m\equiv n(\mathrm{mod}\,2)$ 而且 $m\ +m\leqslant n$ (见[2]). Möbius 平面的分类已经完成 (见[3]，[4]). 这些平面以其发现者 A. Möbius 而命名，A. Möbius (1855) 奠定了圆的理论的基础.

参考文献

[1] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968, p. 254.

[2] Dembowski, P. and Hughes, D. R., On finite inversive planes, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 171-182.

[3] Hering, C. H., Eine Klassifikation der Möbius-Ebenen, *Math. Z.*, **87** (1965), 252-262.

[4] Krier, N., The Hering classification of Möbius planes, in Proc. Internat. Conf. Projective Planes, Washington State Univ. Press, 1973, 157-163.

[5] Истомина, Л. И., в сб.: Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур, Пермь, 1976, 81-83.

В. В. Афанасьев 撰

【补注】 关于更多的新的进展，见[A1]中 I.M. Yaglom, J. F. Rigby, J. B. Wilker 和 N. W. Johnson 所撰章节.

参考文献

[A1] Davis, C., Grünbaum, B. and Sherk, F. A. (eds.), The geometric vein, Springer, 1980.

杨路、曾振柄 译

Möbius 级数 [Möbius series; Мёбиуса ряд]

形如

$$F(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{f(x^s)}{s^n}\qquad(*)$$

的函数级数. A. Möbius 研究了这类级数，对级数 (*) 他发现了反转公式

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\frac{F(x^s)}{s^n},$$

此处 $\mu(s)$ 是 **Möbius 函数** (Möbius function). Möbius 也考虑了取遍自然数 n 的除数的有限和的反演公式 (inversion formulas):

$$F(n)=\sum_{d\mid n}f(d),f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right).$$

另一个反演公式：设 $p(n)$ 是完全积性函数 (见**乘性算术函数** (multiplicative arithmetic function)), $P(1)=1$，而 $f(x)$ 是定义在实数 $x>0$ 上的函数，则由

$$g(x)=\sum_{n\leqslant x}p(n)f\left(\frac{x}{n}\right)$$

可得

$$f(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)p(n)g\left(\frac{x}{n}\right).$$

参考文献

[1] Möbius, A., Ueber eine besondere Art der Umkehrung der Reihen, J. Reine Angew. Math., **9** (1832), 105-123.

[2] Виноградов. И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫，数论基础，高等教育出版社，1952).

[3] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

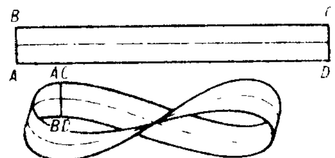
Б. М. Бредихин 撰

【补注】 所有这些 (以及许多其他的) 反演公式是由 Möbius 函数的基本性质得到的，即它是单位算术函数 $E(n)\equiv1$ 在卷积下的逆，见 **Möbius 函数** (Möbius function) 和**乘性算术函数** (Multiplicative arithmetic function) 的补注.

戚鸣皋 译　朱尧辰 校

Möbius 带 [Möbius strip; Мёбиуса лист]

Euler 示性数 (Euler characteristic) 为零的不可定向的曲面，它的边界是一条闭曲线. Möbius 带可由下法得到：使矩形 $ABCD$ 的两条对边 AB 和 CD 叠合，并使点 A，点 B 分别落在点 C，点 D 上 (见图).



在 Euclid 空间 E^3 中，Möbius 带是单侧曲面（见**单侧曲面和双侧曲面**（one-sided and two sided surfaces））.

A. Möbius 和 I. Listing 独立地考虑过（1858－1865）Möbius 带． А. Б. Иванов 撰 杜小杨 译

模态逻辑 [modal logic; модальная логика]

一种逻辑系统，它不仅包含了通常的语句，而且也包含了模态语句（modal statements），即指“必须…”，“可能…”等等这样类型的语句．在数理逻辑中，人们研究各种各样的模态逻辑系统，它们之间的关系、以及对它们的解释．

Aristotle（公元前 4 世纪）早就领悟到模态逻辑的思想本质，而且它已成为古典哲学的一部分．然而，到本世纪初，C. I. Lewis（[1]）才第一次将模态逻辑的思想形式化．他构造了五个命题演算的模态逻辑系统，在文献中被记为 S1－S5（具体的形式系统见下文）．从此以后，人们构造了并研究了许多其他的模态逻辑系统．模态逻辑的这一广泛的多样性归因于这样的一个事实：有许多方式方法将“必须”和“可能”的含义精确化；同时，人们也可采取许多方法用逻辑联结词来处理型如“一定有可能”这一类复杂的**模态**（modality）及模态之间的关系．大部分已研究过的模态逻辑系统都是以古典逻辑为基础的；然而，人们也研究了基于直觉主义逻辑的各种模态逻辑系统（例如，见[6]）．

下面介绍几个最为人们熟知的模态逻辑系统．它们使用的语言都是由古典命题演算 P 的语言，再加上新的一元逻辑联结词（称为模态运算（modal operators））$\Box$（必须）及 $\Diamond$（可能）所构成．实际上，作为原始联结词，光有 $\Box$ 就够了，因为在几乎所有的模态逻辑系统中，关系：

$$\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$$

都成立，$\Diamond$ 可以由 $\Box$ 来定义．

模态逻辑系统 S1．公理模式：

1）所有形如 $\Box A$ 的公式；这里 A 可以由 P 推导出来；

2）$\Box(\Box A \supset A)$；

3）$\Box(\Box(A \supset B)) \& \Box(B \supset C) \supset \Box(A \supset C)$．

推导规则：

Ⅰ）$\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$ （**分离法则**（modus ponens））

Ⅱ）$\dfrac{\Box A}{A}$；

Ⅲ）$\dfrac{\Box(A \supset B),\ \Box(B \supset A)}{\Box(\Box A \supset \Box B)}$．

模态逻辑系统 S2：S1 + $\{\Box(\Box A \supset \Box(A \vee B))\}$．

模态逻辑系统 S3：S2 +

$$\{\Box(\Box(A \supset B) \supset \Box(\Box A \supset \Box B))\}.$$

模态逻辑系统 K．公理模式：

1）命题演算 P 所有的公理模式；

2）$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$．

推导规则：分离法则以及

$$\frac{A}{\Box A} \ (\Box\text{-前缀规则})$$

模态逻辑系统 T：K + $\{\Box A \supset A\}$ = S2 + $\{\Box$-前缀规则$\}$．

模态逻辑系统 B：T + $\{A \supset \Box\Diamond A\}$．

模态逻辑系统 S4：S3 + $\{\Box(\Box A \supset \Box\Box A)\}$ = T + $\{\Box A \supset \Box\Box A\}$．

模态逻辑系统 S5：S4 + $\{\Box(A \supset \Box\Diamond A)\}$．

在以上列出的所有系统中，S4 具有特殊重要的意义．这是因为直觉主义逻辑的命题演算可以嵌入到其中．具体地说，对每一个（非模态的）命题演算公式 A，可以找到一个模态逻辑公式 A^*，使得

$$I \vdash A \Longleftrightarrow S4 \vdash A^*.$$

在这点上，Grzegorczyk 系统（Grzegorczyk system）特别有意思（见[5]）：

$$G = S4 + \{\Box(\Box(\Box(A \supset \Box A) \supset A) \supset A)\};$$

对 G 而言，如下的转移定理（transference theorem）成立：任给一组公理模式 Γ，任一公式 A，

$$I + \Gamma \vdash A \Longleftrightarrow S4 + \Gamma^* \vdash A^* \Longleftrightarrow G + \Gamma^* \vdash A^*.$$

这里 $\Gamma^* = \{B^*: B \in \Gamma\}$；另外，G 是具有以上性质的最强的系统．利用这个定理，可以将某个性质（例如完全性，可判定性）从 S4（或 G）的任一扩充系统转移到一个**中间逻辑**（intermediate logic）．

给定一个模态逻辑的命题演算系统 S，可以考虑相应于它的模态谓词演算系统．首先给 S 的语言增加客体变元，谓词符号，量词 $\forall$，$\exists$（或者只取一个）；然后加上通常的涉及到量词的公理模式及推导规则．另外，有时还可以增加一些描述模态算子如何在量词上起作用的公理模式，例如 Barcan 公式（Barcan formula）

$$\forall x \Box A(x) \supset \Box \forall x A(x).$$

一个模态逻辑系统的代数解释通常是如下形式的一个代数（或称为矩阵（matrix））：

$$\mathfrak{M} = \langle M, D; \&^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \Box^* \rangle,$$

这里 M 是一个真假值集（见**真假值**（truth value）），D

是一个特异真假值(distinguished truth values)集，$D \subset M$、$\&^*$、$\vee^*$，$\supset^*$、$\neg^*$、$\Box^*$ 是 M 中的运算，分别对应于 $\&$，$\vee$，$\supset$，$\neg$，$\Box$ 等联结词．一个公式称为在 M 中一般有效的，如果对命题变元的任一赋值(以 M 中的元素代替命题变元)，该公式将取一个特别值．S 是一个模态逻辑系统，$\mathscr{K}$ 是一个相应的代数类．S 相对于 $\mathscr{K}$ 是完全的，如果一公式可由 S 推出，当且仅当该公式在 $\mathscr{K}$ 的每一个成员中都是一般有效的．例如，S4 相对于所谓的有限拓扑 Boole 代数的类(见[3])是完全的．通常人们称一个系统 S 为有限可逼近的(finite approximable)，如果 S 相对于有限代数是完全的．若一个系统是有限可逼近并且可有限公理化的，则它是可判定的．也就是说，可以找到一个算法，它能判定任一公式是或者不是可以由该系统推出．一个代数 $\mathfrak{M}$ 对于一个系统 S 是示性的(characteristic))，或者合适的(adequate)，如果 S 相对于 $\{\mathfrak{M}\}$ 是完全的．以上列出的命题演算模态逻辑系统都没有示性的代数，但它们都是有限可逼近的，因而都是可判定的．另一方面，S5 的每一个扩充都有一个有限的示性的代数，该代数只含一个特别值．另外还有一个系统 S4.3：

$$\mathrm{S4.3} = \mathrm{S4} + \{\Box(\Box A \supset \Box B) \vee \\ \vee \Box(\Box B \supset \Box A)\}.$$

它也是有限可逼近的．

研究模态逻辑的一个重要工具是 **Kripke 模型** (Kripke models)．这类模型可写成 (W, R, θ)，W 是一个集合，其中元素称为“世界”或“局势”；R 是 W 上的一个关系，θ 是由 W 的子集到命题变元上的赋值．令 $s, t \in W$，关系 sRt 可以看作“世界 t 可能是在世界 s 里”这样一个意思．序对 (W, R) 则称为 Kripke 结构(Kripke structure)或者框架(frame)．(有时也用尺度(scale))．一个公式 A 在框架 (W, R) 中大体上是有效的，如果对所有的赋值 θ、公式 A 在 (W, R, θ) 中为真．一个系统 S 相对于由 Kripke 模型组成的某一个类是 Kripke 完全的(Kripke complete)，如所有由 S 可推导出的公式正好是所有在类的每一个模型中都大体上有效的公式．例如，系统 T 相对于所有这样的 Kripke 模型组成的类是 Kripke 完全的，这里框架 (M, R) 中，R 是 M 上的一个反射关系；S4 相对于 R 是传递及反射关系的结构 (M, R) 组成的类也是 Kripke 完全的．然而，存在 S4 的扩充，它们是有穷可公理化的，却不是 Kripke 完全的(见[7])．

至于模态逻辑的谓词演算系统，它们的 Kripke 模型具有形式 (M, R, D, ψ, θ)．$D = \{D_s\}_{s \in W}$，D_s 是以 s 为标号的一个全类，ψ 是谓词符号在 D 中的解释，θ 是一个赋值，对每一客体变元，分配集合 $\bigcup_{s \in W} D_s$ 中的一些元素．另外，如果该系统含有 Barcan 公式，下面条件必须成立：

$$sRt \Longrightarrow D_t \subseteq D_s.$$

作为一个工具，Kripke 模型比代数模型更具直观性．所以在研究各种各样的模态逻辑系统中，使用 Kripke 模型往往更加方便．

参考文献

[1] Lewis, C. I. and Langford, C. H., Symbolic logic, Dover, reprint, 1930.

[2] Фейс, Р., Модальная логика, [пер. с англ.], М., 1974.

[3] Rasiowa, E. and Sikorski, R.. The mathematics of metamathematics, Polska Akad. Nauk, 1963.

[4] Минц, Г. Е., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **98** (1968), 88 – 111.

[5] Grzegorczyk, A., Some relational systems and the corresponding topological spaces, *Fund. Math.*, **60** (1967), 2, 223 – 231.

[6] Bull, R. A., A model extension of intuitionist logic, *Notre Dame J. Formal Logic*, **6** (1965), 142 – 146.

[7] Fine, K., An incomplete logic containing S4, *Theoria*, **40** (1974), 1, 23 – 29.

[8] Gabbay, D. M., Deducability results in non-classical logics Ⅰ, *Ann. Math. Logic*, **8** (1975), 3, 237 – 295.

С. К. Соболев 撰 王 驹 译

【补注】 以下给出公式 A 在世界 $s \in W$ 中成立(有效)的定义：

1) 若 A 是一命题变元，A 在 s 中成立，如果 $s \in \theta(A)$．2) A 是 $\neg B$，而 B 不在 s 中成立．3) A 是 $B \vee C$，B，C 中至少有一个在 s 中成立．4) A 是 $\Box B$、B 在包括 s 在内的所有的 t，sRt，中都成立．

准确地说，以上的定义是在一个 Kripke 模型中，A 在 s 中为真的定义．

一公式 A 在结构 (W, R) 上“大体上有效”这一概念，是一个一元全称的、二阶的条件．这是因为，命题变元所赋予的一个值，是 W 的一个子集，是一元二阶的，而条件“对所有的 θ 及 s，A 在 s 中成立”，又是一个全称的条件；“A 在 s 中成立”，由以上的定义，是一阶语言可表达的．所以，从 Kripke 语义学(Kripke semantics)的角度来看模态逻辑，它应该是一个二阶的逻辑．

人们会很自然地想到一类问题：在一给定的框架类中，哪一些模态公式能等价于一个一阶公式？哪一些(一元全称)二阶公式可以模态地表达？这类问题属于模态逻辑的对应理论(correspondence theory of modal logic)这一领域．可参见[A1]，[A2]．

在可证性逻辑(provability logic)中，模态表达式

$\Box A$ 解释为“A 是可证的”. 这方面的一个基本结果是 Solovay 完全性定理 (Solovay completeness theorem). 它是说: 称 S4 + $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ (该模态公理模式表达一个扩充了的 Gödel 第二不完全性定理, 即 Löb 定理 (Löb theorem)) 为 Löb 模态逻辑 (Löb modal logic) 系统. 那么, 该系统的定理是而且正好是这一类模态公式: 如果将该公式的 $\Box$ 替换为形式 Peano 算术系统中的形式化可证性谓词, 那么该公式的任一算术特例都是形式化算术的一个定理. 见[A4].

参考文献

[A1] Benthem, J. van., Modal logic and classical logic, Bibliopolis, 1983.

[A2] Benthem, J. van., Correspondence theory, in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.): Handbook of Philos. Logic. Vol. 11. Reidel, 1984, 167 - 242.

[A3] Bull, R. A. and Segerberg, K., Basic modal logic, in D. Gabbay and F. Guenthner (eds.): Handbook of Philos, Logic, Vol. 11. Reidel, 1984, 1 - 88.

[A4] Smorynski, C., Self-reference and modal logic, Springer, 1985.

[A5] Hughes, G. E. and Cresswell, M. J., An introduction to modal logic, Methuen, 1968.

王 驹 译

模态 [modality; модальность]

逻辑判断的一个性质, 用以刻画该判断的确定程度. **模态逻辑** (modal logic) 即是研究不同模态及它们之间的关系. Aristotle (公元前 4 世纪) 早就研究过模态“必须”及“可能”, 但他没有赋予它们一个准确的含义. 该二模态被称为基本 (fundamental) 模态并分别以 $\Box$ 和 $\Diamond$ 记之 (或者 L 及 M). 基本模态 $\Box$, $\Diamond$ 及否定 $\neg$ 的各种组合也称为模态. 如果将一个模态 Q 中的每一个 $\Box$ 都改成 $\Diamond$, 又将 Q 中的每一个 $\Diamond$ 都改成 $\Box$, 就得到另一个模态, 记为 $\bar{Q}$, 称为模态 Q 的对偶 (dual of a modality). 在大部分模型逻辑系统中, 对任一模态 Q 及其对偶 $\bar{Q}$, 下式:

$$Q \neg A \Longleftrightarrow \neg \bar{Q} A \qquad (*)$$

成立.

原则上, $\Box$, $\Diamond$ 及 $\neg$ 可以有无穷种组合; 但在一个具体的模态逻辑系统中, 两两不相等价的模态个数往往是有界的 (因为上面的等价式 (*) 起作用, 同时该系统中的公理也将简化某些模态, 或者将某一个模态归结到另一个模态). 例如, 在模态逻辑系统 S3 中, 有且仅有 40 个不同的模态. 在 S4 中, 仅有 12 个:

$$\Box A,\ \Box\Diamond A,\ \Box\Diamond\Box A,\ \neg\Box A,$$
$$\neg\Box\Diamond A,\ \neg\Box\Diamond\Box A$$

以及它们的对偶. 在 S5 中, 仅有 4 个模态: $\Box A$, $\Diamond A$, $\neg\Box A$, $\neg\Diamond A$. 另一方面, 在模态逻辑系统 T, 以及 S1 和 S2 中, 都存在无穷个模态. 更有甚之, 在这些系统中, 不可能进行模态的归结; 即, 任两个正模态 (不含 $\neg$) Q_1 与 Q_2 是等价的, 当且仅当 $Q_1 = Q_2$.

有时, “模态”这一术语也指在不同的理论中形式化了的概念, 如“真”, “可证性”, “不可证性”, 有时也和时序逻辑中“将是”, “过去总是”等等联结词联系起来.

读者可参阅**模态逻辑** (modal logic).

С. К. Соболев 撰 王 驹 译

众数 [mode; мода]

随机变量 (random variable) 的**概率分布** (probability distribution) 的数字特征之一. 对于以 $p(x)$ 为密度 (见**概率分布的密度** (density of a probability distribution)) 的随机变量, $p(x)$ 的任一极大值点 x_0 称为众数. 假设随机变量 X 有分布 $p_k=\mathrm{P}\{X=x_k\}$, 其可能值 x_k 按递增顺序排列. 那么, 如果 $p_m \geqslant p_{m-1}$ 且 $p_m \geqslant p_{m+1}$, 则点 x_m 称为众数.

具有一个、两个或多个众数的分布, 相应称为单众数的 (unimodal) 或单峰的 (one-peaked 或 single-peaked)、双众数的 (bimodal) 或多众数的 (multimodal). 在概率论和数理统计中最重要的是**单众数分布** (unimodal distribution). 与**数学期望** (mathematical expectation) 和**中位数 (统计学中的)** (median (in statistics)) 一样, 众数是随机变量值的位置特征. 对于单众数且关于某个点 a 对称的分布, 众数等于 a 并且和中位数及数学期望相等, 只要后者存在. А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mood, A. M. and Graybill, F. A., Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963 (中译本: A. M. 穆德, F.A. 格雷比尔, 统计学导论, 科学出版社, 1978).

[A2] Breiman, L., Statistics with a view towards applications, Houghton Mifflin, 1973.

周概容 译

计算模型 [model for calculations 或 computational model; **модель вычислительная**],

用作研究和发展某类问题数值方法的模型的一个典型问题. 例如, 在**求面积** (quadrature) 理论中考虑计算满足条件 $|f^{(n)}| \leqslant A$ 的函数积分的问题. 历史上, 求解常微分方程组 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 的方法的过程, 就是在一串越来越复杂的模型 (其积分区间为 $[0, X]$) 上对这种方法的性质进行研究:

1) 方程 $y'=0$;

2) 方程 $y'=my$, $|m|X$ 阶为 1 (模型 1) 和 2) 与具有光滑解的方程组在小的时间区间上的积分问题相对应);

3a) 方程 $y'=my$, $m<0$, $|m|X\gg 1$; 这个模型与具有稳定解的方程组在大的时间区间上的积分问题相对应;

3b) 方程 $y'=x^{\lambda}$; 这是解的导数有奇异性的方程的模型;

4) 方程组 $y_1'=m_1y_1$, $y_2'=m_2y_2$, $0>m_1>m_2$, $|m_2|X\gg|m_1|X$, $|m_1|X$ 阶为 1; 这个模型称为刚性微分组 (见**刚性微分系统** (stiff differential system)), 其中, 有一个分量变化比较慢, 而其他分量的变化则比较快.

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

Н. С. Бахвалов 撰 袁国兴、张宝琳 译

模型 (逻辑中的) [model (in logic); модель]

一个模型意指**形式语言** (formal language) 的一个解释, 该解释满足某些**公理** (axiom). 基本的形式语言是一阶语言 (first order language) L_Ω, Ω 是给定的符号集, 其中包括: 谓词符号 R_i, $i\in I$; 函词符号 f_j, $j\in J$; 常项符号 c_k, $k\in\mathscr{K}$. 语言 L_Ω 的一个模型即是符号集 Ω 的一个**代数系统** (algebraic system).

令 Σ 是 L_Ω 的一个闭公式集. Σ 的一个模型是 L_Ω 的一个这样的模型, 在其中 Σ 的公式都为真. 一个公式集 Σ 称为相容的 (consistent), 如果它至少有一个模型. 以 $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ 记所有 Σ 的模型的全体. 于是 Σ 的相容性意味着 $\mathrm{Mod}\,\Sigma\neq\phi$.

由语言 L_Ω 的模型组成的一个类 $\mathscr{K}$ 称为可公理化的 (axiomatizable), 如果存在由闭公式组成的一个集合 Σ 满足 $\mathscr{K}=\mathrm{Mod}\,\Sigma$. 以 $T(\mathscr{K})$ 记所有在每一个 $\mathscr{K}$ 中模型里都为真的闭公式的全体, $T(\mathscr{K})$ 称为 $\mathscr{K}$ 的初等理论. 那么, L_Ω 的模型组成的一个类 $\mathscr{K}$ 是可公理化的, 当且仅当 $\mathscr{K}=\mathrm{Mod}\,T(\mathscr{K})$.

如果一个类的任一模型都同构于一个给定的模型, 则该类的初等理论称为该模型的初等理论.

令 $\mathbf{A}$ 是语言 L_Ω 的一个模型, 它的全类是 A. 对任一元素 $a\in A$, 引入一新的常项符号 c_a. 令 $L_{\Omega A}$ 为一新的语言. 符号集合 Ω 的所有符号以及所有的新常项符号 c_a, $a\in A$. 称 $L_{\Omega A}$ 为模型 $\mathbf{A}$ 的图表语言 (diagram language of the model). 定义 $L_{\Omega A}$ 的闭公式的集合 $O(\mathbf{A})$, 一个闭公式在 $O(\mathbf{A})$ 中, 当且仅当将该公式中所有的新常项符号 c_a 替换为 a 之后, 该公式在模型中取真值. $O(\mathbf{A})$ 被称为模型 $\mathbf{A}$ 的描述集 (description) (或初等图表 (elementary diagram)). 而由 $O(\mathbf{A})$ 中的原子公式或原子公式的否定所组成的公式集 $D(\mathbf{A})$ 被称为 $\mathbf{A}$ 的图表 (diagram).

除了一阶语言的模型, 人们也在研究其他语言的模型, 比如无穷逻辑, **直觉主义逻辑** (intuitionistic logic), 多种类逻辑、二阶逻辑, **多值逻辑** (many-valued logic), 以及**模态逻辑** (modal logic) 等等的模型.

读者可参阅**模型论** (model theory).

Д. М. Смирнов 撰

【补注】 西方学者习惯将"语言的模型"或"代数系统"称之为该语言的"结构", 与俄国学者不同. "模型", 在西方, 指的是满足某一个理论的结构. (一个理论即是闭公式的一个集合).

王 驹 译

正则模型 [model, regular; правильная интерпретация]

形式系统的一种解释. 在这种解释中, 所有公理都是真的, 或所有公理对它们参数的所有值皆取值"真", 并且推演法则保持取值"真"的性质. 这个定义仅适用于二值逻辑演算. 如果逻辑是多值的, 并且某些值是标定的, 那么在正则模型的定义中必须用"取标定值"代替"取值'真'". 如果关于模型的上面的性质不满足, 那么称此种模型为非正则的 (non-regular). 对谓词演算附加某一公理集合 T 所得到的形式系统的模型也称公理系统 T 的模型 (model of the axiom system) 或 T 的模型. 这样一个形式系统的任一解释叫做一个**代数系统** (algebraic system) 或简称**模型** (**逻辑中的**) (model (in logic)).

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, Princeton, New Jersey, Princeton university press, 1956.

В. Н. Гришин 撰

【补注】 在英语用法中, 一个语言结构 (structure) 和模型 (model) 之间的通常的区别在于结构可以满足也可以不满足所考虑的理论的公理, 而模型则必须满足. 于是在英语中术语 "regular model" 是多余的, 并且在这个意义下不使用它. 亦见**代数系统** (algebraic system) 的补注; **模型** (逻辑中的) (model (in logic)).

正则模型的另一用法见 [A1].

参考文献

[A1] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

卢景波 译

模型论 [model theory; моделей теория]

数理逻辑中研究数学模型的部分 (见**模型** (逻辑中的) (Model (in logic))).

模型论的起源可以追溯到 20 世纪 20 年代和 30 年

代，那时下面两个基础定理得到证明．

定理 1 (Gödel 紧性定理 (Gödel compactness theorem))．如果一个一阶语言的一个命题集合 T 的每个有限子集都是相容的，那么整个集合 T 是相容的（见[1]）．

定理 2 (Löwenheim-Skolem 定理 (Löwenheim-Skolem theorem))．如果表征为 Ω 的一阶语言的一个命题集合有无限模型，那么对任一不小于 Ω 的基数的无限基数 α，它有基数为 α 的模型．

定理 1 在代数中有着广泛的应用．基于这个定理，А. И. Мальцев (A. I. Mal'tsev) 创造了代数中局部定理的一个证明方法（见 **Мальцев 局部定理** (Mal'tsev local theorem)）．

设 A 是表征为 Ω 的一个**代数系统** (algebraic system)，$|A|$ 是 A 的支集，$X\subseteq|A|$，又设 $<\Omega, X>$ 表示由 Ω 加上所有的识别元素符号 $c_a\,(a\in X)$ 所得到的表征，并且设 (A, X) 表示表征为 $<\Omega, X>$ 的代数系统，它是 A 的膨胀，其中每一符号 $c_a\,(a\in X)$ 用元素 a 解释．表征为 $<\Omega, |A|>$ 的一阶语言中，在系统 $(A, |A|)$ 中真的所有闭公式的集合 $O(A)$，称为代数系统 A 的初等图表 (elementary diagram of the algebraic system)（或者称为代数系统 A 的描述 (description of the algebraic system)）．令 $D(A)$ 表示 $O(A)$ 中的所有原子公式或原子公式的否定所构成的集合，$D(A)$ 称为 A 的图表 (diagram)．一个代数系统 B 称为 A 的一个初等扩张 (elementary extension)，如果 $|A|\subseteq|B|$、并且 $(B, |A|)$ 是 $O(A)$ 的一个模型．在这种情况下，A 称为 B 的一个初等子系统 (elementary subsystem)．例如，带有通常顺序关系的有理数集是带有通常顺序关系的实数集的初等子系统．

表征为 Ω 的代数系统 B 的一个子系统 A 是 B 的一个初等子系统的充分必要条件，是表征为 $<\Omega, |A|>$ 的一阶语言中的任一在 $(B, |A|)$ 中真的闭公式 $(\exists v)\,\Phi(v)$，存在 $a\in|A|$，使得 $\Phi(c_a)$ 在 $(B, |A|)$ 中真．由这个判别法则立刻得到初等子系统的升链的并是这些子系统 的每一个的初等扩充．如果一阶语言中的一个闭 $\forall\exists$ 公式在系统的一个升链中的每一个系统中皆真，那么它在这个链的并中真（见[1]，[8]）．

设表征 Ω 包含一个一元关系符号 U．称表征为 Ω 的一个理论的一个模型 A 具有型 (type) (α, β)，如果 $|A|$ 的基数等于 α，并且 $U(A)=\{a\in|A|: A\models U(a)\}$ 的基数为 β．Vaught 定理 (Vaught theorem)：如果可数表征的一个初等理论 T 具有型 (α, β) 的模型（其中 $\alpha>\beta$），那么 T 具有一个型 $(\aleph_1, \aleph_0)$ 的模型（见[7]，[8]，[10]）．在广义**连续统假设** (continuum hypothesis) 成立的前提下，如果可数表征的一个初等理论 (elementary theory) 具有一个型 $(\aleph_1, \aleph_0)$ 的模型，那么对每一 α，它具有型 $(\aleph_{\alpha+2}, \aleph_{\alpha+1})$ 的模型（见[10]）．在同样的假设下，理论 $\mathrm{Th}(A)$ 没有型 $(\aleph_2, \aleph_0)$ 的模型，其中 A 的表征为 $<+, \cdot, 0, 1, <, U, >$，$|A|$ 是由所有实数构成的集合，$U(A)$ 是所有整数构成的集合，并且 $+, \cdot, 0, 1, <$ 按通常的方法定义．

设 (A, P) 表示代数系统 A 被谓词 P 的一个膨胀，并且设 $<\Omega, P>$ 为由表征 Ω 增加谓词符号 P 得到的表征．在很多情况下，推断什么时候表征为 $<\Omega, P>$ 的一个代数系统类 $\mathscr{K}$ 的每一成员中的谓词 P．可由表征为 Ω 的一阶语言的一个公式给出是重要的．对这一问题的部分解答由 Bath 可定义性定理 (Beth definability theorem) 给出：在表征为 Ω 的一阶语言中，存在一个公式 $\Phi(x)$，使得公式 $(\forall x)\,(\Phi(x)\Longleftrightarrow P(x))$ 在表征为 $<\Omega, P>$ 的一个可公理化类 $\mathscr{K}$ 中的每一成员中真的充分必要条件，是对表征为 Ω 的每一代数系统 A、集合 $\{P: (A, P)\in\mathscr{K}\}$ 包含至多一个元素（见[2]，[8]）．

模型论中的很多研究关联到考查在对于代数系统的运算下被保持的性质．最重要的运算包括同态、直积和滤积．

一个命题 Φ 称为对于同态是稳定的 (stable)，如果 Φ 在一个代数系统 A 中的真值蕴涵 Φ 在 A 的所有满同态象中的真值．一阶语言中的一个公式 Φ 称为正的 (positive)，如果 Φ 不包含否定符号和蕴涵符号．已经证明（见[1]，[8]），一阶语言的一个命题对于同态是稳定的充分必要条件是 Φ 等价于一个正命题．对语言 $L_{\omega_1\omega}$ 也有类似的定理．

表征为 Ω 的一阶语言的一个公式 $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ 称为 Horn 公式 (Horn formula)，如果它可以由形如 $(\Phi_1\&\cdots\&\Phi_s)\rightarrow\Phi$，$\neg(\Phi_1\&\cdots\&\Phi_s)$ 的公式经合取及加量词而得，其中 $\Phi_1, \cdots, \Phi_s$ 是表征为 Ω 的一阶语言中的原子公式．等式和拟等式是 Horn 公式的例子．超积理论的核心是 Los 定理 (Los theorem)：一阶语言中的任一公式对于任一**超滤子** (ultrafilter) 是稳定的（见[1]）．一阶语言中的一个公式关于任一滤集是条件稳定的，当且仅当它等价于一个 Horn 公式．下面有一个定理（见[9]）：表征为 Ω 的两个代数系统 A 和 B 初等等价的充分必要条件是存在一个集合 I 上的一个超滤 D，使得 A^I/D 和 B^I/D 同构．一个滤积的基数是无限的，如果对每一自然数 n，基数为 n 的因子的个数都是有限的．如果对每一个自然数 n，基数为 n 的因子的指标集不属 D，那么关于一个可数集上的一个非主超滤 D 的超积的基数为连续统势．对每一基数为 α 的无限集 I，存在 I 上一个滤子 D，使得 I 上每一个包含 D 的滤子 D_1 和每一个无限集 A，A^I/D_1 的基数不小于 2^α（见[1]）．

关于具有大自同构群的模型的存在性的 Ehrenfeu-

cht - Mostrowski 定理 (Ehrenfeucht - Mostrowski theorem), 已经发现了很多应用 (见 [3]). 这个定理指出: 对于一个包含一个无限系统的代数系统的可公理化类 $\mathscr{K}$ 中的任一全序集 X, 存在一个系统 A, 使得 $X \subseteq |A|$, 并且使得 X 到 X 上的每一个序保持映射可以扩充为 A 的一个自同构.

模型论中的主要概念是万有系统、齐次系统和饱和系统. 设 A 和 B 均是表征为 Ω 的代数系统. 集合 $X \subseteq |A|$ 到集合 $Y \subseteq |B|$ 内的一个映射 f 称为初等的(elementary), 如果对表征为 Ω 的一阶语言的每一个公式 $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ 和任意的 $a_1, \cdots, a_n \in X$, 等价关系 $A \models \Phi(a_1, \cdots, a_n) \Longleftrightarrow B \models \Phi(fa_1, \cdots, fa_n)$ 成立. 一个系统 A 称为 α 万有的 (α-universal), 如果对每一个初等等价于 A 且基数不超过 α 的系统 B, 存在 $|B|$ 到 $|A|$ 内的一个初等映射. 一个系统 A 称为 α 齐次的 (α-homogeneous), 如果对每一个基数小于 α 的集合 $X \subseteq |A|$, 每一个由 X 到 $|A|$ 内的初等映射都可以扩充为 $|A|$ 到 $|A|$ 上的一个初等映射 (即 A 的一个**自同构** (automorphism)). 表征为 Ω 的一个系统 A 称为 α 饱和的 (α-saturated), 如果对每一个基数小于 α 的集合 $X \subseteq |A|$ 以及表征为 $<\Omega, X>$ 的一阶语言的每一个不包含 x_0 以外的自由变元的公式集合 Σ, Σ 在 (A, X) 中有限可满足, 蕴涵 Σ 在 (A, X) 中可满足. 一个系统 A 称为万有的 (universal) (齐次的 (homogeneous) 或饱和的 (saturated)), 如果 A 是 α 万有的 (α 齐次的或 α 饱和的), 其中 α 是 $|A|$ 的基数. 一个系统是饱和的充分必要条件是, 它既是万有的, 并且又是齐次的. 两个基数相同的初等等价饱和系统同构. 对不可数基数范畴的 (见对于**基数的范畴性** (categoricity in cardinality)), 可数表征的初等理论的所有不可数模型都是饱和的 (Morley 定理 (Morley theorem), 见 [3], [8]). α 饱和系统的大量例子由超积给出. 例如, 如果 D 是一个可数集 I 上的一个非主超滤, 那么对可数表征 Ω 的任意代数系统 $A_i (i \in I)$, $\prod_{i \in I} A_i / D$ 是 $\aleph_1$ 饱和的系统.

模型论的基本问题是研究形式语言的表达能力以及由形式语言所定义的结构类的研究. 稳定理论的某些重要性质已经发现, 并且对范畴理论和超稳定理论已有更详细的研究.

研究稳定理论的基本手法是对这些理论中的公式及局部相容公式集的分类、这种分类可以通过公式的秩来实现. 秩通常是一个序数, 而秩函数借助于特殊的拓扑及其他手段给出. 对于秩函数及其改进的研究是关于理论信息的丰富源泉.

在模型类的研究中, 人们关心的是一个理论的给定基数的不同构模型的个数, 以及特殊模型的存在性, 例如单的、极小的、饱和的、齐次的、万有的模型的存在性, 以及创造构作它们的方法.

模型论方法应用的典型例子是 A. Robinson 及其学派发展的一个独立的学科 —— **非标准分析** (non-standard analysis); Mal'tsev 及其学派发展了把模型论方法应用于拓扑代数的研究; 稳定理论的性质的最新成果已应用于具体代数问题的研究中.

上述的各种问题也出现在对各种非初等语言的研究中, 例如, 用增加新的量词, 引入无限表达式, 引入模态词等方法而得到非初等语言.

参考文献

[1] Мальцев. А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

[2] Robinson, A., Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, North-Holland, 1963.

[3] Тайцлин, М. А., Теория моделей, Новосиб., 1970.

[4] Ершов, Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., 1980.

[5] Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А., Математическая логика, М., 1979.

[6] Ершов, Ю. Л. [идр.], 《Успехи матем. наук》, **20** (1965), 4, 37 – 108.

[7] Мальцев, А. И., Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 169 – 198.

[8] Chang, C. C. and Keisler, H., Model theory, North-Holland, 1973.

[9] Sacks, G. E., Saturated model theory, Benjamin, 1972.

[10] Vaught, R. L., Denumerable models of complete theories, in Infinitistic methods. Proc. Symp. Foundations of Math. Warsaw, 1959, Pergamon, 1961, 303 – 321.

[11] Morley, M. and Vaught, R., Homogeneous universal models, *Math. Scand*. **11** (1962), 1, 37 – 57.

[12] Morley, M., Categoricity in power, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 2, 514 – 538.

[13] Shelah, S., Classification theory and the number of non-isomorphic models, North-Holland, 1978.

[14] Bell, J. L. and Slomson, A. B., Models and ultraproducts: an introduction, North-Holland, 1971.

А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин 撰

【补注】 定理 1 是 K. Gödel 在 [A1] 中证明的.

设 $\mathfrak{A}_i = <A_i, \{R_n(i)\}> (i \in I)$ 是同型的关系结构 (relational structures of same type) (同表征的代数系统 (algebraic systems of same signature)) 的全体 (即 A_i 是集合, $R_n(i)$ 是关系). 设 F 是指标集 I 上的一个**超滤子** (ultrafilter), 那么超积 (ultraproduct) $(\prod_i A_i)/F$ 是一个同型的关系结构 (见对超积定义中的**超滤子** (ultrafilter) 的补注).

现在给出 Los 定理的精确陈述如下 (见 [A8] 或

[A9]). 设$f=<f_1, \cdots, f_n, \cdots>$是$\prod A_i$中元素的一个序列，即对所有的$n$, $f_n=(f_n(i))_{i\in I}\in\prod A_i$. 设$f/F$是$(\prod A_i)/F$的元素的序列$<f_1/F, \cdots, f_n/F, \cdots>$，并且设$f(i)$是序列$f(i)=<f_1(i), \cdots, f_n(i), \cdots>$. 那么对语言$L$(其中$\mathfrak{A}_i$是$L$的解释)的任一公式$\varphi$,

$$(\prod A_i)/F \models_{f/F} \varphi \Longleftrightarrow \{i\in I: \mathfrak{A}_i \models_{f(i)} \varphi\}\in F.$$

Los 定理也称为**超积基本定理**(fundamental theorem of ultraproducts).

以上正文中所述的定理：两个代数系统$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$等价，当且仅当它们有同构的超幂，称为 Keisler **超幂定理**(Keisler ultrapower theorem).

逻辑对于代数的一个基本应用是 J. Ax 和 S. Kochen 的研究工作([A2]).

无限语言的模型论可参见[A3]；稳定性理论参见[A4]，[A5]；范畴模型论参见[A6]，[A7].

Gödel 紧性定理和 Löwenheim-Skolem 定理在俄文文献中有时分别称为 Gödel-Мальцев **定理**(Gödel-Mal'tsev theorem 和 Löwenheim-Skolem-Мальцев **定理**(Löwenheim-Skolem-Mal'tsev theorem).

参考文献

[A1] Gödel, K., Die Vollständigheit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Physik*, **37** (1930), 344 – 360.

[A2] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields III: decidable fields, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 437 – 456.

[A3] Dickmann, M. A., Large infinitary languages, North-Holland, 1975.

[A4] Pillay, A., An introduction to stability theory, Oxford Univ. Press, 1985.

[A5] Baldwin, T., Fundamentals of stability theory, Springer, 1988.

[A6] Malekai, M. and Reges, G. E., First order categorical logic, Springer, 1977.

[A7] Lambek, J. and Scott, P., Higher order categorical logic, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A8] Bell, J. L. and Slomson, A. B., Models and ultraproducts, North-Holland, 1969.

[A9] Comfort, W. W. and Negrepontis, S., The theory of ultrafilters, Springer, 1974. §11.

【译注】

参考文献

[B1] 王世强，模型论基础，科学出版社，1987.

卢景波 译

修正 [**modification**; **модификация**]，亦称**调整**，解析空间的

解析空间之间的解析映射$f:X\to Y$，使得对较低维数的解析集$S\subset X$以及$T\subset Y$，以下条件成立:

$$f:X\setminus S \to Y\setminus T \text{ 是同构},$$

$$f(S)=T.$$

修正也称为S到T的**收缩**(contraction). 修正的例子之一是**单项变换**(monoidal transformation).

亦见**例外解析集**(exceptional analytic set)，**例外子簇**(exceptional subvariety).

参考文献

[1] Behnke, H. and Stein, K., Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannschen Gebiete, *Math. Ann.*, **124** (1951), 1, 1 – 16.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

模曲线 [**modular curve**; **модулярная кривая**]

由**模群**(modular group)Γ中一个有限指数的子群$\tilde{\Gamma}$所单值化的完全的**代数曲线**(algebraic curve)$X_{\tilde{\Gamma}}$. 更确切地说，模曲线是由商空间$H/\tilde{\Gamma}$(这里H为上半平面)和有限多个抛物点(H的边界点关于$\tilde{\Gamma}$的等价类)所得到的一条完全的代数曲线. Γ中具有有限指数的子群$\tilde{\Gamma}$的最为有名的例子是包含一个由矩阵

$$A\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), A\equiv\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \bmod N$$

表示的水平N(对某个整数$N>1$)的主同余子群$\Gamma(N)$的同余子群，见**模群**(Modular group). 这种N中的最小值称为子群$\tilde{\Gamma}$的**水平**(level of the subgroup). 特别地，由同余于上三角阵(mod N)的矩阵表示的子群$\Gamma_0(N)$有水平N. 对应于每个具有有限指数的子群$\tilde{\Gamma}$存在模曲线的覆盖$X_{\tilde{\Gamma}}\to X_{\Gamma}$，它仅在点$z=i$, $z=(1+i\sqrt{3})/2$及$z=\infty$的象点有分歧，对同余子群$\tilde{\Gamma}$，此覆盖之分歧使得能定出$X_{\tilde{\Gamma}}$的亏格，并且能证明在Γ中存在有限指数的子群$\tilde{\Gamma}$，它不是同余子群(见[4]Vol.2,[2]). 当$N\leqslant 2$时$X_{\Gamma(N)}$的亏格为0，而当$N>2$时等于

$$1+\frac{N^2(N-6)}{24}\prod_{p|N}(1-p^{-2}),$$

其中p为素数. 模曲线总是定义在一个代数数域上(通常定义在$\mathbf{Q}$或它的循环扩张上). 模曲线上的有理函数提升为(更高水平的)模函数就构成一个域，对这个域的自同构已经有过研究(见[2]). 模曲线$X_{\tilde{\Gamma}}$上的全纯微分形式是在H上由微分$f(z)dz$(其中$f(z)$为一全纯函数)给出的，此微分在$\tilde{\Gamma}$中的变换$z\to\gamma(z)$下保持不变，这里$f(z)$是关于$\tilde{\Gamma}$的权为2的尖点形式. 模曲线的ζ**函数**(zeta-function)是模形式的 **Mellin 变换**(Mellin transform)的乘积，因而它有半纯延拓且满足一个函数方程. 这一事实正是关于模形

式与 Dirichlet 级数之间关系的 Langlands-Weil 理论之出发点(见[7],[8]).特别地,有一个猜想是说:**Q** 上每条(前导子为 N 的)**椭圆曲线**(elliptic curve)皆能被水平为 N 的模函数单值化. 模曲线的下同调与模符号有关,这使我们可以对模曲线的 ζ 函数在临界带中心的值的算术加以研究,并构造出模曲线的 p-adic ζ 函数(见[1]).

模曲线把为其模簇的那一族椭圆曲线参数化(见[7]第2卷).特别地,对 $\widetilde{\Gamma}=\Gamma(N)$ 来说, $H/\Gamma(N)$ 的点 z 与由椭圆曲线 E_z(它与复环面 $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}z)$ 解析等价)和 E_z 上 N 阶点(它是 z/N 的象)所组成的元素对成一一对应.

如果 $\widetilde{\Gamma}$ 不包括 -1,那么每条模曲线 $X_{\widetilde{\Gamma}}$ 上都有椭圆曲线的自然代数纤维丛 $E_{\widetilde{\Gamma}}\to X_{\widetilde{\Gamma}}$,它被 $X_{\widetilde{\Gamma}}$ 的抛物点上的退化曲线所紧化. 幂 $E_{\widetilde{\Gamma}}^{(w)}$(其中 $w\geqslant 1$ 为整数)称为 Kuga 簇(Kuga varieties),见[3],[5]. $E_{\widetilde{\Gamma}}^{(w)}$ 的 ζ 函数与模形式的 Mellin 变换有关,而它们的下同调则与模形式的周期有关(见[3],[7]).

模曲线上的有理点与具有有限阶有理点(或点的有理子群)的椭圆曲线相对应,对于它们的描述(见[6]),使我们有可能解决确定 **Q** 上椭圆曲线的可能有的扭子群的问题.

对模曲线的几何与算术的研究基于利用曲线 $X_{\widetilde{\Gamma}}$ 关于递降 $\widetilde{\Gamma}$ 的射影极限的自同构群,它(在本质上)与有理赋值向量环 A 上的群 $SL_2(A)$ 相同. 在每条模曲线 $X_{\widetilde{\Gamma}}$ 上,这给出一个非平凡的对应环 $R_{\widetilde{\Gamma}}$(Hecke 环),它在模形式论中有应用,见**模形式**(Modular form)([3]).

参考文献

[1] Манин, Ю. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **36** (1972). 1, 19 – 66.

[2] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Math. Soc. Japan, 1971.

[3] Шокуров. В. В., 《Матем. сб.》, **101** (1976), 1, 131 – 157.

[4] Klein, F. and Fricke, R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 1–2, Teubner, 1890 – 1892.

[5] Kuga, M. and Shimura, G., On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties, *Ann. of Math.*, **82** (1965), 478 – 539.

[6] Mazur, B and Serre, J.-P., Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$ (d, apres A. Ogg), in Sem. Bourbaki 1974/1975, Lecture notes in math., Vol. 514, Springer, 1976, 238 – 255.

[7] Modular functions of one variable, 1–6, Lecture notes in math., 320; 349; 350; 476; 601; 627, Springer, 1973 – 1977.

[8] Weil, A., Uber die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, **168** (1967), 149 – 156. А. А. Панчишкин, А. Н. Паршин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Katz, N. M. and Mazur, B., Arithmetic moduli of elliptic curves, Princeton Univ. Press. 1985.

张明尧 译 朱尧辰 校

模形式 [**modular form**; **модулярная форма**],椭圆模形式(elliptic modular form),单复变量的

上半平面 $\mathbf{H}=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ 上的一个函数 f,对某个固定的 k 及任何元素

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$$

($SL_2(\mathbf{Z})$ 是行列式 $ad-bc=1$ 的整值矩阵群)满足自守条件(automorphicity condition)

$$f\left[\frac{az+b}{cz+d}\right]=(cz+d)^k f(z), \tag{1}$$

且有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n q^n,$$

这里 $q=\exp(2\pi iz), z\in\mathbf{H}, a_n\in\mathbf{C}$. 整数 $k\geqslant 0$ 称为模形式 f 的权(weight of the modular form).如果 $a_0=0$,那么 f 称为抛物模形式(parabolic modular form).对所有实数值的 k,[8]中也有模形式的定义.

权 $k\geqslant 4$ 的模形式的一个例子由 Eisenstein 级数(见[4])

$$G_k(z)=\sum_{m_1,m_2\in Z}{}^{*}(m_1+m_2z)^{-k}$$

给出,其中星号表示求和中去掉数对 $(m_1,m_2)=(0,0)$. 这里对奇数 k 有 $G_k(z)\equiv 0$ 而对偶数 k 有

$$G_k(z)=\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\left[-\frac{B_k}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\right],$$

这里 $\sigma_{k-1}(n)=\sum_{d|n}d^{k-1}$,而 B_k 是第 k 个 Bernoulli 数(Bernoulli numbers).

权为 k 的模形式的集合是一个复向量空间,记为 M_k,这里有 $M_kM_l\subset M_{k+l}$. 直和 $\oplus_{k=0}^{\infty}M_k$ 构成一个分次**代数**(graded algebra),它同构于以 G_4 和 G_6 为独立变量的多项式环(见[3]).

对每个 $z\in H$,**复环面**(complex torus) $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}z)$ 解析同构于由方程

$$y^2=4x^3-g_2(z)x-g_3(z) \tag{2}$$

所给出的**椭圆曲线**(elliptic curve),其中 $g_2(z)=60G_4(z), g_3(z)=140G_6(z)$. (2)式右边三次多项式的判别式(discriminant)

$$\frac{1}{2^4}(g_2^3-27g_3^2)=\frac{(2\pi)^{12}}{2^4}q\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{2k}=$$

$$= \frac{(2\pi)^{12}}{2^4} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

是一个权为 12 的抛物模形式，其中 $\tau(n)$ 是 **Ramanujan 函数** (Ramanujan function)，见 [1].

对每个整数 $N \geq 1$ 可以引进最高水平 (highest level) 为 N 的模形式，它只对模群的水平为 N 的同余子群 $\widetilde{\Gamma}$ 中的元素

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

满足 (1) 式. 在此情形下，与模形式 f 相联系的是模曲线 $X_{\widetilde{\Gamma}}$ 上的全纯微分 $f(z)(dz)^{k/2}$. 最高水平模形式的一个熟知的例子是与整值正定二次型 $F(x_1, \cdots, x_m)$ 相伴的 θ 级数 (theta - series) $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{x_1, \cdots, x_m \in \mathbf{Z}} \exp(2\pi i F(x_1, \cdots, x_m)),$$

它是最高水平的模形式，且权为 $k = m/2$. 在这个例子中，a_n 是整数，它等于 Diophantus 方程 $F(x_1, \cdots, x_m) = n$ 的解数.

模形式的理论使我们能对 a_n 型的数 (以及像 Ramanujan 同余式 $\tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \pmod{691}$ 这样的同余式) 得到一个估计式，有时甚至能得到精确的公式，还使我们能研究它们的整除性质 (见 [7]). 对 a_n 型的数已经得到了最好的估计 (见 [2]).

模形式的重要的算术应用与 Dirichlet 级数

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

即 f 的 **Mellin 变换** (Mellin transform) 有关. 由于在模曲线上存在非平凡的对应环 R，这种 Dirichlet 级数一直是仔细研究的对象 (系数估计、解析性质、函数方程、Euler 乘积展开). 对曲线 X_Γ、这个环由对应 $T_n(z) = \sum_\gamma \gamma(z)$ 生成，其中 γ 取遍商集

$$\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}) \backslash \{A \in M_2(\mathbf{Z}) : \det A = n\}$$

中元素的全体代表元集. 这种对应诱导出作用于模形式空间上的线性算子 (Hecke 算子 (Hecke operators)). 这种算子关于 Peterson 内积是自伴的 (见 [3], [7]). 是 Hecke 算子本征函数的模形式由下述特征所刻画: 它们的 Mellin 变换有 Euler 乘积展开式.

模形式理论中另一个方向涉及到模曲线和相伴的纤维化 —— Kuga 簇的研究, 见**模曲线** (modular curve), 它也与代数赋值向量群的无限维表示理论有关. 目前一个变数的模形式理论已成功地转移到多变数的情形 (见 [6]). [5] 中给出了模形式数论应用的综述.

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964, Chapt. 8.

[2] Deligne, P., La conjecture de Weil I, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273 – 307.

[3] Lang, S.. Introduction to modular forms Springer, 1976.

[4] Serre, J.-P. A course in arithmetic, Springer, 1973 (译自法文).

[5] Итоги науки и техники, Алгебра. Топология, Геометрия, т. 15, М., 1977.

[6] Modular functions of one variable, 1 – 6. Lecture notes in math., 320; 349; 350; 476; 601; 627, Springer, 1973 – 1977.

[7] Ogg, A., Modular forms and Dirichlet series, Benjamin, 1969.

[8] Rankin, R., Modular forms and functions, Cambridge Univ. Press, 1977.

A. A. Панчишкин 撰

【补注】抛物模形式也称为尖点形式 (cusp form).

张明尧 译 朱尧辰 校

模函数 [**modular function**; **модулярная функция**]，椭圆模函数 (elliptic modular function)，单复变量的与一切形如

$$z \rightarrow \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \; ad-bc=1 \tag{1}$$

(这里 a, b, c, d 皆为实整数) 的分式线性变换 γ 组成的群 Γ (这个群称为**模群** (modular group)) 相伴的**自守函数** (automorphic function). Γ 中的变换把实轴变为实轴, 模函数的定义域可以视为上半平面 $\{z: \mathrm{Im}\, z > 0\}$. 群 Γ 是由 $z \mapsto z+1$ 及 $z \mapsto -1/z$ 这两个变换生成的.

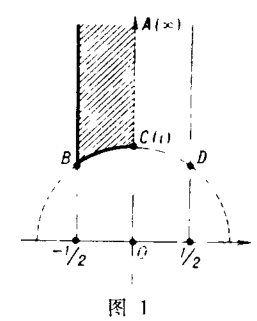


图 1

图 1 中画出了模群的基本区域 G，它是一个以 $A(\infty), B(-1/2 + i\sqrt{3}/2), C(i), D(1/2 + i\sqrt{3}/2)$ 为顶点的曲边四角形 $ABCDA$，它的两条边 AB 与 DA 分别是直线 $x = -1/2$ 与 $x = 1/2$ 的一部分，而 BD 是圆 $|z| = 1$ 上的一段弧. AB 与 BC 包含在 G 中，CD 与 DA 不在 G 中. 在 Γ 的所有可能的映射作用下，G 的象无重叠地覆盖住半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$.

十九世纪开始的模函数之研究与椭圆函数的研究有关，且比自守函数的一般理论出现得更早. 在模函数论中，下面的 θ **级数** (theta - series) 用作为基本的模形式:

$$g_2(z) = 60 \sum_{m_1, m_2 \in \mathbf{Z}}{}' \frac{1}{(m_1 + m_2 z)^4} =$$

$$= (2\pi)^4 \left\{ \frac{1}{12} + 20\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 h^{2n}}{1-h^{2n}} \right\},$$

$$g_3(z) = 140 \sum_{m_1, m_2 \in Z}^{*} \frac{1}{(m_1 + m_2 z)^6} =$$

$$= (2\pi)^6 \left\{ \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 h^{2n}}{1-h^{2n}} \right\},$$

$$\Delta(z) = g_2^3(z) - 27 g_3^2(z),$$

其中 $h = e^{i\pi z}$，而星号则表示略去 $(m_1, m_2) = (0, 0)$ 这一项．用 K. Weierstrass 的术语来说，这些是相对不变量 (relative invariants)，它们在 Weierstrass **椭圆函数** (Weierstrass elliptic functions) 理论中起着主要作用，Δ 也称为判别式 (discriminant)．从自守函数论的观点来看（见**自守函数** (automorphic function)；**自守形式** (automorphic form))，它们是与模群相伴的、权分别是 2, 3 及 6 的自守形式．基本模形式有表达式

$$J(z) = \frac{g_2^3(z)}{\Delta(z)} = 1 + \frac{27 g_3^2(z)}{\Delta(z)}. \qquad (2)$$

$J(z)$ 也称为绝对不变量 (absolute invariant)．它在上半平面正则，而在基本区域 G 的内部，它取每个有限值（0 与 1 除外）恰好一次．此外，$J(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = 0$，$J(i) = 1$．

模函数 $J(z)$ 在椭圆函数论中起着主要的作用，使我们能对给定的 Weierstrass 相对不变量 $a = g_2$，$b = g_3$，$a^3 - 27b^2 \neq 0$ 求出周期 $2\omega_1, 2\omega_3$，从而进一步构造出所有的 Weierstrass 椭圆函数．如果 τ 是方程

$$J(\tau) = \frac{a^3}{(a^3 - 27b^2)}$$

在基本区域中的唯一解，那么，对 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$，我们有 $\omega_1^2 = a/b$，$\omega_3 = \omega_1 \tau$；对 $a = 0$ 有 $\tau = -1/2 + i\sqrt{3}/2$，$\omega_1$ 是由方程

$$\omega_1^6 = \frac{140}{b} \sum_{m_1, m_2 \in Z}^{*} \frac{1}{(m_1 + m_2 \tau)^6}$$

决定的，而 $\omega_3 = \omega_1 \tau$；对 $b = 0$ 有 $\tau = i$，ω_1 是由方程

$$\omega_1^4 = \frac{60}{a} \sum_{m_1, m_2 \in Z}^{*} \frac{1}{(m_1 + m_2 \tau)^4}$$

决定的，而 $\omega_3 = \omega_1 \tau$．

为构造 Jacobi **椭圆函数** (Jacobi elliptic functions)，更方便的是代替 $J(z)$ 改用

$$\lambda(z) = k^2(z) = 1 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - h^{2n-1}}{1 + h^{2n+1}} \right)^8, h = e^{2\pi i z}, (3)$$

它也称为模函数．根据同样的记号，$\lambda(z)$ 是一个只与 Γ 的子群 Γ_2 有关的自守函数，这里 Γ_2 由所有形如 (1) 的变换组成，（作为一个附加条件）(1) 式中的 a 与 d 是奇数，而 b 与 c 是偶数．图 2 中画出了 Γ_2 的基本区域 G_2，它是以 $A(\infty), B(-1), 0, C(1)$ 为顶点的曲边四角形 $ABOCA$，它的两边 AB 与 CA 分别是直线 $x = -1$ 与 $x = 1$ 的一部分，而 BO 与 OC 则分别是圆 $|z + 1/2| = 1/2$ 与 $|z - 1/2| = 1/2$ 的弧．虚轴左边那部分边界包含在此基本区域内，而 OC 与 CA 不包含在内．

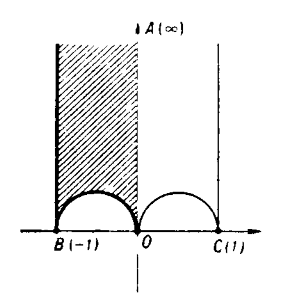


图 2

函数 $\lambda(z)$ 也在上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 中正则．在 G_2 内部，它取每个有限值（0 与 1 除外）恰好一次；此外有 $\lambda(\infty) = 0$ 及 $\lambda(0) = 1$．为了对给定的模 k 构造 Jacobi 椭圆函数，需要 $\tau = \omega_3/\omega_1$（或 $h = e^{\pi i z}$）的值，它由方程 $\lambda(\tau) = k^2$ 唯一确定．实际上，在 $0 < k < 1$ 的正常情形下，首先可以定出 $\varepsilon = (1 - \sqrt{k'})/2(1 + \sqrt{k'})$，其中 $k' = \sqrt{(1-k^2)}$，然后作出此方程的一个级数形式的解 $h = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + O(\varepsilon^{17})$．模函数 $\lambda = \lambda(z)$ 和 $J(z)$ 由

$$J(z) = \frac{4}{27} \cdot \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 (1-\lambda)^2}$$

联系在一起．

当亏格 $g = 1$，Euler 特征 $\chi = 0$ 时，模函数 $w = J(z)$ 给出椭圆函数的 Riemann 曲面之共形类最方便的表示，见 **Riemann 曲面的共形类** (Riemann surfaces, conformal classes of)．对每个 w，存在 $J(\tau) = w$ 的一个解 $\tau = \omega_3/\omega_1$，它确定一个共形类和相应的椭圆函数域．例如，$w = 0$ 对应一个角为 120° 及 60° 的菱形状的周期平行四边形，而 $w = 1$ 对应一个正方形．模函数也被应用于**共形映射** (conformal mapping)，**解析函数的边界性质** (boundary properties of analytic functions) 以及**聚值集** (cluster set) 的研究之中．模函数 $w = J(z)$ 给出基本区域 G 的左半部分的共形映射（图 1），也就是说，它把曲边三角形 $ABCA$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\, w > 0$，其中 B, C 和 A 分别映射成 0, 1 和 ∞．模函数 $w = \lambda(z)$ 把曲边三角形 $ABOA$（图 2）映射成上半平面，其中 B, O 和 A 分别映射成 0, 1 和 ∞．

在几何问题中，取单位圆盘作为模函数的定义域常常更为方便．这样，模群（1）就代之以单位圆盘的自同构组成的模群．例如，比较方便的是应用分式线性变换

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{i(z-e^{i\pi/3})}{z-e^{-i\pi/3}},$$

它把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射成单位圆盘 $|\zeta|<1$,其中 0、1 和 ∞ 分别被映射成单位圆周 $|\zeta|=1$ 上的点 $A(e^{-i5\pi/6}), B(e^{-i\pi/6})$ 和 $C(i)$（图 3）.

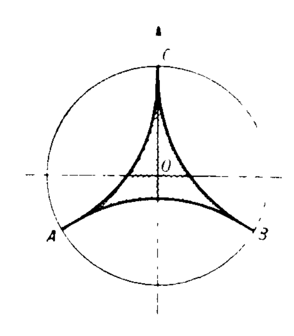


图 3

于是复合函数 $w=\mu(\zeta)=\lambda(z(\zeta))$ 是一个在单位圆盘内正则的模函数，它取到除 0，1 及 ∞ 以外的所有数值．它把曲边三角形 $ABCA$（图 3）共形映射成上半平面 $\operatorname{Im} z>0$．用于证明 Picard **定理**（Picard theorem）及若干几何问题中的正是 $\mu(\zeta)$ 这个模函数．

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964, Chapt. 8.
[2] Ахиезер, Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970.
[3] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951.
[4] Klein, F. and Fricke, R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 1－2, Teubner, 1890－1892.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】在考虑上半平面并让模群对它作用时，点 $i\infty$ 和实轴上的有理点常称为尖点．

更一般地，我们考虑可逆复 2×2 矩阵 $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ 作成的群 $GL_2(\mathbf{C})$ 及相应的分式线性变换（fractional-linear transformations）

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\quad z\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}. \qquad (A1)$$

分式线性变换（A1）称为抛物型的（parabolic），如果它≠恒等变换，且与之相伴的矩阵有两个相等的本征值，也见**分式线性映射**（fractional-linear mapping）．这等价于说，其 Jordan 标准形形如 $\left(\begin{smallmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$，或者说，如果还要求 $\det(g)=1$ 的话，就有 $\operatorname{Tr}(g)=\pm 2$．现在设 Γ' 是 $GL_2(\mathbf{R})$ 的某个离散子群．点 $x\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 称为 Γ' 的一个尖点（cusp），如果 Γ' 中有一个抛物元以 x 为不动点．

$\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})\subset GL_2(\mathbf{R})$ 的尖点恰好是 $\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$ 的点．为使之形象化（见图 1），点 ∞ 记为 $i\infty$（= 图 1 中的点 A）.

令 H^* 为扩充的上半平面（extended upper half-plane）$H\cup\mathbf{Q}\cup\{i\infty\}$，其中 $H=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im} z>0\}$.$\Gamma$ 在 H 上的作用自然地延拓到 H^* 上，所有 $\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$ 中的点构成一条轨道．图 1 中基本区域 G 的平移构成 H（或 H^*）的一个嵌装（tessellation），称为模嵌装（modular tessellation）．每个平移 $\gamma G(\gamma\in\Gamma)$ 称为一个模三角形（modular triangle）．在特殊点 γB 处（$B=-1/2+i\sqrt{3}/2,\gamma\in\Gamma$）有六个模三角形相遇；在特殊点 γC 处（$C=i,\gamma\in\Gamma$）有两个模三角形相遇；而在每一个尖点（$\mathbf{Q}\cup\{i\infty\}$ 的点）处有可数无穷多个模三角形相遇（交角为 0,这正是术语"尖点"的来由）.

模函数构成一个域．这就是域 $\mathbf{C}(J)$，其中 J 是上面的基本模函数（fundamental modular function）(2).

设 Γ_1 是 Γ 中一个有有限指数的子群．对它的商空间 H^*/Γ_1 可以给出一个自然的复结构，使之成为一个紧 Riemann 曲面，例如见 [A1] 第 Ⅳ 章 § 6．这是 H/Γ_1 的自然紧化．对于 $\Gamma_1=\Gamma$，我们得到 Riemann 球（亏格为 0）．对主同余子群

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\Gamma: a\equiv d\equiv 1 \bmod N,\ b\equiv c\equiv 0 \bmod N\right\},$$

它所产生的商群 $H^*/\Gamma(N)$，即模曲线（modular curves）$X(N)$，当 $N=2,\cdots,12$ 时，亏格分别为 0，0，0，0，1，3，5，10，13，26，25．一般的公式见**模曲线**（modular curve）.

Γ 的一个具有有限指数的子群 Γ_1 的模函数（modular function for a subgroup）是 H^* 上的一个复半纯函数 f，对 $\tau\in H^*, S\in\Gamma_1$ 有 $f(S(\tau))=f(\tau)$，此外在有理尖点 $-d/c,(c,d)=1$ 处，对某个 $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$、自然数 K 及 $n_0\in\mathbf{Z}$, f 有形如

$$f(\tau)=\sum_{n\geqslant n_0}c_n\exp\left[\frac{2\pi i}{K}A(\tau)n\right]$$

的展开式．这个展式对使得 $\operatorname{Im}A(\tau)$ 足够大的 $\tau\in H$ 都是成立的．最后这个条件说明 f 也在 H/Γ_1 的紧化 H^*/Γ_1 上定义了一个半纯函数，见**自守函数**（automorphic function）．当 $\Gamma_1=\Gamma$ 时，上述最后的要求取以下形式：存在 $a>0$，对 $\operatorname{Im}\tau>a$ 及 $\tau\in H$, $f(\tau)$ 有形如

$$f(\tau)=\sum_{n\geqslant n_0}b_n\exp(2\pi i n\tau)$$

的展式．

参考文献

[A1] Schoeneberg, B., Elliptic modular functions, Springer, 1974.

[A2] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton Univ. Press, 1971.

[A3] Rankin, R. A., Modular forms and functions, Cambridge Univ. Press, 1977.

[A4] Lang, S., Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.

【译注】

参考文献

[B1] Koblitz, Neal., Introduction to elliptic curves and modular forms, Springer-Verlag, 1984.

[B2] Chandrasekharan, K., Elliptic functions, Springer-Verlag, 1985.

张明尧 译 朱尧辰 校

模群[modular group; модулярная группа]

所有形如

$$z \to \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1 \qquad (1)$$

的分式线性变换 γ 组成的群 Γ，这里 a,b,c,d 是有理整数．模群可以和商群 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\{\pm E\}$ 等同起来，这里

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

且模群是 **Lie 群**（Lie group）$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})=\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{\pm E\}$ 中的一个**离散子群**（discrete subgroup）．这里 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 是由矩阵

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

作成的群，其中 a,b,c,d 为实数（整数），而 $ad-bc=1$．模群是上半复平面 $H=\{z=x+iy: y>0\}$（有时称为 Лобачевский 平面（Lobachevskiĭ plane）或 Poincaré 上半平面（Poincaré upper half-plane））的**离散变换群**（discrete group of transformations），且有由生成元 $T: z\to z+1, S: z\to -1/z$ 和关系式 $S^2=(ST)^3=1$ 给出的表现，也就是说，它是由 S 生成的 2 阶循环群和由 ST 生成的 3 阶循环群的自由积（见[2]）．

对模群的兴趣与**模函数**（modular function）的研究有关，模函数的 **Riemann 曲面**（Riemann surface）是商空间 H/Γ，它与模群的基本区域 G 等同．其紧化 $X_\Gamma=(H/\Gamma)\cup\infty$ 与复射影直线解析同构，这里的同构由基本模函数 $J(z)$ 给出．基本区域 G 有有限的 Лобачевский 面积：

$$\int_G y^{-2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{3},$$

这就是说，模群是第一类 **Fuchs 群**（Fuchsian group）（见[3]）．对于格 $L=\mathbf{Z}+\mathbf{Z}z\,(z\in H)$ 来说，格 $L_1=\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\gamma(z)$ 等价于 L，这里

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma,$$

也就是说，L_1 可以通过用一个非零复数 $\lambda=(cz+d)^{-1}$ 乘以 L 中的元素来得到．

对每个格有一个复环面 $\mathbf{C}/L$ 与之对应，它解析等价于一条非奇异的三次曲线（一条**椭圆曲线**（elliptic curve））．这就给出商空间 H/Γ 的点、格的等价类以及（解析）等价的椭圆曲线类之间的一个一一对应（见[3]）．

研究模群的子群在模形式和代数曲线的理论中是有意义的（见**代数曲线**（algebraic curve）；**模形式**（modular form））．水平（level）$N\geq 1$ 的主同余子群（principle congruence subgroup）$\Gamma(N)$，N 是一个整数，是形如(1)的变换 $\gamma(z)$ 作成的群，其中 $a\equiv d\equiv 1\pmod N$，$c\equiv b\equiv 0\pmod N$．如果对某个 N 有 $\widetilde{\Gamma}\supset\Gamma(N)$，则子群 $\widetilde{\Gamma}\subset\Gamma$ 称为一个同余子群（congruence subgroup），满足条件的最小的 N 称为 $\widetilde{\Gamma}$ 的水平（level）．水平 N 的同余子群的例子如下：c 被 N 整除时变换(1)作成的群 $\Gamma_0(N)$ 以及当 $a\equiv d\equiv 1\pmod N$ 且 $c\equiv 0\pmod N$ 时变换(1)作成的群 $\Gamma_1(N)$．子群 $\Gamma(N)$ 在模群中的**指数**（index）是 $(N^3/2)\prod_{p|N}(1-p^{-2})$（当 $N>2$ 时），其中 p 是素数，或者等于 6（当 $N=2$ 时）．从而每个同余子群在模群中都有有限指数．

对模群中每个有有限指数的子群 $\widetilde{\Gamma}$ 都有一个完全的代数曲线，即**模曲线**（modular curve）$X_{\widetilde{\Gamma}}$ 与之对应，它是从商空间 H/Γ 和覆盖 $X_{\widetilde{\Gamma}}\to X_\Gamma$ 得到的．研究这一覆盖的分枝可以求出同余子群 $\widetilde{\Gamma}$ 的生成元及关系、$X_{\widetilde{\Gamma}}$ 的亏格、还可以证明模群中存在有限指数的子群，它们并非同余子群（见[3]，[8]，[7]Vol.2）．对模群的表示的研究是在与模形式理论有关的工作中首先提出的（见[4]，[6]）．这种表示在自守形式论中作了深入的研究（见[7]和**自守形式**（automorphic form））．与模群有关的许多结果已被转换到代数 Lie 群的算术子群的情形之中（见**算术群**（arithmetic group）；**代数的 Lie 代数**（Lie algebra, algebraic））．

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964, Chapt. 8.

[2] Serre, J.-P., A course in arithmetic, Springer, 1973.（中译本：J.-P. 塞尔，数论教程，上海科学技术出版社，1980）．

[3] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Math. Soc. Japan, 1971.

[4] Hecke, E., Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, in Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959, 789 – 918.

[5] Klein, F. and Fricke, R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 1-2, Teubner, 1890-1892.
[6] Kloosterman, H. D., The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups, Ⅰ, Ⅱ, *Ann. of Math.*, 47(1946), 317-375; 376-417.
[7] Modular functions of one variable. Vol. 1-6, Lecture notes in math., 320; 349; 476; 601; 627, Springer, 1973-1977.
[8] Rankin, R., Modular forms and functions, Cambridge Univ. Press, 1977.

А. А. Панчишкин 撰 张明尧 译 朱尧辰 校

模理想 [modular ideal; модулярный идеал]

环 R 的有下述性质的右(左)**理想**(ideal) J: R 至少有一个元素 e, 使对 R 中所有的 x, 差 $x-ex$ 属于 J (对应地, $x-xe\in J$). 元素 e 称为模理想 J 的左(右)恒等元(left (right) identity).

在有恒等元的环中, 每个理想都是模的. 每个真模右(左)理想可嵌入极大右(左)理想中, 后者自然是模的. 结合环的全部极大模右理想的交与全部极大左模理想交重合, 就是环的 **Jacobson 根**(Jacobson radical). 模理想也称为正则理想(regular ideals).

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

К. А. Жевлаков 撰 郭元春 译 牛凤文 校

模格 [modular lattice; модулярная решетка], Dedekind 格 (Dedekind lattice)

一种**格**(lattice), 其中模律(modular law)成立, 即如果 $a\leqslant c$, 则对任何 b, $(a+b)c=a+bc$. 这个要求相当于说恒等式 $(ac+b)c=ac+bc$ 成立. 模格的例子包括一个线性空间的子空间的格, 一个群的正规子群(但不是所有子群)的格, 一个环的理想的格, 等等. 具有**合成序列**(composition sequence)的格是模格, 当且仅当在它上面存在一个维数函数(dimension function) d, 即一个这样的整数值函数, 使得 $d(x+y)+d(xy)=d(x)+d(y)$ 且如果区间 $[a,b]$ 是素的, 则推出 $d(b)=d(a)+1$. 如果 $w=a_1^{(1)}\cdots a_{m_1}^{(1)}=a_1^{(2)}\cdots a_{m_2}^{(2)}$, 并且没有一个元素 $a_i^{(k)}$ 能表示成除了它本身以外的元素的积, 又如果

$$a_1^{(k)}\cdots a_{i-1}^{(k)}\,a_{i+1}^{(k)}\cdots a_{m_k}^{(k)}\nleqslant a_i^{(k)},$$

则 $m_1=m_2$ 且对任何 $a_i^{(1)}$ 可以找到一个元素 $a_j^{(2)}$, 使得

$$w=a_1^{(1)}\cdots a_{i-1}^{(1)}\,a_j^{(2)}a_{i+1}^{(1)}\cdots a_{m_1}^{(1)},$$

([3],[6]). 具有零元 0 的一个模格的非零元 $a_1,\cdots,a_n$ 称为无关的(independent), 如果对所有 i 有 $(a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n)a_i=0$. 这个定义使得有可能推广线性无关向量组的许多性质([3],[5],[6]). 如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是无关的, 则它们的和表示成 $a_1\oplus\cdots\oplus a_n$. Ore 定理(Ore theorem): 如果一个模格有一合成序列且如果

$$1=a_1^{(1)}\oplus\cdots\oplus a_{m_1}^{(1)}=a_1^{(2)}\oplus\cdots\oplus a_{m_2}^{(2)},$$

且没有一个元素 $a_i^{(k)}$ 能表示成两个无关元素的和, 则 $m_1=m_2$ 且对每一个 $a_i^{(1)}$ 可以找到元素 $a_j^{(2)}$, 使得

$$1=a_1^{(1)}\oplus\cdots\oplus a_{i-1}^{(1)}\oplus a_j^{(2)}\oplus a_{i+1}^{(1)}\oplus\cdots\oplus a_{m_1}^{(1)},$$

([3],[6]). 在完全模格的情况(亦见**完全 Dedekind 格**(complete Dedekind lattice)), 它必须满足一定的附加要求, 关于无关元素和直接分解的定理才可以应用到无穷集([4],[5]). 对有补模格(complemented modular lattices)已经作了研究; 这是指具有 0 和 1 的模格, 其中对每一个元素 x 至少存在一个元素 y (称为元素 x 的补(complement of the element)), 使得 $x+y=1$, $xy=0$. 有合成序列的一个有补模格, 同构于某除环上一个有限维线性空间的所有子空间的模格. 一个有补完全模格 L 同构于某除环上一个线性(不必是有限维的)空间的所有子空间的模格, 当且仅当以下四个条件都满足: a) 如果 $0\neq a\in L$, 可以找到一个**原子**(atom) $p\leqslant a$; b) 如果 p 是一个原子且 $p\leqslant\sup A$, 这里 $A\subseteq L$, 则对某有限集 $F\subseteq A$, $p\leqslant\sup F$; c) 如果 p, q 是不同的原子, 则可找到第三个原子 $r\leqslant p+q$; 以及 d) 至少存在三个无关的原子. 最后的条件 d) 可以换成 **Desargues 假定**(Desargues assumption)成立的要求([2]). 这个结果的进一步推广, 导致正则环([7],[5]), 是与 von Neumann 代数的理论相联系的. 对具有合成序列的模格, 补的存在等价于单位可表成原子的和.

模格(在俄国)也称为 Dedekind 格以纪念 R. Dedekind, 他第一个用公式表示模律且建立了它的很多推论([1]).

参考文献

[1] Dedekind, R., Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Ann.*, 53(1900), 371-403.
[2] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.
[3] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.
[4] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: A. Г. 库洛什, 群论(上, 下), 高等教育出版社, 1982-1987).
[5] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961 (英译本: Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Oliver & Boyd, 1964).
[6] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982 (英译本: Skornyakov, L. A., Elements of latt-

ice theory, Hindushtan Publ. Comp., 1977).
[7] Neumann, J. von, Continuous geometry, Princeton Univ. Press, 1960.
Л. А. Скорняков 撰

【补注】满足 **Desargues 假定**(Desargues assumption)的模格称为 Desargues 格(Desarguesian lattices). 当集合 $\{b_i: i\in I\}$ 是(上)有向时, 满足恒等式

$$a\sum_{i\in I} b_i=\sum_{i\in I} a b_i$$

且满足以上条件的对偶条件的有补完全模格称为连续几何(continuous geometries)([5],[7]).

葛显良 译 李慧陵 校

模[module; модуль]

具有算子环的 **Abel 群**(Abelian group). 模是**域**(field) K 上的(线性)**向量空间**(vector space)当用**环**(ring)代替 K 时的推广.

设 A 是给定的环. 一个加法 Abel 群 M 称作一个左 A 模(left A-module), 如果存在一个映射 $A\times M\to M$, 对于 $a\in A$, $m\in M$, 它在 (a, m) 上的取值记为 am, 满足下述公理:

1) $a(m_1+m_2)=am_1+am_2$;

2) $(a_1+a_2)m=a_1m+a_2m$;

3) $a_1(a_2m)=(a_1a_2)m$. 如果 A 有幺元, 则通常还要附加上要求: 对任一 $m\in M$, $1m=m$. 具有这种性质的模称为酉(unitary)模或幺(unital)模(见**酉模**(unitary module)).

类似地可定义右 A 模(right A-module): 把公理 3) 改为 $(m\,a_1)a_2=m(a_1\,a_2)$. 任一右 A 模可被视为与 A 反同构的环 A^{opp} 上的左 A^{opp} 模, 所以, 对于任一有关右 A 模的结果都有关于左 A^{opp} 模的结果与之对应, 反之亦然. 当 A 是交换环时, 任一左 A 模都可被看作右 A 模, 即左、右模的区别消失了. 以下只讨论左 A 模.

C. F. Gauss 已经知道如二元二次型的类群这样最简单的模(有限 Abel 群, 它们是 $\mathbf{Z}$ 模)的例子. 模的一般性的概念出现于 R. Dedekind 和 L. Kronecker 在 1860 至 1880 年间致力于代数数域和函数域的算术的研究工作中. 差不多同时, 关于有限维结合代数, 特别是有限群的群代数的研究(B. Pierce, F. Frobenius)导致讨论某些非交换环的理想. 模的最早理论是作为环中理想理论而发展的. 此后不久, 在 E. Noether 和 W. Krull 的工作中, 人们看到用任意模而不是仅仅用理想的语言来表述和证明许多结果更为方便. 模理论的随后的发展则与**范畴**(category)理论的方法和思想的运用, 特别是与**同调代数**(homological algebra)的方法有关.

模的例. 1) 任一 Abel 群 M 是整数环 $\mathbf{Z}$ 上的模. 对于 $a\in\mathbf{Z}$ 和 $m\in M$, 乘积 am 定义为 m 自身相加 a 次的结果.

2) 当 A 是域时, 酉 A 模的概念恰好等同于 A 上向量空间的概念.

3) 域 K 上的 n 维向量空间 V(以坐标给出)可以看作系数在 K 中的 $(n\times n)$ 矩阵构成的环 $M_n(K)$ 上的模. 对于 $v\in V$ 和 $X\in M_n(K)$, 乘积 Xv 定义为矩阵 X 与向量 v 的坐标构成的列之积.

4) 一个结合环(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)) A 是左 A 模. 环的元素乘以模的元素是 A 中通常的乘法.

5) 光滑流形 X 上的微分形式的集合在 X 上的光滑函数环上有自然的模结构.

6) 与任一 Abel 群 M 相关联地有 M 的所有自同态组成的有幺元的结合环 $\mathrm{End}(M)$. 群 M 有自然的 $\mathrm{End}(M)$ 模结构.

对于某个环 A, 如果在 M 上有 A 模结构, 则对任一 $a\in A$, 映射 $m\to am$ 是 M 的一个自同态. 把 a 对应于它所引起的 M 的自同态, 即得到由 A 到 $\mathrm{End}(M)$ 的一个同态 φ. 反之, 任一同态 $\varphi: A\to\mathrm{End}(M)$ 定义了 M 上的一个 A 模结构. 所以, 在 Abel 群 M 上给定一个 A 模结构等价于给定一个环同态 $\varphi: A\to\mathrm{End}(M)$. 这样的同态也称为环 A 的表示(representation of the ring), 并且称 M 为表示模(representation module). 与任一表示 φ 相关联的是一个双边理想 $\mathrm{Ann}(M)=\ker\varphi$, 它由满足下述条件的 $a\in A$ 组成: 对所有的 $m\in M$, 都有 $am=0$. 这个理想称作模 M 的零化子(annihilator of the module). 当 $\mathrm{Ann}(M)=0$ 时, 称此表示为忠实的(faithful), 并且称 M 为忠实模(faithful module)(或忠实表示(faithful representation)).

显然, 模 M 可被视为商环 $A/\mathrm{Ann}(M)$ 上的模. 特别地, 尽管在模的定义中并没有要求 A 的结合性, 但环 $A/\mathrm{Ann}(M)$ 总是结合的. 所以在大多数情形下把研究的范围限制于结合环上的模就足够了. 以下, 除非有反面的声明, A 总假定是结合的.

G 模. 设 G 是一个**群**(group). 一个加法 Abel 群 M 称作一个左 G 模(left G-module), 如果存在一个映射 $G\times M\to M$, 它在偶对 (g, m) 处的值记为 gm, 其中 $g\in G$, $m\in M$, 对任一 $g\in G$, $m\to gm$ 是 M 的一个自同态; 对任意 g_1, $g_2\in G$, $m\in M$, $(g_1g_2)m=g_1(g_2m)$; 并且对于所有的 $m\in M$, 都有 $1m=m$, 其中 1 是 G 的恒等元. 对任一 $g\in G$, 映射 $m\to gm$ 是群 M 的自同构.

类似地可定义右 G 模.

G 模的例. 1) 设 K 是域 k 的 **Galois 扩张**(Galois extension), 其 **Galois 群**(Galois group)为 G, 则 K 的加法群及乘法群都有自然的 G 模结构. 如果 k 是代数数域, 则还有其他的 G 模: K 的整数环的加法群、K 的单位群, K 的除子群和**除子类群**(divisor class

group)等等. Galois 群上的模称为 Galois 模(Galois module).

2)设给定 Abel 群 M 的一个扩张，即群的**正合序列**(exact sequence)

$$1 \to M \to F \to G \to 1,$$

其中 M 是 F 的 Abel **正规子群**(normal subgroup), G 是任意群，则可赋予 M 一个自然的 G 模结构：对于 $g \in G, m \in M$, 令 $gm = \bar{g} m \bar{g}^{-1}$,其中 $\bar{g}$ 是 g 在 F 中的一个反象.

当 Abel 群 M 中的群运算用乘法表示时(例如 M 是域的乘法群)，也用记号 m^g 代替 gm，即把 G 的作用写成指数形式.

设给定一个 G 模 M. 把元素 $g \in G$ 对应到 M 的自同构 $m \to gm$，就得到由 G 到环 $\mathrm{End}(M)$中的可逆元素的一个同态. 反之，由 G 到 $\mathrm{End}(M)$的可逆元素的任一同态给出 M 上的一个 G 模结构.

环上的模与 G 模的概念之间有密切的关系. 确切地说，如果把 G 在 M 上的作用线性地扩充，即令

$$\left[\sum a_i g_i\right] m = \sum a_i (g_i m),$$

其中 $a_i \in \mathbf{Z}$, $g_i \in G$, $m \in M$，则 G 模 M 可以视为**群代数**(group algebra) $\mathbf{Z}G$ 上的模. 反之，在 M 上任给一个酉 $\mathbf{Z}G$ 模结构，M 可被看作一个 G 模.

如果 M 是某个交换环 K 上的模，同时又是一个 G 模，并且 G 的元素在 M 上的作用和 K 的元素的作用可交换，则通过把 G 的作用线性地扩充为 KG 的作用可以赋予M以一个 KG 模结构. 例如，如果 V 是域 K 上的一个线性空间，则在 V 上给出一个 KG 模结构等价于给出 G 在 V 中的一个表示.

利用 G 中的标准对合 $g \to g^{-1}$，可以把任一左 G 模 M 变成右 G 模. 为此，对于 $m \in M$, $g \in G$, 令 $mg = g^{-1}m$ 即可. 类似地，任一右 G 模也可以变成左 G 模.

Lie 代数上的模. 设 $\mathfrak{g}$ 是交换环 K 上的一个 **Lie 代数**(Lie algebra), M 是一个 K 模. 所谓在 M 上给定一个 $\mathfrak{g}$ 模结构，即是对任一 $g \in \mathfrak{g}$ 给定群 M 的一个 K 自同态 $m \to gm$，使得下述公理成立:

$$[g_1, g_2]m = g_1(g_2 m) - g_2(g_1 m),$$

其中 $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$, $m \in M$. 这个定义不同于前面给出的 A 模的定义. 在 M 上给出一个 $\mathfrak{g}$ 模结构等价于给出由 $\mathfrak{g}$ 到环 $\mathrm{End}(M)$ 的 Lie 代数的一个 Lie 代数同态. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的模也可以视为 $\mathfrak{g}$ 的**泛包络代数**(universal enveloping algebra)上的通常意义下的模.

模论中的构造. 从一个给定的 A 模出发，借助于若干规范的构作，可以得到一些新的模. 一般而言，与任一模相关联地有它的子模的格(lattice). 例如，若把 A 视为它自身上的左模，则它的左子模就是它的左理想. 若干重要类型的模都是根据它的子模格定义的. 例如，满足子模降(升)链终止条件的模定义为 **Artin 模**(Artinian module)(相应地，**Noether 模**(Noetherian module)). 没有非平凡子模，即没有 0 和 M 之外的子模的模定义为不可约模或单模(见**不可约模**(irreducible module)).

对于模 M 和它的任一子模 N，商群 M/N 可被赋予 A 模结构. 这个模称作 M 在 N 上的商模(quotient module).

A 模同态定义为与用 A 的元素所作的乘法可交换的 Abel 群**同态**(homomorphism) $f: M \to N$,即对所有的 $m \in M$、$a \in A$，都有 $f(am) = af(m)$. 如果给定两个同态 $f_1, f_2: M \to N$，则其和定义为 $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$，仍是 A 模同态. 这个加法给出了由 M 到 N 的所有同态的集合 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$上的一个 Abel 群结构. 对于任一同态 $f: M \to N$，可定义子模 $\mathrm{Ker} f$ (f 的核) 和 $\mathrm{Im} f$(f 的象)以及商模 $\mathrm{Coker} f = N/\mathrm{Im} f$ (f的余核)和 $\mathrm{Coim} f = M/\mathrm{Ker} f$($f$的余象). 模 $\mathrm{Im} f$ 和 $\mathrm{Coim} f$ 是典范同构的，因而常常把它们等同起来.例如，对于 A 的任一左理想 J，可定义商模 A/J. 模 A/J 是不可约的，当且仅当 J 是极大左理想(见**极大理想**(maximal ideal)).如果 M 是一个不可约 A 模并且不被 A 零化，则M同构于A/J，其中 J 是某个极大左理想.

对于任意一族 A 模$\{M_i\}$(这里 i 取遍某个指标集 J), $\{M_i\}$的直和以及直积在 A 模范畴中存在. 其中直积 $\prod_{i \in J} M_i$ 中的元素可以解释为向量$(\cdots, m_i, \cdots)$，其分量被 J 所标明：对于每个 $i \in J$,有 $m_i \in M_i$. 这样的向量的和以及用环中的元素去乘定义为按各分量分别进行. 族$\{M_i\}$的直和 $\sum_{i \in J} M_i$ 可解释为直积的子模，它由除了有限多个分量以外全为零的向量组成.

对于 A 模的一个投射(归纳)系统，其投射(归纳)极限可自然地赋予一个 A 模结构. 直积和直和可被视为投射极限和归纳极限概念的特例.

生成元和关系. 设 X 是 A 模 M 的一个子集. 所谓由 X 生成的子模(submodule)即是 M 的包含 X 的所有子模的交. 如果这个子模与 M 相同，则 X 称作模 M 的生成元族(系)(family (system) of generators)). 具有有限生成元族的模称为有限生成模(finitely-generated module).例如，在 Noether 环中任一理想都是有限生成模. 有限多个有限生成模的直和仍是有限生成的. 有限生成模的商模也是有限生成的. 为了构造模 M 的生成元系，中山引理(Nakayama lemma)常常是很有用的：对于包含于环 A 的根中的任一理想 $\mathfrak{A}$，条件 $\mathfrak{A}M = 0$ 蕴含着 $M = 0$.特别地，在中山引理的条件下，

如果元素 $m_1,\cdots,m_t$ 的象生成 $M/\mathfrak{A}M$，则这些元素构成 M 的一个生成元系．这个结果特别经常地应用于 A 是**局部环**(local ring)和 $\mathfrak{A}$ 是其极大理想的情形．

设 M 是以 $\{x_i\}_{i\in J}$ 为生成元系的模，则映射 $\varphi:y_i\to x_i$ 定义了由以 $\{y_i\}_{i\in J}$ 为生成元的自由 A 模 F 到 M 上的一个同态(F 可定义为所有有限的形式和 $\sum a_iy_i$ 的集合，其中 $a_i\in A$，而 φ 是由生成元到 F 的线性扩充)．$R=\mathrm{Ker}\,\varphi$ 中的元素称为 M 的生成元 $\{x_i\}$ 之间的关系(relations)．如果 M 可以表示为一个有限生成的自由模的商模，使得关系模 R 也是有限生成的，则称 M 是一个有限表示模(finitely-presented module)．例如，Noether 环上的任一有限生成模是有限表示的．一般地说，有限生成并不蕴含着有限表示．

环变换．有一些规范的构造方法能够使 A 模 M 被看作某个另外的环上的模．例如，设 $\varphi:B\to A$ 是环同态，则令 $bm=\varphi(b)m$，M 即可视为 B 模．作为结果的 B 模被称作由基变换(base change)得到的；特别地，当 B 是 A 的子环时，称作由标量的限制(restriction of scalars)得到的．如果 M 是一个酉 A 模并且 φ 把幺元映到幺元，则 M 成为一个酉 B 模．

设给定一个环同态 $\varphi:A\to B$ 和一个 A 模 M．对于 $b\in B$，$a\in A$，令 $ba=b\varphi(a)$，则 B 被赋予一个 (B,A) 模结构(见**双模**(bimodule))，因此可以考虑左 B 模 $B\otimes_A M$．称这个模是由标量的扩张(extension of scalars)得到的．

模范畴．在给定的环 A 上的所有的模组成的类连同模同态作为态射，构成一个 **Abel 范畴**(Abelian category)，记作 A-mod 或 Mod_A．在这个范畴上所定义的最重要的函子是 Hom(同态)和 $\otimes$(张量积)．函子 Hom 的值取在 Abel 群范畴中，即它把两个 A 模 M，N 映成群 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$．对于 $f:M_1\to M$ 和 $\varphi:N\to N_1$，以显然的方法可定义映射

$$f':\mathrm{Hom}_A(M,N)\to \mathrm{Hom}_A(M_1,N)$$

和

$$\varphi':\mathrm{Hom}_A(M,N)\to \mathrm{Hom}_A(M,N_1);$$

即函子 Hom 对于第一个自变量是反变的，而对于第二个自变量是协变的．当 M 或 N 具有双模结构时，群 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 还具有模结构．如果 N 是一个 (A,B) 模，则 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是右 B 模；如果 M 是 (A,B) 模，则 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是左 B 模．

函子 $\otimes_A$ 把一对模 M,N 对应到 M 和 N 在 A 上的张量积 $M\otimes_A N$，这里的 M 是右 A 模而 N 是左 A 模．这个函子在 Abel 群范畴中取值，并且对于 M 和 N 都是协变的．当 M 或 N 是双模时，群 $M\otimes_A N$ 可被赋予附加的结构．即如果 M 是 (B,A) 模，则 $M\otimes_A N$ 是 B 模；如果 N 是 (A,B) 模，则 $M\otimes_A N$ 是右 B 模．对于函子 Hom 和 $\otimes$ 以及它们的导出函子的研究是同调代数的基本问题之一．

许多重要类型的模可以用 Hom 和 $\otimes$ 的语言加以刻画．例如**投射模**(projective module)M 可定义为使得函子 $\mathrm{Hom}_A(M,X)$(作为以 X 为自变量的函子)正合的模(见**正合函子**(exact functor))．类似地，**内射模**(injective module)N 可定义为使得函子 $\mathrm{Hom}_A(X,N)$(X 为自变量)正合的模．**平坦模**(flet module)M 定义为使得函子 $M\otimes_A X$ 正合的模．

一个给定的环 A 上的模可以由两种观点出发加以考察．

A)可以从其内部结构的观点出发来研究模．这里的基本问题是模的完全分类，即对于每个模构造能在同构意义下刻画此模的不变量系，以及对于给定的一组不变量构造具有这组不变量的模的能力．对于某些类型的环，这种刻画是可能的．例如，若 M 是群环 KG 上的有限生成模，其中 G 是有限群，K 是特征与 G 的阶互素的域，则 M 可以表示为不可约子模的有限直和(M 是完全可约的，见**完全可约模**(completely-reducible module))．这个表示在同构意义下是唯一的(一般而言，不可约模的选择并不是唯一的)．所有不可约子模也有简单的刻画：它们全都含于 G 的**正则表示**(regular representation)之中，并且和群 G 的不可约特征一一对应．主理想环以及 Dedekind 环上的模也有简单的刻画，即**主理想环**(principal ideal ring)A 上的任一有限生成模 M 同构于形如 $A/\mathfrak{A}_i$ 的模的有限直和，其中 $\mathfrak{A}_i$ 是 A 的理想(可能是零)，并且 $\mathfrak{A}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{A}_m\neq A$．这些理想被最后一个条件唯一决定．这样，不变量集 $\{\mathfrak{A}_i\}$ 完全决定了 M．如果 M 是一个 **Dedekind 环**(Dedekind ring)A 上的有限生成模，则 $M=M_1\oplus M_2$，其中 M_2 是扭模(周期模)，而 M_1 是**无扭模**(torsion-free module)(M_1 的选择不是唯一的)．模 M_2 被 A 的某理想 $\mathfrak{A}$ 所零化，因此是主理想环 $A/\mathfrak{A}$ 上的模，于是可以采用上面给出的刻画．M_1 可以表示成 $(\oplus^n A)\oplus\mathfrak{B}$ 的形式，其中 $\mathfrak{B}$ 是 A 的一个理想，而 $\oplus^n$ 是 n 重直和．模 M_1 在同构的意义下被两个不变量所决定：数字 n 和理想类群中 $\mathfrak{B}$ 所在的类．

B)研究模的另一途径是研究范畴 A-mod 并把给定的模 M 视为这个范畴中的一个对象．这种研究是**同调代数**(homological algebra)和**代数 K 理论**(algebraic K-theory)的课题．在这个方向上已取得许多重要和深刻的结果．

人们常常考虑具有某些附加结构的模，例如**分次模**(graded module)，**滤过模**(filtered module)，**拓扑模**(topological module)，具有**半线性型**(sesquilinear form)的模等等．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1, 2(译自法文).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975(译自法文).

[4] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

[5] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971(译自德文)(中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, Ⅰ-Ⅱ, 科学出版社, 1978).

[6] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977.

[7] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[8] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[9] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, Ⅰ-Ⅱ, Springer, 1971-1976.

[10] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[11] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[12] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[13] Milnor, J., Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971.

Л. В. Кузьмин 撰　赵春来 译

模范畴 [modules, category of; модулей категория]

范畴 (category) mod-R, 其对象是有单位元的结合环上的右单位模, 而其态射则是 R 模的同态. 这个范畴是 **Abel 范畴** (Abelian category) 的最重要的例子. 再者, 对每一个小的 Abel 范畴, 总有一个满正合嵌入到某个模范畴内.

如果 $R=\mathbf{Z}$, 即整数环, 则 mod-R 就是 Abel 群的范畴, 而若 $R=D$ 是一个除环, 则 mod-R 是 D 上的向量空间的范畴.

mod-R 的性质反映了环 R 的许多重要的性质 (见**环的同调分类** (homological classification of rings)). 环的一些重要的同调不变量, 特别是, 其**同调维数** (homological dimension) 是与此范畴相联系的. mod-R 的中心 (centre) (即范畴的恒等函子的自然变换的集合) 与 R 的中心同构.

在环论、同调代数与代数 K 理论中, 模范畴的各种不同的子范畴都被研究; 特别, 讨论了有限-生成的投射 R 模的子范畴以及与其相关联的 K 函子 (见**代数 K 理论** (algebraic K-theory)). 模拟 **Понтрягин 对偶性** (Pontryagin duality), 在模范畴的满子范畴之间的对偶性曾被研究过; 特别是, 研究过有限生成模的子范畴之间的对偶性. 例如, 曾建立了下述的理论, 如果 R 与 S 都是 Noether 环, 并且如果在有限生成的右 R 模与有限-生成的左 S 模之间有一对偶, 则有一个双模 ${}_SU_R$ 使得所给的对偶等价于由函子

$$\mathrm{Hom}_R(-,U) \text{与} \mathrm{Hom}_S(-,U)$$

所定义的对偶, 自同态环 $\mathrm{End}\,U_R$ 与 S 同构, $\mathrm{End}_S U$ 与 R 同构, 双模 U 是一个有限-生成的内射余生成元 (既作为一个 R 模又作为一个 S 模), 而环 R 是**半完满环** (semi-perfect ring). 由考虑模的对偶性所出现的最重要的一类环是**拟 Frobenius 环** (quasi-Frobenius ring). 一个左 **Artin 环** (Artin ring) R 是拟 Frobenius 的, 当且仅当映射

$$M \to \mathrm{Hom}_R(M,R)$$

在有限-生成的左与右 R 模的范畴之间定义了一个对偶.

参考文献

[1] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[2] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

[3] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1-2, Springer, 1973-1976.

А. В. Михалев 撰

【补注】 如上面所描述的, 由一个双模 U 所给的对偶称为一个 U 对偶性 (U-duality) 或森田对偶性 (Morita duality), 也见**森田等价** (Morita equivalence) 的补注.

周伯埙 译

Riemann 曲面的(参)模 [moduli of a Riemann surface; модули римановой поверхности]

一些数值特征 (参数), 它们对所有保形等价的 Riemann 曲面都是同一个, 并且它们的总体刻画了给定 Riemann 曲面的保形等价类. 在此两个 Riemann 曲面 R_1 和 R_2 称为保形等价的 (conformally equivalent), 如果存在一个从 R_1 到 R_2 上的保形映射. 例如, 拓扑亏格 $g>1$ 的紧 Riemann 面的保形类由 $6g-6$ 个实模数刻画; 一个环面型的 Riemann 面 ($g=1$) 由 2 个模数刻画; 一个 n 连通的平面域, 看成一个具边界的 Riemann 面, 当 $n \geqslant 3$ 时由 $3n-6$ 个模数刻画. 关于 Riemann 面的模数空间的构造见 **Riemann 曲面** (Riemann surfaces), **保形类** (conformal classes).

两平面区域保形等价的必要条件是它们有相同的连通数. 依照 **Riemann 定理** (Riemann theorem), 所有边界点多于一点的单连通区域彼此都是保形等价的; 每一个这样的区域都可以保形映射到一标准区域, 通常取为单位圆盘. 对 n 连通区域, $n \geqslant 2$, 不存在这个 Riemann 映射定理的精确等价: 不可能给出任何固定的区域, 能够将给定连通数的所有无论什么区域单值地保形地映到它上面. 这就导致一规范 n 连通区域的更灵活定义, 它反映这区域的一般几何结构, 但不固定它的模数 (见**保形映射** (conformal mapping)).

z 平面的每一个具非退化边界连续统的双连通区域都可保形映射到某一圆型环域 $r<|w|<R$, $0<r<R<\infty$.这个圆环的边界圆的半径比 R/r 是一保形不变量，并称为双连通区域 D 的模数(modulus of the doubly-connected domain D). 令 D 为一 n 连通区域，$n\geqslant 3$，具有非退化边界. D 可以保形映射到某一 n 连通圆型域 Δ,它是一圆型环域 $r<|w|<R$ 去掉 $n-2$ 个以 $C_k=\{w:|w-w_k|=r_k\}(k=1,\cdots,n-2)$ 为边界圆的圆盘；圆 $C_k(k=1,\cdots,n-2)$ 位于圆环 $r<|w|<R$ 中，并且每两个都没有公共点. 在此可以假定 $R=1$ 和 $w_1>0$.那么，Δ 依赖于 $3n-6$ 个实参数：$n-1$ 个数 $r,r_1,\cdots,r_{n-2}$ 和 $2n-5$ 个实参数定义圆 $C_k(k=1,\cdots,n-2)$ 的中心 w_k.这 $3n-6$ 个实参数可以看做当 $n\geqslant 3$ 时 n 连通区域 D 的模数(moduli of the n-connected domain D).

作为 n 连通区域 D 的模数也可以取其他任何 μ 个实参数($\mu=1$,如果 $n=2$; $\mu=3n-6$, 如果 $n\geqslant 3$)，它决定 D 的一个保形映射将它映到其他形状的某一 n 连通区域.

参考文献

[1] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[2] Bers, L., Uniformization, moduli, and Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 257-300.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[4] Courant, R., Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, 1950.

Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев 撰　钟同德 译

(参)模问题 [moduli problem; модулей проблема]

关于亏格 g 的代数曲线的参模簇的有理性或单有理性的经典问题.

亏格 g 的 Riemann 曲面依赖于 $3g-3$ 个复参数(在同构意义下)——(参)模(见 **Riemann 曲面的(参)模**(moduli of a Riemann surface).代数闭域 k 上亏格 g 非异射影曲线类的集合具有拟射影代数簇的结构 M_g(见[3]-[5]).

对于 $g=0$ 和 1，流形 M_g 的结构很简单：M_0 只含一个点，M_1 同构于仿射直线 A^1.所以参模问题指的是 $g\geqslant 2$ 的曲线，而且可以表达为：亏格 $g\geqslant 2$ 的曲线的参模簇 M_g 是否有理，至少，是否单有理？M_g 的有理性仅当 $g=2$ 时才被建立(见[2]，在此文献中 M_2 有了明确的描述).

证明 M_g 的单有理性的一般方法已经在[6]中被构作. 利用这个方法，对所有的 $g\leqslant 10$ 已证明了 M_g 的单有理性. M_{11},M_{12},M_{13} 的单有理性也已获证.

参模问题常常被赋予更广泛的含义(例如可参见[5]):人们用它来泛指与下述内容有关的一大堆问题：某些代数对象(簇、向量丛、自同态等)的参模空间的存在性，对它们各种代数几何性质的研究以及参模空间的紧化技术等(见(参)**模理论**(moduli theory)).

参考文献

[1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[2] Igusa, J., Arithmetic variety of moduli for genus two, *Ann. of Math.*, **72** (1960), 3, 612-649.

[3] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[4] Mumford, D., Stability of projective varieties, *l'Enseign. Math.*, (2), **23** (1977), 1-2, 39-110.

[5] Popp, H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, Springer, 1977.

[6] Severi, F., Sulla classificazione delle curve algebriche e sul theorema d'esistenza di Riemann, *Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend.*, **24** (1915), 877-888.

В. А. Исковских 撰

【补注】现在已经知道当 $g\geqslant 24$ 时 M_g 是一般型的(见**一般型代数曲面**(general-type algebraic surface)),而且对 $g=23$ 有正的小平维数(见[A1],[A2]).因此当 $g\geqslant 23$ 时，M_g 不是单有理的. 对 $g=11,12,13$, M_g 是单有理的. 又，M_{15} 的小平维数是负的. 当 $g=16,\cdots,22$ 时，M_g 的性状至今(1997)仍不清楚.

参考文献

[A1] Chang, M. and Ran, Z., Unirationality of the moduli space of curves of genus 11, 13 (and 12), *Invent. Math.*, **76** (1984), 41-54.

[A2] Eisenbud, D. and Harris, J., The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus g ≥ 23, *Invent. Math.*, **90** (1987), 359-387.

[A3] Harris, J. and Mumford, D., On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **67** (1982), 23-86.

[A4] Mori, S. and Mukai, S., Uniruledness of the moduli space of curves of genus 11, in M. Reynard and T. Shioda (eds.): Algebraic Geometry, Lecture notes in math., Vol. 1016, Springer, 1983, 334-353.

[A5] Sernesi, E., L'unirazionalità delle varietà dei moduli delle curvi di genere dodici, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (Ⅳ), Ⅷ (1981), 405-439.

[A6] Shepherd-Barron, N., The rationality of certain spaces associated to trigonal curves, in S. J. Bloch (ed.): Algebraic Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46, 1, Amer. Math. Soc., 1987, 165-171.

[A7] Shepherd-Barron, N., Invariant theory for S_5 and the rationality of M_6, *Compos. Math.*, 7 (1989), 13-25.

[A8] Harris, J., Curves and their moduli, in S. J. Block and S. J. Bloch (eds.): Algebraic Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol 46. 1, Amer. Math. Soc., 1985,

99－143.

[A9] Eisenbud, D. and Harris, J., Limit linear series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **10** (1984), 277－280. 陈志杰 译

(参)模理论[moduli theory; модулей теория]

研究代数几何学中的对象的连续族的理论.

设 A 是代数几何学里的对象(簇、概形、向量丛等)的一个类,其上已给出了一个等价关系 R. 基本的分类问题(等价类集合 A/R 的描述)有以下两个部分: 1)离散不变量的描述,这些不变量通常使得 A/R 有一个到可数多个子集的划分,子集中的对象已是连续地依赖于参数; 2)在参数集上指定一个代数几何结构并对此进行研究. 第二部分就是参模理论研究的内容.

参模理论起源于椭圆函数的研究: 存在不同的椭圆函数域(或它们的模型——C 上同构的椭圆曲线)的连续族,它以复数作为参数化. 首先引入术语"参模"的 B. Riemann 证明了亏格 $g \geqslant 2$ 的 C 上代数函数域(或它们的模型: 紧 Riemann 曲面)依赖于 $3g-3$ 个连续复参数——(参)模(moduli).

参数理论中的基本概念. 设 S 是一个**概形**(scheme)(一个复或代数空间). 以概形 S 参量化的对象族(或如同人们常说的,"在 S 上"或"以 S 作基")是对象的一个集合

$$\{X_s: s \in S, X_s \in A\},$$

并被配备了与基 S 的结构相容的一个附加结构. 在具体的情形里,这个结构是被明显地给出的. 族的函子(functor of families)是从概形(或空间)范畴到如下地定义的集合范畴里的反变函子 $\mathscr{M}: \mathscr{M}(S)$ 是 S 上同构族的类的集合. 对于每个态射 $f: T \to S$, 可以关联一个映射 $f^*: \mathscr{M}(S) \to \mathscr{M}(T)$, 对于 S 上的一个族, f^* 指定了 T 上的拉回族或诱导族与之对应.

设 M 是概形(复或代数空间)的范畴里的一个对象, h_M 是这个范畴里的点的函子,也就是说, $h_M = \mathrm{Hom}(S, M)$. 如果族的函子 $\mathscr{M}$ 是可表的,即 $\mathscr{M} = h_M$ 对某个 M, 则存在以 $\mathscr{M}$ 为基的万有族, M 被称为精细参模概形(fine moduli scheme)(相应地: 精细复参模空间(fine complex moduli space)或精细代数参模空间(fine algebraic moduli space)). 函子 $\mathscr{M}$ 只在极少的情形是可表的,所以就引入了粗糙参模概形的概念. M 被称为粗糙参模概形(coarse moduli scheme), 如果有一个函子的态射 $\varphi: \mathscr{M} \to h_M$, 它具有以下性质: a) 如果 $S = \mathrm{Spec}\, K = \mathrm{pt}$ 是一个点(这里的 K 是代数闭域), 则映射 $\varphi: \mathscr{M}(\mathrm{pt}) \to h_M(\mathrm{pt})$ 是一一映射; 换句话说,概形 M 的几何点的集合与被参量化对象的等价类的集合之间有一个自然的一一对应; b) 对每个概形 N 以及函子的态射 $\psi: \mathscr{M} \to h_N$, 存在唯一的态射 $\chi: h_M \to h_N$, 使得 $\psi = \chi \circ \varphi$. 复和代数参模空间的粗糙概形也类似地定义.

虽然粗糙参模概形唯一地参量化了由给定的离散不变量所确定的对象的类,其上的自然族不具有强普遍性质(与精细参模概形上的族恰成对照). 在相当多的情形里,粗糙参模概形(空间)已经存在.

例 1)代数曲线的参模(moduli of algebraic curves). 设 $A/R = \mathfrak{M}_g$(相应地, $\overline{\mathfrak{M}}_g$)是代数闭域 K 上亏格 $g \geqslant 2$ 射影非异曲线(相应地,稳定曲线)的同构类的集合. S 上的族是概形的光滑(平坦)态射 $f: X \to S$, 它的纤维是亏格 g 的光滑(稳定)曲线,则存在粗糙(但不是精细的)参模概形 M_g(相应地、$\overline{M}_g$), 它是 K 上拟射影(射影)不可约正规概形(见[3],[5],[6]).

2)带 n 级结构(带 Jacobi 刚性(Jacobian rigidity))的代数曲线的参模. 设 $f: X \to S$ 是亏格 $g \geqslant 1$ 的射影曲线的光滑族(相应地,稳定曲线的平坦族), 设 n 是在 S 上可逆的整数,且设 $R^1 f*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ 是艾达尔拓扑里常层 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 的第一个正象, 则 $R^1 f*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ 是局部自由的,秩为 $2g$, 而且配备有取值在 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 内的局部非退化辛形式,精确到相差 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 内的一个可逆元. X 上的 n 级 Jacobi 结构就是一个辛同构

$$R^1 f*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}.$$

设 $\mathscr{M}_{g,n}$(相应地, $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$)是亏格 $g \geqslant 2$ 的光滑(相应地、稳定)曲线的族的除子,带有 n 级 Jacobi 刚性. 则对于 $n \geqslant 3$、$\mathscr{M}_{g,n}$(相应地, $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$)可用 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[1/n, \zeta_n]$ 上的拟射影(射影)概形 $M_{g,n}$(相应地, $\overline{M}_{g,n}$)来表示, 这里 ξ_n 是 n 次单位根的逆象,也就是说,存在特征数与 n 互素的域上的亏格 $g \geqslant 2$ 的光滑(稳定)曲线的精细参模概形 $M_{g,n}$(相应地、$\overline{M}_{g,n}$), 并带有 n 级 Jacobi 刚性. 对充分大的 n、概形 $M_{g,n}$ 是光滑的([5]).

3)极化代数簇(polarized algebraic varieties). 极化族是一个二元组 $(X/S, \mathfrak{P}/S)$, 这里 X/S 是簇的光滑族,即一个光滑真态射 $f: X \to S$, $\mathfrak{P}/S$ 是相对丰富可逆层 $\mathscr{L}_{X/S}$ 在 $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}\,X/S)$ 内的以 $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}^0 X/S)$ 为模的类, 这里 $\mathrm{Pic}\,X/S$ 是相对 Picard 概形, $\mathrm{Pic}^0 X/S$ 是它的零截面的连通分支. 在这种情形里,构造了极化族的除子 $\mathscr{M}_h$, 带着给定的 Hilbert 多项式 h. 在没有附加限制时,这个函子不是可表的. 只是在个别的情形才知道了粗糙参模空间的存在性(1989).

对于极化代数簇,也存在 n 级刚性的概念.

4)向量丛(vector bundles). 关于代数簇 X 上的 n 秩向量丛的参模空间,也有一些结果. 在这种情形里, S 上的一个族是 $X \times S$ 上的一个向量丛. 请参见[7],[10]－[14]以得到关于结果和细节的描述.

局部和整体理论. 局部理论起源于复结构的形变理论（见**形变**（deformation）1）和2））. 整体理论的基本方法是可表函子理论、几何不变量理论、代数堆和形式参模的代数化的方法.

整体参模空间的构造方法可回溯到经典的**不变量理论**（invariants, theory of）. 可归结如下：构造一个充分大的族 $X \to H$，它包含被研究对象的所有等价类的代表元，而且使得 H 上的等价关系可归结为代数群 G 的作用. 则可利用代数群在代数簇（概形、空间）上的作用理论以阐明在对应范畴内的商 H/G 的存在性条件. 构造模 $X \to H$ 的基本工具是 **Hilbert 概形**（Hilbert scheme）的理论. 在这种方法里，构造族 $X \to H$ 时遇到的困难被归结为把被研究对象同时浸入到射影空间内的问题. 关于这样的同时浸入的可能性的重要结果就是松阪辉久（Matsusaka）定理. 于是剩下的困难就是商 H/G 的存在性问题. 这里有范畴商和几何商这两种概念、粗糙参模空间的构造问题归结为几何商的存在性问题，这里用到了点的稳定性的概念，它对应于处于一般位置的轨道的概念. 关于特征数 0 的域上的约化群在代数簇上的作用的一些结果已经被推广到特征数 $p>0$ 的域的情形.

另一种研究整体参模理论的方法是代数堆方法，也就是把局部形变理论整体化的方法. 在这个方法里，为研究族的整体函子的可表性，第一步就是对每个对象 X_0 建立起形式通用形变的可代数化性. 构造整体参模空间的困难在于族的基关于等价关系的因子分解并不都是分离空间. 在这种情形里，表示函子 $\mathscr{M}$ 的对象被一个代数堆所代替. 对它的性质的研究可得到参模空间的一些信息.

C 上整体参模理论的方法之一是**周期映射**（period mapping）理论. 这里的基本对象是对于给定的 Hodge 数的、权为 k 的极化 **Hodge 结构**（Hodge structure）的分类空间 D. 对于 **C** 上的极化代数簇的族 $X \to S$，周期定义了 S 到相应的 Hodge 结构的分类空间 D 上的一个映射. 参模问题归结为研究使周期映射成为一一映射的条件. 周期映射具有（整体）单射性就是所谓的局部-整体 Torelli 问题（local-global Torelli problem）. 沿着这条路径已经证明了曲线、Abel 簇和 $K3$ 曲面的粗糙参模空间的存在性.

参模簇 M 的紧化问题就是找出一个自然的完全簇 $\bar{M}$（在域 **C** 的理论里，射影的或紧的）它包含 M 作为稠密开子集，并且对边界 $\bar{M}\setminus M$ 作出描述以及几何解释. 在例 1）中，亏格 $g\geqslant 2$ 的曲线的粗糙参模簇 M_g 的自然紧化是稳定曲线的射影参模簇 $\bar{M}_g$. 对于 C 上的极化 Abel 簇，已经知道了参模簇紧化的一些方法.

参考文献

[1] Artin, M., Algebraization of formal moduli I, in Global Analysis, Univ. Tokyo Press, 1969, 21-71.

[2] Artin, M., Versal deformations and algebraic stacks, *Invent. Math.*, **27** (1974), 165-189.

[3] Deligne, P. and Mumford, D., The irreducibility of the space of curves of given genns, *Publ. Math. IHES*, **36** (1969), 75-109.

[4] Dieudonné, J. and Carrell, J., Invariant theory, old and new, Acad. Press, 1971.

[5] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[6] Mumford, D., Stability of projective varieties, *l'Enseign. Math.* (2), **23** (1977), 39-110.

[7] Gieseker, D., Global moduli for varieties of general type, *Invent. Math.*, **43** (1977), 233-282.

[8] Gieseker, D., On the moduli of vector bundles on an algebraic surface, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 45-60.

[9] Matsusaka, T., Polarized varieties with a given Hilbert polynomial, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 4, 1027-1077.

[10] Newstead, P. E., Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces, Springer, 1978.

[11] Okonek, O., Schneider, M. and Spindler, H., Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser, 1980.

[12] Popp, H., Moduli theory and classification theory of algebraic varietics, Springer, 1977.

[13] Seshadri, C. S., Spaces of unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, **85** (1967), 302-336.

[14] Тюрин, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **29** (1974), 59-88.

В. А. Исковских 撰

【补注】近来在代数曲线和 Abel 簇的参模空间的研究方面有了不少进展，可参见[A2]的附录. 其中最重要的是 M_g 的紧化问题（见[A1]第 5 章的附录，[A1]是[5]的增补版）以及当 $g\geqslant 24$ 时证明了 M_g 是一般型的（[A2]）.

G. Faltings 构造了 **Z** 上主极化 Abel 簇的参模空间 A_g 的紧化，见[A3].

参考文献

[A1] Mumford, D. and Fogarty, J., Geometric invariant theory, Springer, 1982.

[A2] Harris, J., Curves and their moduli, in S. J. Bloch (ed.): Algebraic Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46. 1, Amer. Math. Soc., 1985, 99-143.

[A3] Faltings, G., Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietaten, in F. Hirzebruch, et al. (ed.): Arbeitstagung Bonn 1984, Lecture notes in math., Vol. 1111, Springer, 1985, 321-383.

陈志杰 译

模[**modulus**; **модуль**]

各种数学对象的一个数值特征. 通常一个模的值是一个非负实数，即 $\mathbf{R}^+$ 中一个元素，具有某些由所讨论对象的集合 Ω 的性质决定的特征性质. 模的概念

在数学的各种不同分支中出现，虽然有时在其他的名称下——**绝对值**（absolute value）；**范数**（norm）等等．所有这些实质上都是实数或复数的**绝对值**（absolute value）概念的推广（但模这个术语通常是指一种特殊形式的推广）．这里函数 $\Omega \to \mathbf{R}^+$ 原来是 Ω 中某种结构到 $\mathbf{R}^+$ 中一种（代数）结构的一个态射，其中最重要的结构是序、加法和乘法．在这方面绝对值的基本性质必须保持（见下文 α）－ε））．在更抽象的情况下自然地用一个有序半环来代替 $\mathbf{R}^+$（例如，**测度**（measure），**容量**（capacity），**质量**（mass）等等符合模的这种概念）．最后，模这术语也指另外一些对象的数值特征，例如，平面区域的模，**圆环的模**（modulus of an annulus），**Riemann 曲面的（参）模**（moduli of a Riemann surface），**连续模**（continuity, modulus of）或**光滑模**（smoothness, modulus of）（以及甚至在弹性（压缩，切变）理论中的模）．然而，在所有这些情形中可能引入一个函数地依赖于模且更适当地反映所讨论对象性质的值（例如，对一族曲线，引入**极值长度**（extremal length）代替模）．

例 1）一个**半序空间**（semi-ordered space）P 的元素 x 的模是数

$$|x| = x^+ + x^-,$$

其中 $x^+(x^-)$ 是 x 的正（负）部．这里，与实数一样，

α）$|x| \geqslant x, -x$; $|x| = |-x|$;

β）$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$（0是 P 中的零）.

2）一个分离的**准 Hilbert 空间**（pre-Hilbert space）H（特别是有限维向量空间）的元素 x 的模是数

$$|x| = \langle x, x \rangle^{1/2},$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 H 中的**内积**（inner product）．它是 H 中的范数，因而

γ）$|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

δ）$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$，$\lambda$ 是标量.

3）一个**局部紧除环**（locally compact skew-field）的元素的模是数

$$|x| = \frac{\mu(xS)}{\mu(S)} \quad (x \neq 0) \text{ 或 } 0 (x = 0),$$

其中 μ 是 K 的加群上的 **Haar 测度**（Haar measure），而 S 是一可测子集．这里，与 $\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{H}$ 中的数一样.

ε）$|xy| = |x|\,|y|$.

这个概念的一种推广是**自同构的模**（modulus of an automorphism）.

4）域 K 上向量空间 V 的一个自同态 A 的模（一个特殊情形是自同构的模）是数 $\mathrm{mod}_V(A)$，它原来是简单地等于 $\mathrm{mod}_K(\det A) = |\det A|$，这里 $|\cdot|$ 是例 3）的模． М. И. Войцеховский 撰

【补注】 通常一个模简单地是所考虑的数学对象所依赖的某个数值参数．例如，一个**椭圆积分的模**（modulus of an elliptic integral），补模数（在 **Jacobi 椭圆函数**（Jacobi elliptic functions）中）或**同余式**（congruence）的模；亦见**域上的范数**（norm on a field）；**赋值**（valuation）． 葛显良 译 鲁世杰 校

曲线族的模[modulus of a family of curves; модуль семейства кривых]

曲线族的共形不变数值特征．它是这一曲线族的**极值长度**（extremal length）的倒数． 张鸿林 译

圆环的模[modulus of an annulus; модуль кольца]

圆环 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ 内分隔边界圆周的闭曲线族的**极值长度**（extremal length）的倒数值；圆环的模等于

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

经**共形映射**（conformal mapping）为相伴的圆环 K，圆环域 G 的模（modulus of an annular domain）m_G 便可得出．这推出 $m_G = D(u)/2\pi$，其中 $D(u)$ 是 G 到 $K:\{1 < |w| < e^{m_G}\}$ 的映射函数 u 的实部的 **Dirichlet 积分**（Dirichlet integral）.（因此，一个给定的**圆环域**（annular domain）被映射成边界圆周的半径具有固定比的圆环．这一事实可取作圆环模的另一定义，其推广引出平面区域模的概念.）

环域模的推广是开 **Riemann 曲面**（Riemann surface）R 关于一邻域的素端 γ（见**聚值集**（cluster set）；**极限元**（limit elements））的模（modulus of a prime end）m_γ．该素端是双曲型或抛物型，以及 R 存在或不存在 **Green 函数**（Green function），取决于 m_γ 是有限的或无限的.

对于双曲型单连通区域 D，所谓关于 $z_0 \in D$ 的约化模（reduced modulus）m_{z_0} 定义为极限

$$\lim_{r \to 0}\left[m(r) + \frac{1}{2\pi}\ln r\right],$$

其中 $m(r)$ 是环域 $D(r) = D \cap \{|z - z_0\} > r\}$ 的模．这推出 $m_{z_0} = (\ln R)/2\pi$，其中 R 是 D 关于 $z_0 \in D$ 的共形半径（见**共形半径**（conformal radius））.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975.

杨维奇 译

自同构的模[modulus of an automorphism; модуль автоморфизма]

与局部紧群的自同构相联系的一个正实数．设 G 是一个局部紧群，α 是 G 作为拓扑群的一个自同构，则 α 的模定义为

$$\mathrm{mod}_G(\alpha)=\frac{\mu(\alpha S)}{\mu(S)},$$

其中，μ 是 G 上的左不变 **Haar 测度**（Haar measure），S 是 G 的任意一个正测度紧子集（实际上，$\mathrm{mod}_G(\alpha)$ 并不依赖 S）．如果 G 是紧的或离散的，则 $\mathrm{mod}_G(\alpha)\equiv 1$，因为对于紧群，可以取 $S=G$，而对于离散群，可以取 $S=\{1\}$，其中 1 是 G 的单位元．

如果 α 和 β 是 G 的两个自同构，则有

$$\mathrm{mod}_G(\alpha\cdot\beta)=\mathrm{mod}_G(\alpha)\mathrm{mod}_G(\beta).$$

如果 Γ 是一个拓扑群，它经自同构连续地作用于 G，则相应的同态 $\pi:\Gamma\to\mathrm{Aut}\,G$ 定义了连续的同态：$\mathrm{mod}_G\circ\pi:\Gamma\to\mathbf{R}_+^*$，这里的 $\mathbf{R}_+^*$ 是正实数乘法群．特别地，如果 $\Gamma=G$ 及 $\pi(g)(x)=gxg^{-1}$，则 $\pi\circ\mathrm{mod}_G:G\to\mathbf{R}_+^*$ 是一个连续的同态．这个同态是平凡的当且仅当如果 G 上的左不变 Haar 测度同时又是右不变的．满足最后这一个条件的群称为幺模的（unimodular）．

如果 K 是一个局部紧体，则对每一个非零元素 $a\in K$，通过用与 a 相乘，都定义了 K 的加法群的自同构 $\mu(a)$．函数 $\mathrm{mod}_K\circ\mu:K\setminus\{0\}\to\mathbf{R}_+^*$ 用于研究局部紧体的构造．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6; 7; 8(译自法文).

[2] Weil, A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940.

[3] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

Л. В. Кузьмин 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

椭圆积分的模数 [modulus of an elliptic integral; модуль эллиптического интеграла]

Legendre 标准型**椭圆积分**（elliptic integral）表示式中的参数 k，例如第一类不完全椭圆积分

$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \qquad (*)$$

中的 k．数 k^2 有时称为 Legendre 模数（Legendre modulus），$k'=\sqrt{1-k^2}$ 称为补模数（complementary modulus）．应用中通常取正规情形 $0<k<1$；此时使 $\sin\theta=k$ 的锐角 θ 称为模角（modular angle）．模数 k 也出现于 **Jacobi 椭圆函数**（Jacobi elliptic functions）的表示式中．Jacobi 椭圆函数是由形如 $(*)$ 的椭圆积分的反演产生的． Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bowman, F., Introduction to elliptic functions, Dover, reprint, 1961.

沈永欢 译

分离法则 [modus ponens 或 law of detachment 或 rule of detachment; модус поненс]，亦称假言推理

形式逻辑系统的一个**推导法则**（derivation rule）．分离法则用图示写为

$$\frac{A \quad A\supset B}{B},$$

其中 A 和 B 皆表示形式逻辑系统的公式，并且 $\supset$ 是逻辑联接词**蕴涵**（implication）．分离法则容许由前提 A（小前提（minor premise））和 $A\supset B$（大前提（major premise））推出 B．如 A 和 $A\supset B$ 在形式系统的某一解释下皆真，那么 B 亦真．分离法则和其他推演法则以及一个形式系统的诸公理一起，决定了由一个公式集合 M 可推演出的公式类；这个类包含 M 的公式及诸公理，并且是关于诸推演法则封闭的最小的类．

分离法则可以看成给定形式系统的推演上的一个运算，由 A 的推演 α 和 $A\supset B$ 的推演 β 容许构成给定公式 B 的推演． В. Н. Гришин 撰

【补注】 分离法则的更准确的拉丁文名是 modus ponendo ponens．另外，还有否定分离法则（modus tollendo ponens），记作

$$\frac{\neg B \quad A\vee B}{A},$$

其中 $\neg$ 表示否定，并且 $\vee$ 表示逻辑"或"．

参考文献

[A1] Suppes, P., Introduction to logic, v. Nostrand, 1957.

[A2] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

卢景波 译

矩 [moment; момент]

概率分布（probability distribution）的一种数字特征．随机变量 X 的 k 阶矩（moment of order k）（$k>0$ 为一整数）定义作数学期望 $\mathsf{E}X^k$，如果它存在．如果 F 是随机变量 X 的**分布函数**（distribution function），则

$$\mathsf{E}X^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\,dF(x). \qquad (*)$$

概率论中矩的定义，是力学中起着重要作用的相应概念的直接类比：对后者，公式 $(*)$ 解释作质量分布的矩．随机变量 X 的一阶矩（力学中的静力矩）是数学期望 $\mathsf{E}X$．值 $\mathsf{E}(X-a)^k$ 称为相对于 a 的 k 阶矩，$\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^k$ 称为 k 阶中心矩（central moment）．二阶中心矩 $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2$ 称为**方差**（dispersion）（或方差（variance））$\mathsf{D}X$（力学中的惯性矩）．值 $\mathsf{E}|X|^k$ 称为 k 阶**绝对矩**（absolute moment）（对非整数的 k 阶绝对矩也有意

义）. 类似地，随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的**联合分布**(joint distribution)(见**多维分布**(multi-dimensional distribution)) 的矩定义如下：对任意整数 $k_i \geqslant 0$, $k_1 + \cdots + k_n = k$，数学期望 $\mathrm{E}(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n})$ 称为 k 阶混合矩 (mixed moment)，$\mathrm{E}(X_1 - \mathrm{E}X_1)^{k_1} \cdots (X_n - \mathrm{E}X_n)^{k_n}$ 称为 k 阶中心混合矩 (central mixed moment). 混合矩 $\mathrm{E}(X_1 - \mathrm{E}X_1)(X_2 - \mathrm{E}X_2)$ 称为**协方差**(covariance)，是描述随机变量之间相依性 (见**相关(统计学中的)**(correlation (in statistics))) 的基本数字特征之一. 矩的许多性质 (特别是关于矩的不等式) 是下述事实的推论：对任意随机变量 X，函数 $g(k) = \log \mathrm{E}|X|^k$ 在其有定义的每个有限区间上关于 k 是凸的；$(\mathrm{E}|X|^k)^{1/k}$ 是 k 的非减函数. 矩 $\mathrm{E}X^k$ 和 $\mathrm{E}(X-a)^k$ 存在，当且仅当 $\mathrm{E}|X|^k < \infty$. $\mathrm{E}|X|^{k_0}$ 存在，蕴含一切 $k \leqslant k_0$ 阶矩存在. 如果对一切 $i = 1, \cdots, n$，$\mathrm{E}|X_i|^k < \infty$，则对一切 $k_i \geqslant 0$, $k_1 + \cdots + k_n \leqslant k$，混合矩 $\mathrm{E}X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$ 存在. 在有些情形下，为了确定矩，矩生成函数 (moment generating function) 是有用的. 这一函数 $M(t)$ 在其幂级数展开式中以分布的矩作为系数；在整值随机变量的情形下，这一函数通过关系式 $M(t) = P(e^t)$ 与**生成函数**(generating function) $P(s)$ 相联系. 如果 $\mathrm{E}|X|^k < \infty$，则随机变量 X 的**特征函数**(characteristic function) $f(t)$ 有直到 k 阶的连续导数，且 k 阶矩是 $f(t)$ 按 t 的幂展开式中 $(it)^k / k!$ 的系数，

$$\mathrm{E}X^k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t)|_{t=0}.$$

如果特征函数在零点有 $2k$ 阶导数，则 $\mathrm{E}|X|^{2k} < \infty$.

关于矩与半不变量的联系，见**半不变量**(semi-invariant). 如果分布的矩已知，就可以对随机变量与其数学期望的偏差的概率用不等式作出某些判断；最著名的是 **Чебышев 不等式** (Chebyshev inequality)

$$\mathrm{P}\{|X - \mathrm{E}X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}, \ \varepsilon > 0,$$

及其推广.

通过矩序列决定概率分布的问题称为**矩问题**(moment problem). 这类问题最先由 П. Л. Чебышев 在 1874 年研究极限定理时加以讨论. 为了使随机变量 X 的概率分布由其矩 $\alpha_k = \mathrm{E}X^k (k = 1, 2, \cdots)$ 唯一决定，一个充分条件是 Carleman 条件 (Carleman condition)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{2k}^{1/2k}} = \infty$$

成立. 对随机向量的矩也有类似的结果.

在极限定理的证明中，矩的应用基于以下事实：设 $F_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是一分布函数序列，它们的一切阶矩 $\alpha_k(n)$ 都是有限的，且对每个整数 $k \geqslant 1$，假定

$$\alpha_k(n) \to \alpha_k, \ \text{当} \ n \to \infty \ \text{时},$$

其中 α_k 是有限的，则存在一子序列 F_{n_i} 弱收敛于一个以 α_k 为其矩的分布函数 F. 如果这些矩唯一决定 F，则序列 F_n 弱收敛于 F. 这就是所谓的**矩法**(概率论中的)(moments, method of (in probability theory)). 矩法被特别应用于数理统计中经验分布与理论分布的偏差，以及对一个分布的参数的统计估计的研究 (关于样本矩及一个确定分布的矩的估计 (见**经验分布**(empirical distribution)).

A. B. Прохоров 撰

【补注】矩母函数定义作 $M(t) = \mathrm{E}e^{tX}$.

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971.

刘秀芳 译

矩问题 [**moment problem**; **моментов проблема**]

实域或复域内的一种**插值**(interpolation) 问题.

实域内的矩问题原型的最早精确描述应归功于 T. J. Stieltjes (1894). 他提出并事实上解决了下述与**连分数**(continued fraction) 有关的问题：给定一个实数序列 $\{\mu_n\} (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 在 $[0, +\infty)$ 上确定一个有界非减函数 $\psi(x)$，使得

$$\int_0^{\infty} x^n d\psi = \mu_n, \ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

正如每一种插值问题一样，(1) 的解可分成两个部分.

问题 A. 令 $\mathfrak{M}$ 为使无穷方程组 (1) 至少有一个满足上述性质的解 ψ 的所有实数列 $\{\mu_n\}$ 的集合；为使 $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$. (构造性地) 确定 $\mu_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 所应满足的充分必要条件.

问题 B. 对给定的 $\mu_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$，$\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$，在 $[0, +\infty)$ 上的有界非减函数 ψ 类中，找出满足无穷方程组 (1) 的所有解集.

Stieltjes 称 (1) 的左端为"矩". 这一术语借自于力学. 如果把 $d\psi(x)$ 解释为 $[x, x+dx]$ 上的质量，那么积分 $\int_0^X d\psi(t)$ 就是 $[0, X]$ 上的质量. 这样，积分表达式 (1) 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时就分别为 $[0, \infty)$ 上的总质量 $\int_0^{\infty} d\psi(x)$ (对应于 (1) 式的 $n=0$) 关于原点 $x = 0$ 的第一矩 (静力矩) 和第二矩 (转动惯量). 将这一概念进行推广，Stieltjes 把积分

$$\int_0^{\infty} x^n d\psi(x)$$

称作是 $[0, +\infty)$ 上以 ψ 为分布的给定质量 $\int_0^{\infty} d\psi(x)$ (关于 $x = 0$) 的 n 阶矩 (moment of order n).

Stieltjes 通过下述方式把矩问题的求解与源于积分的"自然"连分式联系起来，

$$I(z,\psi)=\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} \sim \frac{\mu_0}{z} - $$

$$-\frac{\mu_1}{z^2}+\frac{\mu_2}{z^3}-\frac{\mu_3}{z^4}+\cdots, \qquad (2)$$

更确切地说，与形式级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\mu_n}{z^{n+1}}$$

联系起来．对应于积分 $I(z,\psi)$，有一个连分式展式

$$I(z,\psi)\sim \frac{1|}{|a_1 z}+\frac{1|}{|a_2}+\frac{1|}{|a_3 z}+\frac{1|}{|a_4}+\cdots \qquad (3)$$

以及另一个与之"密切相关"的连分式展式

$$I(z,\psi)\sim \frac{\lambda_1|}{|z+c_1}-\frac{\lambda_2|}{|z+c_2}-\frac{\lambda_3|}{|z+c_3}-\cdots. \qquad (4)$$

对（3）中的连分式进行如下形式的约简：

$$z-\frac{\alpha|}{|1}-\frac{\beta|}{|z-\gamma}=z-\alpha-\frac{\alpha\beta}{z-(\beta+\gamma)},$$

即可得到连分式展式（4）．应用连分式理论，Stieltjes 证明：在某种确定意义下，（1）式可解（等价于 $\{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$）的充分必要条件是（3）式中的所有 a_n 均为正数，这又相当于（4）式中的 λ_n 和 c_n 均为正数．用 μ_n 来表示，这些条件等价于行列式

$$\Delta=\det\|\mu_{i+j}\|_{i,j=0}^{n}$$

及

$$\Delta_n^{(1)}=\det\|\mu_{i+j+1}\|_{i,j=0}^{n}$$

取正值．

如果方程组（1）有唯一解 ψ，则称矩问题（1）关于给定的序列 $\{\mu_n\}$（$\{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$）是适定的（well-posed）或确定的（determined）．另一方面，已证明：如果方程组（1）对给定的 μ_n（$\{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$）有不只一个解，则它必有无穷多解．

例如：函数

$$\psi_1(x)=\int_0^x t^{-\ln t}dt$$

和

$$\psi_2(x)=\int_0^x t^{-\ln t}[1-\theta\sin(\pi\ln t)]dt, \theta\in[0,1]$$

对所有 $n=0,1,2,\cdots$ 有相同的矩

$$\int_0^\infty x^n d\psi_1(x)=\int_0^\infty x^n d\psi_2(x).$$

Stieltjes 成功地构造了（1）的某些解．当然，在（1）为适定的这个众所周知的意义下，这些解都彼此相同．当矩问题（1）是不适定的（ill-posed）或不确定的（undetermined）时，Stieltjes 的解具有一些极值性质．随后，Stieltjes 证明了，（1）是适定的或不适定的，取决于连分式（3）的收敛性或发散性（等价于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的收敛性或发散性）．连分式（3）可能收敛于 $I(z,\psi)$，而此时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mu_n}{z^{n+1}}$$

却可能对所有 $z\in\mathbf{C}$ 均发散．

在 Stieltjes 的工作（[1]）之前，实域内的矩问题缺少一般性的研究，并且提法也欠确切；例如，在 П. Л. Чебышев 的一系列工作（[2]）和 A. A. Марков 的工作（[3]）中就是这样．他们主要研究了下述问题．描述 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的函数类 U 的性质，使得由关系式

$$p(x)\in U$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n e^{-x^2}dx,\ n=0,1,2,\cdots \qquad (5)$$

可推出恒等式

$$p(x)=e^{-x^2}.$$

换言之，这里所涉及的是插值问题（5）的唯一性函数类 U 的最大完全与构造特征．矩问题（5）的解在概率论与数理统计中起着重要作用．多项式 $\omega_n(x)$，作为连分式渐近分式（即逼近式）的分母也具有重要意义．对多项式系 $\{\omega_n(x)\}$ 性质的考察为随后的**正交多项式**（orthogonal polynomials）理论开辟了广阔的研究领域．

H. Hamburger（1920）把矩问题（1）推广到了整个实轴 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$．此时，考虑 x 为负值产生了一些特殊性，并且是非平凡的．Hamburger 实质上是利用 Helly 选择原理（见 **Helly 定理**（Helly theorem））来研究

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n d\psi(x)=\mu_n,\ n=0,1,2,\cdots \qquad (6)$$

可解的充分必要条件的，因此完全解决了由（6）式产生的连分式（3）和（4）的收敛性问题．与（6）有关的问题 A 和 B 统称为方程（6）的矩问题．Hamburger 得到了矩问题（6）存在唯一解的准则．矩问题（6）可能是不适定的，而此时对应的（具有相同 μ_n 的）矩问题（1）却可能是适定的（有唯一解）．R. Nevanlinna（1922）借助于积分

$$I(z,\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\psi(x)}{z-x},\ x\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$$

给出了矩问题(6)的一个解，并研究了这些解的性质．他对矩问题(6)的所谓“极值解”发表了重要见解．

基于拟正交多项式理论，M.Riesz(1921)得到了矩问题(6)的解．拟正交多项式，是指形如 $A_n\omega_n(x)+A_{n-1}\omega_{n-1}(x)$ 的线性组合，其中 A_k 为常数，$\omega_k(x)$ 是对应于矩问题(6)的连分式(4)的第 k 个渐近分式的分母．他发现，矩问题(6)的解与关于正交多项式系 $\{\omega_k(x)\}$ 的 Parseval 公式之间有密切联系．T.Carleman(1923－1926)建立了矩问题(6)、拟解析函数论以及可列变量集上的二次型理论这三者之间的联系．他还获得了矩问题(6)的最一般的适定性准则．F.Hausdorff(1923)在(6)式中的函数 $\psi(x)$ 于给定的区间外是一常数这一条件下得到了矩问题(6)的可解性($\Longleftrightarrow \{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$)准则．他有效地构造了矩问题(6)的解(该解在上述假设条件下总是唯一的)；这就有可能寻求到某些准则，使矩问题(6)的解 $\psi(x)$ 具有一系列额外特性(连续性、可微性等)．Carleman 及随后的 M.H.Stone(1932)基于 Jacobi 二次型理论和奇异积分方程理论方面的结果，对矩问题(6)进行了十分细致的研究．E.K.Haviland(1935)和 H.Cramér(1937)把矩问题(6)的 Riesz 理论推广到了多维情形．

矩问题还有许多不同的推广，这些推广主要是下述两个基本框架的变形(或变形组合)．

用另一种形式的函数“矩”系列 $\{\varphi_n(x)\}$ 取代积分式(6)中的幂函数 x^n，以及用其他形式的积分甚或用作用于抽象空间的算子来代替(6)式的左边(例如，当 $\varphi(x)\in L_p(p\geqslant 1)$ 时，用 $\varphi(x)dx$ 取代 $d\psi(x)$ 的情形已被研究)．

因此，就第一个框架而言，有下述所谓的**三角矩问题**(trigonometric moment problem)：给定一个无穷数列 $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$，在 $[-\pi,\pi]$ 上确定一个非减函数 $\psi(x)$，使其满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}d\psi(x)=c_n,\ n=0,\pm 1,\cdots,\quad (7)$$

亦即就方程组(7)求解问题 A 和 B．

对实域内有关矩问题理论的结果可作如下确切描述．设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维 Euclid 空间．定义于 $\mathbf{R}^n$ 中全体 Borel 集类 $\mathscr{B}$ 上的集函数 $\Phi(e)$ 称作是分布函数，如果对所有 $e\in\mathscr{B}$，$\Phi(e)\geqslant 0$，并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(e_i)=\Phi\left[\sum_{i=1}^{\infty}e_i\right]$$

成立，只要 $e_i\cap e_j=\varnothing(i\neq j)$，其中对所有 $i,j=1,2,\cdots$，$e_i\in\mathscr{B}$．

分布函数 Φ 的**谱**(spectrum)$\sigma(\Phi)$，指的是对任意包含 x 的开集 $G\subset\mathbf{R}^n$ 均有 $\Phi(G)>0$ 的所有点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 的集合．设

$$\{\mu_{i_1\cdots i_n}\},\ i_1,\cdots,i_n=0,1,\cdots\quad (8)$$

为 n 重无穷实数列．问题是：(8)中的数应满足怎样的充分必要条件才能使如下的分布函数 Φ 存在，其谱 $\sigma(\Phi)$ 含于预先给定的闭集 F 内，且 Φ 是下述方程组的解：

$$\int_{\mathbf{R}^n} t_1^{i_1}t_2^{i_2}\cdots t_n^{i_n}d\Phi=\mu_{i_1\cdots i_n},\ i_1,\cdots,i_n=0,1,2,\cdots\quad (9)$$

(关于(9)的问题 A)．关于(9)的问题 B 可类似描述．关于(9)的问题 A 和 B 合在一起统称为 F 矩问题(F-moment problem)．F 矩问题是适定的，如果它的解在某种意义下唯一．否则，F 矩问题(9)便称作是不适定的．

定理．F 矩问题(9)在 $\mathbf{R}^2$ 中有解的充分必要条件，是对所有 $(u,v)\in F$ 均取非负值的任何多项式

$$P(u,v)=\sum a_ib_ju^iv^j,$$
$$\sum a_ib_j\mu_{ij}\geqslant 0$$

成立．

对于(9)的不同变形来说，该定理是获得可解性(即问题 A 的解)条件的基础．兹列举其中若干如下．

定理1．为使矩问题(6)($F=\mathbf{R}$)有解，必须

$$\Delta_n=\det\|\mu_{i+j}\|_{i,j=0}^{n}\geqslant 0,\ n=0,1,2,\cdots.$$

谱为非有限点的矩问题(6)有解的充分必要条件是

$$\Delta_n>0,n=0,1,2,\cdots.$$

谱恰由 $k+1$ 个不同点组成的矩问题(6)有解的充分必要条件是

$$\Delta_0>0,\cdots,\Delta_k>0,\ \Delta_{k+1}=\Delta_{k+2}=\cdots=0.$$

在后一种情形下，矩问题(6)总是适定的．

定理2．为使矩问题(1)($F=[0,\infty)$)有解，必须

$$\Delta_n=\det\|\mu_{i+j}\|_{i,j=0}^{n}\geqslant 0,$$

且

$$\Delta_n^{(1)}=\det\|\mu_{i+j+1}\|_{i,j=0}^{n}\geqslant 0,\ n=0,1,\cdots.$$

谱为非有限点的矩问题(1)有解的充分必要条件是

$$\Delta_n>0,\ 且\ \Delta_n^{(1)}>0,\ n=0,1,\cdots.$$

对于谱 $\sigma(\Phi)$ 恰由 $k+1$ 个异于 $x=0$ 的点组成的

矩问题(1),解存在的充分必要条件也已得到.这些条件类似于定理1的最后部分.

定理3.**R** 中的 Hausdorff 矩问题

$$\int_0^1 x^n d\Phi = \mu_n,\ n=0,1,\cdots,\ F=[0,1]$$

有解的充分必要条件是对所有 $k, v=0,1,\cdots$, $\Delta^k\mu_v \geqslant 0$ 成立(此处 Δ^k 表示 k 阶差分算子).

定理4.$\mathbf{R}^2$ 中的 Hausdorff 矩问题

$$\int_0^1\int_0^1 u^i v^j d\Phi = \mu_{ij},\ i,j=0,1,\cdots,\ F=[0,1]\times[0,1]$$

有解的充分必要条件是

$$\Delta_1^n \Delta_2^m \mu_{ij} \geqslant 0,\ n,m,i,j=0,1,\cdots.$$

定理5.若

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2n}^{1/2n}} = +\infty, \tag{10}$$

则矩问题(6)是适定的.

为使矩问题(6)(矩问题(1))适定,μ_n 所必须满足的充分必要条件已被得到(例如,见[4]);然而,与充分性条件(10)比较起来,这些条件就欠明了,并且其陈述显得有些烦琐.

复域内的矩问题是如下所述的一类广义插值问题.设 D 是复平面 **C** 中的一个单连通开域,$\infty \notin D$;$A(D)$ 是 D 内解析的函数空间,其拓扑由任意紧集 $K\subset D$ 上的一致收敛所定义;$A^*(D)$ 是所有在无穷远点的某个邻域 $V^\infty = V^\infty(\gamma)$ 内解析且满足 $\gamma(\infty)=0$, $\mathrm{Supp}\,\gamma \subset D$(后一条件等价于函数 $\gamma\in A^*(D)$ 的奇异点集位于 D 内)的函数 $\gamma(z)$ 组成的空间.$A^*(D)$ 上的拓扑由简单闭 Jordan 曲线族 $\{\Gamma_\alpha\}\subset D$ 的某一条曲线上的一致收敛所定义,它具有性质:对任何紧集 $K\subset D$,有一个 $\Gamma_{\alpha_0}=\Gamma_{\alpha_0}(K)\in\{\Gamma_\alpha\}$,使得 $K\subset \mathrm{int}\,\Gamma_{\alpha_0}(D)$(此处 $\mathrm{int}\,\Gamma_{\alpha_0}$ 表示位于 Γ_{α_0} 内部且有边界 Γ_{α_0} 的单连通开域).已知,$A(D)$ 和 $A^*(D)$ 是对偶空间.

复域内的矩问题提法如下.给定一个整数 $p>1$,函数 $0\neq A_s(z)\in A(D)(s=0,1,\cdots,p-1)$,单叶函数 $W(z)\in A(D)$ 以及由 p 个复数列组成的集合

$$\alpha_p = \{\{a_{ns}\}: n=0,1,\cdots; s=0,\cdots,p-1\},$$

试问,能否找到一个函数 $\gamma(z)\in A^*(D)$,使得等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma [W(z)]^{np} A_s(z)\gamma(z)dz = a_{ns}, \tag{11}$$
$$n=0,1,\cdots;\ s=0,\cdots,p-1$$

成立,其中

$$\mathrm{Supp}\,\gamma \subset \mathrm{int}\,\Gamma \subset \Gamma \subset D\ ?$$

一般来说,不能断定,对每个给定的集合 α_p,无穷方程组(11)至少有一个解 $\gamma(z)\in A^*(D)$.因此,如果(至少)有一个 $\gamma(z)\in A^*(D)$ 满足(11),则称集合 α_p 是 D 容许的.

问题A.确定一个集合 α_p 是 D 容许的(具有构造特征的)充分必要条件.

问题B.设 α_p 是 D 容许的.试问,对于等式(11)右边给定的数 a_{ns},怎样确定所有满足(11)的函数 $\gamma(z)\in A^*(D)$ 的全集合?

问题A与B统称为复域内的矩问题.A. O. Гельфонд([6])于1937年首次就 $p=1$ 且 $A_0(z)\equiv 1$ 的情形考虑了问题B;他指出,问题B原则上可能有解(当 $p=1, A_0(z)=1$ 时,方程组(11)对其右端 D 容许的 a_{ns} 总存在唯一解).问题A和B的许多特例已被研究(见[7]-[10]).利用边值问题理论作为工具(见[11]-[14])可对复域内的矩问题进行充分全面的研究.

一个区域 G、$G\subset \mathbf{C}$ 称为 $2\pi/p$ 不变的($G\in \mathrm{Inv}(2\pi/p)$),如果 $\exp(2\pi i/p)G\equiv G$.

当 $W(D)=G\in\mathrm{Inv}(2\pi/p)$ 以及当 D 的象 $W(D)$ 可以嵌入到某个区域 $G\in\mathrm{Inv}(2\pi/p)$ 时,复区域 D 内的矩问题的解在关于函数 $A_s(z)(s=0,\cdots,p-1)$ 的自然假设下已在[10]中详尽地给出.利用边值理论求解复区域内的矩问题,可获得问题B在所述类型的区域内求积意义上的完全解.特别地,当 $p=1$ 时,每个区域 G 均属于 $\mathrm{Inv}(2\pi/p)$ 类,因此,对于应用中一类重要的,W 象不能被嵌入的区域 D 而言,已经得到了方程组(11)存在唯一解的充分必要条件.这里,原则上有两种不同的情形:$0\in W(D)$ 和 $0\notin W(D)$(对于后一种情形,通过假定 $n=0,\pm1,\cdots$,方程组(11)的解的唯一性问题已被彻底地研究).可以视 Γ 上相应函数的性态,对矩问题(11)作若干变形.

借助于 Borel 变换及其推广(见**比较函数**(Comparison function)和 **Borel 变换**(Borel transform)),一些熟知的插值问题便化为复域内的矩问题,例如:

$$F^{(n)}(hn)=a_n;\quad F^{(n)}(\omega^n)=a_n;$$
$$F(\omega^n)=a_n;\quad \Delta^n F(hn)=a_n;$$
$$F^{(np+l_s)}(\alpha_s)=a_{ns};$$
$$n=0,1,\cdots,\ s=0,\cdots,p-1,\ l_s=0,1;$$
$$\Delta_{2n+l_s}F(\alpha_s+2hn)=a_{ns},\ s=0,1; l_s=0,1;$$
$$n=0,1,\cdots.$$

此外,关于整值函数的许多定理可归结为问题A的极为特殊的情形.

参考文献

[1A] Stieltjes, T. J., Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, **8**(1894), 1-122.

[1B] Stieltjes, T. J., Recherches sur les fractions continues,

Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **9** (1895), 1-47.

[2] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М.-Л., 1948.

[3] Марков, А. А., Избр. труды по теории непрерывных Дробей ···, М.-Л., 1948.

[4] Shohat, J. A. and Tamarkin, J. D., The problem of moments, Amer. Math. Soc., 1950.

[5] Ахиезер, Н. И., Классическая проблема моментов ···, М., 1961 (英译本: Akhiezer, N. I., The classical moment problem and related questions in analysis, Hafner, 1965).

[6] Гельфонд, А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967.

[7] Buck, R. C., Interpolation series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948), 283-298.

[8] Buck, R. C., Integral valued entire functions, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 879-891.

[9] Buck, R. C., On admissibility of sequences and a theorem of Pólya, *Comment. Mat. Helv.*, **27** (1953), 75-80.

[10] Лохин, И. Ф., 《Матем. сб.》, **35** (1954), 2, 223-230.

[11] Казьмин, Ю. А., 《Докл. АН СССР》, **194** (1970), 6, 1251-1254.

[12] Казьмин, Ю. А., 《Докл. АН СССР》, **204** (1972), 6, 1309-1312.

[13] Казьмин, Ю. А., 《Докл. АН СССР》, **205** (1972), 1, 19-22.

[14] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

[15] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977 (英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).

[16] Крейн, М. Г., Нудельман, А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973 (英译本: Kreĭn, M. G. and Nudel'man, A. A., The Markov moment problem and extremal problems, Amer. Math. Soc., 1977).

Ю. А. Казьмин 撰

【补注】经典的矩问题是与大量基本的理论和应用课题联系在一起的，这些课题包括函数论，算子的谱分解，正定性，概率，逼近论，电学与机械学逆问题，随机过程预测，以及 VLSI 芯片信号处理的算法设计等．[A23] 对其中一些分支作了综述．以上主要条款暗示了矩问题与连分式之间的联系；由此经 Padé 和 **Hermite-Padé** 逼近 (Padé approximation)，它距有理**逼近** (approximation) 和**插值** (interpolation) 领域只有一小步之遥．

在关于有理插值与逼近的丰富文献中，有许多是与几种类型的矩问题联系在一起的，并对这些矩问题产生影响，见 [A3]-[A12]；物理方面的应用也应当被提到，见 [A13]-[A15]．

此外，过去 15 年间，在连分式和线性分析的理论框架下，对矩问题不同形式的推广方面的研究有所加强；见 [A16]-[A20]．

最后，从历史的观点来看，[A1]-[A2] 是重要的．

参考文献

[A1] Grommer, J., Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, *J. Reine Angew. Math.*, **144** (1914), 212-238.

[A2A] Hamburger, H., Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems I, *Math. Ann.*, **81** (1920), 235-319.

[A2B] Hamburger, H., Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems II, *Math. Ann.*, **82** (1921), 120-164.

[A2C] Hamburger, H., Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems III, *Math. Ann.*, **82** (1921), 168-187.

[A3] Graves, P. R. (ed.), Padé Approximants and their Applications (Canterbury, 1972), Acad. Press, 1973.

[A4] Saff, E. B. and Varga, R. S. (eds.), Padé and Rational Approximation (Tampa, 1976), Acad. Press, 1977.

[A5] Wuytack, L. (ed.), Padé Approximation and its Applications (Antwerp, 1979), Lecture notes in math., 765, Springer, 1979.

[A6] Bruin, M. G. de and Rossum, H. van (eds.), Padé Approximation and its Applications (Amsterdam, 1980), Lecture notes in math., 888, Springer, 1981.

[A7] Gilewicz, J. (ed.), Proc. first French-Polish Meeting on Padé Approximation and Convergence Acceleration Techniques (Warszaw, 1981), CPT-81/PE 1354, CNRS, 1982.

[A8] Werner, H. and Bünger, H. J. (eds.), Padé Approximation and its Applications (Bad Honnef, 1983), Lecture notes in math., 1071, Springer, 1984.

[A9] Graves-Morris, P. R., Saff, E. B. and Varga, R. S. (eds.), Rational Approximation and Interpolation (Tampa, 1983), Lecture notes in math., 1105, Springer, 1984.

[A10] Brezinski, C., Draux, A. and Magnus, A. P., et al. (eds.), Polynomes Orthogonaux et Applications (Bar-le-Duc, 1984), Lecture notes in math., 1171, Springer, 1985.

[A11] Gilewicz, J., Pindor, M. and Siemasko, W. (eds.), Rational Approximation and its Application in Mathematics and Physics (Lańcut, 1985), Lecture notes in math., 1237, Springer, 1987.

[A12] Cuyt, A. (eds.), Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation (Antwerp, 1987), Reidel, 1988.

[A13] Antolin, J. and Cruz, A., *J. Phys.* **G12** (1986),

297 .

[A14] Corcoran, C. T. and Langhoff, P. W., Moment-theory approximations for nonnegative spectral densities, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 651−657.

[A15] Langhoff, P. W., B. J. Dalton et al. (ed.), Moment methods in many Fermion systems, Plenum, Forthcoming.

[A16] Jones, W. B., Thron, W. J. and Waadeland, H., A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261** (1980), 503−528.

[A17] Jones, W. B. and Thron, W. J., Survey of continued fraction methods in solving moment problems and related topics, in W. B. Jones, W. J. Thron and H. Waaderland (eds.), Analytic Theory of Continued Fractions, Lecture notes in math., Vol. 932, Springer, 1982, 4−36.

[A18] Jones, W. B., Thron, W. J. and Njastad, O., Orthogonal Laurent polynomials and the strong Hamburger moment problem, *J. Math. Anal. Applic.*, **98** (1984), 528−554.

[A19] Jones, W. B., Njastad, O. and Thron, W. J., Continued fractions associated with the trigonometric and other strong moment problems (To appear).

[A20] Jones, W. B., Njastad, O. and Thron, W. J., Perron-Carathéodory Continued fractions (To appear).

[A21] Akhiezer, N. I. and Krien, M., Some questions in the theory of moments, Amer. Math. Soc., 1962 (译自俄文).

[A22] Landau, H. J., The classical moment problem: Hilbertian proofs, *J. Funct. Anal.*, **38** (1980), 255−272.

[A23] Landau, H. J. (ed.), Moments in mathematics, Amer. Math. Soc., 1987.

[A24] Natanson, I. P., Constructive theory of functions, 1−2, F. Ungar, 1964−1965 (译自俄文).

王仁宏、檀结庆 译

矩量法 [moments, method of; моментов метод]

同 **Галеркин 法** (Galerkin method).

矩法 (概率论中的) [moments, method of (in probability theory); моментов метод]

由其矩 (见**矩** (moment)) 确定**概率分布** (probability distribution) 的方法. 理论上矩法基于**矩问题** (moment problem) 解的唯一性: 若 $\alpha_0=1,\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 是常数, 在什么条件下存在唯一的分布 P, 使得对一切 n,

$$\alpha_n=\int x^n \mathrm{P}(dx)$$

是 P 的矩? 有各种类型的分布由其矩唯一确定的充分条件, 例如, Carleman 条件 (Carleman condition)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{2n}^{1/2n}}=\infty.$$

在概率论和数理统计的极限定理的证明中, 矩法的应用是基于矩的收敛性和分布的收敛性之间的对应: 如果 F_n 是具有任意阶有限矩 $\alpha_k(n)(k\geq 1)$ 的分布函数序列, 并且如果当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_k(n)\to\beta_k$, 对每一 $k\geq 1$ 是有限的, 则 β_k 是一分布函数 F 的矩; 如果 F 由其矩唯一决定, 则当 $n\to\infty$ 时 F_n 弱收敛于 F. 收敛到**正态分布** (normal distribution) 情形的矩法最先由 П. Л. Чебышев (1887) 研究, А. А. Марков (1898) 用矩法完成了**中心极限定理** (central limit theorem) 的证明.

在数理统计中矩法是由观测结果求得概率分布的未知参数的统计估计的常用方法之一. 矩法最先由 K. Pearson (1894) 用于这一目的, 以解决用一类 (**Pearson 分布** (Pearson distribution)) 逼近一个经验分布的问题. 使用矩法的手续是这样的: 先确定经验分布的矩 (样本矩), 其个数等于要估计的未知参数的个数, 然后, 令其等于相应的概率分布的矩, 它们是未知参数的函数; 对未知参数解这样得到的方程组, 其解就是所要求的估计. 在实际中矩法常常导致非常简单的计算. 在相当一般的条件下, 通过矩法可以找到一个渐近正态的估计量, 其数学期望与参数真值之差仅为 $1/n$ 阶的量, 而偏差的标准差是阶为 $1/\sqrt{n}$ 的量. 可是, 由矩法建立的估计从有效性的观点来看未必是最好的: 它们的方差未必是最小的. 对正态分布, 矩法所导出的估计与**最大似然法** (maximum-likelihood method) 的估计相合, 是渐近无偏渐近有效估计.

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория Вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V. and Rozahov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[3] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics. Distribution theory, 1, Griffin, 1987.

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译

Monge-Ampère 方程 [Monge-Ampère equation; Монжа-Ампера уравнение]

形如

$$rt-s^2=ar+2bs+ct+\varphi,$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

的二阶偏微分方程, 其系数依赖自变量 x,y、未知函数 $z(x,y)$ 及其一阶导数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Monge-Ampère 方程的类型取决于表达式

$$\Delta=\varphi+ac-b^2$$

的符号. 若 $\Delta>0$, 该 Monge-Ampère 方程是椭圆型的; 若 $\Delta<0$, 它是双曲型的; 若 $\Delta=0$, 则它是抛物型的. Monge-Ampère 方程是**切触变换** (contact transformation) 下的不变量. 特别是, 变换

$$\xi=p,\eta=q,\zeta=z-px-qy$$

把方程

$$rt-s^2=\varphi(p,q)$$

变为方程

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right]^2=\frac{1}{\varphi(\xi,\eta)}.$$

Monge-Ampère 方程理论的发展主要与各种几何问题的解有关, 这些问题在分析上的表述归结为这种方程的讨论. 例如, 构造有已知线素的曲面归结为解 **Darboux 方程** (Darboux equation), 它是一个 Monge-Ampère 方程. 在半测地参数化 (即线素为 $ds^2=du^2+c^2dv^2$) 的情况下, 该方程取下面的形状:

$$r[t+cc_up-\frac{c_v}{c}q]-[s-\frac{c_u}{c}q]^2+$$
$$+\frac{c_{uu}}{c}(c^2-c^2p^2-q^2)=0.$$

Darboux 方程的类型依赖于 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) $k=-\frac{c_{uu}}{c}$ 的符号. 对于双曲型 Darboux 方程 (负 Gauss 曲率情形), 特征线是渐近线. 将 **Gauchy-Ковалевская 定理** (Cauchy-Kovalevskaya theorem) 用于 Darboux 方程便给出具有系数为解析函数的已知线素的曲面存在性的一个定理.

椭圆型 Monge-Ampère 方程理论的发展之所以有特别高的水平是由于**广义解** (generalized solution) 概念的引进, 以及几何方法对它们的解的应用. 在方程为 $rt-s^2=\varphi$ 的最简单的情形, 广义解定义为满足等式

$$\iint_{M^*}dp\,dq=\iint_M\varphi(x,y,z,p,q)\,dx\,dy$$

的凸函数 $z(x,y)$, 其中 M 是 xy 平面上方程解被讨论的区域内的任意 Borel 集, M^* 是 M 的所谓法线象, 它由pq平面上的点组成, 其中 p,q 是投影到 M 的曲面 $z=z(x,y)$ 在点 (x,y,z) 的支撑平面的角系数. 正则解 (即二次可微的解) 也是广义解. 当 φ 是连续正函数时, 广义解是光滑的; 但是二阶导数未必存在. 广义解的构造在实质上化为构造一个无限凸多面体的纯几何问题, 它在有限的面上有已知的方向及定义在这些面上的已知函数. 特别是, 如果方程右端的 φ 只依赖 x 和 y, 则此函数是该面的面积. 取这些多面体的极限, 便得到方程的广义解的图. 就广义解而言, 对于 Dirichlet 问题的解, 已经得到相当一般的存在性和唯一性定理. 尤其是有下述定理: 在凸区域 G 上, 方程

$$rt-s^2=\varphi(x,y,z,p,q)$$

的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 对于任意的连续边界值是可解的, 倘若 φ 是连续的正函数, 关于 z 是非减的, 且当 $p^2+q^2\to\infty$ 时, 其增长阶不超过 p^2+q^2. 对于一个给定的凸性方向, 该解是唯一的.

椭圆型 Monge-Ampère 方程理论的本质性结果是*广义解的正则性定理* (theorem on regularity of generalized solutions). 对于最简单的方程

$$rt-s^2=\varphi(x,y,z,p,q)$$

该定理叙述成: 对于 $\varphi,\varphi_z>0$, 当右端的 φ 是正则的时候, 每个广义解也是正则的. 即, 若 φ 是 k 次可微的 ($k\geqslant 3$), 则广义解是 $k+1$ 次可微的. 若 φ 是解析的, 则广义解是解析的.

在一般的椭圆型 Monge-Ampère 方程中研究得最多的是*强椭圆型* Monge-Ampère *方程* (strongly-elliptic Monge-Ampère equation). 对此种方程, $\varphi>0$ 且二次型

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

是非负的. 对于最简单的 Monge-Ampère 方程上面引用的基本结果已经推广到强椭圆情形. 广义解的概念也已经引进了, 且在十分一般的条件下, 证明了 Dirichlet 问题解的存在性和唯一性, 以及依赖方程系数正则性的广义解的正则性. 一般说来, 有正曲率的线素的 Darboux 方程不是强椭圆的. 它的广义解定义为实现已知线素的曲面的 z 坐标. 在给定度量意义下的任何凸区域上 (其边界的测地曲率应该是正的), Darboux 方程有广义解. 在任意的这种区域内, 已经在充分一般的条件下证明了 Dirichlet 问题的可解性. 如果线素的系数是正则的, 则广义解是正则的. 如果系数是解析的, 则广义解是解析的.

对于同胚于球面的流形上的椭圆型 Monge-Ampère 方程已经获得重要的结果. 特别是, 两个经典问题: **Weyl 问题** (Weyl problem) 和 **Minkowski 问题** (Minkowski problem) 归结为这种方程. 这些问题借助于多面体上的极限所得到的解是广义的. 这些解的正则性是从广义解的正则性定理得到的.

Monge-Ampère 方程是由 G. Monge (1784) 和 A. Ampère (1820) 考虑的.

参考文献

[1] Goursat, E., Cours d'analyse mathématique, 3, Gauthier-Villars, 1923, Part 1.

[2] Погорелов, А. В., Об уравнениях Монжа-Ампера эллиптического типа, Хар., 1960.

[3] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of couvex surfaces, Amer. Math. Soc., 1972).

А. В. Погорелов 撰

【补注】在 1950-1970 年间，一般的二维 Monge-Ampère 方程边值问题的研究是最活跃的研究领域.

对于一般的二维椭圆型 Monge-Ampère 方程的广义解和正则解已经获得 Dirichlet 问题和其他边值问题可解性的充分必要条件. 对于最重要的若干类二维椭圆型 Monge-Ampère 方程 (Darboux 方程，方程 $rt - s^2 = f(x,y,z,p,q)$ 且 $f, f_z > 0$，以及强椭圆方程)，广义解在指定数据充分正则的条件下的正则性也作了圆满的研究. 对于这些边值问题的广义解和正则解已获得严格的唯一性和非唯一性定理. 基于这些结果，已经作出对于大范围经典微分几何问题的深刻应用.

对于二维双曲型 Monge-Ampère 方程已经建立了大范围正则解不存在定理 (主要是对 Darboux 方程). 对于二维双曲型 Monge-Ampère 方程已经证明了 Cauchy 问题正则解的若干存在性定理. 若干重要的关于鞍面的大范围问题的解已经作为这些结果的应用而获得了.

从 1970 年到现在 (1989 年) 最活跃的研究领域变为实的和复的 $n \geqslant 2$ 维 Monge-Ampère 方程的椭圆解的理论.

实多维 Monge-Ampère 方程. 从二维 Monge-Ampère 方程转到多维情形，产生了新的基本困难. 对于 n 维 Monge-Ampère 方程 ($n \geqslant 2$) 的广义椭圆解和正则椭圆解已获得充分必要条件. 在指定数据充分正则的条件下，某些广义椭圆解的正则性作了完全的研究. 对应的边值问题的广义解和正则解已有严格唯一性和非唯一性定理. 在变分问题和 Monge-Ampère 方程的椭圆解的 Dirichlet 问题之间已经建立了联系.

基于这些结果，已经得到了在大范围微分几何问题、非线性椭圆偏微分方程和变分学中的深刻应用.

复多维 Monge-Ampère 方程. 对于 n 维复 Monge-Ampere 方程的椭圆解已经作了各种重要的研究. 对于这种方程的正则椭圆解已经获得了 Dirichlet 问题的可解性. 与 Kähler 流形以及其他经典复流形的深刻联系已被建立，在微分几何学及拓扑学中的许多有趣应用已经得到.

参考文献

[A1] Nirenberg, L., The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 103 - 156.

[A2] Bakelman, I. J., Generalized solutions of Monge-Ampère equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **114** (1957), 1143 - 1145 (俄文).

[A3] Aleksandrov, A. D., The Dirichlet problem for the equation det $(z_{ij}) = \varphi(z_1, \cdots, z_n, z, x_1, \cdots, x_n)$, *Vestnik Leningradsk. Gosudarstv. Univ.*, no. 1, (1958) (俄文).

[A4] Bakelman, I. J., Geometric methods for solving elliptic equations, Moscow, 1965 (俄文).

[A5] Pogorelov, A. V., Monge-Ampere equations of elliptic type, Noordhoff, 1964 (译自俄文).

[A6] Efimov, N. V., The appearance of singularities on surfaces of negative curvature, *Mat. Sb.*, **64** (1964), 2, 286 - 320 (俄文).

[A7] Efimov, N. V., Surfaces with a slowly changing negative curvature, *Ruissian Math. Surveys*, **21** (1966), 5, 1-55 (*Uspekhi Mat. Nauk.*, **21** (1966), 5, 3 - 58).

[A8] Poznyak, E. G., A regular realization of two-dimensional metrics with negative curvature, *Ukr. Geom. Sb.*, 3 (1966), 78 - 92 (俄文).

[A9] Pogorelov, A. V., The Minkowski multidimensional problem, Wiley, 1978 (译自俄文).

[A10] Cheng, S. and Yau, S. T., On the regularity of the solutions of the Monge-Ampère equations det $(u_{ij}) = F(x, u)$, *Comm. Pure Appl. Math.*, **30** (1977), 41 - 68.

[A11] Yau, S. T., Survey on partial differential equations in differential geometry, in S. T. Yau (ed.), Sem. Differential Geom., Princeton Univ. Press, 1982, 669-706.

[A12] Yau, S. T., On the Ricci curvature of a compact Kahler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31** (1978), 339 - 411.

[A13] Bakelman, I. J., Applications of the Monge-Ampère operators to the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations, in S. T. Yau (ed.): Sem. Differential Geom., Princeton Univ. Press, 1982, 239 - 258.

[A14] Aubin, T., Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations, Springer, 1982.

[A15] Bakelman, I. J., Variational problems and elliptic Monge-Ampère equations, *J. Differential Geom.*, **18** (1983), 669 - 699.

[A16] Caffarelli, L., Nirenberg, L. and Spruck, J., The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, I: Monge-Ampère equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37** (1984), 369 - 402.

[A17] Caffarelli, L., Kohn, J. J., Nirenberg, L. and Sprick J., The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, II: Complex Monge-Ampère equations and uniformly elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **38** (1985), 261 - 301.

[A18] Bakelman, I. J., Generalized elliptic solutions of the Dirichlet problem for n-dimensional Monge-Ampère

equations, in F. E. Browder (ed.): Nonlinear Functional Anal. Applic., Proc. Symp. Pure Math., Vol. 45. 1, Amer. Math. Soc., 1966, 73 - 102.

[A19] Gilbarg, D. and Trudinger, N., Elliptic partial differential equations of the second order, Springer, 1984.

[A20] Krylov, N. V., Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order, Kluwer, 1987 (译自俄文).

[A21] Minkowski, H., Volumen und Oberflächen, *Math. Ann.*, **57** (1903), 447 - 495.

[A22] Weyl, H., Ueber die Starrheit der Eiflächen und konvexen Flächen durch ihr Linienelement, *Vierteljahrschrift naturforsch. Gesellschaft Zürich*, **61** (1916), 40 - 72.

[A23] Lewy, H., On differential geometry in the large I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43** (1938), 258 - 270.

[A24] Calabi, E., Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens, *Michigan Math. J.*, **5** (1958), 105 - 126.

[A25] Serrin, J., The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension, *J. Reine Angew Math.*, **223** (1968), 170 - 187.

[A26] Bakelman, I. J., Geometric problems in quasilinear elliptic equations, *Russian Math. Surveys*, **25** (1970), 3, 45-109 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **25** (1970), 3, 49-112).

[A27] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29** (1976), 495 - 516.

[A28] Lions, P. L., Sur les équations de Monge-Ampère, *Manuscripta Math.*, **41** (1983), 1 - 43. 陈维桓 译

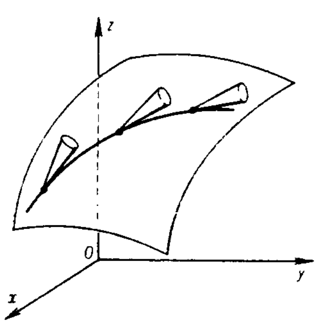
Monge 锥 [**Monge cone**; **Монжа конус**], 方向锥 (directing cone)

偏微分方程

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (*)$$

的积分曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面的**包络** (envelope), 此处 $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$. 若 F 是 p, q 的一个非线性函数, 则一般情况下有: 过一固定点的所有切平面构成一个单参数的平面族; 它们的包络是一个锥. 若 F 是 p, q 的线性函数, 则得到过一直线的平面丛, 那就是 Monge 锥退化成所谓的 Monge 轴 (Monge axis). 对应于某点 (x_0, y_0, z_0) 的 Monge 锥的母线的方向称为特征方向 (characteristic directions). 对积分曲面上的一曲线, 若在每点处它均切于对应的 Monge 锥的母线, 则称此曲线为特征线 (characteristic line), 特征 (characteristic), 焦曲线 (focal curve), 或 Monge 曲线 (Monge curve).

方程 $(*)$ 作为一个方向锥的场, 它的几何解释(见图)



由 G. Monge (1807) 给出. А. Б. Иванов 撰

【补注】

亦见 **Monge 方程** (Monge equation); **特征** (characteristic); **特征带** (characteristic strip) 以及在这些条目中的文献. 仇庆久 译

Monge 方程 [**Monge equation**; **Монжа уравнение**]

一个形如

$$F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

的微分方程. G. Monge (见 [1]) 与构造一阶偏微分方程的几何理论相联系研究了这些方程. Monge 方程的一个特殊情形是 **Pfaff 方程** (Pfaffian equation).

例如, 考虑具有一个未知函数 z 和两个自变量 x, y 的一阶偏微分方程

$$\Phi\left[x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0,$$

则在每一点处 **Monge 锥** (Monge cone) (特征锥) 的母线的方向应满足 Monge 方程, 此方程能写成如下形式:

$$M\left[x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right] = 0.$$

这是一个具两个未知函数的常微分方程, 那就是说, 它是一个最简单的**欠定组** (underdetermined system). 常常称一个任意的欠定的常微分方程组为 Monge 方程. 在这种方程组中, 方程的个数小于未知函数的个数.

参考文献

[1] Monge, G., Application de l'analyse à la géometrie, Paris, 1850.

[2] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, 卷 2, 科学出版社, 1977).

[3] Рашевский, П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., 1947.

Н. Х. Розов 撰 仇庆久 译

单值函数 [**monodromic function**; **монодромная функция**],

复平面区域D内的

D内的单值连续函数(极点可以例外). 术语"单值函数"是A. L. Cauchy考虑到把**解析函数**(analytic function)类再分为单值函数和多值函数的必要性而使用的; 现在(1989)这个术语已经不再使用了.

亦见**单值定理**(monodromy theorem).

Е. Д. Соломенцев 撰 陈怀惠 译

单值群 [**monodromy group**; **монодромии группа**], 线性常微分方程或方程组的

与n阶方程组

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (*)$$

相伴的$n \times n$矩阵群. 其定义如下. 设矩阵$A(t)$在区域$G \subset \mathbf{C}$中是全纯的, $t_0 \in G$, 而$X(t)$是方程组$(*)$在t_0的一个小邻域中给定的**基本矩阵**(fundamental matrix). 如果$\gamma \subset G$是以t_0为起点的闭曲线, 那么通过沿γ的解析延拓, $X(t) \rightarrow X(t)C_\gamma$, 其中$C_\gamma$是$n \times n$常值矩阵. 如果两条曲线$\gamma_1$, γ_2在G中同伦, 则$C_{\gamma_2} = C_{\gamma_1}$; 如果$\gamma = \gamma_1\gamma_2$, 则$C_\gamma = C_{\gamma_1}C_{\gamma_2}$. 映射$\gamma \rightarrow C_\gamma$是$G$的**基本群**(fundamental group)的一个同态:

$$\pi_1(G, t_0) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}),$$

其中$\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$是具有复数元的$n \times n$矩阵群; 这个同态的象称为$(*)$的单值群(monodromy group) $M(t_0, G)$. 在此关系下, 有

$$M(t_1, G) = T^{-1}M(t_0, G)T.$$

其中T是常值矩阵. Euler方程和Papperitz方程的单值群已经算出(见[1], [2]).

参考文献

[1] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950.

[2] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

М. В. Федорюк 撰

【补注】 亦见**单值矩阵**(monodromy matrix). 和**单值算子**(monodromy operator). 如果$\gamma(s)$是G中以t_0为起点的可微闭曲线, 则$Y(s) = X(\gamma(s))$满足矩阵方程$\dot{Y}(s) = \dot{\gamma}(s)A(\gamma(s))Y(s)$, 且$C_\gamma$是这个具有周期系数的线性微分方程组的单值矩阵.

唐 云 译

单值矩阵 [**monodromy matrix**; **монодромии матрица**]

一个$n \times n$常值矩阵$X(\omega)$, 它是线性常微分方程

$$\dot{x} = A(t)x, \ t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n$$

在零点处正规化的**基本矩阵**(fundamental matrix) $X(t)$当$t = \omega$时的值; 其中$A(t)$是ω周期矩阵, 它在$\mathbf{R}$的每一个紧区间上是可和的. Ю. В. Комленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1969 (中译本: J. K. Hale, 常微分方程. 人民教育出版社, 1980).

唐 云 译

单值算子 [**monodromy operator**; **монодромии оператор**]

有界线性算子$U(T)$, 它将Banach空间中微分方程$\dot{x} = A(t)x$ (其中$A(t)$是依赖于t的有界算子、即连续的、且以T为周期的)的解的初值$x(0) = x_0$与在时刻T的值相联系: $x(T) = U(T)x_0$. 对于每一个解, $x(t+T) = U(T)x(t)$. 在有限维空间中, $U(T)$对应于**单值矩阵**(monodromy matrix). 单值算子的谱的位置影响着方程周期解的存在时, 无穷远处解的性态, 此方程化为常系数方程的可约性, 以及指数分叉的存在性. 对于$A(t)$和$f(t)$具有周期性的非齐次方程$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, 其周期解的存在和唯一性问题也借助于单值算子谱来解决.

亦见**Banach空间中微分方程的定性理论**(Qualitative theory of differential equations in Banach spaces).

С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Daletskiĭ, Yu. L. and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974.

唐 云 译

单值定理 [**monodromy theorem**; **монодромии теорема**]

关于**解析函数的分支**(branch of an analytic function)的单值性的一个充分性准则. 设D是复空间$\mathbf{C}^n$ $(n \geqslant 1)$中的一个单连通区域. 这时, 若以$z^0 \in D$为中心的解析函数元素$\Sigma(z^0; r)$可以沿着D内的任意路径解析开拓, 则经这个**解析开拓**(analytic continuation)所产生的解析函数分支$f(z)$ $(z = (z_1, \cdots, z_n))$是在D内单值的. 换句话说, 由单连通区域D和以$z^0 \in D$为中心的元素$\Sigma(z^0; r)$所确定的解析函数分支$f(z)$一定是单值的. 另外一个等价叙述是: 如果元素$\Sigma(z^0; r)$可以沿着一个任意区域$D \subset \mathbf{C}^N$内的所有路径进行解析开拓, 那么, 在任意的点$z^* \in D$, 这个开拓的结果(即以z^*为中心的元素$\Sigma(z^*; r^*)$)对于D内所有连结z^0到z^*的同伦路径是同样的.

单值定理对于定义在Riemann曲面上的区域D内或Riemann曲面上的解析函数$f(z)$也是成立的. 亦见

完全解析函数(complete analytic function).

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд. т. 2, М. 1968(英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 2, Chelsea, 1977).

[2] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум. т. 1, М., 1962.

[3] Владимиров, В. С., Методы Теории функций многих комплексных переменных, М., 1964(英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978.

陈怀惠 译

单值变换[monodromy transformation; монодромии преобразование]

底空间中一条道路在纤维空间的纤维(或它们的同伦不变量)之间引起的变换.更准确地说,设 $p:E \to B$ 为局部平凡的**纤维空间**(fibre space),$\gamma:[0,1] \to B$ 是 B 中一条道路,起点为 $a=\gamma(0)$,终点为 $b=\gamma(1)$.纤维化 $\gamma^*(E)$ 的平凡化定义了纤维 $p^{-1}(a)$ 到纤维 $p^{-1}(b)$ 的同胚 $T_\gamma:p^{-1}(a) \to p^{-1}(b)$.如果改变 $\gamma^*(E)$ 的平凡化,则 T_γ 变为同伦的同胚,如果 γ 变为与其同伦的道路,则 T_γ 也变为同伦的同胚.T_γ 的同伦类称为对应于道路 γ 的单值变换.当 $a=b$ 时,即当 γ 是闭道路时,单值变换 T_γ 是 $F=p^{-1}(a)$ 到自身的同胚(与前面一样,T_γ 的同伦类是唯一确定的).这个映射,以及它在 F 的同调和上同调上导出的同态,也称为单值变换.γ 与 T_γ 之间的对应给出了**基本群**(fundamental group)$\pi_1(B,a)$ 在 $H^*(F)$ 上的表示.

单值变换的想法起源于多值函数的研究,见**单值定理**(monodromy theorem).如果 $S \to P^1(\mathbf{C})$ 是这样一个函数的 **Riemann 曲面**(Riemannian surface),则从 Riemann 球 $P^1(\mathbf{C})$ 上除掉函数的奇异点,可得到一个非分歧覆叠.此时的单值变换也称为覆叠(covering)或升腾变换(deck transformation).

单值变换经常出现在下面的情形:设 $D=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$ 为复平面中的单位圆盘,X 为**解析空间**(analytic space),$f:X \to D$ 为正常全纯映射,见**真态射**(proper morphism).设 X_t 为纤维 $f^{-1}(t)$,$t\in D$,$D^*=D\setminus\{0\}$,令 $X^*=f^{-1}(D^*)$.如果需要,缩小 D 的半径,总可使得 $f:X^* \to D^*$ 为局部平凡纤维空间.D 中包含 0 的闭路所对应的单值变换 T 称为族 $f:X \to D$ 在 $0\in D$ 的单值性(monodromy of the family),它作用在纤维 X_t 的(上)同调上,这里 $t\in D^*$.研究得最多的是 X 及 X_t,$t\neq 0$ 皆为光滑的情形.此时,T 在 $H^*(X_t,Q)$ 上的作用是拟幂幺的(quasi-unipotent)([4]),即存在正整数 k 和 N 使得 $(T^k-1)^N=0$.单值性反映了族 $f:X \to D$ 退化时的许多特征性态.族 $f:X \to D$ 的单值性与上同调空间 $H^*(X_0)$ 及 $H^*(X_t)$ 上的混合 **Hodge 结构**(Hodge structure)密切相关([5]-[7]).

当 $f:X \to D$ 的奇点是孤立奇点的时候,单值化变换可局部化,设 x 是 f(或等价地,是 X_0)的奇异点,B 为 X 的中心在 x 处的半径充分小的球,如需要,缩小 D 的半径,可以定义纤维空间 $B\cap f^{-1}(D^*)$ 的局部平凡化.它与纤维空间 $\partial B\cap f^{-1}(D) \to D$ 在边界上的平凡化相匹配.由此给出"消灭闭链"的流形 $V_t=B\cap X_t$ 到自身的微分同胚 T,T 限制在 ∂V_t 上为恒同映射.这个 T 称为 f 在 x 处的局部单值性(local monodromy).单值变换在上同调空间 $H^*(V_t)$ 上的作用反映 f 在 x 处的奇异性质([1],[2],[7]).已知流形 V_t 同伦等价于一束 μ 个 n 维球面,其中 $n+1=\dim X$,μ 是 f 的芽在 x 处的 Milnor 数.

最简单的是 Morse 奇点,即在 x 的一个邻域里,f 可约化为形如 $f=z_0^2+\cdots+z_n^2$,见 **Morse 引理**(Morse lemma).此时 $\mu=1$,V_t 的内部 V_t^0 微分同胚于 n 维球面 S^n 的切丛.消灭闭链(vanishing cycle)δ 是具有紧支集上同调 $H_c^n(V_t^0,\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}$ 的生成元.一般地,如果 $f:X \to D$ 是正常全纯映射(如上,只有 x 这么一个唯一的 Morse 奇点),则闭链 $\delta\in H_c^n(V_t^0)$ 在自然映射 $H_c^n(V_t^0) \to H^n(X_t)$ 下的象称为在 x 处消灭的(vanishing)闭链,记为 δ_x.当 $i\neq n$,$n+1$ 时,分化同态 $r_t^*: H^i(X_0) \to H^i(X_t)$ 是同构,且有正合列

$$0 \to H^n(X_0) \to H^n(X_t) \xrightarrow{(\cdot,\delta_x)} \mathbf{Z} \to$$

$$\to H^{n+1}(X_0) \to H^{n+1}(X_t) \to 0.$$

当 $i\neq n$ 时,单值变换 T 平凡地作用在 $H^i(X_t)$ 上,而在 $H^n(X_t)$ 上的作用则由下述 Picard-Lefschetz 公式(Picard-Lefschetz formula)给出,对 $z\in H^n(X_t)$,

$$T_z=z\pm(z,\delta_x)\delta_x,$$

这个公式中的符号及 (δ_x,δ_x) 的值在下表中列出.

mod 4	0	1	2	3
±	−	−	+	+
(δ_x,δ_x)	2	0	−2	0

单值变换保持 $H^n(X_t)$ 上的相交形式不变.

消灭闭链和单值变换在 Picard-Lefschetz 理论(Picard-Lefschetz theory)中有用,后者讨论的是射影复流形及其超平面截面的上同调空间.设 $X\subset P^N$ 是 $n+1$ 维的光滑流形,令 $\{X_t\}$,$t\in P^1$ 是 X 的一束超平面截面,具有基本集(即束的轴)$Y\subset X$;设下列条件满足:a)Y

是 X 的光滑子流形，b) 存在有限集 $S \subset P^1$ 使得当 $t \in P^1 \setminus S$ 时，X_t 为光滑的，c) 对 $s \in S$，流形 X_s 有唯一的非退化二阶奇点 $x_s \in Y$，具有这些性质的束总是存在的，称为 Lefschetz 束 (Lefschetz pencils)．设 $\sigma: \bar{X} \to X$ 为一个单一化变换，其中心位于束的轴 Y 上，而 $f: \bar{X} \to P^1$ 是由束 $\{X_t\}$ 定义的态射，这里对所有 $t \in P^1$，$f^{-1}(t) \cong X_t$，取定点 $0 \in P^1 \setminus S$，则单值变换给出 $\pi_1(P^1 \setminus S, 0)$ 在 $H^i(X_0)$ 上的作用，这个作用仅在 $i = n$ 时非平凡．要描述 $H^n(X_0)$ 上的这个作用，在 $s \in S$ 附近先选取若干点 s'，以及从 0 到 s' 的道路 γ_s'．然后如 F 构造闭道路 $\gamma_s \in \pi_1(P^1 \setminus S, 0)$：先从 0 点沿 γ_s' 走到 s'，再绕 s 转一圈，最后从 s' 沿 γ_s' 回到 0 点．此外，令 δ_s 为在 x_s 处消灭的闭链 (准确地说，先取出 $H^n(X_s)$ 中的消灭闭链，然后用道路 γ_s' 对应的单值变换将它映到 $H^n(X_0)$ 中)．最后令 $E \subset H^n(X_0, Q)$ 为消灭闭链 δ_s，$s \in S$ 生成的子空间，也称为消灭上同调空间 (vanishing cohomology space)．则以下事实成立：

1) $\pi_1(P^1 \setminus S, 0)$ 由 γ_s，$s \in S$ 生成；

2) γ_s 的作用由下式给出

$$\gamma_s(z) = z \pm (z, \delta_s)\delta_s;$$

3) 空间 $E \subset H^n(X_0)$ 在单值群 $\pi_1(P^1 \setminus S, 0)$ 的作用下是不变子空间；

4) $H^n(X_0)$ 中在单值变换下不变的元素所成的空间与 E 在 $H^n(X_0)$ 中相对于相交形式的正交补相同．二者也等同于自然同态 $H_n(\bar{X}) \to H_n(X_0)$ 及 $H^n(X) \to H^n(X_0)$ 下的象；

5) 消灭闭链 $\pm\delta_s$ 在 $\pi_1(P^1 \setminus S, 0)$ 的作用下 (可能差一个符号) 共轭；

6) $\pi_1(P^1 \setminus S, 0)$ 在 E 上的作用是绝对不可约的．

对任何域上的代数簇的 l-adic 上同调空间也已经建立起了消灭闭链，单值变换及 Picard-Lefschetz 理论 ([3])．

参考文献

[1] Arnol'd, V. I., Normal forms of functions in neighbourhoods of degenerate critical points, *Russian Math. Surveys*, **29** (1974), 2, 10 – 50 (Uspekhi Mat. Nauk, **29** (1974), 2, 11 – 49).

[2] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

[3] Deligne, P. and Katz, N. (eds.), Groupes de monodromie en géométrie algébrique SGA 7 II, Lecture notes in math., 340, Springer, 1973.

[4] Clemens, C. H., Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **136** (1969), 93 – 108.

[5] Schmid, W., Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping, *Invent. Math.*, **22** (1973), 211 – 319.

[6] Steenbrink, J., Limits of Hodge structures, *Invent. Math.*, **31** (1976), 229 – 257.

[7] Steenbrink, J. H. M., Mixed Hodge Structure on the vanishing cohomology, in P. Holm (ed.): Real and complex singularities. Oslo, 1976, Proc. Nordic Summer School, Sythoff & Noordhoff, 1977, 524 – 563.

[8] Lefschetz, S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, 1924.

[9] Lefschetz, S., A page of mathematical autobiography, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 5, 854 – 879.

В. И. Данилов 撰　潘建中 译　沈信耀 校

单演集 [**monogeneity set**; **моногенности множество**]

一个给定的复变量函数在给定点的所有导出数 (**Dini 导数** (Dini derivative)) 的集合．更准确地说，设 E 是复平面 $\mathbf{C}$ 里的一个集合，ζ 是 E 的一个非孤立点，又设 $f(z)$ 是 $z \in E$ 的一个复函数．一个复数 a (有限复数或等于 ∞) 称为 f 在 ζ 关于 E 的一个导出数 (derived number) (或 Dini 导数 (Dini derivative))，如果存在一个序列 $z_n \in E$，它具有性质：$z_n \neq \zeta$，当 $n \to \infty$ 时，$z_n \to \zeta$，

$$\frac{f(z_n) - f(\zeta)}{z_n - \zeta} \to a.$$

f 在 ζ 关于 E 的所有导出数组成的集合 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)$ 称为 f 在 ζ 关于 E 的单演集 (见 [1])．集合 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)$ 由唯一的一个有限点 a 组成，当且仅当 $f(z)$ 是在 ζ 关于 E 的**单演函数** (monogenic function)，并且 $f_E'(\zeta) = a$．集合 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)$ 总是闭的，同时，对于扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 里的每个闭集 A，每个集合 $E \subset \mathbf{C}$ 和 E 的每个非孤立点 ζ，都有一个函数 $f(z)$ $(z \in E)$，使得 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E) = A$．如果 ζ 是 E 的一个内点，那么对于任意的在 ζ 的一个邻域内连续的函数 $f(z)$，集合 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)$ 在 $\bar{\mathbf{C}}$ 里是闭的和连通的 (一个**连续统** (continuum))，同时，反过来，对于任意的连续统 $K \subset \bar{\mathbf{C}}$ 都有一个在 ζ 的邻域内连续的函数 $f(z)$，对于它 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E) = K$．如果 $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 E 的内点 $\zeta = \xi + i\eta$ 关于实变量 (x, y) 的集合是可微的，那么 $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)$ 是以 $c = \partial f(\zeta)/\partial z$ 为中心，以 $r = |\partial f(\zeta)/\partial \bar{z}|$ 为半径的圆周 $\gamma(r, c) = \{w: |w - c| = r\}$ (可能退化为一个点，$r = 0$)，其中，

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] +$$

$$+\frac{i}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

——即所谓形式导数(formal derivatives).反过来也是对的：每个圆周都是某个关于(x, y)可微的函数f在E的一个给定的内点ζ的单演集.

如果$f(z)$是在区域G内连续的，那么在几乎每一个点$\zeta\in G$，集合$\mathfrak{m}(\zeta, f, G)$或者是一个圆周$\gamma(r, c)$ $(0\leqslant r<\infty)$，或者是$\overline{\mathbf{C}}$(见[2]). 在任意(不一定可测)集合E和任意(不一定可测)有限函数$f(z)$ $(z\in E)$的一般情形下，在几乎每个点$\zeta\in E$，以下三种情形之一成立：a) $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)=\gamma(r, c)$，$c\in\mathbf{C}$，$0\leqslant r<\infty$；b) $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)=\overline{\mathbf{C}}$；或c) $\mathfrak{m}(\zeta, f, E)=\gamma(r, c)\cup\infty$，$c\in\mathbf{C}$，$0\leqslant r<\infty$. 这里，a)在$f(z)=f(x+iy)$关于$(x, y)\in E$的几乎每一个可微点成立，同时，在$f(z)$的几乎每一个连续点，前两种情形之一成立. 情形a)－c)中的每一种都能单独在几乎每一个点$\zeta\in E$实现.

对于到多维情形的一些自然推广，见[4].

参考文献

[1] Федоров, В. С.,《Успехи матем. наук》, 7(1952), 2, 7－16.

[2] Трохимчук, Ю. Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963.

[3] Долженко, Е. П.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 26 (1962), 347－360.

[4] Bondar, A. V., Continuous operator conformal mappings, *Ukr. Math. J.*, 32(1980), 3, 207－212. (*Ukrain Mat. Zh.*, 32(1980), 3, 314－322).

Е. П. Долженко 撰　陈怀惠 译

单演函数[monogenic function; моногенная функция]

一个复变量的具有有限导数的函数. 更准确地说，定义在复平面$\mathbf{C}$的集合E上的函数$f(z)$称为在有限的非孤立点$\zeta\in E$(关于E)是单演的，如果它在这个点关于$z\in E$有有限的导数：

$$f'_E(\zeta)=\lim_{z\in E,\, z\to\zeta}\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}.$$

一个在E的每个非孤立点都是单演的函数称为在E是单演的.

如果$E=G$是$\mathbf{C}$里的一个区域，那么G上的单演函数就称为G上的**解析函数**(analytic function).

若E不是一个区域，则E上的单演函数一般不再具有解析函数的典型性质. 但是，如果集合E，它自己不是区域，在它的大部分点附近是充分“厚”的(更准确地说，如果E在$\mathbf{C}$里的余集在大部分$\zeta\in E$的附近是充分稀疏的)，那么E上的单演函数以弱的形式具有解析函数的许多性质. 为了对解析函数的各种性质之间的联系获得一个深入的了解，解析函数的概念已从各种不同的方向被推广：推广定义域，只推广导数概念本身，减弱Cauchy-Riemann条件，减弱Morera定理的条件，等等.(见[13]，Chapt. 6). 为了同样的目的，对于“瘦”集E、例如、对于线段$E=[a, b]\subset(-\infty, \infty)$，人们已经区分出所谓函数的**拟解析类**(quasi-analytic class). 人们也已经研究了在无处稠密的充分厚的紧集E上定义的在这样的意义下接近于解析函数的函数：它们可以被z的解析函数或(这是一回事)有理函数一致逼近到任意的精确度.

以下给出上述列举的几个方面的某些结果.

1. **区域内的单演函数**. 若$f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$(这里$u(x, y)$和$v(x, y)$是实值函数)，则为使$f(z)$在区域$G$内解析的充分(且必要)条件是，在每个点$x+iy\in G$下述两个条件同时满足：1) $u(x, y)$和$v(x, y)$关于实变量(x, y)的集合有全微分$du(x, y)$和$dv(x, y)$；和2) Cauchy-Riemann条件

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x, y)}{\partial y},\quad\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

成立. 这个定理的条件可以减弱和推广. 例如，已经证明，对u和v的全微分的存在性要求可以被本质地减弱为u和v在G内的有界性条件所代替，而保持u和v的一阶偏导数在G内处处存在的要求，只要求Cauchy-Riemann条件在G内几乎处处满足(在平面Lebesgue测度的意义下)(见[6]).

设$L(z)$是任意一对交于z的不同的直线，$R(z)$是任意三条从z出发的两两不共线的射线，又设$E(z)$是任意的以z为Lebesgue**稠密点**(density point)的可测集. 连续函数$f(z)$在G内的解析性由每一个下述条件各自保证(见[3]－[5])：*a*) $f'_{L(z)}\neq\infty$在G内处处存在；*b*) $f'_{R(z)}\neq\infty$在G内处处存在；或*c*) $f'_{E(z)}\neq\infty$在G内处处存在. 这里每个集合$L(z)$, $R(z)$和$E(z)$在每个点都有它自己的定义. 必须注意，$f'_{E(z)}(z)$依赖于f和z，但不依赖$E(z)$；导数

$$f'_{as}(z)=f'_{E(z)}(z)$$

称为渐近(近似)导数(asymptotic (approximate) derivative)，在点z上(在区域G内)有渐近导数的函数称为在z上(在G内)是渐近单演的(asymptotically monogenic). 代替条件*b*)只需要求当$z'\to z$，$z'\in R(z)$时

$$\arg\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

的极限存在.

2. **无处稠密集合上的单演函数**. E. Borel([8])构造了一个没有内点的连通**完满集**((perfect set)(**连续统**(continuum))E和一个递增的完满集序列$E_1\subset E_2$

$\subset \cdots \subset E$，使得 E 的面积 $\text{mes}_2 E$ 是正的，

$$\text{mes}_2\left[E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = 0,$$

并且 $f(z)$ 在 E 上的（甚至只需在每个集合 $E_n(n=1, 2, \cdots)$ 上的）单演性蕴含对于每个固定的 n_0，$f(z)$ 关于 $z \in E_{n_0}$ 是无穷次可微的．可以给出关于 E 的比较一般的充分条件，使得 $f(z)$ 具有这个性质，或 $f(z)$ 关于 $z \in E_n$ 具有较弱的 k 次可微性，其中 k 是一个事先给定的自然数．已经找到关于无处稠密的连续统 E 的充分条件，使得对于 E 上的单演函数，与 Cauchy 积分定理类似的定理，Taylor 级数展开和各种形式的唯一性定理是成立的．唯一性定理的一个例子：如果 E 上的两个单演函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 E 的某个**部分**（portion）（即 E 和一个开圆盘的非空交）上重合，那么在 E 上有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$（见[9]）．

3．**近似于解析函数的函数**．众所周知，区域 G 内的任意的解析函数 $f(z)$ 都是一个有理函数序列 $r_n(z)$ 的极限，这个序列在每个紧集 $K \subset G$ 上一致收敛于 $f(z)$．如果考虑充分厚的无处稠密的连续统 E 和所有这样的函数 $f(z)$ $(z \in E)$ 所组成的函数类 $R(E)$：对于其中每个函数 $f(z)$ 都存在一个有理函数序列 $r_n(z, f)$ 一致收敛于它，那么还可得到区域的概念和 E 上的解析函数 $f(z)$ 的概念的另一种推广．若 E 是 $\mathbf{C}$ 里的一个无处稠密集，则总能找到一个函数 $f \in R(E)$，它在每个点 $z \in E$ 都没有导数 $f'_E(z)$（见[10]）．但是，对于每个 m $(2 \leqslant m \leqslant \infty)$ 都可以在 E 上给出条件，在此条件下每个 $f \in R(E)$ 都有导数 $f_{E_n}^{(k)}(z)$，其中 $1 \leqslant k < m$，这里，E_n 是闭的，$E_n \subset E$，而 $\text{mes}_2(E \setminus E_n) < 1/n$（见[11]）．M．B．Келдыш 构造了一个无处稠密的连续统 E 的例子，第 2 段末尾所提到的形式的唯一性定理对于函数 $f_1, f_2 \in R(E)$ 成立（亦见[12]）．（关于 $R(E)$ 中的函数用泛函分析来叙述的单演性质，见[12]，Chapt．Ⅰ，Sect．17．）函数 $f \in R(E)$ 的单演性对于它用有理函数逼近的速度的依赖关系也已经被研究．

参考文献

[1] Федоров, В. С., 《Успехи матем. наук》, **7**(1952), 2, 7-16.

[2] Bohr, H., Ueber streckentreue und konforme Abbildung, *Math. Z.*, **1**(1918), 403-420.

[3] Men'shov, D. E., Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann, *Fund. Math.*, **25**(1935), 59-97.

[4] Men'shov, D. E., Les conditions de monogénéité, Hermann, 1936.

[5] Меньшов, Д. Е., 《Матем. сб》, **1**(1936), 189-210.

[6] Толстов, Г. П., О Криволинейном и повторном интеграле, М.-Л., 1950.

[7] Трохимчук, Ю. Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963.

[8] Borel, E., Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Gauthier-Villars, 1917.

[9] Селезнев, А. Е., 《Докл. АН СССР》, **108**(1956), 4, 591-594.

[10] Долженко, Е. П., 《Докл. АН СССР》, **125**(1959), 5, 970-973.

[11] Долженко, Е. П., 《Докл. АН СССР》, **143**(1962), 4, 771-774.

[12] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 143-250（英译本：Mel'nikov, M. S. and Sinanyan, S. O., Aspects of approximation theory for functions of one complex variable, *J. Soviet Math.*, **5**(1976), 5, 688-752）.

[13] Бермант, А. Ф., Маркушевич, А. И., в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917-1947. М.-Л., 1948, 401-406.

[14] Telyakovskiĭ, D. S., Generalization of the Looman-Men'shov theorem, *Math. Notes*, **19**(1986), 4, 296-301 (*Mat. Zametki*, **39**(1986), 4, 539-549).

Е. П. Долженко 撰　陈怀惠 译

单演半群［**monogenic semi-group**; **моногенная полугруппа**］，循环半群（cyclic semi-group）

由一个元素生成的**半群**（semi-group）．由元素 a 生成的单演半群通常记作 $<a>$（有时亦作 $[a]$），它是由全体具有自然指数的方幂 a^k 构成的．如果所有的方幂互不相同，则 $<a>$ 同构于自然数的加法半群．否则 $<a>$ 是有限的，其中包含的元素个数称为半群 $<a>$ 的阶（order of the semi-group），同时也是元素 a 的阶（order of the element）．如果 $<a>$ 是无限的，则称 a 具有无限阶（infinite order）．对于一个有限的单演半群 $A = <a>$，存在一个最小的数 h 具有性质 $a^h = a^k$，对某个 $k > h$．h 称为元素 a 的指数（index of the element）（亦称为半群 A 的指数（index of the semi-group））．与此相关，如果 d 是满足 $a^h = a^{h+d}$ 的最小的数，就称 d 为 a（或 A）的周期（period）．数对 (h, d) 称为 a（或 A）的型（type）．对任意自然数 h 和 d，(h, d) 型的单演半群总存在．两个有限单演半群同构当且仅当它们的型相同．如果 (h, d) 是单演半群 $A = <a>$ 的型，则 $a, \cdots, a^{h+d-1}$ 是互异的元素，故 A 的阶等于 $h+d-1$．集合

$$G = \{a^h, \cdots, a^{h+d-1}\}$$

是 A 中最大的子群和最小的理想．群 G 的单位元 e 是 A 中唯一的幂等元，这里 $e = a^{ld}$，l 是任意满足 $ld \geqslant h$ 的自然数．G 是一个**循环群**（cyclic group），例如 ae 即为一个生成元．单演半群中的幂等元是它的一个单位元（相应地：零元）当且仅当它的指数（相应地：

周期）等于 1；这等价于给定的单演半群是一个**群**(group)(相应地：**幂零半群**(nilpotent semi-group))．无限单演半群的每个子半群是有限生成的．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本：Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974). Л. Н. Шеврин 撰 王 杰 译 石生明 校

幺半群 [**monoid**; **моноид**]

短语"带单位元的**半群**(semi-group)"的缩略语．因此，一个幺半群是带有一个结合二元运算的集合 M，该运算通常称为乘法(multiplication)，且 M 包含一个元素 e，使得对任意 $x \in M$ 有 $ex = x = xe$．元素 e 称为单位元(identity)(或单位(unit))，通常记作 1．任意幺半群中恰有一个单位元．如果给定的幺半群中的运算是交换的，则常常称之为加法(addition)，而单位元就称为零元(zero)，记作 0．

幺半群的例子．1)任意一个集合 S 到自身的全体映射构成的集合，关于映射相继作用(复合)的运算成为一个幺半群．恒等映射是其单位元．2)**泛代数**(universal algebra)A 的自同态的集合，关于复合构成一个幺半群；恒等同态是其单位元．3)每个**群**(group)都是幺半群．

每个不带单位元的半群 P 可嵌入一个幺半群．这只需取一不在 P 中的符号 1，在集合 $P \cup \{1\}$ 上定义一个乘法如下：$1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot x = x = x \cdot 1$，对任意 $x \in P$，而对于 P 中的元素运算照旧．每个幺半群可表示成某个泛代数的全体自同态的幺半群．

任一幺半群还可以视为只有一个对象的一个**范畴**(category)．这使得每个幺半群 M 可与它的一个对偶(相反的、伴随的)幺半群 M^{op} 相联系．两个幺半群的元素集合相等，但 M^{op} 中 x 和 y 的乘积等于 M 中的乘积 yx．

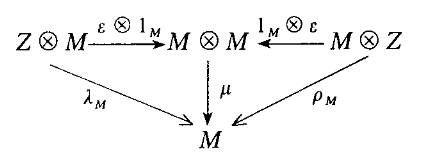
幺半群和伴随函子理论的建立在所谓单项范畴(monoidal categories)中显示出幺半群定义的效用．假设给定一个范畴 $\mathfrak{M}$，它具有一个二变项函子 $\otimes: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$，一个对象 Z 以及满足凝聚条件的自然同构

$$\alpha_{ABC}: (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C),$$

$$\lambda_A: Z \otimes A \to A,\ \rho_A: A \otimes Z \to A.$$

范畴 $\mathfrak{M}$ 中一个对象 M 称为一个幺半群，如果存在态射 $\mu: M \otimes M \to M$ 和 $\varepsilon: Z \to M$ 使得下面的图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} (M \otimes M) \otimes M & \xrightarrow{\mu \otimes 1_M} & M \otimes M & \xrightarrow{\mu} & M \\ \downarrow \alpha_{MMM} & & & & \| \\ M \otimes (M \otimes M) & \xrightarrow[1_M \otimes \mu]{} & M \otimes M & \xrightarrow[\mu]{} & M \end{array}$$



如果 $\mathfrak{M}$ 取为**集合的范畴**(sets, category of)，$\otimes$ 为 **Descartes 积**(Cartesian product)，Z 是一个单点集，而同构 α, λ 和 ρ 选取为自然的方式($\alpha((a, b), c) = (a, (b, c))$, $\lambda(z, a) = a = \rho(a, z)$)，那么幺半群的第二种定义与原来的定义等价．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961 - 1967.

[2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971. М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 关于单项范畴，特别是同构 α_{ABC}、λ_A 必须满足的凝聚条件(coherence conditions)，见[1]第七章，1－2节． 王 杰 译 石生明 校

单项变换 [**monoidal transformation**; **моноидальное преобразование**] 拉开(blowing up)，σ 过程(σ-process)

代数簇的一类特殊的**双有理态射**(birational morphism)或解析空间的一类特殊的双亚纯态射．例如，设 X 是一个代数簇(或任意的概形)，且设 $D \subset X$ 是由理想层 J 给出的闭子簇．X 的以 D 为中心的单项变换是 X 概形 $X^1 = \mathrm{Proj}(\oplus_{n \geq 0} J^n)$ —— 分次 $\mathscr{O}_X$ 代数层 $\oplus_{n \geq 0} J^n$ 的射影谱．如果 $f: X^1 \to X$ 是 X 概形 X^1 的结构态射，则 X^1 上理想层 $f^*(J) = J \cdot \mathscr{O}_{X^1}$(它定义了 X^1 上的例外子概形 $f^{-1}(D)$)是可逆的．这意味着 $f^{-1}(D)$ 是 X^1 上的**除子**(divisor)，此外 f 诱导了 $X^1 \setminus f^{-1}(D)$ 与 $X \setminus D$ 间的同构．概形 X 的以 D 为中心的单项变换 $f: X^1 \to X$ 是以下述普遍性质为特征的([1])：理想层 $f^*(J)$ 是可逆的，而且对任意的态射 $g: X_1 \to X$(使得 $g^*(J)$ 是可逆的)，存在唯一的态射 $h: X_1 \to X^1$，使得 $g = f \circ h$。

代数或解析空间 X 的以闭子空间 $D \subset X$ 为中心的单项变换可用同样的方式定义或刻画．

一类重要的单项变换是容许单项变换(admissible monoidal transformation)，它们满足以下条件：D 是非奇异的，X 沿着 D 是正规平坦概形(normally flat scheme)．后一条件意味着所有的层 J^n / J^{n+1} 都是平坦($\mathscr{O}_X / J$)模．容许单项变换的重要性在于它们不会使簇的奇异性变得更坏．此外，已经证明([1])：容许单项变换的一个适当的序列可以改善奇点，这样就能证明特征为零的域上的代数簇的奇点分解的定理．

非奇异簇的容许单项变换特别容易构造．如果 $f: X_1 \to X$ 是具有非奇异中心 $D \subset X$ 的单项变换，则 X_1 仍是非奇异的，而且例外子空间 $f^{-1}(D)$ 典范地同构于

D在X内的余法层的射影化．在D由一个点构成的特殊情形下，单项变换就是把这个点拉开为由切线方向构成的整个射影空间．关于非奇异簇的各种不变量（如周环，上同调空间，K函子以及陈类）在容许单项变换下的性状，参见[2]－[5]．

参考文献

[1] Hironaka, H., Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero Ⅰ, Ⅱ, *Ann. of Math.* (2), **79** (1964), 109－326.

[2] Berthelot, P., Grothendieck, A. and Illusie, L., et al. (eds.), Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, SGA 6, Lecture notes in math., 225, Springer, 1971.

[3] Grothendieck, A., et al. (eds.): Cohomologie l-adique et fonctions L, SGA 5, Springer, 1977.

[4] Porteous, I., Blowing up Chern classes, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **56** (1960), 2, 118－124.

[5] Манин, Ю. И., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 5, 3－86.

В. И. Данилов 撰

【补注】"σ过程"(σ-process)一词首先出现在[A1]中．

参考文献

[A1] Hopf, H., Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten, *Comm. Math. Helv.*, **29** (1954), 132－156.

陈志杰 译

单项式 [monomial; одночлен]

代数表达式的最简单的形式，只含有一项的**多项式**(polynomial)．

像多项式(见**多项式环**(ring of polynomials))一样，单项式不仅可被考虑为域上的，也可以考虑为环上的．一个交换环A上的以$\{x_i\}$为变元集的单项式(这里i取遍某个指标集I)是一个偶对(a, ν)，其中$a \in A$，ν是集合I到非负整数集的一个映射，满足：除有限多个i以外，都有$\nu(i)=0$．一个单项式通常写成

$$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \cdots x_{i_n}^{\nu(i_n)}$$

的形式，其中$i_1, \cdots, i_n$是所有使得$\nu(i)>0$的指标．数目$\nu(i)$称作此单项式关于变元x_i的次数(degree)，而它们的和$\sum_{i \in I} \nu(i)$称作此单项式的全次数(total degree)．环的元素可被视为0次单项式．$a=1$的单项式称作本原的(primitive)．任一$a=0$的单项式都视为与$0 \in A$是相同的．

A上的以$\{x_i\}(i \in I)$为变元的单项式的集合组成有幺元的半群，其中两个单项式(a, ν)和(b, κ)的乘积定义为$(ab, \nu+\kappa)$．

设B是交换的A代数，则单项式$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \cdots x_{i_n}^{\nu(i_n)}$按照公式$(b_1, \cdots, b_n) \to a b_1^{\nu(i_1)} \cdots b_n^{\nu(i_n)}$定义了由$B^n$到$B$的一个映射．

有时考虑非交换变元的单项式．这种单项式定义为形如

$$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \cdots x_{i_n}^{\nu(i_n)}$$

的表达式，其中(不一定互异)的指标$i_1, \cdots, i_n$的序列是固定的．

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

Л. В. Кузьмин 撰　赵春来 译

单项矩阵 [monomial matrix; мономиальная матрица]

具有单位元的结合环上的一个方阵，在它的每一行和每一列上恰好存在一个非零元．如果单项矩阵的非零元都等于1，则这个矩阵称为置换矩阵(permutation matrix)．任何单项矩阵都是一个置换矩阵和一个对角矩阵的积．

Д. А. Супруненко 撰　杜小杨 译

单项表示 [monomial representation; мономиальное представление]，有限群G的

G在有限维向量空间V上的一个表示ρ(见**群的表示**(representation of a group))，在V的某组基$(e)=\{e_1, \cdots, e_n\}$下，对任意$g \in G$，$\rho(g)$的矩阵$M_{\rho(g)}^{(e)}$的每行每列都只有一个非零元素．有时单项表示也指正则矩阵表示$g \to M_{\rho(g)}^{(e)}$(亦见**正则表示**(regular representation))．单项表示是非本原表示的特例(见**非本原群**(imprimitive group))．即V中由向量$e_1, \cdots, e_n$生成的一维子空间的集合是ρ的一个非本原系．反之，如果G在某个向量空间W中的表示φ有一个由一维子空间构成的非本原系，则φ是一个单项表示．令H为G的任一子群，单项表示的一个例子是由H的一维表示诱导出来的G的表示(见**诱导表示**(induced representation))．这样的表示亦称为诱导单项表示(induced monomial representation)(见[1])．并非每个单项表示ρ都是诱导的(但若ρ不可约，则它可以是诱导的)．上面给出的单项表示的定义来源于经典的有限群表示论．然而，该定义常被修改为：由某个子群H的一维表示诱导出来的群G的表示称为单项表示．单项表示的这一种形式的定义不仅对于有限群及其有限维表示有意义，而且对于例如 Lie 群及其在 Hilbert 空间中的表示有意义(这时假定子群H是闭的)．对于相当大的一类群，可以证明单项表示的结构足以描述所有不可约酉表示．其所有不可约酉表示(见**不可约表示**(irreducible representation)；**酉表示**(unitary representation))都是单项表示的群称为单项群(monomial group)，或M群(M-group)．它们包括了全部的有限幂零群和全部的连通幂零 Lie 群．所有的有限M群和所有的单项 Lie 群都是可解的(见[2])．

参考文献

[1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.
[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

В. И. Попов 撰

【补注】 关于 30 年前所知道的 M 群的状况，较为详尽的说明见 [A1].

参考文献

[A1] Huppert, B., Endliche Gruppen, I. Springer, 1967, Chapt. V. §18 (中译本: B. 胡佩特，有限群论，福建人民出版社，1993).
[A2] Feit, W., Characters of finite groups. Benjamin, 1967.

王 杰 译 石生明 校

单项代换的群 [monomial substitutions, group of; мономиальная группа подстановок]

群 H 的整群环 $\mathbf{Z}[H]$ (见**群代数** (group algebra)) 上全体 m 级可逆矩阵构成的群 $\mathrm{GL}(m, \mathbf{Z}[H])$ 的一个子群，其中的矩阵每行每列都恰包含一个 H 中的非零元素. 每个在 (i, j) 处有一非零元素 $h_{ij} \in H$ 的这样的矩阵对应于一个单项代换，即一个映射 $\psi: u_i \to h_{ij} u_j$，其中 $j = j(i)$，$i = 1, \cdots, m$，而 $u_i \to u_j$ 是有限集合 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$ 上的一个置换. 对于这样的两个映射 $\psi_1: u_i \to h_{ij} u_j$，$\psi_2: u_j \to h_{jk} u_k$，它们的乘积由下式给出:

$$\psi_1 \psi_2: u_i \to (h_{ij} h_{jk}) u_k,$$

并且对应于与 ψ_1 和 ψ_2 相联系的矩阵的乘积. 任一群 G 若包含 H 作为指数为 m 的子群，都可以同构地嵌入一个单项代换群. 单项代换群同构于 H 与 m 次**对称群** (symmetric group) $S(m)$ 的 (非限制) **圈积** (wreath product).

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).
[2] Hall, M. Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959 (中译本: M. 赫尔，群论，科学出版社，1982).

Н. Н. Вильямс 撰 王 杰 译 石生明 校

单态射 [monomorphism; монморфизм]，范畴中的

一个**范畴** (category) $\mathfrak{K}$ 中的一个态射 $\mu: A \to B$，当 $\alpha\mu = \beta\mu$ (α, β 是 $\mathfrak{K}$ 中的态射) 时必有 $\alpha = \beta$ (换言之，μ 可以从右边消去). 单态射的一个等价的定义是: 对范畴 $\mathfrak{K}$ 中的任何对象 X，由 μ 所引出来的集合的映射

$$\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$$

必是单射. 两个单态射之积是一个单态射. 单态射的每一个左除项是一个单态射. 任意的一个范畴 $\mathfrak{K}$ 中，所有对象之类与所有单态射之类组成 $\mathfrak{K}$ 的一个子范畴 (通常表以 $\mathrm{Mon}\,\mathfrak{K}$).

在**集合的范畴** (sets, category of) 中，单态射都是**单射** (injection). 单态射概念的对偶是**满态射** (epimorphism) 的概念.

参考文献

[1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.
[2] Bucur, I. and Deleanu, A., Introduction to the theory of categories and functors, Wiley, 1968.

О. А. Иванова 撰

【补注】 上面所述的第一个定义中，态射的合成是"按图的次序"写的 (即，$\alpha\mu$ 的意思是"α 的后面是 μ"). 如果像通常那样作法，次序是反过来的. 那么，单态射是可以从左边消去的态射.

参考文献

[A1] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

周伯埙 译

单项样条 [monospline; моносплайн]

函数 x^n 与 $n-1$ 次多项式**样条** (spline) $S_{n-1}(x)$ 的差. 单项样条是在可微函数的求积公式的研究中提出的.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, R. S., On monosplines of least deviation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 458–477.
[A2] Schoenberg, I. J., Monosplines and quadrature formulae, in T. N. E. Greville (ed.): Theory and Applications of Spline Functions, Acad. Press, 1969, 157–207.
[A3] Schumaker, L. L., Spline functions: basic theory, Wiley, 1981.
[A4] Zhensykbaev, A. A., Monosplines of minimal norm and the best quadrature formulae, *Russ. Math. Surveys*, **36** (1981), 4, 121–180 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **36** (1981), 4, 107–159).
[A5] Zhensykbaev, A. A., On monosplines with nonnegative coefficients, *J. Approximation Theory*, **55** (1988), 172–182.

史应光 译

单调 Boole 函数 [monotone Boolean function; монотонная Булева функция]

有以下性质的一个 **Boole 函数** (Boolean function) $f(x_1, \cdots, x_n)$ $(n = 0, 1, \cdots)$: 如果对某些集合 $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$，对所有的 i 条件 $\alpha_i \leqslant \beta_i$ 成立 (因而写成 $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$)，则 $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$.

例如，函数 $f(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2$（模2加法）不是单调的，因为 $(0,1)\not\prec(1,1)$ 而 $1=f(0,1)>f(1,1)=0$.

单调 Boole 函数的例子有：常函数0和1，单位函数 $f(x)=x$，析取 $x_1\vee x_2$，合取 $x_1\&x_2$，等等．非单调 Boole 函数的例子有：否定 $\overline{x}$，蕴涵 $x_1\to x_2$，等等．由单调 Boole 函数经复合得到的任何函数本身是单调的．换言之，所有单调 Boole 函数的类是闭的．此外，所有单调 Boole 函数的类是所有 Boole 函数的集合中五个极大（准完全）类之一，即没有一个 Boole 函数的闭类包含所有单调 Boole 函数而又不同于单调函数类和所有 Boole 函数的类．异于0和1的任何单调 Boole 函数的既约**析取范式**（disjunctive normal form）不包含变元的否定．函数集 $\{0,1,x_1\vee x_2,x_1\&x_2\}$ 是所有单调 Boole 函数类中的一个完全系（此外，还是一个基）.

关于依赖于 n 个变元的单调 Boole 函数的个数 $\psi(n)$，已知

$$\psi(n)=2^{\binom{n}{[n/2]}(1+\varepsilon(n))},$$

这里 $0<\varepsilon(n)<c(\log n)/n$ 且 c 是一个常数（见[2]）.

单调 Boole 函数类用**功能元图**（diagram of functional elements）和用开关回路来实现的复杂性（见**触点模式**（contact scheme））比任意 Boole 函数的实现的复杂性有较低的值（见**综合问题**（synthesis problems））．某些离散极值问题约化成单调 Boole 函数求值问题．这个问题要求在已知 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为单调 Boole 函数的条件下，通过最少次地询问“在集合 $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 上的值 $f(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$ 是什么”这样的问题，来弄清楚它在所有集合上的值．已经提出一个算法（[3]），它对一个任意的单调 Boole 函数需要至多

$$\binom{n}{[n/2]}+\binom{n}{[n/2]+1}$$

个问题．另一方面，没有一个求值算法以少于

$$\binom{n}{[n/2]}+\binom{n}{[n/2]+1}$$

个问题把函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}0,\ \text{当}\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant\left[\dfrac{n}{2}\right],\\ 1,\ \text{当}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\left[\dfrac{n}{2}\right]+1\end{cases}$$

从所有其他的单调 Boole 函数中区分出来．

单调 Boole 函数概念的一种推广是 k 值逻辑单调函数（monotone function of k-valued logic）．如果在集合 $E_k=\{0,\cdots,k-1\}$ 上给定了任意一个偏序 S（写成 $\leqslant_S$），则按定义，对任何两个集合 $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\alpha_i,\beta_j\in E_k$，$\widetilde{\alpha}\prec_S\widetilde{\beta}$ 是指对所有的 i，$\alpha_i\leqslant_S\beta_i$．一个 k 值逻辑函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$（即定义在 E_k 上且在其中取值）称为关于 S 单调的，如果对任何集合 $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，条件 $\widetilde{\alpha}\prec_S\widetilde{\beta}$ 蕴涵 $f(\widetilde{\alpha})\leqslant_S f(\widetilde{\beta})$．在 E_k 上关于某偏序 S 单调的所有函数的类总是一个闭类；它是 k 值逻辑函数中一个准完全类，当且仅当 S 中正好有一个极大元和一个极小元（[4]）．依赖于 n 个变元且关于 S 单调的 k 值逻辑函数的个数 $\psi_S(n)$，当 $n\to\infty$ 时，满足

$$\log_2\psi_S(n)\sim C(S)\frac{k^n}{\sqrt{n}},$$

这里 $C(S)$ 是关于给定偏序 S 可有效地计算的常数（见[5]）.

参考文献

[1] Яблонский, С.В., Введение в дискретную математику, М., 1979.

[2] Клейтмен, Д., 《Кибернетич. сб.》, 1970, в. 7, 43－52.

[3] Ансел, Ж., 《Кибернетич. сб.》, 1968, в. 5, 47－52, 53－57, 58－63.

[4] Мартынюк, В.В., 《Проблемы кибернетики》, 1960, в. 3, 49－60.

[5] Алексеев, В.Б., 《Проблемы кибернетики》, 1974, в. 28, 5－24.

[6] Алексеев, В.Б., 《Докл. АН СССР》, **208** (1973), 3, 505－508.

В.Б.Алексеев 撰

【补注】在1985年对显式单调 Boole 函数的单调回路实现的大小已证明了超多项式下界．这解决了一个自回路理论早期起悬而未决的问题，但对一般 Boole 回路仍未解决．这个方向的第一个结果是由 А.А.Разборов（[A1]）得到的．

参考文献

[A1] Razborov, A. A., Lower bounds for the monotone complexity of some Boolean functions, *Soviet Math. Dokl.*, **31** (1985), 354－357.（*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **281** (1985), 4, 798－801.）

[A2] Savage, J. E., The complexity of computing, Wiley, 1976.

葛显良 译　李慧陵 校

单调函数[**monotone function**; **монотонная функция**]

定义于实数集的一个子集上的单元函数，它关于 $\Delta x=x'-x>0$ 的增量 $\Delta f(x)=f(x')-f(x)$ 不改变符号，即恒为非负或恒为非正．如果当 $\Delta x>0$ 时 $\Delta f(x)$ 严格大于（小于）零，则此函数称为**严格单调的**（strictly monotone）（见**递增函数**（increasing function）；**递减函数**（decreasing function））．下表列出了单调函数的各种类型．

$\Delta f(x)\geqslant0$	递增（非减）	
$\Delta f(x)\leqslant0$	递减（非增）	
$\Delta f(x)>0$	严格递增	
$\Delta f(x)<0$	严格递减	

如果 f 在一个区间的每个点有导数且导数不改变符号（对应地，保持常号），则 f 在此区间上是单调的（对应地，严格单调的）.

单调函数概念可推广到各类函数. 例如，定义于 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 称为单调的，如果条件 $x_1 \leqslant x_1', \cdots, x_n \leqslant x_n'$ 蕴涵处处有 $f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant f(x_1', \cdots, x_n')$ 或处处有 $f(x_1, \cdots, x_n) \geqslant f(x_1', \cdots, x_n')$. **逻辑代数**（algebra of logic）中的单调函数可类似地定义.

多元单调函数在某点处为递增或递减定义如下. 设 f 定义于 n 维闭立方体 Q^n 上，$x_0 \in Q^n$，并设 $E_t = \{x: f(x) = t, x \in Q^n\}$ 是 f 的**水平集**（level set），则函数 f 称为在 x_0 处是递增的（increasing）（对应地，递减的（decreasing）），如果对任一 t 和任一满足下述条件的 $x' \in Q^n \setminus E_t$: 在 Q^n 中 x' 与 x_0 不被 E_t 所分隔，关系 $f(x') < t$（对应地，$f(x') > t$）成立；而对任一满足下述条件的 $x'' \in Q^n \setminus E_t$: 在 Q^n 中 x'' 与 x_0 被 E_t 所分隔，关系 $f(x'') > t$（对应地，$f(x'') < t$）成立. 在某点处递增或递减的函数称为在该点处是单调的. Л. Д. Кудрявцев 撰　沈永欢 译

单调映射 [monotone mapping; монотонное отображение]

保序映射（isotone mapping）和**反序映射**（antitone mapping）.

单调算子 [monotone operator; монотонный оператор]

非线性泛函分析(non-linear functional analysis)中的一个概念.

设 E 是一个 **Banach 空间**(Banach space)，E^* 是它的对偶，并且设 (y, x) 是线性泛函 $y \in E^*$ 在元素 $x \in E$ 的值. 一个算子 A、一般是非线性的，并且从 E 作用到 E^*、称为单调的(monotone)，如果对任何的 $x_1, x_2 \in E$,

$$\mathrm{Re}(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geqslant 0 . \qquad (1)$$

算子 A 称为半连续的(semi-continuous)，如果对任意的 $u, v, w \in E$ 数值函数 $(A(u+tv), w)$ 关于 t 连续. 半连续单调算子的一个例子是凸 Gâteaux 可微泛函的梯度. 变分学中的许多泛函是凸的，并且因此生成单调算子；它们在非线性积分方程的解中有用、并且事实上首先应用在那里.

单调算子在考虑非线性方程可解性的问题中的各种应用基于下面的定理(见[1],[2]). 设 E 是一个自反 Banach 空间(见**自反空间**(reflexive space))，并且设 A 是有强制性性质

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\mathrm{Re}(Au, u)}{\|u\|} = \infty$$

的半连续单调算子，那么对任一 $f \in E$，方程 $Au = f$ 至少有一个解.

定义在集 $D \subset E$ 上取值于 E^* 的一个算子 A 称为在 D 上单调的，如果(1)对任何 $x_1, x_2 \in D$ 成立，并且称为极大单调的(maximal monotone)，如果它在 D 上单调并且没有真(严格)单调延拓.

研究带单调算子的方程在很大程度上是由拟线性椭圆型和抛物型方程理论中的问题所推动的. 例如、拟线性抛物型方程的边界值问题导致适当的 Banach 空间 E 中形如

$$\Lambda x + Ax = f \qquad (2)$$

的方程. 这同一方程也自然地出现在带 Banach 空间中非线性算子的抽象**发展方程**(evolution equation)的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)的研究中. 如果 E 是自反的，并且 A 是一个有界、半连续且在 E 中有稠定义域的强制算子，那么(2)对任一 $f \in E^*$ 是可解的. 单调性概念也已应用于非线性抛物型方程殆周期解的问题中.

参考文献

[1] Browder, F., Non-linear parabolic boundary value problems of arbitrary order, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1969), 858–861.

[2] Minty, G. J., On a "monotonicity" method for the solution of non-linear problems in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 1038–1041.

[3] Вайнберг, М. М., Качуровский, Р. И., 《Докл. АН СССР》, **129**(1959), 6, 1199–1202.

[4] Вайнберг, М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972 (英译本: Vaĭnberg, M. M., Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973).

[5] Lions, J. L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, 1969.

[6] Левитан, Б. М., Жиков, В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978 (英译本: Levitan, B. M. and Zhikov, V. V., Almost-periodic functions and differential equations, Cambridge Univ. Press, 1982).

[7] Качуровский, Р. И., 《Успехи матем. наук》, **23** (1968), 2, 121–168.

В. В. Жиков 撰　鲁世杰译　葛显良 校

单调序列 [monotone sequence; монотонная последовательность]

序列 $\{x_n\}$、对于一切 $n = 1, 2, \cdots$，存在下列情况下:

$x_n < x_{n+1}$（严格递增序列）;

$x_n \leqslant x_{n+1}$（非减序列）;

$x_n > x_{n+1}$（严格递减序列）;

$x_n \geqslant x_{n+1}$（非增序列）.

【补注】 亦见**递增序列**(increasing sequence);**递减序列**(decreasing sequence). 张鸿林 译

蒙特卡罗方法[**Monte-Carlo method**; **Монте-Карло метод**],统计试验法(method of statistical trials)

一种建立在用随机变量进行模拟和对未知量构造统计估算方法基础上的数值方法. 一般认为蒙特卡罗方法产生于 1949 年(见[1]),当时针对原子反应堆建设工作,J. von Neumann 和 S. Ulam 建议在计算机求解应用问题中使用概率论的工具. 蒙特卡罗方法是依著名赌城蒙特卡罗命名的.

已知分布的随机变量模拟. 作为一条规律,这种模拟是变换均匀分布于区间(0, 1)中一个或多个独立随机数 α 之值而得到. 这个"样本"值 α 的序列一般由数论算法在计算机上获取,使用最广的算法是所谓剩余法(method of residues),例如,可取

$$u_0=1,\ u_n\equiv u_{n-1}5^{2p+1}(\operatorname{mod}2^m),\ \alpha_n=u_n\cdot 2^{-m}.$$

其中 m 是计算机尾数的阶,且

$$p=\max\{q:\ 5^{2q+1}<2^m\}.$$

这种类型的数称为拟随机数(pseudo-random number);它们被广泛应用于统计检验及一些典型问题的求解(见[2]-[6]). 上述余数方法的周期长度是 2^{m-2}. 一些物理生成法,随机数表和拟随机数也用于蒙特卡罗方法. 也有使用少量参数的蒙特卡罗方法(见[7]).

模拟关于分布 $\mathrm{P}\{\xi=x_k\}=p_k(k=0,1,\cdots)$ 的离散随机变量的标准方法如下:置 $\xi=x_m$,倘若所选取的 α 值满足

$$\sum_{k=0}^{m-1}p_k\leqslant\alpha<\sum_{k=0}^{m}p_k.$$

模拟连续随机变量的标准方法(有时也称为反函数法(method of inverse functions))是使用表示式 $\xi=F^{-1}(\alpha)$,这是容易说明的,其中 F 是已知密度 f 的分布函数. 有时模拟的随机化(randomization)是有用的(换句话说,即叠加法(method of superposition)),它基于下面表达式

$$f(x)=\sum_k p_kf_k(x);$$

其中,一般是首先选取 m 使 $\mathrm{P}\{m=k\}=p_k$,然后从密度 f_m 的分布中得到样本值 ξ. 在其他随机化方法中求解问题的主要方法的某些参数被看作随机变量(见[7]-[9]).

另一种更一般的模拟连续随机变量的方法是排除法(method of exclusion)(选择法(method of selection)),它基于下面的结果:如果 (ξ,η) 均匀分布于区域 $G=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant g(x)\}$,则 $f_\xi(x)=g(x)/\overline{G}$. 在排除法中,在区域 $G_1\supset G$ 中均匀地选取点 (ξ_0,η),且如果 $(\xi_0,\eta)\in G$ 则令 $\xi=\xi_0$;否则重新选取 (ξ_0,η) 等等. 例如,若 $a\leqslant\xi\leqslant b$ 且 $g(x)=cf(x)\leqslant R$,则可取 $\xi_0=a+(b-a)\alpha_1$,$\eta=R\alpha_2$. 在排除法中运算的平均数正比于 $\overline{G}_1/\overline{G}$.

对于许多随机变量,形如 $\xi=\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的特殊表示法已经得到. 例如,随机变量

$$\sqrt{-2\ln\alpha_1}\cdot\cos2\pi\alpha_2 \text{ 和 } \sqrt{-2\ln\alpha_2}\cdot\sin2\pi\alpha_2$$

具有标准的正态分布而且是独立的;随机变量 $\ln(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 具有带参数 n 的 γ 分布;随机变量 $\max(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 有密度为 nx^{n-1} 的分布,其中 $0\leqslant x\leqslant1$;随机变量 $\exp\{\sum_{k=1}^n(\ln\alpha)/(p+k+1)\}$ 具有带参数 p,n 的 β 分布(见[3]-[6]).

模拟连续随机向量 $\vec{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的标准算法是不断地从相应于下面表示的条件分布中选取其分量值

$$f_{\vec{\xi}}(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2|x_1)\cdots$$
$$\cdots f_n(x_n|x_1,\cdots,x_{n-1}).$$

排除法可不加改变地推广到多维情形;只需在它的公式里,视 ξ,ξ_0 和 x 为向量. 一个多维正规向量能够应用由独立的标准正规随机变量所形成的向量的一个特殊线性变换来进行模拟. 平稳 Gauss 过程的近似模拟的若干特殊方法也已经建立起来(见,例如[3],[6]).

在蒙特卡罗方法计算中,倘若是模拟由实际现象所确定的随机数,那么计算就是该现象的直接模拟(模仿). 如下问题的计算机模拟已经作出:包括中子、γ 量子,声子,电子等质点输运、散射和再生的过程(见,例如[11]-[18]);在解经典和量子统计物理各种问题时所采用的分子总体演化模拟(见,例如[10]-[18]);排队和工业过程的模拟(见,例如[2],[6],[18]);技术与生物领域内各种随机过程的模拟;等等(见[18]). 模拟算法一般都得到仔细研究;例如,把复杂函数值计算列表,修正标准过程等. 依然,对所关心的变量进行估算时,一个直接模拟常常不能提供必要的精度,已有许多方法研究可使模拟的有效性增加.

估算重积分值的蒙特卡罗算法. 假设需要估算 s 维 Euclide 空间 X 中关于 Lebesgue 测度的积分 $J=\int h(x)dx$,而且设 $f_\xi(x)$ 为概率密度使得 J 能够写成

$$J=\int_X f_\xi(x)\frac{h(x)}{f_\xi(x)}dx=\mathrm{E}\zeta,$$

其中 $\zeta=h(\xi)/f_\xi(\xi)$. 由 ξ 的计算机模拟能获得 N 个样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_N$. 应用大数定律

$$J \approx J_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{h(x_k)}{f(x_k)}.$$

同时，能够估计 J_N 中的均方差，即量 $\sigma_N=(D\zeta/N)^{1/2}$，并对 J 近似地构造一个合适的置信区间．通过对密度 f 的选取可使估计带有尽可能小的方差．例如，若 $0\leqslant m_1\leqslant h/f\leqslant m_2<+\infty$，则 $D\zeta\leqslant(m_2-m_1)^2/4$，且若 $f=h/J$，则 $D\zeta=0$．相应的算法称之为本质抽样（essential sampling）（重要性选择（choice by importance））．另一个常用的修正技术是主部选择法（method of selection of principal part），当能够确定函数 $h_0\approx h$（它的积分已知）时采用．有时蒙特卡罗方法和经典**求面积**（quadrature）相结合于所谓随机求积公式（random quadrature formulas）是有用的，其基本思想是任一个求积（例如，采用插值形式）的节点和系数随机地取自一个分布，提供积分的一个**无偏估计**（unbiased estimator）（[3]）．这些公式的特别情形是所谓分层抽样法（method of stratified sampling），其中积分区域的固定分割的每部分选取一个节点，而系数正比于相应的体积；所谓对称抽样法（method of symmetric sampling），针对在 $(0,1)$ 上进行积分的情形，它由下式定义（见[10]）

$$2J=E\left[\frac{h(\xi)+h(1-\xi)}{f_\xi(\xi)}\right].$$

这里蒙特卡罗方法收敛速度的阶是增加的，并且在某些情况下对于所考虑的一类问题是最好的．

一般，积分区域被分割为平行六面体．在每个平行六面体上的积分值取作随机点和相对该平行六面体中心对称点处值的平均值．

蒙特卡罗方法的一些修正是建立在所要求的如下二重积分值的（或许是形式上的）表示上

$$J=\int_X\int_Y f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy=E\zeta,$$

其中 $\zeta=h(\xi,\eta)$，向量 (ξ,η) 是密度为 $f(x,y)$ 的分布．已知 $E(\zeta)=EE(\zeta|\xi)$ 且

$$D\zeta=DE(\zeta|\xi)+ED(\zeta|\xi)=A_1+A_2, \quad (1)$$

其中 $E(\zeta|\xi)$ 为条件数学期望，而 $D(\zeta|\xi)$ 为 ξ 的已知固定值 ζ 的条件方差．公式（1）广泛应用于蒙特卡罗方法．特别，它表明 $DE(\zeta|\xi)<D\zeta$，即任意一个变量的解析平均都使得蒙特卡罗方法的精度增加．但就此而论，计算总量却可能大增．达到已知精度的必要计算机时正比于 $tD\zeta$，其中 t 是得到一个 ζ 值的平均时间．分裂法（method of splitting）是关于这条准则的最优方法．它的最简单形式是使用“无偏”估计

$$\zeta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h(\xi,\eta_k),$$

其中 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是条件无关的，而对固定的 ξ 值是 η 的分布．应用（1）可得到最佳值

$$n=\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{t_1}{t_2}\right]^{1/2},$$

其中 t_1,t_2 是相应于样本 ξ,η 的平均计算时间（见，例如[4]）．

如果被积函数依赖于一个参数，最好使用相关试探法（method of dependent trials），即，在同一个随机点处对参数的不同值估计该积分（[20]）．蒙特卡罗方法的一个重要性质是测量数的均方误差 σ_N 在较大程度上是相对弱相关；而且关于点数 N 的收敛阶总是不变：$N^{-1/2}$．这就使得人们可能估算（经过一个初等变换）大范围的积分，甚至无穷积分，多重情形．例如 Wiener 积分的估算已经作出（[19]）．

求解第二类积分方程的蒙特卡罗算法．假如要求估计线性泛函 $J_h=(\varphi,h)$，其中 $\varphi=K\varphi+f$，这里 K 是关于核 $k(x',x)$ 的积分算子，它满足使 **Neumann 级数**（Neumann series）收敛的条件：$\|K^{n_0}\|<1$．一个 **Марков 链**（Markov chain）$\{x_n\}$ 由初始密度 $\pi(x)$ 和一个转移密度 $p(x',x)=p(x'\to x)$ 定义；链在 x' 终止的概率等于

$$g(x')=1-\int p(x',x)\,dx.$$

设 N 是后面状态的随机指标．又设定义了具有期望 J_h 的链轨道的一个泛函．最经常使用的是所谓碰撞估计（collision estimator）

$$\xi=\sum_{n=0}^{N}Q_n h(x_n),$$

其中

$$Q_0=\frac{f(x_0)}{\pi(x_0)},\ Q_n=Q_{n-1}\frac{k(x_{n-1},x_n)}{p(x_{n-1},x_n)}.$$

如果对于 $k(x',x)\neq0$ 有 $p(x',x)\neq0$，而且对于 $f(x)\neq0$ 有 $\pi(x)\neq0$．那么，在某些附加条件下

$$E\xi=\sum_{n=0}^{\infty}(K^n f,h)=(\varphi,h)=\int_X\varphi(x)h(x)\,dx$$

（见[3]－[5]）．在不变号时达到小偏差的可能性可由下列结果得到保证：若

$$\pi(x)=\frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f,\varphi^*)} \text{ 且}$$

$$p(x',x)=\frac{k(x',x)\varphi^*(x)}{[K^*\varphi^*](x')},$$

其中 $\varphi^*=K^*\varphi^*+h$，则 $D\xi=0$ 且 $E\xi=J_h$（见[4]）．如果一个合适的 Марков 链在计算机上模拟，第二类积分方程求解中线性泛函的统计估计可以得到．这就给出了基于表达式 $\varphi(x)=(\varphi,h_x)+f(x)$，

其中$h_x(x')=k(x', x)$的解的局部估计的可能性．在若干情况下，与蒙特卡罗方法一起，数论方法被用来解决这些问题（见[21]）．估计积分算子第一特征值的蒙特卡罗方法已由建立在下面关系式基础之上的一种迭代法得到实现（[22]）

$$\mathrm{E}[Q_n h(x_n)]=(K^n f, h).$$

所有这些结果几乎都可以自动地推广到形如$x+Hx=h$的线性代数方程组（见[23]）．

辐射输运理论中蒙特卡罗方法的修正．（见[11]－[17]．）在由坐标 $\mathbf{r}$ 和速度 ω 形成的相空间内，质点碰撞平均数的密度满足第二类积分方程；在单一速度情况下的积分核具有下面的形式

$$\frac{\sigma_s(\mathbf{r}')g(\mu)\exp(-\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}))\sigma(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r}')2\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2}\times$$
$$\times\delta\left[\omega-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right].$$

其中$\sigma_s(\mathbf{r})$是散射系数（截面），$\sigma(\mathbf{r})$是松弛系数，$g(\mu)$是散射示量，而$\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})$是从$\mathbf{r}'$至$\mathbf{r}$的路径的光程（见[3]，[4]）．对于小方差情况的估算方法，一般使用譬如相伴输运方程的渐近解法（[4]）；这类方法的最简单的算法是所谓指数变换（见[4]，[11]）．质点流局部估计的修正方法也得到了发展（见[3]，[4]，[11]－[13]，[17]，[18]）．应用 Марков 链（例如，某种介质中的物理输运过程）模拟，可以同时得到对不同参数值泛函的相关估计方法；微分"权"Q_n有时可以得出相应导数的无偏估计法（见[4]，[12]）．这就提供了一种可能，使用蒙特卡罗方法去解某些逆问题（[12]）．在求解输运理论问题时轨道"分歧"和解析平均的方法都是有效的（[11]）．复合介质中质点轨道模拟有时可用极大截面方法得到本质的化简（见[3]－[5]）．

解椭圆型方程的蒙特卡罗算法．这是在相应积分关系式的基础上构造的．例如，Laplace 方程的标准五点差分近似具有带边界吸收的全体网格点上有对称随机游动的完全数学期望公式（见，例如[2]，[3]）．它在连续情形的类似式为

$$u(P)=\frac{\int_{S(P)}u(\mathbf{r}(s))ds}{\int_{S(P)}ds}, \qquad (2)$$

其中积分取在整个位于已知区域内部的以 P 为中心的球的表面上．公式（2）以及其他一些类似的关系式使得人们在解椭圆型和抛物型方程时可应用迷向"球上随机游动"（见[24]，[4]）．蒙特卡罗方法是有效的，例如它可估算在一点上多维边值问题的解．

Марков 分支过程的模拟尚可用来估算某些非线性方程的解，例如稀薄气体理论中的 Boltzmann 方程．

参考文献

[1] Neumann, J. von, *Nat. Bureau Standard Appl. Math. Series*, **12** (1951), 36 − 38.

[2] Бусленко, Н. П. и др., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), М., 1962 (中译本：Н. П. 布斯连科，Ю. А. 施廖盖尔，统计试验法（蒙特卡罗法），上海科学技术出版社，1964).

[3] Ермаков, С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, М., 1971.

[4] Михайлов, Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1971.

[5] Соболь, И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973.

[6] Полляк, Ю. Г., Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, М., 1971.

[7] Бахвалов, Н. С., в сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, 5 − 63.

[8] Бахвалов, Н. С., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, **1** (1961), 64 − 77.

[9] Бахвалов, Н. С., 《Вестник МГУ. Сер. матем., механики, астрономии, физ., хим.》, **4** (1959), 3 − 18.

[10] Hammersley, J. M. and Handscomb, D. C., Monte-Carlo methods, Methuen, 1964.

[11] Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967.

[12] Марчук, Г. И. [и др.], Метод Монте-Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976.

[13] Spanier, J. and Gelbard, E., Monte-Carlo principles and neutron transport problems, Addison-Wesley, 1969.

[14] Чавчанидзе, В. В., 《Изв. АН СССР. Сер. физ.》, **19** (1955), 6, 629 − 638.

[15] Прохождение излучений через неоднородности в защите, М., 1968.

[16] Франк-Каменецкий, А. Д., 《Атомная энергия》, **16** (1964), 2, 119 − 122.

[17] Kalos, M. H., *Nuclear Sci. and Eng.*, **33** (1968), 284 − 290.

[18] Методы Монте-Карло и их применения. Тезисы докл. на Ⅲ Всесоюзн. конф. по методам Монте-Карло, Новосиб., 1971.

[19] Гельфанд, И. М., Фролов, А. С., Ченцов, Н. Н., Изв. вузов. Сер. матем., **5** (1958), 32 − 45.

[20] Фролов, А. С., Ченцов, Н. Н., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **2** (1962), 4, 714 − 717.

[21] Коробов, Н. М., Теоретикочисловые методы в приближенном анализе, М., 1963.

[22] Владимиров, В. С., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **1** (1956), 1, 113 − 130.

[23] Curtiss, J. H., Monte-Carlo methods for the iteration of linear operators, *J. Math. Phys.*, **32** (1954), 209–232.

[24] Muller, M. E., Some continuous Monte-Carlo methods for the Dirichlet problem, *Ann. Math. Stat.*, **27** (1956), 3, 569–589.

Г. А. Михайлов 撰

【补注】 在求解(数值上)数学物理经典方程中应用随机过程的最新情况参阅[A2].

参考文献

[A1] Bratley, P., Fox, B. L. and Schrage, L. E., A guide to simulation, Springer, 1987.

[A2] Ermakov, S. M., Nekrutkin, V. V. and Sipin, A. S., Random processes for the classical equations of mathematical physics, Kluwer, 1989(译自俄文).

张宝琳、袁国兴 译

Montel 空间 [Montel space; Монтеля пространство]

其中每一有界闭集都是紧集的**桶型空间**(barrelled space)(特别是 **Fréchet 空间**(Fréchet space)). 区域 G 中所有全纯函数组成的空间 $H(G)$ 赋予紧集上的一致收敛拓扑, 是 Fréchet 空间, 且由于 Montel 的一个定理(见 **Montel 定理**(Montel theorem), 2), 在 $H(G)$ 中每一个全纯函数的有界序列是相对紧的, 所以 $H(G)$ 是 Montel 空间. 区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 中所有无穷次可微函数组成的空间 $C^\infty(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$, 所有紧支函数的空间 $D(\Omega)$ 以及在无穷远处急减可微函数的空间 $S(\mathbf{R}^n)$, 在它们的自然拓扑下也是 Montel 空间.

Montel 空间是自反的(见**自反空间**(reflexive space)). Montel 空间的强对偶是 Montel 空间; 特别地, 广义函数空间 $\mathscr{E}'(\Omega)$, $D'(\Omega)$ 和 $S'(\Omega)$ 是 Montel 空间. **赋范空间**(normed space)是 Montel 空间, 当且仅当它是有限维的.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wisley, 1977(译自法文).

[2] Robertson, A. P. and Robertson, W., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

[3] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.

С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

[A2] Köthe, G., Topological vector spaces, 1, Springer, 1969.

[A3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Springer, 1971.

葛显良 译

Montel 定理 [Montel theorem; Монтеля теорема]

1) 关于用多项式逼近解析函数的 Montel 定理: 如果 D 是复 z 平面上不含有 $z=\infty$ 的开集, $f(z)$ 是在每个点 $z\in D$ 解析的单值函数, 则存在多项式序列 $\{P_n(z)\}$, 它在每点 $z\in D$ 收敛于 $f(z)$. 这一定理是**复变函数逼近**(approximation of functions of a complex variable)理论的基本结果之一, 为 P. Montel 建立([1]).

2) 关于全纯函数族紧性条件的 Montel 定理或紧性原理(principle of compactness)(见[2]): 设 $\Phi=\{f(z)\}$ 是复 z 平面的区域 D 内的全纯函数的一个无穷族, 如果 Φ 在 D 内一致有界, 则 Φ 是准紧的, 即任一序列 $\{f_k(z)\}\subset\Phi$ 具有在 D 的任何紧子集上一致收敛的子列. 此定理可推广到 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中的区域 D(见**紧性原理**(compactness principle)).

3) 关于全纯函数族正规性条件的 Montel 定理或正规性原理(principle of normality)(见[2]): 设 $\Phi=\{f(z)\}$ 是复 z 平面的区域 D 内的全纯函数的一个无穷族, 如果存在不同的两个值 a 和 b, 使得任何函数 $f(z)\in\Phi$ 都不取这两个值, 则 Φ 是**正规族**(normal family), 即任一序列 $\{f_k(z)\}\subset\Phi$ 具有一子列, 它在 D 的任一紧子集上一致收敛到一个全纯函数或 ∞. 此定理的条件可在某种程度上加以放宽: 只须假定所有 $f(z)\in\Phi$ 不取两个值之一, 例如 a; 而取另一个值 b 至多 m 次 $(1\leqslant m<\infty)$. 此定理可推广到 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中的区域 D.

参考文献

[1] Montel, P., Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, Gauthier-Villars, 1910.

[2] Montel, P., Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1927.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., М., 1963(中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

沈永欢 译

Moore 空间 [Moore space; Мура пространство]

一个拓扑空间 M, 具有唯一的非平凡约化同调群:

$$\widetilde{H}_k(M)=G;\ \widetilde{H}_i(M)=0,\ i\neq k.$$

如果 $K(\mathbf{Z},n)$ 是整数群 $\mathbf{Z}$ 的 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space)且 $M_k(G)$ 是满足 $\widetilde{H}_k(M_k(G))=G$ 的 Moore 空间, 则

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum{}^{N+k}X,\ K(\mathbf{Z},N+n)\wedge M_k(G)\right]\cong$$
$$\cong H^n(X,G),$$

即 $\{K(\mathbf{Z},n)\wedge M_k(G)\}$ 是上同调论 $H^*(\ \ ,G)$

的谱. 这允许把具有任意系数的上同调的概念推广到广义上同调论. 对任一谱 E, 谱 $E \wedge M_k(G)$ 定义了一个上同调论 $(E \wedge M_k(G))^*$, 称为具有系数群 G 的 E^* 上同调论(E^*-cohomology theory). 关于系数属于群 G 的广义同调论的定义, 使用了所谓上 Moore 空间(co-Moore space) $M^k(G)$, 它由

$$\widetilde{H}^k(M^k(G)) = G,\ \widetilde{H}^i(M^k(G)) = 0,\ i \neq k,$$

刻画. 例如, 群 $\pi_i(X, G) = [M^k(G), X]$ 称为空间 X 的具有 G 中系数的同伦群(homotopy group). 但是, 空间 $M^k(G)$ 并非对所有偶 (G, k) 都存在. 如果 G 是有限生成群, 则 $M^k(G)$ 存在.

参考文献

[1] Moore, J. C., On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homotopy group, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 3, 549 - 557. А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 Moore 空间, 作为具有一个零维胞腔以及此外仅有 n 和 $n+1$ 维胞腔的 CW 复形的结构, 见[A1]. Eilenberg-MacLane 空间 $K(G, n)$ 可以从 Moore 空间 $M(G, n)$ 中删去较高的同伦群而得.

在一般拓扑学中, Moore 空间是具有展开列的**正则空间**(regular space). (展开列(development)是这样一个开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_n$, 对每个 x 和包含 x 的每个开集 O, 存在一个 n, 使得

$$\mathrm{St}(x, \mathscr{U}_n) = \bigcup \{U \in \mathscr{U}_n : x \in U\} \subset O;$$

换句话说, $\{\mathrm{St}(x, \mathscr{U}_n)\}_n$ 是 x 处的邻域基.)

展开列的概念见[A4](公理1). Moore 空间是度量空间的推广, 可以证明: 集体正规 Moore 空间是可度量化的([A2]). 是否每个正规 Moore 空间都是可度量化的问题引起了许多研究; [A3] 中介绍了它的解答.

参考文献

[A1] Gray, B., Homotopy theory, Acad. Press, 1975, § 17.

[A2] Bing, R. H., Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 175 - 186.

[A3] Fleissner, W. G., The normal Moore space conjecture and large cardinals, in K. Kunen and J. Vaughan (eds.): Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 733 - 760.

[A4] Moore, R. L., Foundations of point set theory, Amer. Math. Soc., 1962. 白苏华、胡师度 译

Mordell 猜想 [Mordell conjecture; Морделла гипотеза]

关于亏格 $g > 1$ 的**代数曲线**(algebraic curve)上的有理点集的有限性猜想. 这是 L.J.Mordell([1])在基域 K 为有理数域时提出的. 在目前(1997), Mordell 猜测指的是 $g > 1$ 的不可约代数曲线 X 的有理点集 $X(L)$ 的有限性论断, 这里的 X 定义在有理数域 $\mathbf{Q}$ 的有限型扩域 K 上, 有理点取在有限扩域 L/K 内. 当 K 为代数数域时, 已得到了这种最困难情形的 Mordell 猜测的一个约化(见[3]). 已经知道了许多与 Mordell 猜测有关的特殊结果. 因此[2]证明了如果 X 到椭圆曲线 Y 内的 K 自同构群的秩大于群 $Y(K)$ 的秩, 则 $X(K)$ 有限. 在[7]中, 对于很广泛的一类**模曲线**(modular curve)以及定义域 K, 证明了 $X(K)$ 的有限性. [8]得到了有理点 $x_n \in X(K)$ 的高度增长的估计:

$$h(x_n) \geqslant \exp(an + b),$$

显示出它们的分布比亏格 $g \leqslant 1$ 的曲线的情形要"稀疏"得多. 已经证明 Mordell 猜测是关于下述代数曲线条数有限的 Шафаревич 猜测的推论: 这些曲线有给定的亏格 $g > 1$, 给定的定义域($\mathbf{Q}$ 的有限扩域)以及给定的坏约化的点集(见[4], 亦见整点的 **Siegel 定理**(Siegel theorem)).

Mordell 猜测的几何类似是关于丛

$$f: V \to B$$

的截面个数有限的断言, 这里 V 是非异射影曲面, B 是曲线, f 的一般纤维是亏格 $g > 1$ 的不可约曲线. 当丛不是常丛、也就是说对基 B 作某个覆叠后它不会成为一个直积, 且当基域 k 的特征数等于零时, 这个断言正确(见[3], [6]). 在常丛的情形, 只能断定截面的代数等价类个数是有限的, 这里把截面看成 V 上曲线. 当 k 的特征数为正时, Mordell 猜测的几何类似不成立([4]).

参考文献

[1] Mordell, L. J., On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **21** (1922), 179 - 192.

[2] Демьяненко, В. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **30** (1966), 6, 1373 - 1396.

[3] Манин, Ю. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **27** (1963), 6, 1395 - 1440.

[4] Parshin, A. N., Quelques conjectures de finitude en géométrie diophantienne, in Actes Congres International des Mathématiciens, Nice, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 467 - 471.

[5] Grauert, H., Mordell's Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörpern, *Publ. Math. IHES*, **25** (1965), 131 - 149.

[6] Lang, S., Diophantine geometry, Interscience, 1962.

[7] Mazur, B., Rational points on modular curves, in Modular functions of one variables V, Lecture notes in math., Vol. 601, Springer, 1977, 107 - 148.

[8] Mumford, D., A remark on Mordell's conjecture, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 4, 1007 - 1016. А. Н. Паршин 撰

【补注】上述词条原写于 1982 年. 自那时以来, 发生了许多事情, 算术代数几何的领域已呈现出兴旺气象.

数域上的 Mordell 猜测已于 1983 年被 G. Faltings 证明. 他的奠基论文 [A1] 开启了算术代数几何的新的一章. 在这篇论文中 Faltings 同时证明了两个别的著名猜测: 即关于数域上 Abel 簇的自同态的 **Tate 猜想** (Tate conjecture) 以及关于亏格 g 的曲线 (相应地, Abel 簇) 的同构类类数有限的 Шафаревич 猜想 (Shafarevich conjecture), 这些曲线或 Abel 簇定义在数域上, 并且除了有限多给定的位以外, 都有好的约化. Mordell 猜测与 Шафаревич 猜测之间的关系是由 А. Н. Паршин 于 1970 年指出的 ([4]). С. Ю. Аракелов, Ю. Г. Зархин 以及 L. Szpiro 的一些思想都对 Faltings 的工作有重要影响, Abel 簇上参模空间里的高度理论在 Faltings 的证明中起了本质性的作用. [A5] 是 Mordell 猜测的证明的一个很好的导引.

参考文献

[A1] Faltings, G., Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörper, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349–366, Erratum: Ibid, **75** (1984), 381.

[A2] Faltings, G., Die Vermutungen von Tate und Mordell, *Jhber. Deutsch. Math. Verein.*, **86** (1984), 1–13.

[A3] Deligne, P., Preuve et conjectures de Tate et de Shafarevich, *Sém. Bourbaki*, **616** (1983).

[A4] Szpiro, L., Le conjecture de Mordell, *Sém. Bourbaki*, **619** (1983).

[A5] Faltings, G. and Wüstholz, G., Rational points, Vieweg, 1984.

陈志杰 译

Morera 定理 [Morera theorem; Мореры теорема]

如果区域 D 内的复变量 z 的 (单值) 函数 $f(z)$ 是连续的, 并且它在任意可求长的闭围道 $\Gamma \subset D$ 上的积分都等于零, 即

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,\ \Gamma \subset D, \qquad (*)$$

那么 $f(z)$ 是 D 内的**解析函数** (analytic function). 这个定理是 G. Morera ([1]) 得到的.

Morera 定理的条件可以通过把积分为零的要求 $(*)$ 限制在沿着任意三角形 Δ 的边界 $\Gamma = \partial\Delta$ 所作的积分上而得到减弱. 这里, Δ 连同边界包含在 D 内, 即 $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. Morera 定理是 **Cauchy 积分定理** (Cauchy integral theorem) 的一个 (不完全的) 逆定理, 并且是解析函数论中的一个基本定理.

Morera 定理可以推广到多复变量的函数. 设 $f(z) = f(z_1, \cdots, z_n)$ 是复变量 $z_1, \cdots, z_n\ (n > 1)$ 的函数, 它在 $\mathbf{C}^n$ 的区域 D 内是连续的, 并且它在形如

$$T_\nu = [a_1, z_1] \times \cdots \times [a_{\nu-1}, z_{\nu-1}] \times \Delta_\nu \times [a_{\nu+1}, z_{\nu+1}] \times \cdots \times [a_n, z_n],\ \nu = 1, \cdots, n,$$

的连同边界包含在 D 内的任意棱柱区域 (prismatic domain) 的边界 ∂T_ν 上的积分为零, 其中 $[a_\mu, z_\mu]\ (\mu \neq \nu, \mu = 1, \cdots, n)$ 是平面 $\mathbf{C}(z_\mu)$ 里的以 a_μ 和 z_μ 为端点的线段, 而 Δ_ν 是平面 $\mathbf{C}(z_\nu)$ 里的一个三角形, 那么 $f(z)$ 是 D 内的全纯函数.

参考文献

[1] Morera, G., Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabili complessa, *Rend. R. Ist. Lomb. Sci. Lettere*, **19** (1886), 304 – 308.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических Функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977).

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1 – 2, М., 1976.

[4] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Remmert, R., Funktionentheorie, 1, Springer, 1984.

[A2] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978.

陈怀惠 译

森田等价 [Morita equivalence; Мориты эквивалентность]

所有**环** (ring) 的类上的一种等价关系, 定义如下: 称两个环 R 和 S 是森田等价的 (Morita equivalent), 如果左 (右) R 模范畴与 S 模范畴是等价的. 森田等价环的最重要例子是: 环 R 与其上 $n \times n$ 全矩阵环. 使两个环 R 和 S 间存在森田等价的充分必要条件是: 在左 R **模范畴** (category) 中有一有限生成投射生成子 U, 使其自同态环同构于 S. 此时, 左 R 模 A 与左 S 模 $\mathrm{Hom}_R(U, A)$ 对应. 在转移到森田等价环时保留的性质中有这样一些性质: Artin 的, Noether 的, 准素的, 单的, 经典半单的, 正则的, 自内射的, 遗传的和本原的.

与森田等价平行, 人们考虑森田对偶性 (Morita duality), 它与左 R 模范畴和右 S 模范畴的某些子范畴 (主要是有限生成模的子范畴) 相关. 然而, 这种对偶的存在决定环 R 和 S 上的确定的限制. 特别地, $R=S$ 时这导致 R 是一**拟 Frobenius 环** (quasi-Frobenius ring).

森田等价的一般概念是由森田 ([1]) 确立的.

参考文献

[1] Morita, K., *Sci. Reports Tokyo Kyoiku Dajkagu A*, **6** (1958), 83 – 142.

[2] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[3] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, I－II, Springer, 1971－1976.
[4] Cohn, P., Morita equivalence and duality, London, 1976.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 范畴的生成对象，亦见**范畴的生成元**(generator of a category)．

设$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$是范畴．一个对偶(duality)是一对反变函子$T:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$和$S:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$，使$ST\simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$，$TS\simeq \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$，其中$\simeq$表示自然等价(函子同构)，而$\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$是$\mathscr{C}$上恒等函子．

设A和B是环，$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$分别为右A模范畴$\mathbf{Mod}_A$和左B模范畴${}_B\mathbf{Mod}$的满子范畴(见**模**(module))．设U是一(B,A)双模(bimodule)．$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$间的一个对偶(T,S)称为U对偶(U-duality)或森田对偶(Morita duality)，如果T和S分别为到$\mathrm{Hom}_A(\;,U)$和$\mathrm{Hom}(\;,U)$的自然等价．森田的一个定理宣称，若$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$是Abel满子范畴，而$A\in\mathscr{C}$及$B\in\mathscr{D}$，则$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$间的任一对偶(T,S)都是U对偶，且$U=TA$．

郭元春 译　牛凤文 校

态射[morphism; морфизм]，范畴的

一个名称，用来表示任意**范畴**(category)中这样一类的元素，它们都起着从一个集合到另一集合的映射，群、环、代数的同态，拓扑空间的连续映射等等概念的作用．范畴中的态射是一个不定义的概念．每一个范畴都是由两类元素所组成的．称为对象类(class of objects)与态射类(class of morphisms)．范畴$\mathfrak{K}$的态射类通常表以$\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$．

范畴$\mathfrak{K}$中任一态射α有一个唯一定义的定义域(源)A与一个唯一定义的上域(目标)B．具有共同定义域A与上域B的态射组成$\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$的一个子集$H_{\mathfrak{K}}(A,B)$．$\alpha$有定义域$A$与上域$B$这个事实可以用通常的办法写成：$\alpha\in H_{\mathfrak{K}}(A,B)$或者用箭头写成$\alpha:A\to B$，$A\xrightarrow{\alpha}B$，等等．

将范畴的元素分成态射与对象只是在固定的范畴的相互关系中才有意义，因为一个范畴的态射可能是另一范畴的对象，反之也可．任何范畴的态射形成一个系统，它对于部分的二元运算——乘法，是封闭的．按照态射对于这个运算的性质，可将态射分成各种特殊的类，例如，**单态射**(monomorphism)，**满态射**(epimorphism)，**双态射**(bimorphism)，**同构**(isomorphism)，零态射(null morphism)，**正规单态射**(normal monomorphism)，**正规满态射**(normal epimorphism)之类，等等．

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.

周伯埙 译

Morse函数[Morse function; Морса функция]

有某种特殊性质的光滑函数，Morse函数出现在**Morse理论**(Morse theory)中并在其中有用．

令W是(在某个Riemann度量下)完全的Hilbert流形(例如是有限维的)，其边界∂W是流形V_0和V_1的不连通并(可能是空的)，三元组(W,V_0,V_1)的Morse函数就是一个光滑的(Fréchet C^2类)函数$f:W\to[a,b]$$(-\infty<a,b<+\infty)$(或当$V_1=\varnothing$时为$f:W\to[a,\infty]$)，使得

1) $f^{-1}(a)=V_0$，$f^{-1}(b)=V_1$；

2) f的所有的**临界点**(critical point)都在$W\backslash\partial W=f^{-1}(a,b)$中，且均为非退化的；

3) Palais-Smale的条件(Palais-Smale condition) C成立(见[2]，[3])．即在任一闭集$S\subset W$上，若f在其上为有界且$x\to\|df(x)\|$的下确界为0，则S上必有f的临界点．

例如，设f为一正常函数，即所有的集合$f^{-1}[c,d]$$(-\infty<c,d<\infty)$都是紧集(这只在$\dim W<\infty$时可能)，则$f$满足条件$C$．Morse函数在$W$的每个连通分支上均达到一(整体)极小值．若$W$是一个有限维流形，则对$k\geqslant 2$，$C^k$类Morse函数的集合在所有函数

$$f:(W;V_0,V_1)\to([a,b],a,b)$$

的空间中按C^k拓扑成一第二范畴集合(而若W为紧，甚至是一稠密开集)．

参考文献

[1] Morse, M., The Calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.
[2] Palais, M. S., Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology*, **2** (1963), 299－340.
[3] Smale, S., Morse theory and a nonlinear generalization of the Dirichlet problem, *Ann. of Math.*, **80** (1964), 382－396.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 Morse函数在分层空间(见**Morse理论**(Morse theory)的补注和[A1])上有推广，也可推广为同变的Morse函数(见[A2]和[A3])．

参考文献

[A1] Goreski, M. and MacPherson, R., Stratified Morse theory, Springer, 1988.
[A2] Wasserman, A., Morse theory for G-manifolds, *Bill. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 384－388.
[A3] Wasserman, A., Equivariant differential topology, *Topology*, **8** (1969), 127－150.

齐民友 译

Morse指数[Morse index; Морса индекс]

与流形上的一个光滑函数的**临界点**(critical point)或与Riemann流形(或Finsler流形)上的测地线相关的一个数．

1) 一个流形 M 上的光滑函数 f 的临界点 p 的 Morse 指数，定义为 f 的 Hesse 形式在点 p 的负惯性指数(见 **Hesse 式(函数的)** (Hessian (of a function)))，即 M 在 p 点的切空间 T_pM 的最大的使 Hesse 式在其上为负定的子空间的维数．这个定义对无限维 Banach 空间上的二次 Fréchet 可微函数也有意义．差别只在于在后一情况下 Morse 指数允许取 $+\infty$ 值．这时引入 f 的临界点 p 的余指数 (co-index)，即 f 在 p 的 Hesse 式(或二阶 Fréchet 微分)的正惯性指数是方便的．

2) 令 V_0 和 V_1 是完全 Riemann 空间的两个光滑子流形．设有一分段光滑的路径 $\omega:[0,1]\to M$，适合 $\omega(i)\in V_i(i=0,1)$，而且在端点 $\omega(0),\omega(1)$ 分别横截于 V_0, V_1；对于 ω，切空间有一类似物即向量空间 $T_\omega=T_{\omega,V_0,V_1}$，它是所有这样的沿 ω 的分段光滑向量场 W 构成的：$W(\omega(i))\in(TV_i)_{\omega(i)}(i=0,1)$．对任一测地线 $\gamma:[0,1]\to M$ 而 $\gamma(i)\in V_i$，且在其端点 $\gamma(0)$，$\gamma(1)$ 分别正交于 V_0, V_1，则作用泛函(见 **Morse 理论** (Morse theory)) 的二次变分 δ^2E 在 T_γ 上定义了一个对称双线性泛函 E_{**} (Hesse 式的类似物)．测地线的 Morse 指数按定义即此泛函的负惯性指数．E_{**} 在 T_γ 上的零空间 N_γ (即对一切 $Y\in T_\gamma$ 均有 $E_{**}(X,Y)=0$ 的 $X\in T_\gamma$ 的集合)恰好由 **Jacobi 向量场** (Jacobi vector field) $J\in T_\gamma$ 组成．若 $N_\gamma\neq 0$，则称此测地线为 (V_0,V_1) 退化的 (degenerate)，$\dim N_\gamma$ 称为此测地线的退化的阶 (order of degeneracy)．

现考虑 V_1 为一点 $q\in M$ 的情况．令 ν 为 $V=V_0$ 在 M 中的**法丛** (normal bundle)，$\nu(p)$ 是它在 $p\in V$ 处的纤维．**指数映射** (exponential mapping) $TM\to M$ 在 ν 上的限制定义了一个映射 $\exp:\nu\to M$．测地线 $\gamma(t)=\exp(t\xi)$，$(\xi\in\nu(p),\ 0\leqslant t\leqslant 1)$ 为 $(V,\exp\xi)$ 退化的，当且仅当 exp 在 ξ 的微分 $d_\xi\exp: Tv_\xi\to TM_{\exp\xi}$ 的核非零；这时，核的维数就等于测地线 γ 的退化阶数．点 $s=\gamma(t_0)(0<t_0\leqslant 1)$ 称为 V 沿 γ 的焦点 (focal point)，如果测地线 $\gamma':t\to\gamma(t/t_0)$ 是 (V,s) 退化的；γ 的退化阶数则称为焦点 s 的重数 (multiplicity of a focal point)．由 **Sard 定理** (Sard theorem)，焦点的集合有测度零，所以典型的测地线是非退化的．若 V 也仅由一点 $p\in M$ 构成(不排除 $p=q$)，则焦点称为点 p 沿 γ 的伴随焦点 (adjoint focal point)．Morse 指数定理 (Morse index theorem)([1])指出，测地线的 Morse 指数是有限的，而且等于 V 上焦点 $\gamma(t)$ $(0<t<1)$ 按重数计算的个数．

参考文献

[1] Morse, M., The calculus of variations the large, Amer. Math. Soc., 1934.

[2] Ambrose, W., The index theorem in Riemannian geometry, *Ann. of Math.*, **73** (1961), 49 – 86.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 测地线的 Morse 指数可自然地推广到变分学 (variational calculus) 中如下．令 f 是 $[0,1]\times TM$ 的开子集 Z 上的实值光滑函数，R 为 $M\times M$ 的一个光滑子流形．令 C 为如下的光滑曲线 $\omega:[0,1]\to M$ 的空间，这些曲线的 1 阶节位于 Z 中，且 $(\omega(0),\omega(1))\in R$．这时 C 是一个 Banach 流形，其上有光滑泛函

$$F:\omega\mapsto\int_0^1 f\left[t,\omega(t),\frac{d\omega}{dt}(t)\right]dt.$$

于是考虑 F 在临界曲线 ω 上的 Morse 指数；若 $v\mapsto f(t,x,v)$ 在 $x=\omega(t)$，$v=(d\omega/dt)(t)$，$t\in[0,1]$ 处的 Hesse 式是正定的，则 Morse 指数是有限的 (**Legendre 条件** (Legendre condition))．

参考文献

[A1] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本：米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988).

[A2] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

[A3] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.

齐民友 译

Morse 不等式 [Morse inequalities; Морса неравенства]

由 Morse 理论得出的不等式，它把一流形上 Morse 函数的**临界点** (critical point) 的个数与流形的同调不变量联系起来．

令 f 为一光滑的 n 维 (无边) 流形上的 **Morse 函数** (Morse function)，而且有有限多个临界点．这时**同调群** (homology group) $H_\lambda(M)$ 是有限生成的，因此由其秩 $r_\lambda=\mathrm{rk}(H_\lambda(M))$ 与挠秩 $t_\lambda=t(H_\lambda(M))$ 决定(一个具有有限生成元的 Abel 群 A 的挠秩 (torsion rank of an Abelian group) 是将该群作直和分解后该分解中循环群的最小个数，但要求 A 的一个极大挠子群嵌入于其中)．Morse 不等式把具有 **Morse 指数** (Morse index) λ 的 f 之临界点个数 m_λ 与这些秩联系起来，其形如

$$r_\lambda+t_\lambda+t_{\lambda-1}\leqslant m_\lambda,\quad \lambda=0,\cdots,n;$$

$$\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-i}r_i\leqslant\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-i}m_i,\ \lambda=0,\cdots,n.$$

当 $\lambda=n$ 时，最后一个 Morse 不等式成为等式，故

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i=\chi(M),$$

$\chi(M)$ 是 M 的 **Euler 示性数** (Euler characteristic)．

Morse 不等式也对三元组 (W,V_0,V_1) 的 Morse 函数成立，只需将群 $H_\lambda(M)$ 用相对同调群 $H_\lambda(W,V_0)$ 代替即可．

按 Morse 不等式，具有“大”的同调群的流形不会有临界点很少的 Morse 函数．引人注意的是，Morse 不等式中的估计是不可改进的：在维数 $n\geqslant 6$ 的闭单连通流形上，有 Morse 函数使 Morse 不等式成为等式

(Smale 定理(Smale theorem)，见[2])．特别是在任一个同伦等价于球面 $S^n(n\geqslant 6)$ 的闭流形 M 上，有一个具有两个临界点的 Morse 函数；由此立即可得(见 **Morse 理论**(Morse theory)) M 同胚于 S^n (见 **Poincaré 猜想**(Poincaré conjecture))．Smale 定理还可以类似地用来证明关于 h 与 s 配边的定理．

Morse 不等式的类似物也对无限维 Hilbert 流形上的 Morse 函数 $f: X\to \mathbf{R}$ 成立，这些不等式(对 f 的任意正则值 $a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$)把具有有限指数 λ 而且位于 $f^{-1}[a,b]$ 中的临界点的个数 $m_\lambda(a,b)$ 与群 $H_\lambda(M^b, M^a)$ 的秩 $r_\lambda(a,b)$ 和挠秩 $t_\lambda(a,b)$ 联系起来，这里 $M^c=f^{-1}(-\infty,c]$，即有

$$r_\lambda(a,b)+t_\lambda(a,b)+t_{\lambda-1}(a,b)\leqslant m_\lambda,$$

$$\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-i}r_i(a,b)\leqslant\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-i}m_i;\ \lambda=0,1,\cdots.$$

当 λ 充分大时，后一个不等式成为等式．

参考文献

[1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.

[2] Smale, S., Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.*, **74**(1961), 391-466.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 Morse 不等式的另一种形式如下，见[A1]，对 Morse 函数 f 引入量

$$M_t(f)=\sum_p t^{\lambda(p)},$$

这里是对 f 的临界点 p 求和，$\lambda(p)$ 是 p 点关于 f 的指数．在紧情况下，这个和是有限的，因为临界点是离散的．多项式 $M_t(f)$ 也称为 f 的 Morse 多项式(Morse polynomial)，它在下述意义下以流形 W 的 Poincaré 多项式为下界．令

$$P_t(W)=\sum t^k\dim H_k(W;K),$$

这里的同调是相对于某个固定的系数域 K 取的；于是以下的 Morse 不等式成立：对任一非退化的 f 必有一具有非负系数的多项式 $Q_t(f)=q_0+q_1t+\cdots$，使得

$$M_t(f)-P_t(f)=(1+t)\cdot Q_t(f).$$

参考文献

[A1] Bott, R., Lectures on Morse theory, old and new, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7(1982), 2, 331-358.

[A2] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963. (中译本：米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988).

[A3] Palais, R. S., Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology*, **2**(1963), 299-340.

齐民友 译

Morse 引理[Morse lemma; Морса лемма]

描述一个二次连续可微函数芽(germ)的构造的一个命题．令 $f: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 是一 C^2 类函数，在点 $0\in\mathbf{R}^n$ 有一非退化**临界点**(critical point)，则在 0 的某邻域 U 中必有一局部坐标系(坐标卡) $x_1,\cdots,x_n$，以 0 为原点，使对一切 $x\in U$ 有

$$f(x)=f(0)-x_1^2-\cdots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_n^2.$$

这里的数 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant n)$ 称为 f 的临界点的 **Morse 指数**(Morse index)．对函数 $f:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ 也有类似的 Morse 引理成立，即若 f 在一非退化临界点(换一个名词即鞍点，见**鞍点法**(saddle point method)) $0\in\mathbf{C}^n$ 附近为全纯，则在 0 的某个邻域 U 中有一局部坐标系 $z_1,\cdots,z_n$，使得

$$f(z)=f(0)+z_1^2+\cdots+z_n^2.$$

Morse 引理也对一可分(无限维) Hilbert 空间 E 上的函数 $f: E\to\mathbf{R}$ 成立．令 f 在一非退化临界点 $0\in E$ 的某邻域中为二次(Fréchet)可微．于是有 0 点的两个凸邻域 $V, U\subset E$ 以及一个微分同胚(坐标卡) θ: $U\to V(\theta(0)=0)$ 使对所有的 $x\in U$ 有

$$f(x)=\|P(\theta(x))\|^2-\|(I-P)(\theta(x))\|^2.$$

这里 $P:E\to E$ 是连续正交投影，I 是恒等算子．维数 $\dim\operatorname{Im}(I-P)$ 即 f 的临界点 $0\in E$ 的 Morse 指数，维数 $\dim\operatorname{Im}P$ 为其余指数．

参考文献

[1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 Morse 引理可以推广到以下情况．

同变 Morse 引理(equivariant Morse lemma)考虑一个全纯函数 $f:\mathbf{C}^k\to\mathbf{C}$，$f$ 在 $\mathbf{C}^k$ 上的一紧子群 G 的线性作用下不变．若 f 在 0 有一临界点而临界值为 0，则它可用一个在点 0 的双方全纯的而且是 G 不变的自变量变换化为其二次部分．

类似的同变 Morse 引理在实解析和可微情况下也成立．见[A1]和[A2]．

依赖于参数的 Morse 引理．令 $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^s\to\mathbf{R}$ 是定义在 $(0,0)$ 的某邻域中的实值可微函数．令 $(x,\lambda)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^s$，设 $D_xf(0,0)=0$ 而且 $D^2_{xx}f(0,0)$ 为非奇异的．这时在 $(0,0)$ 的某邻域中有坐标 (z,λ) 使

$$f(x,\lambda)=f(x(\lambda),\lambda)+\frac{1}{2}\langle Az,z\rangle.$$

这个公式中 $x(\lambda)$ 是方程 $Df_x(x,\lambda)=0$ 的局部解而且 $x(0)=0$．它的证明是无参数情况的证明的修正．[A3]，502 页是一个好的参考．

参考文献

[A1] Arnol,d, V. I., Wave front evolution and the equivariant

Morse lemma, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29** (1976), 557 – 582.

[A2] Арнольд. В. И., Варченко, А. Н., Гусейн-заде, С. М., Особенности диффенцируемых отобрахсе-ний, М., 1982 (英译本: Arnol'd, V. I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N., Singularities of differentiable maps, 1, Birkhäuser, 1985).

[A3] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, Vol. 3, Pseudo-differential operators, Springer, 1985.

[A4] Palais, R. S., Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology*, **2** (1963), 299 – 340.

齐民友 译

Morse-Smale 系统 [**Morse-Smale system**; **Морса-Смейла система**], Morse-Smale 动力系统 (Morse-Smale dynamical system)

紧的(通常为闭的)m 维微分流形 M^m 上的(由一微分同胚 S, 这时称为 Morse-Smale 微分同胚 (Morse-Smale diffeomorphism)生成的) 光滑**流** (**连续时间动力系统** (flow (continuous-time dynamical system))) $\{S_t\}$ 或**瀑布** (cascade) (即离散时间动力系统) $\{S^n\}$, 具有以下性质:

1) 此系统有有限多个周期轨道(包括瀑布情况下的不动点)和 (流的情况下)的平衡状态.

2) 1) 中所说的每个轨道均有**局部结构稳定性** (local structural stability) (通常其定义要求相应的线性化系统有等价的性质). 这就保证了对于每个这样的轨道存在稳定和不稳定不变流形 W^s 和 W^u(若此轨道是稳定的, 或完全不稳定的, 则 W^u, 或相应地 W^s, 化为此轨道本身); W^u 的维数称为此系统的指数 (index). 指数是一光滑函数 $f: M \to \mathbf{R}$ 的非退化临界点 (或平稳点) w_0 的 **Morse 指数** (Morse index) 的推广, 因为后者与**梯度动力系统** (gradient dynamical system)

$$\dot{w} = -\nabla f(w) \tag{1}$$

的平衡点的指数是相等的, (1)的梯度是相对于 M 上任一个 Riemann 度量取的.

3) 1) 中所讲到的轨道的不变流形横截相交 (即若 $w \in W_1^s \cap W_2^u$, 则对于切空间有 $T_w W_1^s + T_w W_2^u = T_w M$).

4) 所有其他轨道当 $t \to \pm\infty$ 或 $n \to \pm\infty$ 时, 趋向 1) 中所讲到的轨道之一.

5) 若 M 有边界, 则对系统在边界附近的性态应加某些条件. 对于流 (迄今只考虑过这种情况)通常要求相速度向量总是横截于边界.

Morse-Smale 系统是结构稳定系统 (见**粗系统** (rough system) ([1])). Morse-Smale系统的特例在开始时就是联系着这种系统来讨论的——这些特例就是平面区域中的流 (更详细的讨论见 [2]) 与圆上的瀑布 (见 [4] – [6]). Morse-Smale 系统的一般情况是 S. Smale 引入的, 他对闭的 M 考虑了 Morse-Smale 系统, 对于它证明了以下的 Morse-Smale 不等式 (Morse-Smale inequalities). 对一瀑布, 令 m_i 为指数为 i 的周期点个数, 对于流则 m_i 表示指数为 i 的平衡位置个数与指数为 i 和 $i+1$ 的周期轨道个数这三个数的和. 于是对于 $i=0, \cdots, m$,

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j m_{i-j} \geq \sum_{j=0}^{i} (-1)^j b_{i-j}, \tag{2}$$

b_i 是 M 的第 i 个 **Betti 数** (Betti number) (若 2) 中引入的 W^u, W^s 中有一些是不可定向的, 则在特征为二的域上取 Betti 数). 若 $i=m$, 则 (2) 成一等式.

不等式(2)推广了对于具有非退化临界点的光滑函数 $f: M \to \mathbf{R}$ 的通常的 **Morse 不等式** (Morse inequalities). 也就是说, 把(2)式应用于系统(1) (它实际上不必是 Morse-Smale 系统, 所以需要一些小的附加的论证, 见 [7], [8]) 即得 Morse 不等式.

研究过在一已给的合痕类中, 何时有 Morse-Smale 微分同胚 (见 [9], [10]) 的问题, 以及对 Euler 示性数为零的 M^m, 对非奇异向量场的同伦类的类似问题 (这时对 $m \geq 4$ 答案是肯定的, 见 [11]). 对于 $m=2$ 时的流 (见 [12], [13]) 和 $m \geq 3$ 时某些特殊类型的流 (见 [14], [15]), 已经弄清楚了, 是哪些拓扑不变量决定两个 Morse-Smale 系统的拓扑等价性. (在二维情况下, 这个问题已经对更宽的一类流解决了 (见 [3], [16]), $m=1$ 的情况是不足道的.)

参考文献

[1] Palais, J. and Smale, S., Structural stability theorems, in S.S. Chern and S. Smale (eds.), *Global analysis*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., 1970, 223 – 232.

[2] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967.

[3] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973).

[4] Майер, А. Г., 《Уч. зап. Горьк. гос. ун-та》, 1939, в. 12, 215 – 229.

[5] Плисс, В. А., 《Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем.》 3 (1960), 13, 15 – 23.

[6A] Арнольд, В. И., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **25** (1961), 1, 21 – 86.

[6B] Арнольд, В. И., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 479 – 480.

[7] Smale, S., Morse inequalities for dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43 – 49.

[8] Smale, S., On gradient dynamical systems, *Ann. of Math.* (2), **74** (1961), 199 – 206.

[9] Shub, M., Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent in homology, in M. M. Peixoto (ed.), *Dynamical Systems* (*Proc. Conf. Salvador*, 1971), Acad. Press, 1973, 489 – 491.

[10] Shub, M. and Sullivan, D., Homology theory and dynamical systems, *Topology*, **14** (1975), 109 – 132.

[11] Asimov, D., Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones, *Ann. of Math.*, **102** (1975), 1, 55 – 65.

[12] Peixoto, M., Sur la classification des équations différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **272** (1971), A262 – A265.

[13] Peixoto, M., Dynamical systems, in M. Peixoto (ed.), *Dynamical systems* (*Proc. Conf. Salvador*, 1971), Acad. Press, 1973, 389 – 419.

[14] Уманский, Я. Л., 《Докл. АН СССР》, **230** (1976), 6, 1286 – 1289.

[15] Пилюгин, С. Ю., 《Дифференциальные уравнения》, **14** (1978), 2, 245 – 254.

[16] Neumann, D. and O'Brien, T., Global structure of continuous flows on 2-manifolds, *J. Diff. Eq.*, **22** (1976), 1, 89 – 110.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 上面的条件(2)时常称为周期轨道和不变点的双曲性 (hyperbolicity) (见**双曲集** (hyperbolic set)). 条件 (4)连同条件 (1)时常表述如下: 非游荡集 (见**非游荡点** (non-wandering point)) 只由有限多个周期轨道和不变点 (由 (2), 它们都是双曲的) 构成.

参考文献

[A1] Smale, S., Diffeomorphisms with many periodic points, in *Differential and Combinatorial Topology* (*A Symp. in honour of M. Morse*), Princeton Univ. Press, 1965, 63 – 80.

[A2] Shub, M., Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 27 – 41.

[A3] Frants, J. and Shub, M., The existence of Morse-Smale diffeomorphisms, *Topology*, **20** (1981), 273 – 290.

[A4] Maller, M., Fitted diffeomorphisms of non-simply connected manifolds, *Topology*, **19** (1980), 395 – 410.

[A5] Palais, J., On Morse-Smale dynamical systems, *Topology*, **8** (1969), 385 – 405.

齐民友 译

Morse 割补术 [**Morse surgery**; **Морса перестройка**], 亦称换球术 (surgery)

光滑流形的一个变换, 对此变换, 光滑函数的水平流形被安置在通过非退化**临界点** (critical point) 的通道上; 在流形的拓扑中, 这是最重要的结构.

设 V 是一光滑的 n 维流形 (无边界), 在其内 (光滑地) 嵌入一个 $(\lambda-1)$ 维的球面 $S^{\lambda-1}$. 假定 $S^{\lambda-1}$ 在 V 中的**法丛** (normal bundle) 是平凡的, 即 $S^{\lambda-1}$ 在 V 中的闭**管状邻域** (tubular neighbourhood) T 分解为直积 $T=S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda+1}$, 其中 $D^{n-\lambda+1}$ 是一个 $n-\lambda+1$ 维的圆盘. 在已经选择了这样一个分解后, 从 V 中移动 T 的内部, 得到一个流形, 它的边界分成球面的乘积 $S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda}$. 但流形 $D^{\lambda}\times S^{n-\lambda}$ 恰好有相同的边界. 通过一个保持 $S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda}$ 的积结构的微分同胚, 将 $V\setminus \mathrm{Int}\, T$ 和 $D^{\lambda}\times S^{n-\lambda}$ 的边界相叠合, 重新得到了一个无边流形 V', 这就称为 V 沿 $S^{\lambda-1}$ 的割补术的结果 (result of surgery).

在割补术的实现过程中, 给出 $S^{\lambda-1}$ 的邻域 T 为直积的一个分解是必要的, 那就是 $S^{\lambda-1}$ 在 V 中的法丛的平凡化 (trivialization); 在这一点上, 不同的平凡化 (装配) 基本上给出不同的 (甚至同伦的) 流形 V'.

数 λ 称为割补术的指数 (index of the surgery), 而偶对 $(\lambda, n-\lambda+1)$ 称为它的型 (type). 如果 V' 是通过型 $(\lambda, n-\lambda+1)$ 的割补术从 V 得到的, 那么 V 是通过型 $(n-\lambda+1, \lambda)$ 的割补术从 V' 得到的. 对 $\lambda=0, V'$ 是 V (它可能是空的) 和 S^n 的不交并. 对于分片线性和拓扑流形, 也可产生割补术的构造.

例 对 $V=S^2$ 和 $\lambda=2$, 割补术的结果是球面的不交并, 而对 $\lambda=1$ 是环面. 对 $V=S^3$ 和 $\lambda=2$, 得到积 $S^1\times S^2$. $V=S^3$ 和 $\lambda=1$ 的情形更为复杂: 如果 $S^{\lambda-1}=S^1$ 是用标准的方式 (作为大圆) 被嵌入 S^3 中, 则依赖于法丛的平凡化的选择, 得到所有的**透镜空间** (lens space); 然而, 如果考虑到 S^1 的纽结, 则仍然得到 3 维流形的一个较大的集合.

如果 V 是一个 $n+1$ 维流形 M 的边界, 则 V' 将是流形 M' 的边界, M' 是从 M 通过粘上 M' 的指数的环柄而得到的, 特别地, 如果 f 是 M 上的光滑函数, 且如果 $a<b$ 是数, 使得 $f^{-1}[a,b]$ 是紧的且含有唯一的非退化临界点 p, 则通过指数 λ 的割补术从 $V^a=f^{-1}(a)$ 得到 $V^b=f^{-1}(b)$, 其中 λ 是 p 的 **Morse 指数** (Morse index). 在更一般的形式中, 指数 λ 的流形 V 的任何割补术 V' 定义了一个**下配边** (bordism) (**配边** (cobordism)) $(W; V, V')$ (从积 $V\times[0,1]$ 通过将一个指数 λ 的环柄粘贴到它的"右岸边界" $V\times\{1\}$ 而得到), 并且在三元组 $(W; V, V')$ 上, 存在带指数 λ 的唯一临界点的 **Morse 函数** (Morse function); 然而, 任何一个定义了这样的 Morse 函数的下配边 $(W; V, V')$ 用这种方法被得到. 因此, (从在三元组上 Morse 函数的存在性) 可以引出, 两个流形如果其中之一可以从另一个经过一系列割补术得到, 那么, 它们是下配边的.

以定向的论述上的熟知的预防办法, 定向流形上的割补术的结果还是一个定向流形. 一般地, 对任何结构系列 (B,φ) (见 (B,φ) 结构 ((B,φ)-structure))

定义 (B,φ) 割补术 ((B,φ)-surgery) 的思想是可能的；与此相关地，如果两个流形用有限个 (B,φ) 割补术的序列相连接，则这两个流形是 (B,φ) 下配边的.

割补术在流形的拓扑中的重要作用通过下面的事实说明：允许"精致地"(不损害流形的各种性质) 删除"多余的"同伦群 (在同伦论中，运算通常用于这一目的，即"粘"胞腔的运算，立即导出流形的分类). 实际上，关于流形上的结构的所有分类定理都基于这个问题：给定一个从闭流形 M 到 CW 复形 X 中的映射 $f: M \to X$，何时存在下配边 $(W; M, N)$ 和映射 $F: W \to X$ 使得 $F|_M = f$ 和 $F|_N: N \to X$ 是一个同伦等价. 解决这个问题的自然途径是通过一系列割补术消除同态 $f_*: \pi_i(M) \to \pi_i(N)$ 的核 (其中 π_i 是同伦群). 如果成功，那么，得到的映射是一个同伦等价. 相应的障碍的研究 (位于所谓的 Wall 群中，见 [4] 和 **Wall 群** (Wall group)) 是**代数 K 理论** (algebraic K-theory) 发展的最重要的促进因素之一.

参考文献

[1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. 1934.

[2] Новиков, С. П.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 365 – 474.

[3] Kervaire, M. A. and Milnor, J. W., Groups of homotopy spheres: I, *Ann. of Math.*, **77** (1963), 504–537.

[4] Мищенко, А. С.,《Успехи матем. наук》, **31** (1976), 2, 69 – 134.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 在割补术和 Morse 理论之间存在着清楚的关系，如上所指，这就是为什么在俄文文献中，术语 Morse 割补术频繁地使用. 在西方文献中，简单地说割补术. 构造是由 J. W. Morse 发明的 ([A4]).

参考文献

[A1] Browder, W. B., Surgery on simply-connected manifolds, Springer, 1972.

[A2] Wall, C. T.-C., Surgery on compact manifolds, Acad. Press, 1970.

[A3] Wall, C. T.-C., Surgery on non-simply connected manifolds, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 217 – 276.

[A4] Milnor, J., A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds, in Differential Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 3, Amer. Math. Soc., 1961, 39 – 55.

[A5] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本：J. W. 米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988).

[A6] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.

徐森林 译

Morse 理论 [Morse theory; Морса теория]

基于 M. Morse ([1]) 的思想并描述了拓扑空间的代数拓扑性质及在其上的函数 (泛函) 的极值性质之间的关系的三种不同理论的共同名称. Morse 理论是**大范围变分学** (variational calculus in the large 或 calculus of variations in the large) 的一个分支；而后者更加广泛：例如，它包含范畴的理论 (见**范畴** (**Люстерник-Шнирельман 意义下的**) (category (in the sense of Lyusternik-Shnirel'man))).

1) 光滑流形 M 上的光滑函数的**临界点** (critical point) 的 Morse 理论 (简单地，Morse 理论 1) 分两个部分：局部的和整体的. 局部部分关系到光滑函数的临界点的思想，函数在它的临界点处的 Hesse 式 (见 **Hesse 式** (**函数的**) (Hessian of a function))，临界点的 **Morse 指数** (Morse index) 等. 基本的结果是 **Morse 引理** (Morse lemma)，它阐明了光滑函数在非退化临界点的一个邻域内的结构.

光滑函数在退化点的邻域内的研究，严格来说不属于 Morse 理论，它其实属于**可微映射的奇点** (singularities of differentiable mappings) 的分离理论.

在整体 Morse 理论中的基本结果如下. 设 f 是光滑流形 M 上的一个函数. 如果集合 $f^{-1}(a)$ 不含有 f 的临界点并且不与 M 的边界相交，那么 $M^a = f^{-1}(-\infty, a)$ 是一个带有边界 $f^{-1}(a)$ 的光滑流形. 如果集合 $f^{-1}[a,b]$ 是紧的，不与 M 的边界相交，且不包含 f 的临界点，那么，存在一个光滑的同痕 $h_t: M \to M, 0 \leqslant t \leqslant 1$ (通过沿 f 的梯度的轨道移动来实现)，使得 $h_0 = \mathrm{id}_M$，以及 h_1 微分同胚地将 M^b 映到 M^a 上. 特别地，M^b 微分同胚于 M^a 并且包含映射 $M^a \subset M^b$ 是一个同伦等价.

如果 $f^{-1}[a,b]$ 是紧的、不与 M 的边界相交，并且恰好含有一个 Morse 指数 λ 的临界点 $p \in f^{-1}(a, b)$，那么 M^b 微分同胚于从 M^a 通过粘上一个指数 λ 的环柄 (见 **Morse 割补术** (Morse surgery)) 所得的流形. 特别地，如果 p 是 f 的唯一整体极小点，那么对一个小的 $\varepsilon > 0$，集合 $M^{f(p)+\varepsilon}$ 微分同胚于圆盘 D^n，其中 $n = \dim M$. 因此得到：如果 M 是一个恰好含两个临界点 (两个都非退化) 的函数的闭光滑流形，那么 M 通过沿它们公共边界粘贴上两个光滑圆盘得到，因此，它同胚 (但一般情况下不微分同胚) 于球面 S^n.

因为粘一个指数 λ 的环柄同伦等价于粘一个维数 λ 的胞腔，所以立即得到下面的 Morse 理论 1 的基本定理 (fundamental theorem of Morse theory 1)：光滑流形 M (无边的) 上的每个 **Morse 函数** (Morse function) f 对应一个同伦等价于 M 的 **CW 复形** (CW-complex)；它的胞腔在双射对应中与 f 的临界点相对应，胞腔的维数等于相应的临界点的指数. **Morse 不等式** (Morse inequalities) 是这个定理的直接的结果. 对三

序组 $(W;V_0,V_1)$ 上的 Morse 函数一个类似的定理是有效的.

2) Riemann 流形上的测地线的 Morse 理论(简单地说 Morse 理论 2)叙述了具有 Riemann 度量 g_{ij} 的光滑流形 M 的**闭路空间**(loop space)ΩM 的同伦型. 它的目标是将 Morse 理论 1 的结果转换到这个空间(更正确地,到它的一个相宜的模型). 在这里,f 通过一个作用泛函 E(有时称为能量泛函,[5])来起作用,E 定义在分片光滑的道路 $\omega: t \to \omega(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ 的空间 $\mathrm{PS}(M)$上,在局部坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 中,它在道路 $\omega \in \mathrm{PS}(M)$ 上的值用公式

$$E(\omega)=\int_0^1 g_{ij}dx^i dx^j$$

来定义. 在 Morse 理论的初始构造中,考虑了长度泛函

$$L(\omega)=\int_0^1 \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}\ ,$$

但因许多技术理由,结果 E 是较好的. 同时,E 的极值曲线(即道路 $\omega \in \mathrm{PS}(M)$,对它,由 E 的变分 δE 定义的线性泛函 E_* 在 T_ω 上是零)在它们的自然参数中与度量 g_{ij} 的测地线(泛函 L 的极值曲线)相一致.

设 p 和 q 是 M 的两个点(不必相异)和 $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;p,q) \subset \mathrm{PS}(M)$ 是连结 p 和 q 的分段光滑道路的空间. 对每个 $l \in \mathbf{R}$,令

$$\Omega_l=\Omega_l^{\mathrm{PS}}(M;p,q)=E^{-1}[0,l] \cap \Omega^{\mathrm{PS}}(M;p,q).$$

如果 M 是完全的,则 $\Omega_l^0=E^{-1}[0,l) \cap \Omega_l$($\Omega_l$ 的内点)是光滑流形 B 的**形变收缩核**(deformation retract),它的点是连结 p 和 q 具有固定连接数目的"多角测地线"(特别地,使得 B 包含来自 Ω_l^0 的所有测地线). 这里 $E'=E|_B$: $B \to \mathbf{R}$ 是一个光滑函数;对任何 $a<l$,集合 $B^a=(E')^{-1}[0,a]$ 是紧的且是 Ω_a的一个形变收缩核;E' 的临界点与泛函 $E:\Omega_l^0 \to \mathbf{R}$ 的极值曲线相一致,而且是连结 p 和 q 的长度小于 $\sqrt{l}$ 的测地线;E' 的临界点的 Morse 指数等于相应的测地线的 Morse 指数;在测地线 $\gamma \in \Omega_l^0$ 上的 E_{**} 的零空间 N_γ 是有限维的且同构于在相应的临界点处的E' 的 Hesse 的零空间;特别地,如果 p 和 q 在任何连结它们的测地线 γ 上不共轭,则 E' 是 Morse 函数. 应用 Morse 理论 1,通过当 $l \to \infty$ 时取极限和注意到 $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;p,q)$ 同伦等价于连结 p 和 q 的所有连续道路的空间 $\Omega(M;p,q)$ 可以得到下面的 Morse 理论 2 的基本定理(fundamental theorem of Morse theory 2):设 M 是完全 Riemann 流形,p 和 q 是在任何连结它们的测地线上不共轭的两个点. 所有连结 p 和 q 的道路的空间 $\Omega(M;p,q)$ 同伦等价于 CW 复形,它的所有维数为 λ 的胞腔在双射对应中与连结 p 和 q 的指数为 λ 的测地线相对应. 因为 $\Omega(M;p,q)$ 的同伦型不依赖于 p 和 q 的选择,所以,该定理特别给出了闭路空间 ΩM 的同伦型的描述.

众所周知([10]),对不可缩流形 M,空间 ΩM 在任意的高维数有非平凡的同调群. 由 Morse 理论 2 的基本定理得到:在完全 Riemann 不可缩流形中的不共轭的点有无限多条测地线相连(通过球面的例子,清楚地,通常这些测地线可能是一条周期测地线的一段).

在由基本定理给出的同伦型的描述中,Jacobi 场(见 **Jacobi 方程**(Jacobi equation)和 **Jacobi 向量场**(Jacobi vector field))(隐含地)出现了,因此,Morse 理论在流形的曲率和它的拓扑之间建立了联系. 例如,如果 M 是在所有 2 维方向上有非正曲率的完全单连通 Riemann 流形,那么在两点处为零的任何测地线的 Jacobi 场恒为零. 因此,这样的流形的闭路空间具有 0 维 CW 复形的类型,且结果(在 M 的单连通性的观点下)是可缩的. 所以 M 是可缩的,即同伦等价于 $\mathbf{R}^n$. Morse 理论的一个更确切的用途表明了 M 甚至是微分同胚于 $\mathbf{R}^n$(见[3],[5]).

Morse 理论在 Lie 群的拓扑学上的应用已产生出很有效的作用([2]). 例如,对任何单连通 Lie 群 G,空间 ΩG 有只具奇数维的胞腔的 CW 复形的同伦型. 这里的顶峰是 **Bott 周期定理**(Bott periodicity theorem),它在 K 理论中,进而在整个微分拓扑学中起着基本的作用. 设 U 是酉群套 $\cdots \subset U_n \subset U_{n+1} \subset \cdots$ 序列的极限,O 是正交群套 $\cdots \subset O_n \subset O_{n+1} \subset \cdots$ 序列的极限. Bott 周期性定理断言,存在同伦等价 $\Omega^2 U \sim U, \Omega^8 O \sim O$,其中 Ω^n 是通过闭路空间的函子的第 n 次重复. 这个定理容许人们计算同伦群 $\pi_i U$ 和 $\pi_i O$,因而对 $i<2n, j<n$ 可计算同伦群 $\pi_i U_n$ 和 $\pi_j O_n$.

Morse 理论 2 还推广到 M 的光滑子流形 V_0,V_1 代替点 p,q 的情形. 在所有分段光滑道路 $\omega: t \to \omega(t), 0 \leq t \leq 1, \omega(i) \in V_i, i=0,1$的空间$\Omega^{\mathrm{PS}}(M;V_0,V_1)$ 上研究了作用泛函,道路在其端点横截 V_0和 V_1,而且建立了该泛函的极值曲线和 $\Omega(M;V_0,V_1)$ 的同伦型之间的关系. 相应的基本定理类似于上述的 Morse 理论 2 的基本定理;困难在于测地线的 Morse 指数的几何解释.

3) Morse 理论 2 的自然发展是在 Banach(无限维)流形上的光滑函数的临界点的 Morse 理论——Morse 理论 3,它不再是类似的东西,而是 Morse 理论 1 的一个直接的推广. 当前(1989) Morse 理论 3 只在初级阶段,且在模型 Banach 空间上(在可分的和 Hilbert 型空间上),于很强(显然不必要)的条件下只在很初步的关系上被构造,虽然已经在完全一般的条件下尝

试了 Morse 理论 3 的构造，但当没有特殊的泛函分析时，困难就出现了．因此，在它的现代形式中，Morse 理论 3 几乎是 Morse 理论 1 的逐字逐句的重复．值得提到的唯一差别是在 Morse 理论 3 中，$f^{-1}[a,b]$ 的紧性由 Palais-Smale 的条件 C 代替（见 **Morse 函数**（Morse function）），除此外，在所有有兴趣的情形下都不满足，另外，虽然可能在 Banach 流形上粘贴一个无限指数的环柄，但考虑到无限维球面的同伦平凡性．这个环柄在同伦型上是无效的．因此，只有有限指数的临界点才出现在 Morse 理论 3 的基本定理中．

参考文献

[1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.

[2] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963（中译本：J. 米尔诺，莫尔斯理论，科学出版社，1988）.

[3] Milnor, J., Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[4] Seifert, H. and Threlfall, W., Variationsrechnung im Groszen (Morsesche Theorie), Teubner, 1938.

[5] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemanmsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[6] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964.

[7] Постников, М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971.

[8] Постников, М. М., Вариационная теория геодезических, М., 1965（英译本：Postnikov, M. M., The variational theory of geodesics, Saunders, 1967）.

[9] Eells, J., A setting for global analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 751－807.

[10A] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés I, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 1408－1410.

[10B] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.* (2), **54** (1951), 425－505.

[10C] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés II, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 31－33.

[10D] Serre, J.-P., Homologie singuliere des espaces fibres III, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 142－144.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】Morse 理论的一个有用的全面评述是 [A1]，历史的注解可以在 [A2] 和 [A3] 的 1、7 节中找到．

对具有奇点的适当的空间，存在（有限维的）光滑 Morse 理论的类似物（推广），称为分层 Morse 理论（stratified Morse theory）．设 X 是包含在光滑流形 M 中的紧 Whitney 分层的空间（见**分层**（stratification）的补注）．设 f 是 M 上的光滑实值函数在 X 上的限制．f 的一个临界点是 f 限制到 X 的层上的任何临界点．特别地，所有的零维的层是临界点．正常光滑函数 f 称为在分层空间 X 上的 Morse 函数，如果 f 满足

a) f 的所有临界值是不同的；

b) 在 f 的每一个临界点 p 处，f 在含有 p 的层上的限制在 p 有非退化临界点；

c) f 在临界点 p 处的微分不使异于含 p 的层的任何层 S 的切空间的任何极限零化．

结果是，临界点的集合在 X 中是离散的和临界值在 R 中是离散的．如果 $M=\mathbf{R}^m$，则 X 上从点 $q\in\mathbf{R}^m$ 出发的距离函数对几乎所有的 q 是 Morse 函数．Morse 函数在所有带适当的拓扑的正常光滑函数的空间中也形成一个开稠密集．

对每个 $c\in\mathbf{R}$，设 $X_c=\{x\in X: f(x)\leqslant c\}$，则（对 X 上的一个 Morse 函数 f）有下面的光滑有限维 Morse 理论的类似物．当 c 在两个相邻的临界值之间的开区间上变化时，X_c 的拓扑型不变，当 c（从下面）跨过一个临界值 c_0 时，对足够小的 ε，$X_{c+\varepsilon}$ 的拓扑型从 $X_{c-\varepsilon}$ 的拓扑型通过沿子空间 B 粘进一个适当的（分层）空间 A 得到．主要的差别在于偶对 (A,B) 可能大大地复杂于光滑理论的偶对 $(D^\lambda\times D^{n-\lambda},\partial D^\lambda\times\partial D^{n-\lambda})$，其中 D^j 是 j 维实心球．又，偶对 (A,B) 不由单个整数决定．像通常的同调关于光滑理论那样，**相交同调**（intersection homology）扮演了一个相对于分层 Morse 理论的类似的角色，在光滑理论中，如果 (A,B) 是属于临界点 $p\in S$ 的偶对，那么，相交同调群 $\mathrm{IH}_i(A,B)$ 对除 $i=n-s+\lambda_p$ 外的所有 i 为零，其中，$s=\dim S$，$n=\dim X$，λ_p 是 f 在 p 点处限制到 S 上的 **Morse 指数**（Morse index）．

通常有限维的 Morse 理论有其他两个重要的推广：

非孤立情形．这个应用于具非退化临界流形的函数．假设 f 限制到法方向上是非退化的．见 [A5]．

等价情形．这应用于 Lie 群作用下等价的函数．见 [A1]．存在应用，例如二维的 Yang-Mills 理论（见 **Yang-Mills 场**（Yang-Mills field））．见 [A4]．

参考文献

[A1] Bott, R., Lecture on Morse theory, old and new, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7 (1982), 2, 331－358.

[A2] Bott, R., Marston Morse and his mathematical works, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **3** (1980), 3, 907－950.

[A3] Goreski, M. and MacPherson, R., Stratified Morse theory, Springer, 1988.

[A4] Atiyah, M. and Bott, R., The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **308** (1982), 523－615.

[A5] Bott, R., Non-degenerate critical manifolds, *Ann. of Math.* (2), **60** (1954), 248－261.

[A6] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.

[A7] Smale, S., Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem, *Ann. of Math.*, **80** (1964),

332 – 346.
[A8] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.
薛春华 译

最大功效检验 [most-powerful test; наиболее мощный критерий]

在一切具有给定**显著性水平**(significance level)的检验中，功效最大的检验．设需要根据观测结果检验简单假设 H_0 对简单备选假设 H_1；又设给定容许的第一类错误概率为 α，即假设 H_0 本来正确，却被为检定 H_0 对 H_1 所建立检验否定而犯错误的概率．统计假设检验理论中，在所有用于检定 H_0 对 H_1 的具有同一第一类错误概率的，或者说具有相同显著性水平的，统计检验中的最大功效检验称为最优检验；即当备选假设 H_1 成立时，最优检验以最大的概率否定所要检定的假设 H_0．在用于检定简单假设 H_0 对简单假设 H_1 的所有水平 α 的统计检验中，正是上述最优检验称为水平 α 最大功效检验．因为统计检验的功效与 H_0 本来不正确却被接受所犯第二类错误的概率之和等于 1，故最大功效检验的概念常用第一类错误和第二类错误概率的语言表述：最大功效检验，是用于检定简单假设对简单备选假设的，具有给定第一类错误概率的所有统计检验中，第二类错误概率最小的检验．**Neyman-Pearson 引理**(Neyman-Pearson lemma)在简单假设场合给出了关于建立最大功效检验问题的解．根据该引理，**似然比检验**(likelihood-ratio test)是最大功效检验．

当两个相互对立的假设 H_0 和 H_1 是复合假设时，建立最大功效检验的问题，用**一致最大功效检验**(uniformly most-powerful test)的语言表述，只要这样的检验存在．

参考文献

[1] Lehmann, E.L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.
[2] Neyman, J. and Pearson, E., On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, *Philos. Trans. Royal Soc.*, London A **231** (1933), 289 – 337.

M.C. Никулин 撰 周概容 译

运动 [motion; движение]

保持图形的几何性质（维数、形状等等）的空间变换．运动的概念是由 Euclid 空间中固体的实位移抽象形成的．在几何学的公理构造中有时采用运动作为基本概念．

Euclid 空间的运动(motion of Euclidean space)是空间保持点之间距离的变换；根据空间的定向是否保持而称之为正常(proper)运动(第一类运动(motion of the first kind))或者反常(improper)运动(第二类运动(motion of the second kind))．

平面的正常运动在一正交坐标系 (x, y) 中可用下述公式解析表达：

$$\tilde{x} = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,$$
$$\tilde{y} = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,$$

这说明平面上的正常运动之全体依赖于三个参数 a, b, φ．前两个参数刻画平面沿向量 (a, b) 的**平行位移**(parallel displacement)，而参数 φ 刻画平面围绕坐标原点的旋转．正常运动是围绕坐标原点作角度为 φ 的**旋转**(rotation)和沿向量 (a, b) 的平行位移的积(复合)．任意一个正常运动可以表示为一个平行位移或者围绕某一点的一个旋转．

反常运动可以表示为

$$\tilde{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,$$
$$\tilde{y} = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b,$$

这说明一个反常运动是一个正常运动和关于某一直线的**对称**(symmetry)的积．任意一个反常运动是某一方向的平行位移和关于同一方向某一直线的对称的积．

三维空间的一个正常运动或者是围绕某个轴的一个旋转，或者是一个平行位移，或者可以表示为围绕某个轴的一个旋转和沿与该轴同一方向的一个平行位移的积(螺旋运动)．一个反常运动或者是关于某个平面的一个对称，或者可以表示为关于某个平面的一个对称和围绕垂直于该平面的某个轴的一个旋转的积，或者可以表示为关于某个平面的一个对称和沿平行于该平面的方向上的一个位移的积．

在空间直角坐标系 (x, y, z) 中，运动的解析表达式是

$$\tilde{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a,$$
$$\tilde{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b,$$
$$\tilde{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c,$$

其中矩阵 $\|a_{ij}\|$ 的元素满足下列正交条件：

$$a_{1r}a_{1s} + a_{2r}a_{2s} + a_{3r}a_{3s} = \delta_{rs}$$

($r = s$ 时 $\delta_{rs} = 1$，$r \neq s$ 时 $\delta_{rs} = 0$)．一个运动是正常的或是反常的，取决于该矩阵的行列式是 1 还是 -1．见**正交变换**(orthogonal transformation)．

类似地，n 维 Euclid 空间的一个运动在直角坐标系中用一正交矩阵 $A = \|a_{ij}\|$ 来解析表达，其中

$$a_{1r}a_{1s} + \cdots + a_{nr}a_{ns} = \delta_{rs},$$
$$r, s = 1, \cdots, n.$$

Riemann 空间的运动(motion of a Riemannian space)是一个保持对应的线的长度的 $C^s(s \geqslant 2)$ 类连续可微一一映射．空间的线素

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, \cdots, x^n)dx^\alpha dx^\beta$$

在运动下不变，式中求和取遍指数 α, β. 运动的解析定义式就是一些以初始点 $M(x^i)$ 的坐标表示变换之后的点 $\tilde{M}(\tilde{x}^i)$ 的坐标的 C^s 类函数 $f^i(x)$:

$$\tilde{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^n), \alpha = 1, \cdots, n. \quad (*)$$

线素的不变性条件意指

$$g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^j} = g_{ij}(x^1, \cdots, x^n).$$

广义相对论的 Riemann 空间中的运动是一重要概念：在强非对称重力场里固体可能只能在一个非常有限的范围内发生位移；也可能出现所有的运动都不能进行的情况，此时在任何变换之下度量都不能够保持不变，换言之，任何位移都伴随着固体的变形.

仿射联络空间的运动 (motion of a space with an affine connection) 是一个 $C^s(s \geqslant 2)$ 类连续可微一一映射，使得沿任意光滑曲线的一个平行向量场成为变换后曲线的平行向量场. 仿射联络 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ 的对象 (见**几何对象理论** (geometric objects, theory of)) 在运动下映至自身. 反之，任何将仿射联络映至自身的映射 $(*)$ 是一个运动.

运动构成一个变换群 (见**运动群** (group of motions)). 它是空间中最简单的变换群.

参考文献

[1] Егоров, И. П., Лекции по аксиоматике Вейля и неевклидовым геометриям, Рязань, 1973.

[2] Егоров, И. П., Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965.

[3] Базылев, В. Т., Дуничев, К. И., Иваницкая, В. П., Геометрия, т. 1 М., 1974. И. П. Егоров 撰

【补注】 Euclid 空间的一个运动是空间到自身的一个**等长映射** (isometric mapping). 关于各种 Riemann 流形所容许的运动群的详细信息可参见 [A3].

参考文献

[A1] Eves, H., A survey of geometry, Allyn & Bacon, 1972.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963 – 1969.

[A3] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972. 杨路、曾振柄 译

主题理论 [motives, theory of; мотивов теория]

代数簇的各种各样**上同调** (cohomology) 理论的推广. 在经典的对应理论中，代数曲线 X 的 **Jacobi 行列式** (Jacobian) 可替代上同调群 $H^1(X, \mathbf{Q})$, 这个理论也被用于研究有限域上的曲线 X 的 **zeta 函数** (zeta-function). 主题理论则是这些思想的系统推广. 主题理论具有如下的泛性质：每个几何上同调理论是主题范畴上的函子，这些上同调论包括：例如 $\mathbf{C}$ 上代数簇的常系数经典奇异上同调；所有 l-adic 上同调论，其中素数 l 不等于基域的特征；所有的晶体上同调论，等等；见 **Weil 上同调** (Weil cohomology).

设 $V(k)$ 是域 k 上光滑射影簇范畴，而反变函子 $X \to C(X)$ 是从 $V(k)$ 到交换 Λ 代数范畴的整体**相交理论** (intersection theory), 其中 Λ 为一固定的环. 例如，$C(X)$ 是 X 上的**代数闭链** (algebraic cycles) 模掉一个适当的 (有理的，代数的，数值的，等等) 等价关系的类所组成的**周 (炜良) 环** (Chow ring), 或 $C(X) = K(X)$ 是 Grothendieck 环，或 $C(X) = H^{ev}(X)$ 是偶维上同调类环，等等. 由范畴 $V(k)$ 及函子 $X \to C(X)$ 可以定义一个新的范畴，即对应范畴 $CV(k)$; 其对象是簇 $X \in V(k)$, 记为 $\bar{X}$, 其态射由下面公式定义

$$\mathrm{Hom}(\bar{X}, \bar{Y}) = C(X \times Y),$$

两个态射的复合就是通常两个对应的复合 ([1]). 设函子 C 取值于分次交换 Λ 代数的范畴 $A(\Lambda)$, 那么 $CV(k)$ 是分次对应的 Λ 可加性范畴. 此外，$CV(k)$ 有直和及张量积.

记 $CV^0(k)$ 为 $CV(k)$ 中如下定义的一个子范畴：其对象为 $V(k)$ 的簇，态射为零次的对应，从 $V(k)$ 到 $CV^0(k)$ 有一个自然函子，而函子 C 可扩充到从 $CV^0(k)$ 到 $A(\Lambda)$ 的一个函子 T. 如同 $CV(k)$ 那样，范畴 $CV^0(K)$ 也不是 Abel 范畴. 把它的伪-Abel 完全化记为 $M_C^+(k)$, 它是从 $CV^0(k)$ 形式地添加上所有投影 p 的象而得到的. 准确地说，$M_C^+(k)$ 的对象是偶 $(\bar{X}, p)$, 这里 $\bar{X} \in CV^0(k)$, $p \in \mathrm{Hom}(\bar{X}, \bar{X})$, $p^2 = p$, $\mathrm{Hom}((\bar{X}, p), (\bar{Y}, q))$ 则是满足 $f \circ p = q \circ f$ 的对应 f: $\bar{X} \to \bar{Y}$ 的集合模掉一个满足 $g \circ p = p \circ g = 0$ 的对应 g. 函子 $\bar{X} \to (\bar{X}, \mathrm{id})$ 将范畴 $CV^0(k)$ 嵌入到 $M_C^+(k)$ 中. 自然函子 h: $V(k) \to M_C^+(k)$ 称为主题上同调空间的函子 (functor of motive cohomology spaces). $M_C^+(k)$ 则称为有效主题范畴 (category of effective motives).

设 $p = (1 \times e)$, 其中 e 是射影直线 P^1 上的任何有理点的类，又设 $L = (P^1, p)$, 则

$$h(P^n) = 1 \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus L^{\otimes n}.$$

若 $X = P(E)$ 是 Y 上秩为 r 的局部自由层 E 的射影化，则

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} (h(Y) \otimes L^{\otimes i}).$$

具有非奇异中心的单一化变换的主题，曲线的主题 (见 [1]), Abel 流形的主题 (见 [2]), 以及 Weil 超曲面的主题，也已算过.

主题范畴(category of motives) $M_C(k)$ 是从 $M_C^+(k)$ 形式地添加上主题 L 的负幂次方而得．类似于 l **进上同调**(l-adic cohomology), $T=L^{\otimes -1}$ 称为 Tate 主题(Tate motive). 用 T 作张量积称为用 Tate 主题扭转(twisting by the Tate motive). 如在 l-adic 上同调论里所做的那样，可用扭转来定义主题的阶(level)．Weil 上同调的函子可分解成函子 $h: V(k) \to M_C(k)$ 与另一个函子的复合．人们猜想在某种意义上，$M_C(k)$ 不依赖于 C 的相交理论，并且函子 $X \to h(X)$ 本身是 Weil 上同调的一个(泛)理论．这个猜想与代数闭链的标准 Grothendieck 猜想([5])有密切的关系(目前，即 1982 年，Grothendieck 猜想尚未被证明)．

参考文献

[1] Manin, Yu. I., Correspondences, motives and monoidal transformations, *Math. USSR Sb.*, **6**(1968), 4, 439 − 470 (*Mat. Sb.*, **77**(1968), 4, 475 − 507).

[2] Шерменёв, А. М., 《Успехи матем. наук》, **26**(1971), 3, 215 − 216.

[3] Demazure, M., Motives des variétés algébrique, in Sem. Bourbaki, Exp. 365, Lecture notes in math., Vol. 180, Springer, 1971, 19 − 38.

[4] Kleiman, S. L., Motives, in P. Holms (ed.), Algebraic Geom. Proc. 5-th Nordic Summer School Math. Oslo, 1970, WoltersNoordhoff, 1972, 53 − 96.

[5] Kleiman, S. L., Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, 1968, 359 − 386.

В. А. Исковских 撰

【补注】主题理论是 A. Grothendieck 在 60 年代建立的．尽管上述关于代数闭链的标准猜想(standard conjectures on algebraic cycles)尚未被证明(1989), 但主题理论在若干新近进展中起着重要作用．例如: i)对 Deligne-Hodge 理论(Deligne-Hodge theory)起指导作用; ii)用于 Abel 簇上绝对 Hodge 闭链的研究([A2]), 这里用到一个稍稍修改了的主题概念，iii)用于有限域上某些簇的周群的研究([A3]); iv)用于研究有关 L 函数的特殊取值的 Beilinson 猜想(Beilinson conjectures), 见[A4].

参考文献

[A1] Deligne, P., Theory de Hodge I., in Actès de Congrès Internat. des Mathématiciens, Nice, 1970, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 425 − 430.

[A2] Deligne, P., Milne, J. S., Ogus, A. and Shih, K. (eds.), Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Lecture notes in math., 900, Springer, 1980.

[A3] Soulé, C., Groupes de Chow et K-theory des variétés sur un corps fini, *Math. Ann.*, **268** (1984), 317 − 345.

[A4] Rapoport, M., Schappacher, N. and Schneider, P. (eds.), Beilinson's conjectures on special values of L-functions, Acad. Press, 1988.

潘建中 译 沈信耀 校

Moufang 幺拟群 [Moufang loop; Муфанг лупа]

满足下列(等价的)等式的**幺拟群**(loop):

$$x(y \cdot xz)=(xy \cdot x)z,$$

$$(zx \cdot y)x=z(x \cdot yx),$$

$$xy \cdot zx=x(yz \cdot x).$$

这种幺拟群是由 R. Moufang 引进并加以研究的([1]). 特别地，她证明了下述定理，说明这类幺拟群是接近于群的: 如果 Moufang 幺拟群的元素 a, b 和 c 满足结合关系 $ab \cdot c=a \cdot bc$, 则它们生成一个结合子幺拟群，即生成一个**群**(group)(Moufang 定理(Moufang theorem)). 这个定理的一个推论是 Moufang 幺拟群的双结合性(di-associativity of a Moufang loop): 幺拟群中任意两个元素生成一个结合子幺拟群.

对于由单个等式

$$x^2 \cdot yz=xy \cdot xz$$

定义的交换 Moufang 幺拟群，下述定理成立: 每个具有 n 个生成元的交换 Moufang 幺拟群都是中心幂零的，其幂零类不超过 $n-1$ (见[2]). 中心幂零性的定义与群中的幂零性(见**幂零群**(nilpotent group))类似.

如果一个幺拟群同痕于(见 **同源**(isogeny))一个 Moufang 幺拟群，则它本身是 Moufang 幺拟群，换言之，Moufang 幺拟群这一性质是泛性质．进一步地，同痕的交换 Moufang 幺拟群是同构的.

参考文献

[1] Moufang, R., Zur Struktur von Alternativkörpern, *Math. Ann.*, **110** (1935), 416−430.

[2] Bruck, R. H., A survey of binary systems, Springer, 1958.

В. Д. Белоусов 撰 王 杰 译 石生明 校

模型曲面 [moulding surface; резная поверхность]

由一个单参数平面族的正交轨线生成的曲面．模型曲面有一族曲率线是平面曲线，它们同时是模型曲面的测地线．如果平面族退化为平面束，则模型曲面成为**旋转曲面**(surface of revolution). 用族中的平面截模型曲面所得的截线称为子午线(meridians), 其正交轨线称为模型曲面的平行线(parallels). 所有的子午线是合同的，所以一个模型曲面可以通过一条平面曲线 L (子午线)的运动来产生，要求它所在的平面沿着某个可展曲面作无滑动的滚动．该可展曲面称为模型曲面的有向曲面(directing surface), 是它的一叶渐屈面．如果 $\rho(u)$ 是一条平行线 Γ 的位置向量，则模型曲面的位置向量是

$$r=\rho(u)+\eta(v)p(u)+\zeta(v)q(u).$$

其中 $p=\nu\cos\theta+\beta\sin\theta, q=-\nu\sin\theta+\beta\cos\theta, \nu$ 和 β 分别是曲线 Γ 的主法向量和次法向量，x 是曲线 Γ 的挠率，$\theta=-\int x\,du$. 它的线元是

$$ds^2=[1+k(\zeta\sin\theta-\eta\cos\theta)]^2du^2+(\eta'^2+\zeta'^2)dv^2,$$

其中 $\eta(v),\zeta(v)$ 是 L 的方程，k 是 Γ 的曲率.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G., Théorie générale des surfaces, 1, Chelsea, reprint, 1972, Sects. 85 – 87.

陈维桓 译

流动奇点 [**movable singular point**; **подвижная особая точка**]

微分方程 $F(z, w, w')=0$ (F 是解析函数) 的解 $w(z)$ 的奇点，其中 $w(z)$ 被看作复变量 z 的函数，使得同一方程当初值与原来的值接近时的解具有与 z_0 接近但不重合的奇点. 下列方程给出了流动奇点的经典例子：

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P(z, w)}{Q(z, w)},$$

其中 P 和 Q 是 $\mathbf{C}^2$ 空间中某一区域上的全纯函数. 如果曲面 $\{Q=0\}$ 不可约并且沿 O_w 轴投射到一个区域 $\Omega\subset O_z$ 上，那么区域 Ω 中所有的点都是流动奇点；对于初值为 (z_0, w_0) 的解，其中

$$Q(z_0, w_0)=0\neq P(z_0, w_0),$$

点 z_0 是一个**代数分支点** (algebraic branch point).

参考文献

[1] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950.

Ю. С. Ильяшенко 撰

【补注】 对于形式为

$$\frac{d^2w}{dz^2}=R\left[\frac{dw}{dz}, w, z\right]$$

的方程，其中函数 R 关于 dw/dz 和 w 是有理的，关于 z 是解析的，已经知道何种方程只有非流动奇点，见 **Painlevé 方程** (Painlevé equation) 和 [A1].

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

唐 云 译

滑动平均过程 [**moving-average process**; **скользящего среднего процесс**]

一类宽义平稳**随机过程** (stochastic process)，它可以由对不相关过程 (即**白噪声** (white noise) 过程) 施以某个线性变换而得到. 这个术语常被用于更特殊的情形，即离散时间 $t=0, \pm1, \cdots$ 的过程 $X(t)$，它可表成如下形式：

$$X(t)=Y(t)+b_1Y(t-1)+\cdots+b_qY(t-q), \tag{1}$$

其中 $\mathrm{E}Y(t)=0, \mathrm{E}Y(t)Y(s)=\sigma^2\delta_{ts}$, δ_{ts} 为 Kronecker 记号 (从而 $Y(t)$ 是有谱密度 $\sigma^2/2\pi$ 的白噪声)，q 为正整数，而 $b_1, \cdots, b_q$ 为常系数，此过程的**谱密度** (spectral density) $f(\lambda)$ 由下式给出：

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}|\psi(e^{i\lambda})|^2,$$

$$\psi(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_qz^q, \ b_0=1,$$

而其相关函数 $r(k)=\mathrm{E}X(t)X(t-k)$ 有形式

$$r(k)=\sigma^2\sum_{j=0}^{q-|k|}b_jb_{j+|k|}, \text{ 若 } |k|\leqslant q,$$

$$r(k)=0, \text{ 若 } |k|>q.$$

反之，如果离散时间平稳过程 $X(t)$ 的相关函数 $r(k)$ 具有性质：对某正整数 q，当 $|k|>q$ 时，$r(k)=0$，那么 $X(t)$ 是一阶为 q 的滑动平均过程，即它有形如 (1) 的表示，其中 $Y(t)$ 是一白噪声 (例如见 [1]).

除可表示为形式 (1) 的有穷 q 阶滑动平均过程外，还有两种类型的无穷阶离散时间滑动平均过程，即单边滑动平均过程 (one-sided moving-average processes)，它有如下形式的表示

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jY(t-j), \tag{2}$$

其中 $Y(t)$ 为白噪声且右边的级数依均方收敛 (从而 $\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|^2<\infty$)，以及更一般的双边滑动平均过程 (two-sided moving-average processes)，形如

$$X(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jY(t-j), \tag{3}$$

其中 $Y(t)$ 为白噪声且 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|b_j|^2<\infty$. 双边滑动平均过程类与有谱密度 $f(\lambda)$ 的平稳过程类是重合的，而单边滑动平均过程类则与其谱密度 $f(\lambda)$ 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda>-\infty$$

的平稳过程类重合 (见 [2], [1], [3]).

连续时间平稳过程 $X(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 称为单边或双边滑动平均过程，如果它分别有形式

$$X(t)=\int_0^{\infty}b(s)dY(t-s), \ \int_0^{\infty}|b(s)|^2ds<\infty,$$

或

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}b(s)dY(t-s), \ \int_{-\infty}^{\infty}|b(s)|^2ds<\infty,$$

其中 $\mathrm{E}|dY(t)|^2=\sigma^2dt$，即 $Y'(t)$ 为一广义白噪声

过程．连续时间的双边滑动平均过程类与有谱密度 $f(\lambda)$ 的平稳过程类是重合的，而连续时间的单边滑动平均过程类则与其谱密度 $f(\lambda)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log f(\lambda)\ (1+\lambda^2)^{-1} d\lambda > -\infty$$

的过程类重合（见[4]，[3]，[5]）．

参考文献

[1] Anderson, T., The statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

[2] Колмогоров, А. Н., 《Бюлл. Моск. гос. ун-та》, **2** (1941), 6, 1－40.

[3] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

[4] Karhunun, K., Ueber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A. Math. Phys.*, 37 (1947).

[5] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963（英译本：Rozanov, Yu. A., Stationary random processes, Holden-Day, 1967）.

А. М. Яглом 撰

【补注】 **自回归过程**（auto-regressive process）与滑动平均过程，两者都是所谓 ARMA 过程即自回归滑动平均过程（见**混合自回归滑动平均过程**（mixed autoregressive moving-average process））的特殊情形，它们在**时间序列**（time series）的研究中是很重要的．

潘一民 译

活动标架方法[moving-frame method; подвижного репера метод]

在**微分几何学**（differential geometry）中对各种齐性空间中的子流形作局部研究的一种方法，其出发点是为子流形本身及它的所有几何对象配备最一般的可能的（活动）标架（参考系）．这个方法包括构造典型的参考标架，即对于子流形的每一点以不变的方式指定唯一的一个参考标架，从而得到表征子流形的微分不变量，该子流形至多差一个嵌入到外围**齐性空间**（homogeneous space）的变换．这个方法由 E. Cartan([1]) 表述成最一般的形式，他给出其应用的各种例子．后来，这个方法被广泛地使用和发展（见**延拓和限制的方法**（method of extensions and restrictions））．该方法的解析基础是由 Lie 群的不变线性微分式、结构方程以及 Lie 群作为变换群的表示论构成的．在现代几何学中，该方法的基本概念已需要改进，它们已经用丛的理论来叙述了．

设 X_n 是 n 维齐性空间，G 是作为它的变换群（G 左作用 X_n 上）的 r 维 **Lie群**（Lie group）．设 $X_n=G/H$ 是一个表示，其中 $H\subset G$ 是某个点 $x_0\subset X_n$ 的**迷向群**（isotropy group（也称为*平稳群*（stationary group）））．设 $(e_k, e_\alpha), k=1,\cdots,n, \alpha=n+1,\cdots,r$，是 G 上左不变向量场的基底，使得 e_α 限制在 H 上也构成 Lie 子群 H 的左不变向量场的基底．与 (e_k, e_α) 对应的是Lie群 G上左不变线性微分式的对偶基底 $(\theta^k, \theta^\alpha)$．自然投影 $\pi: G\to X_n$ 把点 $x\in X_n$ 对应于 G 关于 $H=H_{x_0}$ 的左陪集 $\pi(x)=H_x\subset G$，它在 Lie 群 G 上引进了以 X_n 为底、以 $r-n$ 维 Lie 群 H 为结构群的 H 主丛结构．与 G 的这个表示相对应，向量场 e_α 构成丛 $\pi: G\to X_n$ 的基本向量场的基底，而向量场 e_k 张成与 $\pi: G\to X_n$ 的纤维横截的某个 n 维分布．对应地，线性微分形式 θ^k 是丛 $\pi: G\to X_n$ 的形式的半基，构成形式组 $(\theta^k, \theta^\alpha)$ 中完全可积的形式子组．纤维 $H_x\subset G$ 是 Pfaff 方程组 $\theta^k=0$ 的最高维积分子流形（见 **Pfaff 方程**（Pfaffian equation）；**完全可积的微分方程**（completely-integrable differential equation））．

在经典的（Euclid，仿射，射影等等）微分几何学中一组参考标架系（system of frames of reference）是 X_n 中一个*图形集*，它与 X_n 的变换集可建立一一对应（或者是，它与该空间的**基本群**（fundamental group）G 的元素集之间有一一对应）．而且，已知组中的任何参照标架 R 能够从某个初始标架 R_0 经过一个变换得到：

$$L_g: X_n \to X_n, R=L_g(R_0), g\in G.$$

因为与固定标架 R_0 相关的活动参照标架 $L_g(R_0)=R$ 的主要作用是能确定齐性空间 X_n 的任意一个变换 L_g，故而能把参照标架的集合 $\{R_g\}$ 与空间的基本群 G 的元素集等同起来，这样便得到在具有已知基本群 G 的任何齐性空间中抽象的参照标架的概念．

设给定某个 m 维光滑子流形 $M\subset X_n$．M 的*零阶标架*（frame of order zero）是丛 $\pi: G\to X_n$ 在 M 上的限制 $G(\pi, M)=G|_M\subset G$ 的元素．这就是说，主丛 $G(\pi, M)\to M$ 嵌入到 G 中，并在其中定义为完全原象 $\pi^{-1}(M)\subset G$．因为 Lie 群 G 中的左不变形式 θ^k，θ^α 满足 Maurer-Cartan 方程

$$\left.\begin{aligned} d\theta^k &= \frac{1}{2} C^k_{lm}\theta^l\wedge\theta^m + C^k_{l\alpha}\theta^l\wedge\theta^\alpha, \\ d\theta^\alpha &= \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma + C^\alpha_{\beta k}\theta^\beta\wedge\theta^k + \frac{1}{2} C^\alpha_{lm}\theta^l\wedge\theta^m, \\ & k,l,m=1,\cdots,n;\alpha,\beta,\gamma=n+1,\cdots,r, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

其中 $C^k_{lm}, C^k_{l\alpha}, C^\alpha_{\beta\gamma}, C^\alpha_{\beta k}, C^\alpha_{lm}$ 是 Lie 群的结构常数，形式 θ^k, θ^α 在子丛 $G(\pi, M)$ 上的限制，即形式 ω^k, ω^α 将遵从同样的方程，但是在形式 ω^k 之间附加有线性关系

$$\omega^p = \Lambda^p_a\ \omega^a, a=1,\cdots,m; p=m+1,\cdots,n. \quad (2)$$

这里，ω^a 和 ω^α 合在一起在主丛 $G(\pi, M)\to M$ 上仍是线性无关的形式，同时 Λ^p_a 也是定义在 $G(n, M)\to M$ 的零阶标架丛上的函数．函数 Λ_a^p 是子流形 $M\subset X_n$ 的切平面 $T_x(M)\subset T_x(X_n)$ 中的坐标，它们依赖于点 $x\in M$ 和标架

$$R \in \pi^{-1}(x) = H_x \subset G(\pi, M).$$

切平面 $x \to T_x(M)$ 构成经过 M 的点的 m 平面的 Grassmann 丛 $\mathscr{G}_m(M) \to M$ 的截面 $f: M \to \mathscr{G}_m(M)$. 丛 $\mathscr{G}_m(M) \to M$ 是主丛 $G(\pi, M) \to M$ 的配丛. 函数 Λ_a^p 的结构用方程

$$d\Lambda_a^p + F_{a\alpha}^p(\Lambda)\omega^\alpha = \Lambda_{ab}^p \omega^b \qquad (3)$$

来刻画，它的显式可以借助于（1）对（2）求外微分（见**外形式**（exterior form）), 然后运用 **Cartan 引理**（Cartan lemma）得到. 函数 $\Lambda_a^p, \Lambda_{ab}^p$ 是截面 f 的 1 阶射流 $j_x^1 f$ 关于在点 $x \in M$ 的活动标架 $R \in \pi^{-1}(x)$ 的相对坐标. 几何对象 $j_x^1 f$ 也构成主丛 $G(\pi, M) \to M$ 的相应的配丛 $\mathscr{G}_m^1(M) \to M$ 的截面 $j^1 f: M \to \mathscr{G}_m^1(M)$. 类似地可以得到生成几何对象的、以 $\Lambda_a^p, \Lambda_{ab}^p, \Lambda_{abc}^p$ 为坐标的截面 $j^2 f: M \to \mathscr{G}_m^2(M)$, 以及后续的延拓 $j^3 f, \cdots, j^q f$, 它们对应于（3）的微分延拓.

只要截面 $j^q f$ 所属于的丛 $\mathscr{G}_m^q(M) \to M$ 是齐性的，就能够作标架主丛 $G(\pi, M)$ 到某个子群 $\widetilde{H} \subset H$ 的约化 $G^q(\pi, M)$, 该子群由 Cartan 通过固定几何对象 $j_x^q f$ 的相对坐标 $\Lambda_a^p, \Lambda_{ab}^p, \cdots, \Lambda_{a_1 \cdots a_{q+1}}^p$ 来定义，不依赖于点 $x \subset M$. 这样就定义了部分规范化的参照标架. 标架 $R \in G^q(\pi, M)$ 称为已知子流形 $M \subset X_n$ 的 $q+1$ 阶半典范标架（semi-canonical frame）. 如果接着做的延拓给出的几何对象的迷向群只包含恒同变换，则能够将截面 $j^{q+1} f$ 的几何对象的某些不依赖于点 x 的坐标固定，而几何对象 $j^{q+1} f$ 的 Λ 的其余坐标只与 $x \in M$ 有关. 这样，就得到 M 的零阶标架丛的截面 $s: M \to G(\pi, M)$ 这个截面的标架 $R = s(x)$ 称为子流形 $M \subset X_n$ 的典范标架（canonical frame），或子流形的伴随标架（accompanying frame）. 上述延拓方程（3）的过程及为固定函数 Λ 的选取方法导至方程

$$\omega^p = \Lambda_\alpha^p \omega^\alpha, \omega^\alpha = \Lambda_a^\alpha \omega^a, \qquad (4)$$

它们把截面 $s(M)$ 中的线性形式 ω^k 和 ω^α 联系起来. 典范标架场不是清晰明了地构造出来的，而是依赖于任意固定几何对象 $j^{q+1} f$ 的相对坐标. 要点在于（4）式中某些系数有常数值（可取的最简单的情形），而其余的构成子流形 $M \subset X_n$ 的微分不变量，它们把子流形 M 确定到只差 X_n 中的一个变换. 截面 $s(M)$ 的典范标架的经典例子是 Euclid 空间中曲线的伴随 Frénet 标架（见 **Frénet 三棱形**（Frénet trihedron)), 此时方程（4）对应于曲线的 Frénet 方程（见 **Frénet 公式**（Frénet formulas)). 在参考标架规范化的时候，可能会出现与丛 $\mathscr{G}_m^q(M)$ 的非齐性、X_n 中不同子流形之间类型上的差别、以及甚至它们的个别部分的差别有关的错综复杂性. 这是 X_n 中各种类型的点、各种子流形进行分类的基础. 考虑到这些特点，活动标架方法在各种齐性空间的子流形的研究中起着富有成果的作用，而且它还指示了一条发展研究光滑流形上非常一般的微分几何构造的现代方法的道路.

参考文献

[1] Cartan, E., La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, Gauthier-Villars, 1937.

[2] Favard, J., Cours de géométrie différentielle locale, Gauthier-Villars, 1957.

[3A] Cartan, H., Differential forms, Karshaw, 1983（译自法文）.

[3B] Cartan, H., Calcul différentielle, Hermann, 1967.

[4] Фиников, С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.-Л., 1948（中译本: С. П. 菲尼可夫，嘉当的外形式法，科学出版社，1956）.

Е. Л. Евтушик 撰

【补注】在 [A3] 第 2 章，第 6 节活动标架方法中，Cartan 写道: "我们将通过以内在的方式对曲线的动点附加一个活动标架来重述平面曲线的射影微分研究，且通过标架的移动来研究曲线的性质."

设 M 是 n 维微分流形，p 是 M 中一点. 在 p 点的一个**标架**（frame）是在点 $p \in M$ 的切空间 $T_p M$ 的一个基底. 在 $U \subset M$ 上给定 n 个向量场 $X_1, \cdots, X_n$ 使得对每一个 $q \in U, X_1(q), \cdots, X_n(q)$ 是线性无关的、则 $X_1(q), \cdots, X_n(q)$ 定义了 U 上的一个活动标架（moving frame; repère mobile）. 反过来，每一个活动标架 $p \mapsto F_p \in (T_p M)^n$, 即标架丛的一个截面（见**标架**)，决定了这样的 n 重向量场. 在 Cartan 的理论中，基本思想是把每个东西都用任意的活动标架 $X_1, \cdots, X_n$ 表示出来，而不只是用（局部）坐标系定义的"自然"标架 $(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n)$ 表示出来. 这已经成为非常有效的想法，不仅仅是因为在不能包含在一个坐标系内的区域上可能存在活动标架场. 例如在整个环面上存在明显的活动标架 X_1, X_2. 类似地，在前面的主要论述中定义在整个齐性空间 G/H 上有非常有用的活动标架，它们是由适当的左不变向量场给出的.

在 **Riemann 流形**（Riemannian manifold）上规范正交活动标架（orthonormal moving frame）$X_1, \cdots, X_n$ 是指在所有的点 $p, X_1(p), \cdots, X_n(p)$ 构成 $T_p M$ 的单位正交基底. 单位正交活动标架可以从任意一个活动标架通过 Gram-Schmidt 单位正交化而得到.

参考文献

[A1] Jensen, G., Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces, Lecture Notes in Math., 610, Springer, 1977.

[A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, I, II, Wiley, 1969.

[A3] Cartan, E., Théorie des espaces à connexion projective, Gauthier-Villars, 1937.

[A4] Spivak, M., Differential geometry, II. Publish or

Perish, 1970, Chapt. Ⅶ. 陈维桓 译

多重代数 [multi-algebra; мультиалгебра]

在其中给出(一般地说，部分的)多重运算系统的集合．集合 A 上一个部分多重运算(partial multi-operation)是 A 的 Descartes 幂之间的部分映射 $f: A^n \to A^m$，其中 $n, m \geqslant 0$．在这里 A^0 意味着一个单元素的集合．带有同一多重运算系统的多重代数的同态 $g: A \to B$ 是映射 g，它使得如果 f 是将 n 次幂映射到 m 次幂内的多重运算，则对所有 $x_i \in A$，

$$g^m(f(x_1, \cdots, x_n)) = f(g(x_1), \cdots, g(x_n)).$$

多重代数的概念是**泛代数**(universal algebra)概念的一种推广．同时，多重代数是**代数系统**(algebraic system)的特殊情形，因为映射 $f: A^n \to A^m$ 可被视为 A 上 $(m+n)$ 元关系 $(x, f(x))$，$x \in A^n$．多重代数的形成最自然地与泛代数的函子方法有关(见[1])．也就是说，设 C 是**范畴**(category)，其对象均为计入零的自然数，这里对象 $m+n$ 为对象 m 与 n 的直积，那么从 C 到与直积可交换的集合的范畴内的函子 F 是集合 $F(1) = A$ 上带有多重运算 $F(f): A^n \to A^m$(其中 $f: n \to m$ 在 C 内)的系统的多重代数．在这种情况下，同态恰是函子的自然变换．

参考文献

[1] Lawvere, F. W., Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **50** (1963), 5, 869－872.

[2] Белоусов, В. Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Киш., 1971.

В. А. Артамонов 撰 陈公宁 译

多准则问题 [multi-criterion problem; многокритериальная задача]

对于同时有多个准则的问题作最优决策的数学模型．这些准则可以反映决策时要确定的各种不同的目标(或过程)的量的估价，或者从不同观点来看的同一个单个特征的估价．多准则问题的理论属于**运筹学**(operations research)的数学方法范畴．

形式上，一个多准则问题是由"可行决策"集 X 和在 X 上取实值的目标函数集 $f_1, \cdots, f_n$ 来给定的．多准则问题的本质在于求一个最优决策，即，在某种意义下使所有函数 $f_i (i = 1, \cdots, n)$ 的值都极大化的 $x \in X$．存在使所有目标函数都按字面意义下极大化的决策是极为罕见的．因此，在多准则问题理论中，最优性的概念会有形形色色的、并且不平凡的解释．多准则问题理论的内容就在于发展诸如此类的最优性概念，证明它们的可实现性(即，在对应意义下的最优决策的存在性)以及寻求这些实现(即，问题的实际解答)．

解多准则问题的最直接的途径是通过把目标函数组 $f_1, \cdots, f_n$ 代替为总量函数 $F(f_1, \cdots, f_n)$ 而使问题归结为通常的("单准则")**数学规划**(mathematical programming)问题．总量函数的角色可能以"加权和" $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$，$\lambda_i \geqslant 0$，"加权极大值" $\max_i \lambda_i f_i$，以及原来的目标函数的其他组合形式出现．这种途径在观念上和技巧上是最方便的．它的基本缺陷在于很难满足对不同的目标函数值的有意义的对照要求，以及在选取函数 F 时，尤其是选取"权重" λ_i 时的不确定性(和常有的任意性)．为确立这些项，通常要借助于专家的评价．

这种途径的特殊情形是选取一个"主准则"，即除了一个单个 λ_{i_0} 以外，其他的 λ_i 都设其为零．这样多准则问题就变为通常的数学规划问题，并且它的最优解集可看作具有目标函数为 $f_i (i \neq i_0)$ 的新的多准则问题的可行解集．

作为多准则问题的解，人们可以考虑 Pareto 最优(Pareto optimal)的解，即除非以损害另一个准则为代价，不能改进任何一个准则的解(换句话说，$x \in X$ 满足：对于任何 $y \in X$，如果 $f_i(x) < f_i(y)$，那么 $f_j(y) < f_j(x)$ 对于某个 j 成立)．这种途径的缺陷在于 Pareto 最优解的多重性．根据 J. Nash 的建议，这一缺陷可通过建立"交易方案"的方法来克服．它本质上在于限制 Pareto 最优解中可选取的解的个数．在意味深长的考虑基础上，这一方法通过建立某些极小可行值 f_i^0 以及逐次求出极大化 $\prod_{i=1}^n (f_i(x) - f_i^0)$ 的可行的 x 来组成(也见**裁决方案**(arbitration scheme))．

多准则问题也可看作一个对策(见**对策论**(games, theory of))，并且它的解可以在各种对策论方法的基础上得到处理．例如，如果一个可行解 x 是以极大化目标函数 $f_1, \cdots, f_n$ 之一为目的，并且它不知道哪个目标应该极大化，那么它就可能利用这些函数的加权和，并取权数为"自然"的混合策略的分量．一个多准则问题可处理为一个**非合作对策**(non-cooperative game)，或者可以在其中并入**合作对策**(cooperative game)论的观点，以至应用与此有关的最优性原理．

参考文献

[1] Luce, R. D. and Raiffa, H., Games and decisions: introduction and critical survey, Wiley, 1957.

Н. Н. Воробьев 撰

【补注】 所叙述的选取一个 Pareto 最优解的方法也以交易问题的 Nash 解(Nash solution of the bargaining problem)而著称．

有时也称多准则问题为向量值最优化(vector-valued optimization)或多目标决策问题(multiple objective decision problem)．

参考文献

[A1] Gravin, B. D., Vector valued optimization, in S. Schaible and W. T. Ziemba (eds.): Generalized Concavity in Optimization and Economics, Acad. Press, 1981, 661 – 688.

[A2] Chankong, V. and Haimes, Y. Y., Multiobjective decision making: theory and methodology, North-Holland, 1983.

[A3] Leitmann, G., Cooperative and non-cooperative many players differential games, Internat. Center Mech. Sci., 190, Springer, 1974.

【译注】 多准则问题在国内更流行的名称是多目标规划 (multiobjective programming). [B1] 是介绍这方面内容的一本简明的小册子.

参考文献

[B1] 应玫茜，多目标规划，人民教育出版社，1988.

史树中 译

多维分布 [**multi-dimensional distribution**; **многомерное распределение**], 多元分布 (multivariate distribution)

s 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^s$ 中 Borel 集的 σ 代数上的概率分布. 人们通常所说的多元分布是多维随机变量或随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_s)$ 的分布，意指在同一基本事件空间 Ω 上给定的实随机变量 $X_1(\omega),\cdots,X_s(\omega)$ ($X_1,\cdots,X_s$ 可以看作空间 $\Omega=\mathbf{R}^s$ 上的坐标变量) 的**联合分布** (joint distribution). 一个多元分布由其**分布函数** (distribution function)——实变量 $x_1,\cdots,x_s$ 的函数

$$F(x_1,\cdots,x_s)=\mathrm{P}\{X_1<x_1,\cdots,X_s<x_s\}$$

唯一决定.

像一维情形一样，最广为应用的多元分布是离散的和绝对连续的分布. 在离散情形下，多元分布集中在 $\mathbf{R}^s$ 的有限或可数个点 $(x_{t_1},\cdots,x_{t_s})$ 的集上，使得

$$\mathrm{P}\{X_1=x_{t_1},\cdots,X_s=x_{t_s}\}=p_{t_1,\cdots,t_s}\geqslant 0,$$

$$\sum_{t_1,\cdots,t_s}p_{t_1,\cdots,t_s}=1.$$

(例如，见**多项分布** (multinomial distribution)). 在绝对连续情形下，在 $\mathbf{R}^s$ 上 (关于 Lebesgue 测度) 几乎处处

$$\frac{\partial^s F(x_1,\cdots,x_s)}{\partial x_1\cdots\partial x_s}=p(x_1,\cdots,x_s)$$

成立，其中 $p(x_1,\cdots,x_s)\geqslant 0$ 是多元分布的密度 (density of the multivariate distribution):

$$\mathrm{P}(X\in A)=\int_A p(x_1,\cdots,x_s)\,dx_1\cdots dx_s,$$

对 $\mathbf{R}^s$ 中的任意 Borel 集 A 成立，且

$$\int_{\mathbf{R}^s} p(x_1,\cdots,x_s)\,dx_1\cdots dx_s=1.$$

任何随机变量 X_t 的分布 (或对任意 $m<s$, 变量 $X_{t_1},\cdots,X_{t_m}$ 的分布) 相对于多元分布而言称为**边缘分布** (marginal distribution). 边缘分布完全由给定的多元分布确定. 当 $X_1,\cdots,X_s$ 独立时，有

$$F(x_1,\cdots,x_s)=F_1(x_1)\cdots F_s(x_s)$$

及

$$p(x_1,\cdots,x_s)=p_1(x_1)\cdots p_s(x_s),$$

其中 $F_t(x)$ 和 $p_t(x)$ 分别是 X_t 的边缘分布函数和密度.

$X_1,\cdots,X_s$ 的任一函数 $f(X_1,\cdots,X_s)$ 的数学期望，由这个函数关于多元分布的积分所决定；特别地，在绝对连续情形下由积分

$$\mathrm{E}f(X_1,\cdots,X_s)=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^s} f(x_1,\cdots,x_s)p(x_1,\cdots,x_s)\,dx_1\cdots dx_s$$

决定. 多元分布的特征函数是由下式给出的 $t=(t_1,\cdots,t_s)$ 的函数：

$$\varphi(t)=\mathrm{E}\,e^{itx'},$$

其中 $tx'=t_1x_1+\cdots+t_sx_s$.

多元分布的基本数字特征是**矩** (moment): 混合矩 $\mathrm{E}X_1^{k_1}\cdots X_s^{k_s}$ 和中心混合矩 $\mathrm{E}(X_1-\mathrm{E}X_1)^{k_1}\cdots(X_s-\mathrm{E}X_s)^{k_s}$, 其中 $k_1+\cdots+k_s$ 是相应矩的阶数. 多元分布的期望和方差的角色由 $\mathrm{E}X=(\mathrm{E}X_1,\cdots,\mathrm{E}X_s)$ 和所有二阶中心混合矩来扮演，后者组成**协方差矩阵** (covariance matrix). 如果对一切 i,j $(i\neq j)$, $\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)(X_j-\mathrm{E}X_j)=0$, 则称 $X_1,\cdots,X_s$ 为两两不相关或正交的 (协方差矩阵是对角形). 如果协方差矩阵的秩 r 小于 s, 则称此多元分布为**退化分布** (degenerate distribution); 在这种情形下，分布集中在 $\mathbf{R}^s$ 的某一维数 $r<s$ 的线性流形上.

研究 $X_1,\cdots,X_s$ 之间相依性的方法，见**相关** (correlation); **回归** (regression). A. B. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Discrete distributions, Houghton-Miflin, 1969.

[A2] Johnson, N. L. and Kotz, S., Continuous multivariate distributions, Wiley, 1942.

刘秀芳 译

多维纽结 [**multi-dimensional knot**; **многомерный узел**]

球面到球面的嵌入的一个同痕类. 更精确地，余维数 q 的 n 维纽结是由一个定向球面 S^{n+q} 和一个定向，局部平坦的，它的一个同胚于球面 S^n 的子流形 k^n 组成的偶对 $K=(S^{n+q},k^n)$. 两个纽结 $K_1=(S^{n+q},k_1^n)$ 和 $K_2=(S^{n+q},k_2^n)$ 称为等价的，如果存在

S^{n+q} 的一个**同痕(拓扑学中的)**(isotopy(in topology)), 它使得从 k_1^n 到 k_2^n 保持定向. 依赖于(微分, 分片线性或拓扑)范畴, 从这里, 这些定义中用到了术语"子流形"和"同痕", 分别称光滑, 分片线性或拓扑多维纽结. 在光滑情形, k^n 可以有非标准的微分结构. 一个同痕于标准嵌入的余维数 q 的 n 维纽结称为平凡的(trivial), 或非纽的(unknotted)纽结(knot).

余维数 1 的多维纽结的研究关系到 **Schoenflies 猜想**(Schoenflies conjecture). 每一个余维数 1 的拓扑纽结是平凡的. 如果 $n \neq 3,4$, 这对分片线性和光滑纽结是对的.

余维数 $q \geqslant 3$ 的分片线性和拓扑多维纽结是平凡的. 在光滑情形就不是这样. 对 $n \geqslant 5$, 余维数 $q \geqslant 3$ 的光滑 n 维纽结的同痕类的集合相合于纽结的配边类(cobordism classes of knots)的集合 $\theta^{n+q,n}$. (两个多维纽结 $K_1=(S^{n+q},k_1^n)$ 和 $K_2=(S^{n+q},k_2^n)$ 称为配边的(cobordant), 如果存在一个光滑的 $n+1$ 维子流形 $W \subset S^{n+q} \times I$, 横截于 $\partial(S^{n+q} \times I)$, 其中 $\partial W=(k_1^n \times 0) \cup (-k_2^n \times 1)$ 和 W 是 $k_1^n \times 0$ 和 $k_2^n \times 1$ 之间的 h **配边**(h-cobordism).) 集合 $\theta^{n+q,n}$ 是关于连通和运算的 Abel 群. 在这个群中, (S^{n+q},k^n) 类的负元是 $(-S^{n+q},-k^n)$ 的配边类, 其中, 减号表示定向的相反. 存在自然的同态 $\theta^{n+q,n} \to \theta^n$, 其中 θ^n 是 n 维同伦球面的群; 这个同态将 k^n 的微分结构联系到纽结 (S^{n+q},k^n). 这个同态的核, 用 $\Sigma^{n+q,n}$ 表示, 是 S^{n+q} 中的标准球面 S^n 的同痕类的集合. 如果 $2q>n+3$, 则 $\Sigma^{n+q,n}$ 是平凡的. 如果 $2q \leqslant n+3$ 和 $n+1 \not\equiv 0 \pmod 4$ 时, 则 $\theta^{n+q,n}$ 和 $\Sigma^{n+q,n}$ 是有限的. 当 $2q \leqslant n+3$ 和 $n+1 \equiv 0 \pmod 4$ 时, 则 $\theta^{n+q,n}$ 和 $\Sigma^{n+q,n}$ 是秩 1 的有限生成 Abel 群(见[1], [2]). 对 $q>2$, S^n 到 S^{n+q} 中的光滑嵌入的和谐类的集合也已被计算过(见[3]).

余维数 2 的多维纽结的研究, 后面简单地称为纽结, 在所有三个范畴(可微, 分片线性, 拓扑)中十分相似地进行. 对 $n \geqslant 5$, 每一个拓扑纽结可通过同痕变换成一个光滑纽结. 然而, 在 S^5 中存在拓扑 3 维纽结, 它不等价, 甚至不配边于光滑纽结(见[4]).

n 维纽结(在每一个范畴中)的同痕类的集合关于连通和的运算是一个 Abel 半群. 众所周知, 对 $n=1$, 在这个半群中, 每个元素是素数的有限和, 并且这样的分解是唯一的.

n 维纽结 $K=(S^{n+2},k^n)$ 是平凡的, 当且仅当对所有 $i \leqslant [(n+1)/2]$, $\pi_i(S^{n+2} \setminus k^n)=\pi_i(S^1)$. 纽结 K 的代数分类已给出(见[6]), 对于分类, $\pi_i(S^{n+2} \setminus k^n)=\pi_i(S^1)$, 而对所有 $i \leqslant [(n+1)/2]-1$ 和奇数 n(型 L 的纽结)有: $n \geqslant 5$, 这样的纽结的同痕类集合结果与 **Seifert 矩阵**(Seifert matrix)的 S 等价类的集合一一对应. 从应用于代数几何学的观点来看, 型 L 的纽结是重要的, 因为它们包含了所有由下面构造得出的纽结(见[5]). 设 $f(z_1,\cdots,z_{q+1})$ 是非零阶的有以零为孤立奇点的复多项式, 且令 $f(0)=0$. 超平面 $V=f^{-1}(0)$ 与中心在零点的小球面 S^{q+1} 的交 k 是一个 $(q-2)$ 连通的 $(2q-1)$ 维的流形. 流形 k 同胚于 S^{2q-1}, 当且仅当 $|\Delta(1)|=1$, 其中 $\Delta(t)$ 是 Alexander 多项式. 因此, 在此情形时, 出现了一个纽结 (S^{2q+1},k). 这样的纽结称为代数的(algebraic); 它们是所有的型 L.

一个光滑纽结 $K=(S^{n+2},k^n)$ 的外部(exterior)是 S^{n+2} 中的 k^n 的(一个开管状邻域)的余集 X. 当 $n \geqslant 2$ 时, 对每个 n 维纽结 K, 存在纽结 $\tau(K)$ 使得外部微分同胚于 K 的外部的每个纽结等价于 K 或者 $\tau(K)$. 如果 X_1, X_2 是两个光滑 n 维纽结的外部 $(n \geqslant 3)$, 而且 $\pi_1(X_1)=\pi_1(X_2)=Z$, 那么, 下面的陈述是等价的(见[7]): 1) X_1 和 X_2 是微分同胚的; 2) 偶对 $(X_1,\partial X_1)$ 和 $(X_2,\partial X_2)$ 是同伦等价的. 这些结果将纽结的分类问题简化为偶对 $(X,\partial X)$ 的同伦分类问题和下面问题的解决: 外部决定纽结的类型吗? 即 $K=\tau(K)$ 成立吗? 众所周知, 对型 L 的纽结(见[6])和用 Artin 结构和超纽结构得到的纽结, 这个等式是成立的(见[8]). 然而, 已在 S^4 中找到了 2 维纽结有 $K \neq \tau(K)$ (见[9]).

X 的外部的同伦型的研究是复杂的, 因为这外部不是单连通的. 如果 G 是纽结的群(即 $G=\pi_1(X)$), 则 $G/[G,G]=\mathbf{Z}, H_2(G)=0$, 且 G 的重量(即不包含在正常正规子群中的元素的最小数目)等于 1. 对 $n \geqslant 3$, 这些性质完全刻画了 n 维纽结的群的类(见[10]). 一维和二维纽结的群有一些附加的性质(见**纽结理论**(knot theory); **二维纽结**(two-dimensional knot)).

因为 $H^1(X;\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$, 所以外部 X 有唯一的无限循环覆叠 $p:\widetilde{X} \to X$. 同调空间 $H_*(\widetilde{X};\mathbf{Z})$ 是 $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$ 模. 它们的 **Alexander 不变量**(Alexander invariant)是纽结的不变量. 关于模 $H_*(\widetilde{X};\mathbf{Z})$ 的代数性质, 见[10]-[13].

由于群 $\mathbf{Z}$ 无不动点作用在无限循环覆叠上的事实, $(n+2)$ 维非紧流形 $\widetilde{X}$ 有一些紧的 $n+1$ 维流形的同调性质. 特别地, 对流形 $\widetilde{X}$ 的系数在域 F 中的同调群, 存在非退化配对

$$H_n(\widetilde{X};F) \otimes H_{n+1-k}(\widetilde{X};F) \to F, \quad k=1,\cdots,n.$$

它有类似于由 $n+1$ 维紧流形**相交指数(同调论中的)**(intersection index (in homology))所决定的配对的性质. 还有一个配对

$$T_k\widetilde{X} \otimes T_{n-k}\widetilde{X} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \quad k=1,\cdots,n-1,$$

类似于 $n+1$ 维流形中的**环绕系数**(linking coefficient)(见[13]),其中 $T_j\widetilde{X}=\operatorname{Tors} H_j(\widetilde{X},\mathbf{Z})$. 这些同调配对产生了偶对 $(X,\partial X)$ 的同伦型的不变量. 为得到代数不变量,也利用了有限层循环分支覆叠(见[14]).

余维数 2 的分类纽结直到配边的问题,一个比同痕类更粗糙的等价关系对 $n>1$ 已完全解决了(见**纽结的配边**(cobordism of knots)).

参考文献

[1] Haefliger, A., Knotted $(4k-1)$-spheres in $6k$-space, *Ann. of Math.*, **75**(1962), 452 – 466.

[2] Haefliger, A., Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q>2$, *Ann. of Math.*, **83**(1966), 402 – 436.

[3] Levine, J., A classification of differentiable knots, *Ann. of Math.*, **82**(1965), 15 – 50.

[4] Cappell, S. and Shaneson, J., Topological knots and knot cobordism, *Topology*, **12**(1973), 33 – 40.

[5] Сосинский, А. Б., 《Матем. сб.》, **81**(1970), 1, 145 – 158.

[6] Levine, J., An algebraic classification of some knots of codimension two, *Comment. Math. Helv.*, **45**(1970), 185 – 198.

[7] Lashof, R. and Shaneson, J., Classification of knots in codimension two, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**(1969), 171 – 175.

[8] Cappell, S., Superspinning and knot complements, in *topology of Manifolds*, Markham, 1971, 358 – 383.

[9] Cappell, S. and Shaneson, J., There exist inequivalent knots with the same complements, *Ann. of Math.*, **103**(1976), 349 – 353.

[10] Kervaire, M., Les noeuds de dimensions superiéures, *Bull. Soc. Math. France*, **93**(1965), 225 – 271.

[11] Levine, J., Polynomial invariants of knots of codimension two, *Ann. of Math.*, **84**(1966), 537 – 554.

[12] Levine, J., Knot modules, in Knots, Groups and 3-Manifolds, Princeton Univ. Press., 1975, 25 – 34.

[13] Фарбер, М. Ш., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **41**(1977), 794 – 828.

[14] Виро, О. Я., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **37**(1973), 1241 – 1258.

[15] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

М. Ш. Фарбер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milnor, J., Infinite cyclic coverings, in J. Hocking (ed.), Conf. Topology of Manifolds, Prindle, Weber & Schmidt, 1968, 115 – 133.

徐森林 译

多维统计分析[**multi-dimensional statistical analysis**; **многомерный статистический анализ**],多元统计分析(multivariate statistical analysis)

数理统计(mathematical statistics)的一个分支,研究建立多元统计数据的收集、系统化和加工的最优方案的数学方法,针对揭示所研究多维特征各分量间相互联系的特性和结构,旨在作出科学的和实际的推断. 多元属性(multivariate attribute)理解为分量(指标、标志、变量)$x_1,\cdots,x_p$ 的 p 维向量 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_p)'$. 这些分量,可以是数量的(quantitative),即可数量上测定对象的所考察性质在一定尺度下的表现程度;可以是有序的(ordering(或 ordinal)),即可将被分析对象按其所研究性质的表现程度排序;是分级的(classifying)或名义的(nominal),即可将研究对象的全体划分为不能排序的但(按所分析的性质)齐一的类别. 这些分量在所研究总体的 n 个对象中每一对象上的测定结果

$$\{\mathbf{x}_{\cdot i}\}_1^n=\{(x_{1i},\cdots,x_{p_i})\}_1^n \tag{1}$$

形成多元观测序列,即进行多元统计分析的初始的多元数据集. 多元统计分析的很大一部分内容用于下面的情形:所研究的多维特征 $\mathbf{x}$ 是多元随机变量,而相应的多维观测序列(1)是来自总体的样本. 在这种情形下,原始数据处理方法的选择及其性质的分析,是在关于多维(联合)概率分布律 $\mathsf{P}(\mathbf{x})$ 性质的某些假设的基础上进行的.

多元统计分析按其内容大致可以分为三个主要分支:多元分布及其基本特征的多元统计分析;所研究多元特征之分量间相互联系的特性和结构的多元统计分析;所研究多维观测值集的几何结构的多元统计分析.

多元分布及其基本特征的多元统计分析. 这一分支只研究所处理观测结果(1)具有概率本性的情形,即把(1)看作来自相应总体的样本. 属于该分支的基本问题有:所研究问题中的多元分布以及其基本数字特征和参数的统计估计;研究所使用统计估计量的性质;研究某些统计量的概率分布,这些统计量用于建立对所分析多维数据的各种不同假设的统计检验. 主要结果涉及如下特殊情形:所研究特征 $\mathbf{x}$ 服从多元正态分布 $N_p(\mu,\mathbf{V})$,其密度 $f(\mathbf{x}|\mu,\mathbf{V})$ 为

$$f(\mathbf{x}|\mu,\mathbf{V})=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\mathbf{V}|^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}, \tag{2}$$

其中 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_p)'$ 是 $\mathbf{x}$ 之分量的数学期望向量(见**数学期望**(mathematical expectation))即 $\mu_i=\mathsf{E}\,x_i\ (i=1,\cdots,p)$;$\mathbf{V}=\|v_{ij}\|_{i,j=1}^p$ 是 $\mathbf{x}$ 的**协方差矩阵**(covariance matrix),即 $v_{ij}=\mathsf{E}\,(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)$ 是 $\mathbf{x}$ 的分量的协方差(考虑秩 $\mathbf{V}=p$ 的情形;当秩 $\mathbf{V}=p'<p$ 时,所有结论仍然成立,但只涉及较小维数 p' 的子空间,即 $\mathbf{x}$ 的概率分布所集中的子空间).

这样,如果(1)是来自 $N_p(\mu,\mathbf{V})$ 的随机样本的独立观测结果序列,则(2)中的参量 μ 和 $\mathbf{V}$ 的最大似然估计量为(见[1],[2])

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{x}_{t} \qquad (3)$$

和

$$\hat{\mathbf{V}}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{x}_{\cdot t}-\hat{\mu})(\mathbf{x}_{\cdot t}-\hat{\mu})', \qquad (4)$$

并且随机向量 $\hat{\mu}$ 服从 p 维正态律 $N_p(\mu,\mathbf{V}/n)$ 且与 $\hat{\mathbf{V}}$ 统计独立；矩阵 $\hat{\mathbf{Q}}=n\hat{\mathbf{V}}$ 中元素的联合分布由所谓 **Wishart 分布**(Wishart distribution; 见 [4]) 描绘，当 $\hat{\mathbf{Q}}$ 正定时其密度为

$$w(\hat{\mathbf{Q}}|\mathbf{V};n)=$$

$$=\frac{\hat{\mathbf{Q}}^{(n-p-2)/2}\exp\{-\mathrm{tr}(\mathbf{V}^{-1}\hat{\mathbf{Q}})/2\}}{2^{(n-2)p/2}\pi^{p(p-1)/4}|\mathbf{V}|^{(n-1)/2}\prod_{j=1}^{p}\Gamma((n-j)/2)},$$

否则为 0.

在这一分支内，研究了多元随机变量的样本特征的分布和矩，如两两相关系数、偏相关系数、复相关系数、广义方差(即统计量 $|\hat{\mathbf{V}}|$)和广义 Hotelling T^2 统计量(见 **Hotelling T^2 分布**(Hotelling T^2-distribution)和[5])的分布和矩. 特别地(见[1])，如果将样本协方差阵 $\mathbf{S}_n$ 定义为估计量 $\hat{\mathbf{V}}$ 的“无偏性”修正，即

$$\mathbf{S}_n=\frac{n}{n-1}\hat{\mathbf{V}}, \qquad (5)$$

则当 $n\to\infty$ 时随机变量 $\sqrt{n}(|\mathbf{S}_n|/|\mathbf{V}|-1)$ 的分布趋向 $N_1(0,2p)$，随机变量

$$\frac{n-p}{p(n-1)}T^2=\frac{n-p}{p(n-1)}n(\hat{\mu}-\mu)'\mathbf{S}_n^{-1}(\hat{\mu}-\mu) \qquad (6)$$

和

$$\frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)p}\tilde{T}^2=$$

$$=\frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)p}\cdot\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\hat{\mu}_{n_1}-\hat{\mu}_{n_2})'\mathbf{S}_{n_1+n_2}^{-1}(\hat{\mu}_{n_1}-\hat{\mu}_{n_2}) \qquad (7)$$

服从 **Fisher F 分布**(Fisher F-distribution)，自由度分别为 $(p,n-p)$ 和 (p,n_1+n_2-p-1). (7)式中 n_1 和 n_2 为来自同一总体 $N_p(\mu,\mathbf{V})$ 的两个形如(1)的独立样本的容量，$\hat{\mu}_{n_i}$ 和 $\mathbf{S}_{n_i}$ 是基于第 i 个样本的形如(3)和(4)－(5)的估计量，而

$$\mathbf{S}_{n_1+n_2}=\frac{1}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)\mathbf{S}_{n_1}+(n_2-1)\mathbf{S}_{n_2}]$$

是由估计量 $\mathbf{S}_{n_1}$ 和 $\mathbf{S}_{n_2}$ 构造的公共样本协方差阵.

所研究多元特征各分量间相互联系的特性和结构的多元统计分析. 该分支包含用于多元统计分析的如下一些方法和模型的概念与结果：多重**回归**(regression)；多元**方差分析**(dispersion analysis)和**协方差分析**(covariance analysis)；**因子分析**(factor analysis)；主成分分析和典型相关分析. 构成这一分支内容的结果大致可以分为两种基本类型.

1) 建立上述模型中参数的(在一定意义上)最优的统计估计量并分析其性质(精度；而在概率提法中，其分布律，置信区域等). 例如，把所研究多元特征 $\mathbf{x}$ 视为向量值随机变量，服从 p 维正态分布 $N_p(\mu,\mathbf{V})$，且划分成维数相应为 q 和 $p-q$ 的两个子(列)向量 $\mathbf{x}^{(1)}$ 和 $\mathbf{x}^{(2)}$. 这样就决定了数学期望向量 μ、理论和样本协方差矩阵 $\mathbf{V}$ 和 $\hat{\mathbf{V}}$ 的划分，即

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\ \mu^{(2)}\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}=\begin{pmatrix}\mathbf{V}_{11}&\mathbf{V}_{12}\\ \mathbf{V}_{21}&\mathbf{V}_{22}\end{pmatrix},\quad \hat{\mathbf{V}}=\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{V}}_{11}&\hat{\mathbf{V}}_{12}\\ \hat{\mathbf{V}}_{21}&\hat{\mathbf{V}}_{22}\end{pmatrix}.$$

那么(见[1],[2])，子向量 $\mathbf{x}^{(1)}$(在第二子向量取固定值 $\mathbf{x}^{(2)}$ 的条件下)的条件分布也是正态的，即 $N_p(\mu^{(1)}+\mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)}-\mu^{(2)}),\ \Sigma)$. 这里，$\Sigma$ 是协方差矩阵，$\mathbf{B}$ 是经典多重多元回归模型

$$\mathsf{E}(\mathbf{x}^{(1)}|\mathbf{x}^{(2)})=\mu^{(1)}+\mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)}-\mu^{(2)}) \qquad (8)$$

中的回归系数矩阵；$\mathbf{B}$ 和 Σ 的最大似然估计量 $\hat{\mathbf{B}}$ 和 $\hat{\Sigma}$ 是相互独立的统计量，分别为

$$\hat{\mathbf{B}}=\hat{\mathbf{V}}_{12}\hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1}\ \text{和}\ \hat{\Sigma}=\hat{\mathbf{V}}_{11}-\hat{\mathbf{V}}_{12}\hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1}\hat{\mathbf{V}}_{21},$$

其中估计量 $\hat{\mathbf{B}}$ 的分布是正态律 $N_{q(p-q)}(\mathbf{B},\mathbf{V}_{\mathbf{B}})$，而估计量 $n\hat{\Sigma}$ 服从参数为 Σ 和 $n-(p-q)$ 的 Wishart 分布律(协方差阵 $\mathbf{V}_{\mathbf{B}}$ 的元素可以由矩阵 $\mathbf{V}$ 的元素表示).

因子分析、主成分和典型相关等模型中，建立参数估计量和研究其性质的主要结果，是不同样本协方差阵之本征(特征)值和本征向量的概率统计性质的分析.

在不能纳入经典正态模型甚至任何概率模型时，主要结果是计算参数估计量的算法的建立及其性质的研究，从某种局外给定的、反映模型质量(或适合性)的泛函来看所求估计量应是最优的.

2) 建立用于检定各种关于“所研究相互联系之结构”的假设的统计检验. 在多元正态模型范围内(形如(1)的观测结果序列视为来自相应多元正态总体的随机样本)，建立了检定如下一些假设的统计检验. 例如:

Ⅰ.关于“所研究变量之数学期望向量 μ 等于给定的具体向量 μ^*”的假设 $\mu=\mu^*$；检验使用 Hotelling T^2 统计量，只需将 $\mu=\mu^*$ 代入(6)式.

Ⅱ.关于“两个样本代表的两个总体之数学期望向量相等”的假设 $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$(假定两个总体有相同但未知的协方差阵)；检验使用统计量 $\tilde{T}^2$(见(7)式).

Ⅲ.关于“由各自样本代表的若干总体之数学期望向量相等”的假设 $\mu^{(1)}=\cdots=\mu^{(k)}=\mu$(假定各总体有相同但未知的协方差阵)；检验使用统计量

$$U_{p,k-1,n-k}=\frac{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\mu}^{(j)})(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\mu}^{(j)})'\right|}{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\mu})(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\mu})'\right|},$$

其中 $\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}$ 是代表第 j 个总体容量为 n_j 的样本中第 i 个 p 维观测值，$\hat{\mu}^{(j)}$ 和 $\hat{\mu}$ 是形如(3)的估计量，前者基于第 j 个样本，后者基于容量为 $n=n_1+\cdots+n_k$ 联合样本.

Ⅳ.关于"若干正态总体等价"的假设 $\mu^{(1)}=\cdots=\mu^{(k)}=\mu$ 且 $\mathbf{V}_1=\cdots=\mathbf{V}_k=\mathbf{V}$，其中取自各总体的样本为 $\{\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}(j=1,\cdots,k)$；检验使用统计量

$$\lambda=\frac{\prod_{j=1}^{k}|n_j\hat{\mathbf{V}}_j|^{(n_j-1)/2}}{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\mu})(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\mu})'\right|^{(n-k)/2}},$$

其中 $\hat{\mathbf{V}}_j$ 是分别根据第 j 个样本的观测值建立的形如(4)的估计量，$j=1,\cdots,k$.

Ⅴ.关于"子向量 $\mathbf{x}^{(1)},\cdots,\mathbf{x}^{(m)}$ 相互独立"的假设，其中所研究的 p 维向量 $\mathbf{x}$ 划分出的这些子向量的维数分别为 $p_1,\cdots,p_m$，且 $p_1+\cdots+p_m=p$；检验使用统计量

$$\psi=\frac{|n\hat{\mathbf{V}}|}{\prod_{i=1}^{m}|n_i\hat{\mathbf{V}}_i|},$$

其中 $\hat{\mathbf{V}}$ 和 $\hat{\mathbf{V}}_i$ 分别为全向量 $\mathbf{x}$ 和它的子向量 $\mathbf{x}^{(i)}$ 的形如(4)的样本协方差阵.

所研究多维观测值集之几何结构的多元统计分析.此分支包括这样一些模型及概形的概念和结果，如**判别分析**(discriminant analysis)，概率分布的混合，聚类分析，分类学和多维标度.在所有这些概形中，被分析元素间的距离(接近程度的度量，相似性的度量)是关键.这时，被分析的可能是现实的对象，在每一个这样的对象上指标 $\mathbf{x}$ 的值是固定的，则第 i 个被研究对象几何上是相应 p 维空间中的一点 $\mathbf{x}_{\cdot i}=(x_{1i},\cdots,x_{pi})'$；被分析的也可能是指标 $\mathbf{x}_{l\cdot}(l=1,\cdots,n)$ 本身，则几何上第 l 个指标是相应 n 维空间中的一个点 $\mathbf{x}_{l\cdot}=(x_{l1},\cdots,x_{ln})$.

判别分析(见[1],[2],[7])的方法和结果用于解决如下问题.已知存在一定数目 $k\geqslant 2$ 个总体，且研究者掌握来自每个总体的各一个样本("训练样本").要求基于所掌握的训练样本，建立在一定意义上最优的分类规则，使之能将某新元素(观测结果 $\mathbf{x}$)划归它自己的总体，这时假设研究者事先不知该元素属于何总体.通常，将分类规则理解为一系列行动：计算所考察指标的数值函数，以便根据其值作出将元素归入某一类的判决(构造判别函数)；按指标本身关于元素正确归类所提供信息量的程度，将指标排序；计算相应的错误分类的概率.

分析混合分布问题(见[7])，多数(不是全部)也出现在研究所考察总体的"几何结构"时。这时，第 r 个齐性类的概念，借助由(一般为单峰的)概率分布律 $\mathsf{P}(\mathbf{x}|\theta_r)$ 描绘的总体.因此，从中抽取样本(1)的共同总体的分布由形如

$$\mathsf{P}(\mathbf{x})=\sum_{r=1}^{k}\pi_r\mathsf{P}(\mathbf{x}|\theta_r)$$

的混合分布描绘，其中 π_r 是第 r 类在共同总体中的先验分布(元素的权重).问题在于求未知参数 θ_r，π_r，(有时还有) k 的"好"统计估计(关于样本 $\{\mathbf{x}_{\cdot i}\}_1^n$).特别地，虽然这时没有训练样本，仍可以将元素的分类问题归结为判别分析概形.

聚类分析(分类法、分类学、"无师可学"的模式识别，见[2],[6],[7])用于解决如下问题.被分析元素总体的几何结构，或者由相应点的坐标(即由矩阵 $\|x_{ij}\|(i=1,\cdots,p;j=1,\cdots,n)$)给出，或者由它们相互位置的一组几何特征给出(例如，由以两两距离为元素的距离矩阵 $\|\rho_{ij}\|_{i,j}^{n}$ 给出).要求将所研究的元素集合划分为相对不大(事先已知或未知)数目的类，使每一类中元素之间相距较小，而不同类间相距尽可能充分远，并且不能再划分为同样远的其他子类.

多维标度问题(见[6])属于如下情形：所研究的元素总体由两两距离矩阵 $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ 给出，要求赋予每一个元素以给定的数目(p)个坐标，使借助于这些坐标度量的元素间两两相互距离的结构与给定结构相差平均最小.需要指出，在已有的聚类分析和多维标度的基本结果与方法中，对原始数据的概率本性不作任何假设.

多元统计分析的实际用途.其实际应用主要在于处理如下三类问题.

所考察变量间相依性的统计研究问题.假设 $\mathbf{x}$ 是统计上记录的变量组，根据这些变量的富有内容的含义和最终研究目的，将 $\mathbf{x}$ 分割为 q 维被预测(应)变量的子向量 $\mathbf{x}^{(1)}$ 和 $(p-q)$ 维预报(自)变量的子向量 $\mathbf{x}^{(2)}$.可以说问题在于、根据样本(1)在容许判决类 F 中求一 q 维向量值函数 $f(\mathbf{x}^{(2)})$，使之能给出子向量 $\mathbf{x}^{(1)}$ 之状态的在一定意义上的最优逼近.以逼近质量泛函的具体形式和所考察变量的特性为转移，可得出多重回归、方差分析、协方差分析或合流分析(见[8])等概形.

元素分类问题.该问题的一般(不严格)提法(general formulation)是：将在统计上由矩阵 $\|x_{ij}\|(i=1,\cdots,p;j=1,\cdots,n)$ 或 $\|\rho_{ij}\|(i,j=1,\cdots,n)$ 表示的被分析的元素(对象或变量)的整个集合，划分成为数目相对不多的、在一定意义上齐一的若干组(见[7]).以先验信息的性质和给出分类质量准则的泛函的具体形式为转移，得出判别分析、聚类分析(分类学、"无师可学"的模式识别)以及混合分布的分解等各种概形.

所考察因子空间的降维和最富有信息变量的选择问题.该问题在于求含较小数 $m(m\ll p)$ 个变量的这样一个变量组 $\mathbf{z}=(z_1,\cdots,z_m)'$：$z$ 属于原变量组 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_p)$ 的容许变换类 $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$，某从外部给定的 m 维变

量组的信息量度量在 $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ 上达到上确界(见[7]).给出自信息量度量(measure of self-informativity)的泛函(即旨在最大限度保存包含在统计数据集(1)中关于原始属性本身信息的泛函)的具体化，导致诸如因子分析和主成分分析等各种概形，以及变量的极分组法.确定外信息量度量(measure of external informativity)的泛函，即旨在从(1)中提取不直接包含在 $\mathbf{x}$ 中的关于其他某些变量或现象的最大信息的泛函，导致在相依性统计研究概形和判别分析概形中选择富有信息的变量的各种方法.

多元统计分析中的基本数学工具.这包括线性方程组理论和矩阵论的专门方法(关于特征值和特征向量的简单问题和广义问题的解法；矩阵的简单逆和广义逆；矩阵的对角化等等)，以及某些最优化算法(坐标下降法，共轭梯度法，分支和定界法，各种随机搜索和随机逼近等等).

参考文献

[1] Anderson, T.W., An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958.

[2] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, Design and analysis, and time series, 3, Griffin, 1983.

[3] Большев, Л. Н., 《Bull. Int. Stat. Inst.》, 1969, 43, 425−441.

[4] Wishart, H., *Biometrika*, **20A** (1928), 32−52.

[5] Hotelling, H., The generalization of student's ratio, *Ann. Math. Statist.*, **2** (1931), 360−378.

[6] Kruskal, J.B., Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, *Psychometrika*, **29** (1964), 1−27.

[7] Айвазян, С.А., Бежаева, З.И., Староверов, О.В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974.

[8] Aivazyan, S.A., Yenyukov, I.S. and Meshalkin, L.D., Applied statistics: study of relationships, Moscow, 1985 (俄文).

С.А. Айвазян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gnanadesikan, R., Methods for statistical data analysis of multivariate observations, Wiley, 1977.

[A2] Schervish, M.J., *Stat. Science*, **2** (1987), 396−433.

[A3] Farrell, R., Techniques of multivariate calculation, Springer, 1976.

[A4] Eaton, M.L., Multivariate statistics, A vector space approach, Wiley, 1983.

[A5] Muirhead, R.J., Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, 1982.

周概容 译

多维变分问题 [**multi-dimensional variational problem**; **многомерная вариационная задача**]，含偏导数的变分问题(variational problem involving partial derivatives)

变分法(见**变分学**(variational calculus))中的一个问题，其中需要决定依赖于多个独立变元函数的泛函的极值.通常的变分问题，其中考虑一个独立变元函数的泛函，在这个意义下可称为一维变分问题.

二维变分问题(two-dimensional variational problem)的一个例子是确定一个两独立变元的函数 $u(x, y)$，它连同其一阶偏导数是连续的，且给予泛函

$$I(u)=\iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

在边界条件

$$u(x, y)|_l = u_0(x, y) \qquad (2)$$

下的一个极值，这里 l 是界定区域 D 的一条闭周线，$u_0(x, y)$ 是给定的函数，而 $F(x, y, u, u_x, u_y)$ 是一个关于其自变量联合地二次连续可微函数.设 $u(x, y)$ 是问题(1)，(2)的一个解.在(1)中代入一个比较函数 $u(x, y)+\alpha\eta(x, y)$，这里 $\eta(x, y)|_l=0$，而 α 是一数值参数.对 α 微分并且使 $\alpha=0$，给出下面的对泛函一阶变分的表达式:

$$\delta I=\iint_D (F_u\eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\,dx\,dy. \qquad (3)$$

如果 $u(x, y)$ 有连续的二阶导数，则容易证明 δI 为零的一个必要条件是

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \qquad (4)$$

方程(4)称为 Euler-Остроградский 方程(Euler-Ostrogradski equation)(有时称 Остроградский 方程(Ostrogradski equation)).这个方程必须被一个给出(1)在边界条件(2)下的极值的函数 $u(x, y)$ 所满足.Euler-Остроградский 方程类似于对一维问题的 **Euler 方程**(Euler equation).按展开形式，(4)是二阶偏微分方程.

在三重积分和依赖于三个独立变量的函数 $u(x, y, z)$ 的情形下，Euler-Остроградский 方程具有形式:

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}F_{u_z}=0.$$

下面的条件是 **Legendre 条件**(Legendre condition)的一种类似.为了 $u(x, y)$ 至少给出(1)的弱极值，必须在 D 的每一个内点有

$$F_{u_xu_x}F_{u_yu_y}-F_{u_xu_y}^2\geqslant 0.$$

对极小值必须有 $F_{u_xu_x}\geqslant 0$，而对极大值必须有 $F_{u_xu_x}\leqslant 0$.

不连续的多维变分问题也已经考虑过(见[4]).

参考文献

[1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathema-

tical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, Ⅱ, 科学出版社, 1977).

[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958(中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).

[3] Ахиезер, Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955(英译本: Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962).

[4] Керимов, М. К., 《Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР》, **18** (1951), 209 - 219.

И. Б. Вапнярский 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

多极值问题 [**multi-extremum problem**; **многоэкстремальная задача**]

有几个或者未知个数的局部极值的一种极值问题.

求函数 $f(x)$ 在 X 上的总体极值问题对单峰函数的基本类已经解决, 其中 $x=(x^1, \cdots, x^n)\in X\subset \mathbf{R}^n$, $\bar{X}$ 紧(首先是对凸函数和与其有关的函数, 见**凸规划** (convex programming)). 对多峰函数, 即使对光滑的和缓慢变化的函数, 现在 (1989) 还没有方法可保证计算出总体极值, 除了沿着在容许集 X 中形成处处稠密集的轨道扫描以外. 在实践中, 费时的扫描与求局部极值的算法结合起来: 用扫描和对函数 $f(x)$ 的先验归约 (对导数、泛函方程和不等式的估计等等), 勾画出对每个局部极值的吸引区域 (domain of attraction) 和死带 (dead zones) 的轮廓, 在死带中一种具体的局部算法失效 (例如, 在**梯度法** (gradient method) 中死带是鞍点的邻域和"谷底"). 然后, 这些极值被估计出或用局部方法找出再相互比较.

对满足 Lipschitz 条件

$$(\exists l<\infty)\ (\forall x,\ x'\in X)\ |f(x)-f(x')|\leqslant \leqslant l\|x-x'\|$$

的函数, 更通用的方法是覆盖 (covering) (在非均匀的网格上)方法, 而且它在多维情形是容易实现的.

在一种逼近方法中为了求接近整体极值的局部极值, 应用以经验为根据的"启发式"方法, 它们可以称为拟整体的 (quasi-global):

1. 重球型算法 (见**重球法** (heavy sphere, method of the), **极小化方法 (强依赖于多个变量的函数的)** (minimization methods for functions depending strongly on a few variables)), 或"急速"通过"拟合"吸引区域的局部极值的方法.

2. 用**蒙特卡罗方法** (Monte-Carlo method) 随机地取遍 $f(x)$ 的值.

3. 用引入随机参数的局部方法的修正. 例如, 当 $\xi(t)$ 是白噪声过程, 随机化梯度法的轨道

$$\dot{x}=\pm\nabla f(x)+\xi(t)$$

在一定条件下, 能从一局部极值点运动到一个总体极值点.

4. 借助用单峰函数序列的逼近"硬化"一个函数. 对某些点上 $f(x)$ 值的逼近能够实现, 只要借助于对函数解析表达式中的参数的展开, 借助于强函数或弱函数等等.

5. 寻找一个平均函数 $\overline{f(x)}$ (滑动平均 (sliding average)) 的局部极值, 其中

$$\overline{f(x)}=\int_X p(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{1}$$

$$p(x,\xi)\geqslant 0;\ \int_X p(x,\xi)d\xi=1.$$

例如:

$$\overline{f(x)}=\frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} f(x)d\xi,\ x\in\mathbf{R}^1,\ x\pm T\in X;$$

$$\overline{f(x)}=\frac{\int_X e^{-(x-\xi)^2}f(\xi)d\xi}{\int_X e^{-(x-\xi)^2}d\xi},\ x\pm\xi\in X.$$

这个平均的物理意义是初始函数的"光滑化"和"滤去"它的振动项.

如果 $\overline{f(x)}\cong\mathrm{const}(x)$ (一个急速振动函数 $f(x)$), 则在平均之前, 能借助于一个非线性变换去"探测", 例如,

$$\overline{\overline{f(x)}}=\int_X p(x,\xi)\,|f(\xi)|\,d\xi. \tag{2}$$

用来作平均的权函数 $p(x,\xi)$, 可以取

$$p_n(x,\xi)=\frac{|f(x-\xi)|^n}{\int_X |f(x)|^n dx},\ n\geqslant 0,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{M\ \ X}|f(x)|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\int_X |f(x)|^n dM_x}{\int_X dM_x}\right].$$

后者也能用来得到对本质极大值和极小值的估计.

公式 (1)和 (2) 能解释成其分布有概率密度 $p(x,\xi)$ 的随机变量 ξ 的函数的数学期望. 所以给定的多极值问题能作为**随机规划** (stochastic programming) 中的问题处理且后者的方法能应用于它.

找到逼近的或平均的函数的极值 (轮廓搜索 (outline search)) 以后, 对初始函数 $f(x)$ 的极值的详细搜索 (detailed search) 能在所找到的点的一个邻域中进行.

个别函数的总体最优化能用特别的明确的程序进

行. 例如，借助于构造这样一个动力系统，使其总体极值点是渐近稳定的静止点.

新的（拟）总体最优化方法的思想源泉之一是建立物理和生物系统过程的模型.

非局部搜索过程麻烦的计算可以按一些指标最优化，只要考虑到计算方法上的限制，关于函数 $f(x)$ 的先验的和逐步积累起来的信息，随机因子的概率特征等等. 已经尝试过的方法之一是以统计决策理论为基础的.

除了搜索总体极值外，其他的多极值问题也出现了；例如，决定一个函数的振荡，或列出并找出在给定区域内的所有局部极值.

对多项式，计算和分离其导数的根的很有效法则已经制订出.

对超越函数的极值点，**Rolle 定理**（Rolle theorem）类型的或微分方程解的**比较定理**（comparison theorem）类型的见解可能是有用的.

解析函数的稳定点的数目能用**辐角原理**（argument, principle of the）估计.

如果一个函数有极值的无穷序列，则在实践中其中几个可直接计算而其他的用渐近展开式得到（例：Γ 函数）.

对微分方程的拟经典逼近能看成方程的解关于极值数的渐近展开.

无穷维情况的多极值问题见**大范围变分法**（variational calculus in the large）. 离散的类似问题在**整数规划**（integral programming）和**离散规划**（discrete programming）中给出.

参考文献见**函数的极大化和极小化**（maximization and minimization of functions）.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко 撰

【补注】 关于以统计推断的 Bayes 原理为基础的总体最优化方法见[A1]. 其他的特别是以总体最优化为目标的新近著作是[A2]－[A5].

近来，模拟退火（simulated annealing）方法已经引起注意. 在本文的分类中，它属于第 3 项（引入随机参数的局部方法的修正）. 见[A6].

参考文献

[A1] Mockus, J., Bayesian approach to global optimization, Kluwer, 1989.

[A2] Pardatos, P. M. and Rosen, J. B., Constrained global optimization: algorithms and applications, Springer, 1987.

[A3] Rinnooy Kan, A. H. G. and Timmer, G. T., Stachastic methods for global optimization, *Amer. J. Manag. Sci.*, 4 (1984), 7－40.

[A4] Pinter, J. and Szabo, J., Global optimization algorithms: theory and some applications, Springer, 1986.

[A5] Zhiglyavsky, A. A. [A. A. Zhiglyavskiĭ], Theory of global random search, Kluwer, 1990 (译自俄文).

[A6] Laarhoven, P. J. M. van, Theoretical and computational aspect of simulated annealing, CWI Tracts, 51, Centre for Math. Comp. Sc., Amsterdam, 1988.

葛显良 译　鲁世杰 校

多元函子[**multi-functor; многоместный функтор**]，多位函子（multi-place functor）

一种有多个自变量的函数，定义于多个范畴上，取值于一个**范畴**（category）内，并对每一个自变量都给出一个 1 位函子. 更准确地说，设已给定 n 个范畴 $\mathfrak{K}_1, \cdots, \mathfrak{K}_n$. 作 Descartes 积范畴 $\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{K}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{K}}_n$，其中每一个 $\overline{\mathfrak{K}}_i$ 或为 $\mathfrak{K}_i$ 或为其逆范畴 $\mathfrak{K}_i^*$. 作用在 $\mathfrak{K}$ 上取值于范畴 $\mathfrak{C}$ 内的 1 位共变函子 F 称为 $\mathfrak{K}_1, \cdots, \mathfrak{K}_n$ 上取值于 $\mathfrak{C}$ 内的 n 位函子（n-place functor）. 函子 F 对于与 $\mathfrak{K}$ 中的因子 $\mathfrak{K}_i$ 相应的自变量是共变的，而对于其余的自变量是反变的.

给定映射 $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ 所必须满足的条件如下（在 $n=2$ 的情况，对第一个自变量反变而对第二个共变）. 函子 $F: \mathfrak{K}_1^* \times \mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{C}$ 使每一对的对象 (A, B)，$A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}_1$，$B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}_2$，对应一个对象 $F(A, B) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$，并使每一对态射 (α, β) 对应一个态射 $F(\alpha, \beta) \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$，这里

$$\alpha: A \to A_1 \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}_1, \ \beta: B \to B_1 \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}_2,$$

$$F(\alpha, \beta): F(A_1, B) \to F(A, B_1) \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C},$$

它们满足下列的条件:

1) $F(1_A, 1_B) = 1_{F(A,B)}$，A，B 是任何一对对象;

2) 若 $\alpha: A \to A_1$，$\alpha_1: A_1 \to A_2$，$\alpha, \alpha_1 \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}_1$，$\beta: B \to B_1$，$\beta_1: B_1 \to B_2$，$\beta$，$\beta_1 \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}_2$，则

$$F(\alpha_1\alpha, \beta_1\beta) = F(\alpha, \beta_1)F(\alpha_1, \beta).$$

多元函子的例子.

A) 设 $\mathfrak{K}$ 是一个有有限积的范畴. 于是 n 个对象之积就能被看成是一个 n 位函子，它定义于 $\mathfrak{K}^n = \mathfrak{K} \times \cdots \times \mathfrak{K}$（$n$ 次）上且取值于 $\mathfrak{K}$ 中，对所有的变量都是共变的. 对于余积可以构造类似的函子，等等.

B) 设 $\mathfrak{K}$ 是任意的一个范畴. 对 $\mathfrak{K}$ 的每一对对象 A，B，取态射的集合 $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ 与之对应，并对每一对态射 $\alpha: A \to A_1$，$\beta: B \to B_1$，定义映射 $H_{\mathfrak{K}}(\alpha, \beta)$: $H_{\mathfrak{K}}(A_1, B) \to H_{\mathfrak{K}}(A, B_1)$ 如下: 如果 $\varphi: A_1 \to B$，则 $H_{\mathfrak{K}}(\alpha, \beta)(\varphi) = \beta\varphi\alpha$. 这个构造给出了从 $\mathfrak{K}^* \times \mathfrak{K}$ 到集合的范畴的一个 2 位函子，它对第一个变量是反变的，对第二个是共变的.

如果 $\mathfrak{K}$ 是一个**加性范畴**（additive category），则此函子可被看成是取值于 Abel 群范畴中的函子.

C) 设 $\mathfrak{K}$ 是一个有有限积的范畴. 考虑积为一个

2 位的函子 $\times: \mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$, 那么, 在合并例 A) 与例 B) 后, 就可以构造 3 位函子 $H_{\mathfrak{K}}(A, B\times C)$ 与 $H_{\mathfrak{K}}(A\times B, C)$. 第一个函子自然等价于函子 $H_{\mathfrak{K}}(A, B)\times H_{\mathfrak{K}}(A, C)$. 如果 $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴 (sets, category of), 第二个函子就自然等价于函子 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}}(A, H_{\mathfrak{S}}(B, C))$.

D) 设 θ 为一个**小范畴** (small category), 并设 $F(\theta, \mathfrak{S})$ 为集合范畴 $\mathfrak{S}$ 上有概形 θ 的图的范畴, 即, 1 位共变函子与它们的自然变换的范畴. 对两个自变量都共变的一个 2 位函子 $E: \theta\times F(\theta, \mathfrak{S})\to\mathfrak{S}$ 构造如下: 如果 $A\in \mathrm{Ob}\,\theta$ 且 $F\in \mathrm{Ob}\,F(\theta, \mathfrak{S})$, 则 $E(A, F)=F(A)$; 如果 $\alpha: A\to B\in \mathrm{Mor}\,\theta$, 且 $\sigma: F\to G$ 是一个自然变换, 则 $E(\alpha, \sigma)=\sigma_B F(\alpha)=G(\alpha)\sigma_A$. 函子 E 叫做"评价函子". 这个函子自然等价于函子 $\mathrm{Nat}(H_A, F): \theta\times F(\theta, \mathfrak{S})\to\mathfrak{S}$, 后者将一个对象 $A\in\theta$ 与一个函子 $F:\theta\to\mathfrak{S}$ 对应于**可表示函子** (representable functor) H_A 到 F 的自然变换的集合 (米田引理 (Yoneda lemma)). M. Ш. Цаленко 撰

【补注】 2 位函子通常称为双函子 (bifunctor).

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965.
[A2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

周伯埙 译

多群近似法 [multi-group approximation; многогрупповое приближение]

统计物理学中用于对大量相互作用粒子系统 (气体、液体) 进行近似描述和研究的方法之一.

多群近似法基于下列假定: 粒子系统的每个 (或几乎每个) 位形可以分成许多有限的粒子群, 称为集团 (cluster), 各集团之间相距充分远而几乎无相互作用. 换句话说, 相互作用粒子系统被假定为气体集团的形式, 它们相互之间不允许太接近. 下一步骤在于忽略这些限制条件, 还在于把很大尺度的集团或者很复杂形式的集团排除在所讨论集团之外 (这个恰当地构成多群近似).

一个位形分解成集团的这个基本假设, 它构成这个方法的基础; 对粒子密度很低和粒子之间为短程力作用时, 这个假设是正确的. 在其他情况下, 这个假设是否成立是不知道的 (1989). 多群近似的方法, 显而易见, 仅对低密度才给出很好近似, 而在相变的情况下当一切大小的集团都开始起重要作用时, 这个方法变得太粗糙.

参考文献

[1] Band, W., *J. Chem. Phys.*, 7 (1939), 324-326.
[2] Frenkel, J., *J. Chem. Phys.*, 7 (1939), 200.
[3] Минлос, Р. А., Синай, Я. Г., 《Матем. сб.》, 73 (1967), 3, 375-448.
[4] Hill, T. L., Statistical mechanics, McGraw-Hill, 1956.

P. A. Минлос 撰

【译注】 统计物理学中通常称为集团展开法 (cluster expansion method). 这种方法是由 H. D. Ursell 以及 J. E. Mayer 和 M. G. Mayer 夫妇等人建立和发展起来的; 以后 B. Kahn 和 G. E. Uhlenbeck 将此方法推广, 使它也适用于遵循量子统计法的气体; 后来李政道和杨振宁进一步发展了该方法, 并提出两体碰撞法 (binary collision method), 使之更加完善了.

参考文献

[B1] Pathria, R. K., Statistical mechanics, Pergamon, 1977 (中译本: R. K. 帕斯里亚, 统计力学, 高等教育出版社, 下册, 1986).
[B2] Grandy, W. T., Jr., Foundations of statistical mechanics, D. Reidel Publ. Comp., 1987.
[B3] 李政道, 统计力学, 北京师范大学出版社, 1984.

徐锡申 译

多算子群 [multi-operator group; мультиоператорная группа], 带多重算子的群 (group with multiple operators), Ω 群 (Ω-group)

一种**泛代数** (universal algebra), 它关于加法运算 + (不一定是可交换的) 是**群** (group), 且在其中存在元数 ≥1 的运算的系统 Ω. 假定加法群 A 的零元 0 是一个子代数, 亦即对所有 $\omega\in\Omega$, $0\cdots0\omega=0$. 因此, 多算子群兼有群、**线性代数** (linear algebra) 与**环** (ring) 诸概念. Ω 群的理想 (ideal of an Ω-group) 是 A 的**正规子群** (normal subgroup) N, 使得

$$-(x_1\cdots x_n\omega)+(x_1\cdots x_{i-1}(a+x_i)x_{i+1}\cdots x_n\omega)\in N$$

对所有 $a\in N$, $x_i\in A$, $\omega\in\Omega$, $1\leqslant i\leqslant n$, 成立. 多算子群上的同余由关于理想的陪集类来描述.

设 A, B 与 C 都是 Ω 群 G 内 Ω 子群 (即泛代数 G 的子代数), 这里, C 由 A 与 B 生成. 这时子群 A 与 B 的互相换位子 (mutual commutator) $[A, B]$ 是 C 内由形如

$$-a-b+a+b,$$

$$-(a_1\cdots a_n\omega)-(b_1\cdots b_n\omega)+(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)\omega$$

的所有元素生成的理想, 这里, a, $a_i\in A$, b, $b_i\in B$, $\omega\in\Omega$. 令 $G'=[G, G]$. 这时多算子群 G 称为 Abel 的 (Abelian), 如果 $G'=0$. 归纳地定义理想 $G_{i+1}=[G_i, G]$, 这里, $G_1=G'$, 以及 $G^{(i+1)}=[G^{(i)}, G^{(i)}]$, 这里, $G^{(1)}=G'$. 多算子群 G 称为幂零的 (nilpotent), 如果 $G_i=0$; 可解的 (solvable), 如果对某 i, $G^{(i)}=0$. 群与环的相应类的许多性质可以转移到这些多算子群的类. 多算子群 A 称为有单位元的交换结合环 k 上的多算子 (线性) Ω 代数 (multi-operator (linear) Ω-algebra), 如果 A 中加法是可交换的, $\Omega_1=k$, 这里 Ω_1 是 Ω 中的一元运算的集合, 并且如果 Ω 中的所有运算在 k 上均

为半线性映射(semi linear mapping)(见[2]—[6]).

参考文献

[1] Higgins, P. J., Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 366–416.

[2] Курош, А. Г., 《Сиб. матем. ж.》, **1** (1960), 1, 62–70.

[3] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: А. Г. 库洛什, 一般代数学讲义, 上海科学技术出版社, 1964).

[4] Курош, А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года, М., 1974.

[5] Курош, А. Г., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 1, 3–15.

[6] Баранович, Т. М., Бургин, М. С., 《Успехи матем. наук》, **30** (1975), 4, 61–106.

[7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология, Геометрия, т. 14, М., 1976, 191–248.

[8] Артамонов, В. А., Кольца, [т. 1], Новосиб., 1973, 41–45.

В. А. Артамонов 撰 陈公宁 译

多极位势 [**multi-pole potential** 或 potential of a multi-pole; **мультиполя потенциал**]

$\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的区域 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上的一个**调和函数** (harmonic function), 它是 **Laplace 方程** (Laplace equation) 主基本解的某阶 $|m| \geqslant 1$ 偏导数, 即如下形式的函数

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} \frac{1}{r^{n-2}}, \quad \text{当 } n \geqslant 3 \text{ 时},$$

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \ln \frac{1}{r}, \quad \text{当 } n = 2 \text{ 时},$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad |m| = m_1 + \cdots + m_n.$$

为了简洁, 令 $n = 3$. 当 $|m| = 1$ 时, 双极 (偶极子) 位势 (dipole potentials) 具有形式

$$-\frac{x_1}{r^3} = -\frac{\cos\alpha}{r^2}, \quad -\frac{x_2}{r^3} = -\frac{\cos\beta}{r^2},$$

$$-\frac{x_3}{r^3} = -\frac{\cos\gamma}{r^2},$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是观察点 (x_1, x_2, x_3) 的矢径的方向余弦. 例如, 函数 $-x_1/r^3$ 被解释为具有矩 1 和轴 OX_1 的双极位势, 即放置在 $(a, 0, 0)$ 的质量 $-1/2a$ 和放置在 $(-a, 0, 0)$ 的质量 $1/2a$ 的 Newton 位势之和当 $a \to 0+$ 时的极限值; 另一方面, 这个函数可以表示沿 OX_1 轴放置在原点的小磁针的磁场位势. 类似地, 函数 $-x_2/r^3$ 和 $-x_3/r^3$ 分别是具有轴 OX_2 和 OX_3 的双极位势. 通过取这些函数的线性组合, 可得到具有任意矩 μ 和任意定向的双极位势. 当 $|m| = 2$ 时, 四极位势 (quadrupole potential) 由总质量等于 0 的一个固定的四点质量系, 通过求极限得到, 等等.

置一个具有密度 $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 的有界物体 G 使得 $0 \in G$, 且 Newton 位势 (Newton potential) U 能够展开为多极位势的级数:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \tag{1}$$

$$= \iiint_G \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi \, d\eta \, d\zeta}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + (x_3 - \zeta)^2}} =$$

$$= \frac{M}{r} + \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|m|}}{m_1! m_2! m_3!} a_{m_1 m_2 m_3} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3}} \frac{1}{r},$$

其中

$$M = \iiint_G \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

是物体 G 的总质量, 系数

$$a_{m_1 m_2 m_3} = \iiint_G \xi^{m_1} \eta^{m_2} \zeta^{m_3} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

当 $|m| = 1$ 时, 称为双极矩 (dipole moments), 当 $|m| = 2$ 时, 称为四极矩 (quadrupole moments), 一般地, 当 $|m| \geqslant 1$ 时称为多极矩 (multi-pole moments). 级数 (1) 不同于 $U(x_1, x_2, x_3)$ 的球函数展开式, 经项的重排后

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} q_{ml} \frac{Y_{ml}(\theta, \lambda)}{r^{m+1}}, \tag{2}$$

(2) 的项也能解释为按特别方法定向的多极位势 (见 [1]). 因此系数 q_{ml} 通常也分别称为双极矩, 四极矩, 更一般地, 多极矩.

形式 (1) 和 (2) 的展开式用来描述和近似表示标量与向量位势, 不仅适用于 Laplace 方程, 也适用于 **Helmholtz 方程** (Helmholtz equation) 的基本解 (见 [2]).

在理想不可压缩流体平面流的流体动力学中, 也应用如下形式的复多极位势

$$\frac{\mu e^{i\alpha}}{z^m}, \quad m \geqslant 1,$$

其中 z 是复变量, μ 和 α 分别是多极的矩和定向角. 当 $m = 1$, $\mu = 1$ 和 $\alpha = 0$ 时, 双极位势可以解释为, 一个在 $z = a > 0$ 其容量是 1 的源泉的复位势与一个在 $z = -a$ 其容量是 1 的收点的复位势之和, 当 $a \to 0+$ 时的极限. 这时, 展开式 (1) 表示一个流线型平面物体 G 流速的复位势在无穷远点邻域的展开式:

$$w = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m e^{i\alpha_m}}{z^m}.$$

这里, 用放置在原点的多极位势的合成作用代替流线型物体 G 的作用 (见 [3]).

参考文献

[1] Morse, F. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 2, McGraw-Hill, 1953.

[2] Jackson, J. D., Classical electrodynamics, Wiley, 1962.

[3] Milne-Thomson, L. M., Theoretical hydrodynamics, MacMillan, 1950.

Е. Д. Соломенцев 撰 高琪仁、吴炯圻 译

多叶区域 [multi-sheeted region; многолистная область]

考虑作为复平面 $\mathbf{C}$ 上的覆盖曲面的 **Riemann 曲面** (Riemann surface) R 的这样的区域 S: 在它的投影 $D\subset\mathbf{C}$ 的每个点的上面，至少有 S 的两个点；R 的一个 $k-1$ 阶**分支点** (branch point) 在这里看作 k 个不同的点．例如，解析函数 $w=z^2$ 是单位圆 $D=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$ 到这个函数的 Riemann 曲面 R 的二叶区域（二叶圆盘）$S=\{w\in R: |w|<1\}$ 上的一对一映射；这个映射除原点外是处处共形的．

对于多复变量的解析函数，也出现复空间 $\mathbf{C}^n$ 上的多叶 **Riemann 区域** (Riemannian domain)．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Siegel, C. L., Topics in complex functions, 1, Wiley (interscience), 1988, Chapt. 1, Sect. 4.

[A2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

陈怀惠 译

多值函数 [multi-valued function; многозначная функция]

一个函数，它使每个元素 $x\in X$ 对应于集合 Y 的一个子集 $f(x)$: $f(x)\subset Y$，这里至少存在 Y 的一个这样的子集，其中至少含有两个元素．亦见**多值映射** (multi-valued mapping)．

Л. Д. Кудрявцев 撰 张鸿林 译

多值映射 [multi-valued mapping 或 many-valued mapping; многозначное отображение]，点到集合的映射 (point-to-set mapping)

使集合 X 的每个元素 x 对应于集合 Y 的一个子集 $\Gamma(x)$ 的映射 $\Gamma: X\to Y$．如果对每个 $x\in X$，集合 $\Gamma(x)$ 都由一个元素构成，则映射 Γ 称为单值的 (single-valued)．多值映射 Γ 可以视为把 X 映入 2^Y 中的单值映射，即映入 Y 的所有子集的集合中的映射．

对于两个多值映射 Γ_i: $X\to Y$, $i=1, 2$，它们的包含 (inclusion) 自然地定义为：若对所有 $x\in X$ 有 $\Gamma_1(x)\subset\Gamma_2(x)$，则 $\Gamma_1\subset\Gamma_2$．对任意多值映射族 Γ_α: $X\to Y$, $\alpha\in A$，并 (union) 和交 (intersection) 定义为：$\Gamma=\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$，如果对所有 $x\in X$ 有 $\Gamma(x)=\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha(x)$；$\Gamma=\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$，如果对所有 $x\in X$ 有 $\Gamma(x)=\bigcap_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha(x)$．对任意多值映射族 Γ_α: $X\to Y_\alpha$, $\alpha\in A$，如果多值映射 $\Gamma=\prod_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha: X\to\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$ 满足 $\Gamma(x)=\prod_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha(x)$，则称 Γ 为多值映射族 Γ_α 的 Descartes 积 (Cartesian product)．多值映射 Γ 的截口 (section) 是一个单值映射 f: $X\to Y$，使得对所有 $x\in X$ 有 $f(x)\in\Gamma(x)$．多值映射 Γ 的图象 (graph) 是集合 $G(\Gamma)=\{(x, y)\in X\times Y: y\in\Gamma(x)\}$．

把拓扑空间 X 映入拓扑空间 Y 中的多值映射 Γ 称为上半连续的 (upper semi-continuous)，如果对每个开集 $U\subset Y$，集合 $\Gamma^+(U)=\{x\in X: \Gamma(x)\subset U, \Gamma(x)\neq\emptyset\}$ 在 X 中是开的，或者等价地说：对任意 $x\in X$ 和 $\Gamma(x)$ 的任意邻域 U，存在 x 的邻域 O_x，使得 $\Gamma(O_x)\subset U$，这里 $\Gamma(O_x)=\bigcup\{\Gamma(y): y\in O_x\}$．拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的多值映射 Γ 称为下半连续的 (lower semi-continuous)，如果对任一开集 $U\subset Y$，集合 $\Gamma^-(U)=\{x\in X: \Gamma(x)\cap U\neq\emptyset\}$ 在 X 中是开的．如果一个多值映射同时满足这两个性质，则称为连续多值映射 (continuous multi-valued mapping)．

设 Y 为拓扑向量空间．多值映射 Γ: $X\to Y$ 称为凸紧值的 (convex-compact valued)，如果对所有 $x\in X$, $\Gamma(x)$ 是凸紧集．对有限个多值映射 Γ_i: $X\to Y$, $i\in I$，代数和 $\Gamma=\sum_{i\in I}\Gamma_i$ 定义为 $\Gamma(x)=\sum_{i\in I}\Gamma_i(x)$．任意（有限的）一族上半连续（分别地，连续）多值映射的交是上半连续的（分别地，连续的）．有限多个上半连续多值映射的 Descartes 积是上半连续的．有限多个上半连续（凸紧值）映射的代数和是上半连续（凸紧值）的．任意一族凸紧值映射的交和 Descates 积是凸紧值的．

设 X 为**仿紧空间** (paracompact space)，Y 为局部凸度量线性空间（见**局部凸空间** (locally convex space)；**线性空间** (linear space)；**度量空间** (metric space)）．设 Γ: $X\to Y$ 是上半连续多值映射，且对所有 $x\in X$, $\Gamma(x)$ 在 Y 中是闭的，则多值映射 Γ 允许连续截口．设 $(X, \mathfrak{A})\to(Y, \mathfrak{B})$ 是具有给定 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的空间，多值映射 Γ: $(X, \mathfrak{A})\to(Y, \mathfrak{B})$ 称为可测的 (measurable)，如果图象 $G(\Gamma)$ 属于包含所有 $A\times B$ 形集合的 $X\times Y$ 的最小 σ 代数 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$，这里 $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$．如果 Γ 是 $(X, \mathfrak{A})$ 到完全可分度量空间 $(Y, \mathfrak{B})$ 的可测多值映射，这里 $\mathfrak{B}$ 是 Y 的 Borel σ 代数，则 Γ 具有可测截口 f．

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1-2, Acad. Press, 1966-1968 (译自法文).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 多值映射也称为集值映射 (set-valued mapping)．截口也称为选择 (selections)．

证明某一类多值映射允许选择的定理也称为选择定理 (selection theorems)．上述正文最后一句陈述的可测选择定理称为 von Neumann 可测选择定理 (von Neumann measurable choice theorem)．[A4] 中讨论了

若干选择定理及某些应用.

参考文献

[A1] Michael, E., Continuous selections, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 361 - 382.

[A2] Michael, E. A., A survey of continuous selections, in W. M. Fleischmann (ed.): Set-valued mappings. Proc. Conf. SUNY Buffalo, 1969, Lecture notes in math., Vol. 171, Springer, 1970, 54 - 58.

[A3] Przeslawski, K. and Yost, D., Continuity properties of selectors and Michael's Theorem, *Mich. Math. J.*, **36** (1989), 113 - 134.

[A4] Parthasarathy, T., Selection theorems and their applications, Springer, 1972.

白苏华、胡师度 译

多值表示 [multi-valued representation; многозначное представление]，连通拓扑群 G 的

一个连通拓扑群 G_1 的通常表示 π (见**拓扑群的表示** (representation of a topological group)) 使得 G (作为一个拓扑群) 同构于 G_1 关于一个不被包含在 π 的核内的离散正规子群 N 的商群. 如果 $\pi(N)$ 恰有 n 个元素，那么这个多值表示就称为 n 值的 (n-valued). 把 G 的元素与 G_1/N 的元素等同看待，对于集合 $\pi(g)$, $g\in G=G_1/N$, 得到关系 $\pi(e)\ni 1$. $\pi(g_1g_2)=\pi(g_1)\pi(g_2)$, g_1, $g_2\in G$. 连通的，局部道路连通的拓扑群 G 的多值表示只对于非单连通群存在. 多值表示最重要的例子就是复正交群 $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ $(n\geqslant 2)$ 的**旋量表示** (spinor representation); 这个表示是 $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ 的二值表示，并且由 $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$ 的泛覆盖群的一个忠实表示所确定.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

А. И. Штерн 撰 郝钢新 译

重图 [multigraph; мультиграф]

允许有多重边的图 (graph).

【补注】 重图作为化合物的分子结构的数学模型很有用，见[A1]. 允许有环的重图 (这在[A2] 中称为伪图 (pseudo-graph))，加拿大图论学派仍把它们称为图 (见[A3]) . 亦见图 (graph).

参考文献

[A1] Balaban, A. T. (ed.), Chemical application of graph theory, Acad. Press, 1976 (中译本: A. T. 巴拉班，图论在化学中的应用，科学出版社，1983).

[A2] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969 (中译本: F. 哈拉里，图论，上海科学技术出版社，1980).

[A3] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph theory with applications, Macmillan, 1976 (中译本: J. A. 邦迪，U. S. R. 默蒂，图论及其应用，科学出版社，1984).

陶懋颀 译 李 乔 校

多重调和函数 [multiharmonic function; кратногармоническая функция]

一个**调和函数** (harmonic function), 使得 **Laplace 算子** (Laplace operator) 作用于各个独立变元组等于零. 更确切地说: 在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n\geqslant 2)$ 的一个区域 D 里的 C^2 类函数 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 D 里的多重调和函数，如果存在自然数 $n_1,\cdots,n_k$, $n_1+\cdots+n_k=n$, $n\geqslant k\geqslant 2$，使得在 D 上如下恒等式成立:

$$\sum_{\nu=1}^{n_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,$$

$$\sum_{\nu=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,\cdots,\sum_{\nu=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0.$$

多重调和函数的一个重要的真子类是由这样一类函数 (亦称**多重调和函数** (pluriharmonic function)) 组成的，对于这类函数，$n=2m$, $n_j=2$, $j=1,\cdots,m$, 即 $k=m$，且满足某些附加条件.

参考文献

[1] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to harmonic analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press. 1971.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 多重调和函数在英文中也称 multiply harmonic functions. P. Lelong 已证明: 如果 u 是分离调和的 (separately harmonic)，也就是说，当其他变元固定时，u 作为 $x_{n_j+1},\cdots,x_{n_j+1}$ $(j=0,\cdots,k;\ n_0=0)$ 的函数是调和的，则 u 是多重调和的. J. Siciak 给出另一个不同的证明方法. 见 [A1].

参考文献

[A1] Hervé, M., Analytic and plurisubharmonic functions, Lecture notes in math., 198, Springer, 1971.

高琪仁、吴炯圻 译

多重线性代数 [multilinear algebra; полилинейная алгебра]

研究模(特别是向量空间)之间**多重线性映射** (multilinear mapping)的代数学分支. 多重线性代数的最先部分包括**双线性型** (bilinear form)与**二次型** (quadratic form)理论，**行列式** (determinant)理论，以及扩充它的 Grassmann 演算 (见**外代数** (exterior algebra)) . 多重线性代数中的基本角色是**张量积** (tensor product)，**向量空间上的张量** (tensor on a vector space)与**多重线性型** (multilinear form)等概念. 多重线性代数对几何学与分析学的应用主要与**张量演算** (tensor calculus)以及**微分形式** (differential form)有关.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Marcus, M., Finite dimensional multilinear algebra, Ⅰ－Ⅱ, M. Dekker, 1973.

[A2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebra structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

陈公宁 译

多重线性型 [**multilinear form; полилинейная форма**], n 重线性型(n-linear form), 单式 A 模 E 上的

一个**多重线性映射**(multilinear mapping) $E^n\to A$ (其中 A 是带有幺元的交换结合环, 见**结合环与结合代数**(associated rings and algebras)). 多重线性型亦称为多重线性函数(multilinear function) (n 重线性函数(n-linear function)). 因为多重线性型为多重线性映射的特殊情形, 所以也可以提及对称的, 斜对称的, 交错的、对称化的以及斜对称化的多重线性型. 例如, A 上 n 阶方阵的**行列式**(determinant) 是 A^n 上斜对称化(因而交错)的 n 重线性型. E 上 n 重线性型组成 A 模 $L_n(E,A)$, 它自然地同构于 $\otimes^n E$ 上所有线性型的模 $(\otimes^n E)^*$. 在 $n=2$(对应地, $n=3$) 的情况下, 特别提到**双线性型**(bilinear form) (对应地, 三线性型).

E 上 n 重线性型与 n 次共变张量, 即模 $T^n(E^*)=\otimes^n E^*$ 的元素密切相关. 更确切地说, 存在线性映射

$$\gamma_n: T^n(E^*)\to L_n(E,A),$$

使得对任意 $u_i\in E^*$, $x_i\in E$,

$$\gamma_n(u_1\otimes\cdots\otimes u_n)(x_1,\cdots,x_n)=u_1(x_1)\cdots u_n(x_n).$$

如果 E 是**自由模**(free module), 则 γ 是单射. 如果 E 还是有限生成的, 则 γ 是一一映射. 特殊地, 域上有限维向量空间上的 n 重线性型均与 n 次共变张量一致.

对任意型 $u\in L_n(E,A)$, $v\in L_m(E,A)$, 通过公式

$$u\otimes v(x_1,\cdots,x_{n+m})=u(x_1,\cdots,x_n)v(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})$$

定义张量积 $u\otimes v\in L_{n+m}(E,A)$. 对于对称化多重线性型(见**多重线性映射** (multilinear mapping)), 亦可定义对称积:

$$(\sigma_n u)\vee(\sigma_m v)=\sigma_{n+m}(u\otimes v),$$

而对于斜对称化多重线性型, 存在外积

$$(\alpha_n u)\wedge(\alpha_m v)=\alpha_{n+m}(u\otimes v).$$

这些运算被分别扩展到模 $L_*(E,A)=\oplus_{n=0}^{\infty}L_n(E,A)$, 其中 $L_0(E,A)=A$, $L_1(E,A)=E^*$, 对称化型的模 $L_\sigma(E,A)=\oplus_{n=0}^{\infty}\sigma_n L_n(E,A)$ 以及斜对称化型的模 $L_\alpha(E,A)=\oplus_{n=0}^{\infty}\alpha_n L_n(E,A)$, 且变换它们到有幺元的结合代数. 如果 E 是有限生成的自由模, 则映射 γ_n 确定**张量代数**(tensor algebra) $T(E^*)$ 到 $L_*(E,A)$ 上的一个同构, 且是**外代数**(exterior algebra) $\Lambda(E^*)$ 到代数 $L_\alpha(E,A)$ 的一个同构, 在那种情形下, $L_\alpha(E,A)$ 重合于交错型的代数. 如果 A 是特征为 0 的域, 则也存在对称代数 $S(E^*)$ 到对称型的代数 $L_\sigma(E,A)$ 上的一个同构.

任何多重线性型 $u\in L_n(E,A)$ 对应着由公式

$$\omega_n(u)(x)=u(x,\cdots,x), x\in E$$

给出的函数 $\omega_n(u): E\to A$. 形如 $\omega_n(u)$ 的函数称为 E 上 n 次型(form of degree n); 如果 E 是自由模, 则在关于任意基的坐标中它们由次数为 n 的齐次多项式给出. 在 $n=2$(对应地, $n=3$) 情况下, 得到 E 上**二次型**(quadratic form) (对应地, **三次型**(cubic form)). 型 $F=\omega(u)$ 完全确定型 $u\in L_n(E,A)$ 的对称化 $\sigma_n u$:

$$\sigma_n u(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sum_{i_1<\cdots<i_r}F(x_{i_1}+\cdots+x_{i_r}).$$

特别地, 对 $n=2$,

$$\sigma_2 u(x,y)=F(x+y)-F(x)-F(y).$$

映射 γ_n 与 ω_n 确定代数 $S(E^*)$ 到所有**多项式函数**(polynomial function) 的代数 $P(E)$ 上的一个同态, 如果 E 是无限整环 A 上的有限生成自由模, 那么它是一个同构.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6 (译自法文).

[3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

А. Л. Онищик 撰 陈公宁 译

多重线性映射 [**multilinear mapping; полилинейное отображение**], n 重线性映射(n-linear mapping), 多重线性算子(multilinear operator)

从带有幺元的交换结合环 A 上的**单式模**(unitary module) E_i 的直积 $\prod_{i=1}^{n}E_i$ 到某个 A 模 F 内的关于每个自变量均为线性的映射 f, 亦即它满足条件

$$f(x_1,\cdots,x_{i-1},ay+bz,x_{i+1},\cdots,x_n)=$$

$$=af(x_1,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_n)+bf(x_1,\cdots,x_{i-1},z,$$

$$x_{i+1},\cdots,x_n)\quad(a,b\in A; y,z\in E_i, i=1,\cdots,n).$$

在 $n=2$ (对应地, $n=3$) 的情况下, 称为**双线性映射**(bilinear mapping) (对应地, 三线性映射). 每个多重线性映射

$$f:\prod_{i=1}^{n}E_i\to F$$

定义从张量积 $\otimes_{i=1}^{n} E_i$ 到 F 内的唯一线性映射 $\bar{f}$，使得

$$\bar{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1, \cdots, x_n), \ x_i \in E_i,$$

这里对应 $f \mapsto \bar{f}$ 是多重线性映射 $\prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ 的集合到所有线性映射 $\otimes_{i=1}^{n} E_i \to F$ 的集合内的一一映射．多重线性映射 $\prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ 自然地组成一个 A 模．

对称群(symmetric group) S_n 作用在所有 n 重线性映射 $E^n \to F$ 组成的 A 模 $L_n(E,F)$ 上：

$$(sf)(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{s(1)}, \cdots, x_{s(n)}),$$

这里 $s \in S_n$，$f \in L_n(E,F)$，$x_i \in E$．多重线性映射 f 称为对称的(symmetric)，假如对所有 $s \in S_n$，$sf = f$；称为斜对称的(skew-symmetric)，假如 $sf = \varepsilon(s) f$，这里按置换 s 的正负号，$\varepsilon(s) = \pm 1$．一个多重线性映射称为变符号的(sign-varying)（或交错的(alternating)），如果当对某个 $i \neq j$，$x_i = x_j$ 时，$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$．任何的交错多重线性映射是斜对称的，而如果 F 中方程 $2y = 0$ 有唯一解 $y = 0$，则逆命题亦真．对称多重线性映射组成 $L_n(E,F)$ 内一个子模，它自然地同构于线性映射的模 $L(S^n E, F)$，这里，$S^n E$ 是 E 的第 n 重对称幂(见**对称代数**(symmetric algebra))．交错多重线性映射组成一个子模，它自然地同构于 $L(\Lambda^n E, F)$，这里 $\Lambda^n E$ 是模 E 的第 n 重外幂(见**外代数**(exterior algebra))．多重线性映射 $\alpha_n f = \sum_{s \in S_n} sf$ 称为由 f 确定的对称化多重线性映射(symmetrized multilinear mapping)，而多重线性映射 $\sigma_n f = \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s) sf$ 称为由 f 确定的斜对称化多重线性映射(skew-symmetrized multilinear mapping)．对称化(对应地，斜对称化)多重线性映射均为对称的(对应地，交错的)，并且，如果在 F 中对每个 $c \in F$，方程 $n! y = c$ 有唯一解，则逆命题亦真．使任意交错多重线性映射成为斜对称化的一个充分条件是 E 为**自由模**(free module)．参见**多重线性型**(multilinear form)．

А. Л. Онищик 撰　陈公宁 译

多众数分布 [**multimodal distribution**; **мультимодальное распределение**]，多峰分布(multipeaked distribution)

具有若干个众数(见**众数**(mode))的概率分布，或者说密度(见**概率分布的密度**(density of a probability distribution))具有对应于这些众数的若干相对极大值的概率分布．与单众数分布(见**单众数分布**(unimodal distribution))不同，多众数分布(在实际中)比较少见，并且通常是混合概率分布．

А. В. Прохоров 撰　周概容 译

多项式系数 [**multinomial coefficient**; **полиномиальный коэффициент**]

在多项式 $(x_1 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中，$x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$ 的系数

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}, \ n_1 + \cdots + n_m = n.$$

在组合学中，多项式系数表达下列含义：a) 设有 n 个元素，其中有 n_1 个是同一样式的，n_2 个是另一样式的，…，n_m 个是第 m 种样式的，这样的 n 个元素的可能的排列数；b) 把 n 个不同的元素放入 m 个不同的盒子里的放法的数目；这时，第 i 个盒内含有 n_i 个元素 $(i = 1, \cdots, m)$，且不计任一盒内元素放置的顺序．

二项式系数(binomial coefficients)是多项式系数的特殊情形．

参考文献

[1] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

[2] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1967.

С. А. Рукова 撰　陶懋颀 译

多项分布 [**multinomial distribution** 或 polynomial distribution; **полиномиальное распределение**]

随机变量 $X_1, \cdots, X_k$ 的联合分布，它对于任意一组满足条件 $n_1 + \cdots + n_k = n$，$n_j = 0, \cdots, n$，$j = 1, \cdots, k$ 的非负整数 $n_1, \cdots, n_k$，由下列公式定义

$$\mathrm{P}\{X_1 = n_1, \cdots, X_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \qquad (*)$$

其中 $n, p_1, \cdots, p_k$ $(p_j \geqslant 0, \sum p_j = 1)$ 为分布的参数．多项分布是一种多元离散分布——满足 $X_1 + \cdots + X_k = n$ 的随机向量 $(X_1, \cdots, X_k)$ 的分布(这个分布实质上是 $(k-1)$ 维的，因为它在 k 维 Euclid 空间中是退化的)．多项分布是**二项分布**(binomial distribution)的自然推广，后者即同于 $k = 2$ 的情形．这个分布名称的来由是因为概率 $(*)$ 是 $(p_1 + \cdots + p_k)^n$ 多项展开式的通项．多项分布出现在如下的概率概形中．每个随机变量 X_i 是互不相容事件 A_j $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 之一在重复独立试验中发生的次数．如果事件 A_j 在每次试验中的概率为 p_j $(j = 1, \cdots, k)$，那么概率 $(*)$ 就等于在 n 次试验中事件 $A_1, \cdots, A_k$ 分别出现 $n_1, \cdots, n_k$ 次的概率．每个随机变量 X_j 有数学期望为 np_j 且方差为 $np_j(1 - p_j)$ 的二项分布．

随机向量 $(X_1, \cdots, X_k)$ 有数学期望 $(np_1, \cdots, np_k)$ 与协方差阵 $B = \| b_{ij} \|$，其中

$$b_{ij} = \begin{cases} np_i(1 - p_i), & i = j, \\ & \qquad i, j = 1, \cdots, k \\ -np_i p_j, & i \neq j, \end{cases}$$

(因为 $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，故矩阵 B 的秩为 $k - 1$)．多项

分布的特征函数是

$$f(t_1, \cdots, t_k) = (p_1 e^{it_1} + \cdots + p_k e^{it_k})^n.$$

当 $n \to \infty$ 时，有正规化分量

$$Y_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$$

的向量 $(Y_1, \cdots, Y_k)$ 的分布，趋于某一多元**正态分布**(normal distribution)，而和

$$\sum_{i=1}^{k}(1-p_i)Y_i^2$$

的分布(它在数理统计中常用来构造 χ^2 **检验**(\`chi-squared' test))趋于 $k-1$ 自由度的 $\chi^2$ **分布**(\`chi-squared' distribution).

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Discrete distributions, Wiley, 1969.

潘一民 译

倍数[**multiple**; **кратное**]，自然数 a 的

可被 a 整除的自然数(见**除法**(division)). 同时可被每个数 $a, b, \cdots, m$ 整除的数 n，称为这些数的公倍数(common multiple). 在两个或多个数的一切公倍数中，有一个(不为零)是最小的，称为最小公倍数(lowest common multiple)，其他公倍数都是最小公倍数的倍数. 如果已知两个数 a 和 b 的**最大公因数**(greatest common divisor) d，则最小公倍数 m 可由公式 $m = ab/d$ 求得.

【补注】

参考文献

[A1] Vinogradov, I. M., Elements of number theory, Dover, reprint, 1954(译自俄文，中译本：И. М. 维诺格拉陀夫，数论基础，高等教育出版社，1956).

张鸿林 译

多重比较[**multiple comparison**; **множественное сравнение**]

关于标量积 $\theta^T \cdot \mathbf{c}$ 的假设检验问题，其中向量 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)^T$ 的坐标是未知参数，$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_k)^T$ 是给定向量. 在统计研究中，多重比较问题常出现在**方差分析**(dispersion analysis)中，其中一般选择满足 $c_1 + \cdots + c_k = 0$ 的向量 $\mathbf{c}$. 在此情形下，标量积 $\theta^T \cdot \mathbf{c}$ 本身称做**对比**(contrast). 在 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 是一维正态律的未知数学期望的假设下，J.W.Tukey 和 H. Scheffé 分别提出了估计对比的 T 法(T-method)和 S 法(S-method)——建立对比的置信区间的基本方法.

参考文献

[1] Scheffé, H., The analysis of variance, Wiley, 1959.
[2] Kendall, M. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, Design and analysis, and time series, 3, Griffin, 1983.

М.С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Miller, R., Simultaneous statistical inference, McGraw-Hill, 1966.

周概容 译

多重相关系数[**multiple-correlation coefficient**; **множественный коэффициент корреляции**]，亦称复相关系数

一个随机变量与某一组随机变量间线性相依性的度量. 确切地说，如果 $(X_1, \cdots, X_k)$ 是在 $\mathbf{R}^k$ 中取值的随机向量，则 X_1 与 $X_2, \cdots, X_k$ 的多重相关系数定义为 X_1 与其关于 $X_2, \cdots, X_k$ 的最优线性逼近的普通**相关系数**(correlation coefficient)，即 X_1 与其对 $X_2, \cdots, X_k$ 的**回归**(regression) $\mathrm{E}(X_1|X_2, \cdots, X_k)$ 的相关系数. 多重相关系数具有如下性质：如果当 $\mathrm{E}X_1 = \cdots = \mathrm{E}X_k = 0$ 时

$$X_1^* = \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k$$

是 X_1 对 $X_2, \cdots, X_k$ 的回归，则在变量 $X_2, \cdots, X_k$ 的一切线性组合中，X_1^* 与 X_1 有最大相关. 在此意义下，多重相关系数是**典型相关系数**(canonical correlation coefficient)的特殊情形. 当 $k=2$ 时，多重相关系数等于 X_1 和 X_2 的普通相关系数 ρ_{12}. X_1 与 $X_2, \cdots, X_k$ 的多重相关系数记作 $\rho_{1\cdot(2\cdots k)}$，且可以通过相关矩阵 $R = \|\rho_{ij}\|(i,j=1,\cdots,k)$ 表示为

$$\rho_{1\cdot(2\cdots k)}^2 = 1 - \frac{|R|}{R_{11}},$$

其中 $|R|$ 是 R 的行列式，R_{11} 是元素 $\rho_{11}=1$ 的代数余子式(cofactor). 这时 $0 \leqslant \rho_{1\cdot(2\cdots k)} \leqslant 1$. 假如 $\rho_{1\cdot(2\cdots k)} = 1$，则变量 X_1 以概率 1 等于 $X_2, \cdots, X_k$ 的某个线性组合，即变量 $X_1, \cdots, X_k$ 的**联合分布**(joint distribution)集中在空间 $\mathbf{R}^k$ 的某子平面上. 另一方面，$\rho_{1\cdot(2\cdots k)} = 0$，当且仅当 $\rho_{12} = \cdots = \rho_{1k} = 0$，即 X_1 和 $X_2, \cdots, X_k$ 中每一个都不相关. 为计算多重相关系数，亦可利用公式

$$\rho_{1\cdot(2\cdots k)}^2 = 1 - \frac{\sigma_{1\cdot(2\cdots k)}^2}{\sigma_1^2},$$

其中 σ_1^2 是 X_1 的方差，而

$$\sigma_{1\cdot(2\cdots k)}^2 = \mathrm{E}[X_1 - \mathrm{E}(X_1|X_2, \cdots, X_k)]^2$$

是 X_1 关于回归的方差.

多重相关系数 $\rho_{1\cdot(2\cdots k)}$ 的样本类似是

$$r_{1\cdot(2\cdots k)} = \sqrt{1 - \frac{s_{1\cdot(2\cdots k)}^2}{s_1^2}},$$

其中$s^2_{1\cdot(2\cdots k)}$和s^2_1是$\sigma^2_{1\cdot(2\cdots k)}$和$\sigma^2_1$的基于容量为$n$的样本的估计量．为检验关于不相关的假设，要利用$r_{1\cdot(2\cdots k)}$的抽样分布．假如样本来自多元正态总体，且$\rho_{1\cdot(2\cdots k)}=0$，则变量$r^2_{1\cdot(2\cdots k)}$服从参数为$((k-1)/2, (n-k)/2)$的$\beta$分布；如果$\rho_{1\cdot(2\cdots k)}\neq 0$，则变量$r^2_{1\cdot(2\cdots k)}$的分布已知，但是有些复杂．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[2] Kendall, M. and Stuart, A., The advaced theory of statistics, Inference and relationships, 2, Griffin, 1979.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 关于$\rho_{1\cdot(2\cdots k)}\neq 0$时$r^2_{1\cdot(2\cdots k)}$的分布，见[A2]．

参考文献

[A1] Anderson, T.W., An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958.

[A2] Eaton, M.C., Multivariate statistics: A vector space approach, Wiley, 1983.

[A3] Muirhead, R.J., Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, 1982.

周概容 译

多重积分 [multiple integral; кратный интеграл]

多变量函数的一种定积分．有几种不同的多重积分概念(Riemann 积分，Lebesgue 积分，Lebesgue-Stieltjes 积分，等等)．

重 Riemann 积分是以 **Jordan 测度**(Jordan measure)μ为基础的．设E为n维 Euclid 空间$\mathbf{R}^n$中的一 Jordan 可测集，μ_n为n维 Jordan 测度，并设$\tau=\{E_i\}_{i=1}^k$为E的一个分划，即一组 Jordan 可测集E_i，满足$\bigcup_{i=1}^k E_i=E$且$\mu_n(E_i\cap E_j)=0$ $(i\neq j,\ i, j=1,\cdots,n)$．令$d(E_i)$表示$E_i$的直径，量

$$\delta_\tau=\max_{i=1,\cdots,k} d(E_i)$$

称为分划τ的网格(mesh of the partition)．若$f(x)$ $(x=(x_1,\cdots,x_n))$为在E上定义的函数，则任何形如

$$\sigma_\tau=\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)},\cdots,\xi^{(k)})=\sum_{i=1}^k f(\xi^{(i)})\mu_n(E_i),$$

$$\xi^{(i)}\in E_i\in\tau$$

的和称为函数f的 Riemann 积分和(Riemann integral sum)．若$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau$存在且不依赖于特殊的分划序列，则此极限称为$f$在$E$上的$n$重 Riemann 积分($n$-tuple Riemann integral)并记成

$$\int_E f(x)dx \quad 或 \quad \int\mathop{\cdots}_E\int f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

函数f本身称为 Riemann 可积的(Riemann integrable)或简称R可积的(R-integrable)．

当$n=1$时，在其上取积分的集E通常是一个区间且τ是仅由互斥区间构成的分划(见 **Riemann 积分**(Riemann integral))．因此，作为在其上进行积分的集与分划的元素两者均为很特殊形式的 Jordan 可测集——区间．因此，不是在区间上R可积函数的所有性质能转移到在任意 Jordan 可测集上R可积函数．例如，由于定义在 Jordan 测度为零的集上任何函数是R可积的，便知R可积函数不必有界．这对区间上的R可积函数是不可能的．如果人们期望在一集合上函数的R可积性蕴含这函数的有界性，则对此集必须附加某些条件；例如，人们可以要求此集有任意精细的分划，它的所有元素均有正的 Jordan 测度．据此条件定义的类包括所有 Jordan 可测开集以及它们的闭包，特别包括所有 Jordan 可测开域以及它们的闭包．这些集合恰好是多重 Riemann 积分最常用的积分域．当$n=2$ $(n=3)$时，重积分称为二重(三重)积分(double (triple) integral)(亦见**二重积分**(double integral))．

由于重 Riemann 积分只对积分域为 Jordan 可测集才能计算(若$n=2$，这种集也称为可正方的；若$n=3$则称为可立方的)，二重(三重)Riemann 积分只对边界为 Jordan 面积(体积)零的集合(通常是区域或其闭包)考虑．

n个变量$(n\geqslant 1)$有界函数的 Riemann 积分有**积分**(integral)的一些通常性质(线性，关于积分集的可加性，积分号下非严格不等式的保持，可积函数的乘积的可积性，等等)．

重 Riemann 积分可以化为**累次积分**(repeated integral)．设$x=(x', x'')\in\mathbf{R}^n$,

$$x'=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbf{R}^m,$$

$$x''=(x_{m+1},\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n-m},\ E\subset\mathbf{R}^n,$$

其中E是$\mathbf{R}^n$中 Jordan 可测集，$E(x_0')=E\cap\{x'=x_0'\}$为E与$(n-m)$维超平面$x'=x_0'$的交，$E_{x''}$为E到超平面$\mathbf{R}^m=\{x: x''=0\}$上的投影．$E(x')$与$E_{x''}$分别依$(n-m)$维与$m$维 Jordan 测度意义可测．若$f$为$E$上$R$可积函数且对一切$x'\in E_{x''}$，$f$在集$E(x')$上的限制的$(n-m)$重积分存在，则累次积分

$$\int_{E_{x''}}dx'\int_{E(x')}f(x', x'')dx''$$

存在，这里外层积分为m重 Riemann 积分，且有

$$\int_E f(x)dx=\iint_E f(x', x'')dx'dx''=$$

$$=\int_{E_{x''}}dx'\int_{E(x')}f(x', x'')dx''.$$

对$n=3$此结果蕴含下列公式．1) 若$E\subset\mathbf{R}^3_{xyz}$，

E_{xy} 为 E 到 xy 平面上的投影，且若 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)(x, y \in E_{xy})$ 为在 z 方向以 E 为界的函数，即

$$E = \{(x, y, z): (x, y) \in E_{xy},$$
$$\varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\},$$

则

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_{E_{xy}} dx\,dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

2) 设 E 在 x 轴上的投影为区间 $[a, b]$，$E(x)$ 为 E 与过点 x 且平行于 yz 平面的平面的交，则

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_a^b dx \iint_{E(x)} f(x, y, z)\,dy\,dz.$$

当 G 为空间 $\mathbf{R}_x^n$ 中 Jordan 可测区域并且 φ 又是 G 的闭包 $\overline{G}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续可微映射时，则有下列在 $\Gamma = \varphi(G)$ 上是可积的函数 f 的积分换元公式：

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,dx = \int_G f(\varphi(t))\,|J(t)|\,dt, \qquad (1)$$

其中 $J(t)$ 是映射 φ 的 **Jacobi 行列式**（Jacobian）.

n 个变量的函数的重 Riemann 积分的几何意义与 $(n+1)$ 维 Jordan 测度 μ_{n+1} 概念有关：若 f 在集 $E \subset \mathbf{R}_x^n$ 上可积，在 E 上 $f(x) \geqslant 0$ 且若

$$A = \{(x, y): x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset \mathbf{R}_{xy}^{n+1},$$

则

$$\int_E f(x)\,dx = \mu_{n+1}(A). \qquad (2)$$

多重 Lebesgue 积分（multiple Lebesgue integral）为多变量函数的 **Lebesgue 积分**（Lebesgue integral）；其定义基于 n 维 Euclid 空间的 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）概念．多重 Lebesgue 积分可以化为累次积分（见 **Fubini 定理**（Fubini theorem））．对于积分域的连续可微一一映射，关于换元法的公式（1）成立，以及表达多重 Lebesgue 积分的几何意义的公式（2）成立，只是应将 μ_{n+1} 理解为 $(n+1)$ 维 Lebesgue 测度．

重积分概念可以转移到两集 X，Y 的乘积 $X \times Y$ 的子集 A 上去，这里在 X 与 Y 上分别给定一个 σ 有限完全非负测度 μ_x 与 μ_y；此时 A 上积分所涉及的测度 μ 是 μ_x 与 μ_y 的乘积．

关于多变量函数还可以有反常重积分概念（见**反常积分**（improper integral））．重积分概念也能应用到多变量函数的不定积分：不定重积分为一个集函数

$$F(E) = \int_E f(x)\,dx,$$

其中 E 为可测集．例如，若 f 是某个集上的 Lebesgue 可积的，则在此集上它几乎处处是它的不定积分 $F(E)$ 的**对称导数**（symmetric derivative）．依此意义（类似于单变量函数情形）不定积分的计算便是集函数的微分的逆运算．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 2, Mir, 1982）.

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：柯莫格罗夫与佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1957）.

[3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975（英译本：Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 2, Mir, 1977）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1957.

[A2] Bartle, R. G., The elements of real analysis, Wiley, 1976.

[A3] Smith, K. T., Primer of modern analysis, Bogden & Quiley, 1971.

[A4] Stromberg, K. R., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

郑维行 译　沈祖和 校

重点［**multiple point**; **кратная точка**］，平面代数曲线 $F(x,y)=0$ 的

一个奇点，在这个点处，直至 n 阶偏导数都等于零，且至少一个 $n+1$ 阶偏导数不等于零．例如，如果 $F(x_0, y_0) = 0$，$F_x'(x_0, y_0) = 0$，$F_y'(x_0, y_0) = 0$ 而 $F_{xx}''(x_0, y_0)$，$F_{xy}''(x_0, y_0)$，$F_{yy}''(x_0, y_0)$ 中有一个不等于零，则重点 $M(x_0, y_0)$ 称为**二重点**（double point）；如果一阶和二阶偏导数在 $M(x_0, y_0)$ 都等于零，但至少一个三阶偏导数不等于零，则重点称为三重点（triple point），等等．

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coolidge, J. L., Algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959.

[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952, 173.

[A3] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A4] Fulton, W., Algebraic curves, Benjamin, 1969.

陈志杰 译 杨劲根 校

多重递归 [multiple recursion; многократная рекурсия]

一种**递归** (recursion) 的形式，在其中用几个变元联合进行递归运算. 这些变元值的集合被排成字典序. 这个定义包含一些具体的递归形式. 若在一定义式里未知函数不被代入到本身之内，那么它仍是**原始递归** (primitive recursion). 一般说来，多重递归可以定义出原始递归函数集外的函数，因为用二重递归 (用二变元进行的) 可能构造原始递归函数的通用函数 (相似地，对 k 元递归函数，有 $k+1$ 元多重通用函数)；见**通用函数** (universal function). 一切可能的多重递归形式可以归约为如下的范式 (normal form)：

$$\varphi(n_1, \cdots, n_k) = 0, \text{ 若 } n_1, \cdots, n_k = 0,$$

$$\varphi(n_1+1, \cdots, n_k+1) = \beta(n_1, \cdots, n_k, \varphi_1, \cdots, \varphi_k),$$

其中

$$\varphi_i = \varphi(n_1+1, \cdots, n_{i-1}+1, n_i, \gamma_1^{(i)}(n_1, \cdots, n_k, \varphi(n_1+1, \cdots, n_{k-1}+1, n_k)), \cdots, \gamma_{k-1}^{(i)}(n_1, \cdots, n_k, \varphi(n_1+1, \cdots, n_{k-1}+1, n_k))),$$

参考文献

[1] Peter, R., Recursive functions, Acad. Press, 1967 (译自德文).

Н. В. Белякин 撰

【补注】 通常不称为多重递归，而称为联立递归 (simultaneous recursion)，例如见 [A1].

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，上、下册，科学出版社，1984 – 1985).

[A2] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

杨东屏 译

多重序列 [multiple sequence; кратная последовательность]，集合 X 的元素所组成的 k 元序列 (k-tuple sequence)

由自然数集合 $\mathbf{N}$ 的 k 次积 $\mathbf{N}^k$ 到集合 X 中的一个映射. 一个多元序列 $f: \mathbf{N}^k \to X$ 的一个元素 (element) (或一个项 (term)，是由 $k+1$ 个元素所组成的一个有序集 $(n_1, \cdots, n_k, x)$，这里 $x = f(n_1, \cdots, n_k)$，$x \in X$，$(n_1, \cdots, n_k) \in \mathbf{N}^k$，即 $n_j \in \mathbf{N}$ ($j = 1, \cdots, k$). 该元素亦记为 $x_{n_1 \cdots n_k}$.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王 驹 译

多重级数 [multiple series; кратный ряд]，s 重级数 (s-tuple series)

形如

$$\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_s = 1}^{\infty} u_{n_1, n_2, \cdots, n_s}$$

的表示式，其项取自表列 $\| u_{n_1, n_2, \cdots, n_s} \|$；此表中每个项由 $s (s \geqslant 2)$ 个下标 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 所标定，这些下标各自独立地取遍自然数集. 多重级数理论类似于**二重级数** (double series) 理论. 亦见**绝对收敛级数** (absolutely convergent series).

参考文献

[1] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 2, М., 1959 (中译本：Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第二卷第二分册，高等教育出版社，1954).

Е. Г. Соболевская 撰 沈永欢 译

乘法 [multiplication; умножение]，数的

基本算术运算之一；它使两个数 a, b (称为因数 (factor)) 对应于另一个数 c (称为前两数的积 (product)). 乘法用记号 × 或 · 表示；在使用字母表示数时，一般总略去乘法符号.

正整数的乘法可通过加法定义如下：数 a 乘以数 b 之积是数 c，它等于 b 个加项之和，而这些加项又都等于 a；这样，

$$ab = a + \cdots + a (b \text{ 项}).$$

数 a 称为被乘数 (multiplicand)，数 b 称为乘数 (multiplier)，两个正有理数 m/n 与 p/q 的乘法由方程

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

定义 (见**分数** (fraction)). 两个负分数之积是正的，而一个正分数与一个负分数之积是负的，这两种情形下积的模等于两个因数的模之积. 无理数之积定义为有理近似值之积的极限. 两个复数 $\alpha = a + bi$ 与 $\beta = c + di$ 之积由公式

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

定义；对于三角形式 $\alpha = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$，$\beta = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$，即为

$$\alpha\beta = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

数的乘法是交换的，结合的，关于加法左、右分配的 (见**交换性** (commutativity)；**结合性** (associativity)；**分配性** (distributivity)). 此外，$a \cdot 0 = 0$，$a \cdot 1 = a$.

在一般代数中，乘法可以是任一**代数运算** (algebraic operation) (n 元，$n > 2$)；最常见的是二元运算 (见**广群** (groupoid)). 在某些情形，这种运算是数的通常乘法的推广，例如四元数的乘法，矩阵的乘法，变换的乘法等. 然而在这些情形可能丧失数的乘法的一些性质 (例如交换性).

О. А. Иванова 撰 沈永欢 译

乘性算术函数 [multiplicative arithmetic function; мультипликативная арифметическая функция]

对任一对互素的整数 m,n，满足条件

$$f(m\ n)=f(m)\cdot f(n) \qquad (*)$$

的单变量**算术函数**（arithmetic function）$f(m)$. 通常假定 $f(m)$ 不恒等于零（这等价于条件 $f(1)=1$）. 如果对所有的素数 p 和自然数 α 有 $f(p^{\alpha})=f(p)$, 那么乘性算术函数称为强乘性的（strongly multiplicative）. 如果（$*$）对于任意两数 m,n 而不只是对互素的数成立，则 f 叫做完全乘性的（totally multiplicative）; 这时 $f(p^{\alpha})=[f(p)]^{\alpha}$.

乘性算术函数举例. 函数 $\tau(m)$——自然数 m 的除数的个数; 函数 $\sigma(m)$——自然数 m 的除数的和; **Euler 函数**（Euler function）$\varphi(m)$; **Möbius 函数**（Möbius function）$\mu(m)$. 函数 $\varphi(m)/m$ 是强乘性算术函数而幂函数 $f(m)=m^{s}$ 是完全乘性算术函数.

И.П.Кубилюс 撰

【补注】卷积

$$(f\star g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

产生一个乘性函数上的**群**（group）结构. 单位元是函数 e, 这里 $e(1)=1$, 而对所有的 $n>1, e(n)=0$. 另一标准乘性函数是常数函数 E（对所有 $n\in N, E(n)=1$）和它的逆 μ, 即 **Möbius 函数**（Möbius function）. 注意到 $\varphi=\mu\star N_1$, 此处对所有 n 有 $N_1(n)=n$, 而 $\tau=E\star E, \sigma=E\star N_1$.

形式上，乘性函数 f 的 **Dirichlet 级数**（Dirichlet series）有 **Euler 积**（Euler product）:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^{s}}=\prod_{p}\left(1+\frac{f(p)}{p^{s}}+\cdots+\frac{f(p^{k})}{p^{ks}}+\cdots\right),$$

当 f 是强乘性或完全乘性时，它的形式将大大简化.

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1960, Chapts. XVI – XVII.

戚鸣皋 译 朱尧辰 校

乘性遍历定理 [multiplicative ergodic theorem; мультипликативная эргодическая теорема], Oseledets 乘性遍历定理（Oseledets multiplicative ergodic theorem）, Oseledec 乘性遍历定理（Oseledec multiplicative ergodic theorem）

【补注】 考虑线性齐次微分方程组

$$\dot{x}=A(t)x,\ x(0;\ x_0)=x_0\in\mathbf{R}^{n},\ t\geqslant 0. \qquad (A1)$$

（A1）的解 $x(t;x_0)$ 的 Ляпунов 指数（Lyapunov exponent）定义为

$$\lambda(x_0)=\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\log\|x(t;\ x_0)\|.$$

讨论 Ляпунов 指数及相关内容的一个更一般思想（微分方程组簇的 Ляпунов 指数）如下：设 $\Phi=(\Phi_t)_{t\in R}$ 是测度空间（E,μ）上的**可测流**（measurable flow）. 对任一点 $e\in E$, 设 V_e 是一个 n 维向量空间.（例如，考虑向量丛 $T\to E$.）与流 Φ 相关的上闭链（cocycle）$C(t,e)$ 是 $\mathbf{R}\times E$ 上的可测函数，它给（t, e）指定一个可逆线性映射 $V_e\to V_{\Phi_t(e)}$, 使得

$$C(t+s,\ e)=C(t,\ \Phi_s(e))C(s,\ e). \qquad (A2)$$

亦即，如果向量空间 V_e 构成的集合被看成 E 上 n 维向量丛，则 $C(t,\cdot)$ 定义了 Φ_t 上的向量丛 $\widetilde{\Phi}_t$ 的一个同构，

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_t} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow[\Phi_t]{} & E \end{array}$$

而且条件（A2）可简为 $\widetilde{\Phi}_{t+s}=\widetilde{\Phi}_t\circ\widetilde{\Phi}_s$. 因此，$\widetilde{\Phi}$ 是 V 上提升 Φ 的流. $\widetilde{\Phi}$ 有时称为由 Φ 和 C 定义的斜积流（skew product flow）. 上面的思路足够一般用来讨论非线性流的 Ляпунов 指数，甚至随机非线性流和随机矩阵的积之类的对象. 如果 $E=\{e\}, \Phi_t=id$, 就是经典情形（A1）. 设 $\dot{x}=f(x)$ 是流形 M 上的微分方程. 取 $V=TM$, M 上的切丛，则相关的上圈定义为 Φ_t 的微分 $d\Phi_t$,

$$C(t,\ m)=d\Phi_t(m):\ T_mM\to T_{\Phi_t(m)}M.$$

对 V 上的斜积流 $\widetilde{\Phi}$, 点 $e\in E$ 在方向 $v\in V_e$ 的 **Ляпунов** 指数定义为

$$\lambda(e,\ v)=\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\log\|C(t,\ e)v\|.$$

现在叙述 V. I. Oseledets（[A1]）的乘性遍历定理如下：设 $\widetilde{\Phi}$ 是斜积流，并设（E,μ）上有一个 Φ 不变概率测度 ρ, 即对所有 $t\in\mathbf{R}$, 有 $\Phi_t\rho=\rho$. 进一步假设

$$\int_E\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}\log^{+}\|C^{\pm}(t,\ e)\|d\rho<\infty.$$

那么存在一个 ρ 测度为 1 的可测 Φ 不变集合 $E_0\subset E$, 使得对任意 $x\in E_0$, 有 $l(e)$ 个数 $\lambda_e^{l}<\cdots<\lambda_1^{l}$, $l(e)\leqslant d$, 相应的子空间 $0\subset W_e^{l}\subset\cdots\subset W_e^{1}=V_e$, 它们的维数为 $d_e^{l}<\cdots<d_e^{1}=d$, 并且对所有 $i=1,\cdots,l(e)$, 有

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\log\|C(t,\ e)v\|=\lambda_e^{i}\Leftrightarrow v\in W_e^{i}\setminus W_e^{i+1}.$$

进一步设 ρ 对 Φ_t 是遍历的，即所有 Φ_t 不变子

集的 ρ 测度为 0 或 1，则 $l(e)$，λ_e^i，d_e^i 是与 e（或 E_0）无关的常数．然而空间 W_e^i 仍然依赖于 $e \in E_0$（若丛 V 是平凡丛，使得所有 V_e 恒同）．集合 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ 称为流的 Ляпунов 谱（Lyapunov spectrum）．更多的细节和应用可见 [A2]，[A3]．

参考文献

[A1] Oseledec，V．I．[V．I．Oseledets]，A multiplicative ergodic theorem．Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems，*Trans．Moscow Math．Soc．*，**19** (1968)，197－231．
(*Trudy Moskov．Mat．Obshch．* **19** (1968)，179－210)

[A2] Kliemann，W．，Analysis of nonlinear stochastic systems，in W．Schuhlen and W．Wedig (eds．)：Analysis and estimation of stochastic mechanical systems，Springer，1988，43－102．

[A3] Arnold，L．and Wihstutz，V．(eds．)，Lyapunov exponents，Springer，1986． 刘建明 译 苏维宜 校

乘法群 [**multiplicative group**；**мультипликативная группа**]，除环上的

给定**除环**(skew-field)中除零元外的所有元素在该除环的乘法运算下形成的群．域的乘法群是 Abel 群．

О．А．Иванова 撰

【补注】 带有限非零特征的除环的有限乘法子群是循环群，特征零的情况则不然．只有有限多偶数阶群，却有无限多奇数阶群，后者的极小阶是 63．分类已在 [A1] 中给出．在证明一类 Tits 二择一性(Tits alternative)时，有类似的问题：除环的乘法群的任一有限正规子群含一自由非循环群或为一有限可解群且有一到除环上的线性群的扩张．某些情况是已知的，例如 [A2]．

参考文献

[A1] Amitsur，S．A．，Finite subgroups of division rings，*Trans．Amer．Math．Soc．*，**80** (1955)，361－396．

[A2] Lichtman，A．I．，Free subgroups in linear groups over some skew fields，*J．of Algebra*，**105** (1987)，1－28．

[A3] Scott，W．R．，Group theory，Prentice Hall，1964，Chapt．14，426． 郭元春 译 牛凤文 校

乘法格 [**multiplicative lattice**；**мультипликативная решетка**]

具有附加的称为乘法（表示成·）的交换与结合的二元运算的一种**完全格**（complete lattice）$L = \langle L, \vee, \wedge \rangle$，且这格的最大元素是作为乘法的单位元素，又对任何 $a, b_\alpha \in L$ 和任意指标集 J，有

$$a \cdot [\bigvee_{\alpha \in J} b_\alpha] = \bigvee_{\alpha \in J} a \cdot b_\alpha .$$

乘法格理论是作为在研究交换环的理想格中应用格论方法的结果而出现的（见 [2]），因而大多数概念和结果在交换环中有类似情形（或应用）（见 [1]）．

设 L 是一个乘法格且设 $a, b \in L$；那么定义 $a:b = \vee\{x : x \in L, x \cdot b \leqslant a\}$．一个元素 $e \in L$ 称为 $\vee$ 主的（相应地、$\wedge$ 主的），如果 $(a \vee (b \cdot e)) : e = (a:e) \vee b$（相应地，$(a \wedge (b:e)) \cdot e = (a \cdot e) \wedge b$）对任何 $a, b \in L$；同时是 $\vee$ 主和 $\wedge$ 主的元素称为主的（principal）．一个 Noether 格（Noether lattice）是满足升链条件且其中每一元素是主元素之并的模乘法格（亦见**模格**（modular lattice））．一个完全格 M 称为乘法格 L 上的模（module over a multiplicative lattice），如果对任何 $\lambda \in L$，$a \in M$，定义了一个积 $\lambda a \in M$，且

$$(\lambda_1 \lambda_2) a = \lambda_1 (\lambda_2 a), 1a = a, 0_L a = 0_M,$$

$$[\bigvee_{\alpha \in I} \lambda_\alpha][\bigvee_{\beta \in J} a_\beta] = \bigvee_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha a_\beta$$

（这里 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\alpha \in L, a, a_\beta \in M$，1 是 L 中最大元且 0_L，0_M 分别是 L 和 M 中的零）．

研究得最好的乘法格类是 Noether 格．这里可以举出以下的方向．1）把 Noether 格表示为一个适当的 **Noether 环**（Noetherian ring）的理想格的问题（已知 Noether 环的理想格是 Noether 格；然而存在 Noether 格甚至不能嵌入到 Noether 环的理想格中，[3]）．2）乘法格上 Noether 模的研究．3）从 Noether 环的理想的理论转移到 Noether 格上的概念和性质的研究（素和准素元素，维数，真极大元，以及半局部和局部格等概念）．分配正则 Noether 乘格已经有了描述（[4]）（亦见**分配格**（distributive lattice）；**正则格**（regular lattice））．对比 Noether 格广泛得多的一类乘法格，包括任意交换环的理想格，局部化和相伴素元素的理论已经建立．

参考文献

[1] Bourbaki，N．，Elements of mathematics．Commutative algebra，Addison-Wesley，1972（译自法文）．

[2] Dilworth，R．P．，Abstract commutative ideal theory，*Pacific J．Math．*，**12** (1962)，481－498．

[3] Bogart，K．，Nonimbeddable Noether lattices，*Proc．Amer．Math．Soc．*，**22** (1969)，1，129－133．

[4A] Bogart，K．，Structure theorems for regular local Noether lattices，*Michigan J．Math．*，**15** (1968)，2，167－176．

[4B] Bogart，K．，Distributive Noether lattices，*Michigan J．Math．*，**16** (1969)，3，215－223．

[5] Фофанова，Т．С．，в сб．：Упорядоченные множества и решетки，в．3．，Саратов，1975，22－40．

Т．С．Фофанова 撰

【补注】对一个固定的 $a \in L$，两个函数 $x \mapsto a:x, a \cdot x$：$L \to F$ 构成一个共变 Galois 联络，如果 $a \cdot b = a \wedge b$，则 L 是一个带有 $a:b = a \Rightarrow b$ 的完全 Heyting 代数（Heyting algebra）．乘法格的研究由 M．Ward 和 R．P．Dilworth 的著名的文章 [A1] 开始，他们称之为剩余格（residuated lattices）；这个名词集中注意在剩余（residuation）运算 $a:b$ 上，由

$$c \leqslant a:b,\ \text{当且仅当}\ c \cdot b \leqslant a$$

刻画其特征．由乘法给出的这个运算的存在性等价于本条目正文中给出的分配律．很多作者(例如[A2])已探索免除乘法可交换(在此情况下，必须假设有左和右两个分配律，且存在两种不同的剩余运算)和(或)格的顶元素是乘法单位元的要求；有些作者已经省略乘法的结合性(见[A3]),但是在非结合情形，已做的工作比较少．最近，已表明最大的兴趣在由 C. J. Mulvey([A4])引入的量子(quantales)上，这里乘法是非交换的但是一般假定是幂等的(即满足恒等式 $a \cdot a = a$)且有顶元素作为单边单位元．在交换情形，幂等性的假定使得乘法与格论的交一致(且使得基础格是一个标架，见**场所**(locale));这样幂等量子可以看成拓扑空间的一种"非交换的"推广，见[A5],[A6]．这些概念在非交换 C^* **代数**(C^*-algebra)的表示理论中找到应用(一个 C^* 代数的闭右理想的格是量子的一个例子)．

参考文献

[A1] Ward, M. and Dilworth, R. P., Residuated lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 335–354.

[A2] Dilworth, R. P., Non-commutative residuated lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **46** (1939), 426–444.

[A3] Birkhoff, G., Lattice theory, *Amer. Math. Soc.*, 1967.

[A4] Mulvey, C. J., "&", *Suppl. ai Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **12** (1986), 99–104.

[A5] Niefield, S. B. and Rosenthal, K. I., Constructing locales from quantales, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **104** (1988), 215–234.

[A6] Borceux, F. and van den Bossche, G., An essay in non-commutative topology, *Topology Appl.*, **31** (1989), 203–223.

[A7] Blyth, T. S. and Janowitz, M. F., Residuation theory, Pergamon, 1972.

[A8] Keimel, K., A unified theory of minimal prime ideals, *Acta. Math. Acad. Scient. Hung.*, **23** (1972), 51–69.

葛显良 译　李慧陵 校

乘法半群[multiplicative semi-group; мультипликативная полугруппа]

结合环(associative ring)的乘法半群，即该环的所有元素关于乘法形成的**半群**(semi-group)．非结合环关于乘法仅形成**广群**(groupoid)，称为环的乘法广群(multiplicative groupoid)．

О. А. Иванова 撰　郭元春 译　牛凤文 校

乘性函数系[multiplicative system; мультипликативная система]

区间$[a, b]$上的正交函数系$\{\varphi_n\}$，满足下列条件：

1) 对于任何两个函数 φ_k 和 φ_l，函数系$\{\varphi_n\}$包含它们的积 $\varphi_m(x) = \varphi_k(x)\varphi_l(x)$；

2) 对于每个函数 φ_k，函数系$\{\varphi_n\}$包含函数 $\varphi_m(x) = 1/\varphi_k(x)$．

乘性函数系的例子有：指数函数系$\{e^{i2\pi nx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$，它在$[0, 1]$上是正交的；以及 **Walsh 函数系**(Walsh system)．

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Harmuth, H. F., Transmission of information by orthogonal functions, Springer, 1972.

[3] Zeek, R. W. and Showalter, A. E. (eds), Applications of Walsh functions. Proc. Symp. Washington, April 1971, Univ. Maryland, 1971.

A. B. Ефимов 撰　张鸿林 译

模的重数[multiplicity of a module; кратность модуля]，相对于一个理想的

【补注】 设 A 是一个有幺元的交换环．A 上的模 M 称为具有有限长度(finite length) n，如果存在一个子模序列(Jordan-Hölder 序列(Jordan-Hölder sequence)) $M_0 \subset \cdots \subset M_n$，使每个商 M_i/M_{i-1} $(i = 1, \cdots, n)$ 是单 A 模．(由 **Jordan-Hölder 定理**(Jordan-Hölder theorem)，数 n 不依赖于序列的选择．)今设 M 是一个有限型的 A 模，$\mathfrak{a}$ 是 A 的根中的一个理想，且 $M/\mathfrak{a}M$ 是有限长的，又设 $M \neq 0$ 且具有 Krull 维数 d(一个模 M 的 Krull 维数(Krull dimension)等于环 $A/\mathfrak{q}(M)$ 的维数，这里 $\mathfrak{q}(M)$ 是 M 的零化子，即 $\mathfrak{q}(M) = \{a \in A: aM = 0\}$)，则当 n 足够大时，存在唯一整数 $e_A(\mathfrak{a}; M)$ 使

$$\text{length}_A(M/\mathfrak{a}^{n+1}M) = e_A(\mathfrak{a}; M)\frac{n^d}{d!} + (\text{低次项}).$$

数 $e_A(\mathfrak{a}; M)$ 称为 M 相对 $\mathfrak{a}$ 的重数．一个理想 $\mathfrak{a}$ 的重数为 $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{a}; A)$．这样，具有维数 d 的局部环 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的重数等于 $(d-1)!$ 乘 A 的 Hilbert-Samuel 多项式的首项系数，见**局部环**(local ring)．

关于 Hilbert-Samuel 多项式，在文献上所用的术语有些不一致，令 $\psi(n) = \text{length}_A(M/\mathfrak{a}^{n+1}M)$ 及 $\chi(n) = \text{length}_A(\mathfrak{a}^nM/\mathfrak{a}^{n+1}M)$．有时把 $\psi(n)$ 和 $\chi(n)$ 都称为 Hilbert-Samuel 函数(Hilbert-Samuel function)．对于 $\psi(n)$ 和 $\chi(n)$，当 n 很大时，都存在 n 的一个多项式(次数分别为 d 和 $d-1$)，使 $\psi(n)$ 和 $\chi(n)$ 与该多项式一致．这两个多项式在文献上都称为 Hilbert-Samuel 多项式(Hilbert-Samuel polynomial)．

关于更一般的情况，见[A1]．局部环 A 的重数(multiplicity of local ring)是它的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的重数 $e_A(\mathfrak{m}; A)$．

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Masson, 1983. Chapt. 8, §4: Dimension.

[A2] Nagata, M., Local rings, Interscience, 1962, Chapt. Ⅲ, §23.
[A3] Mumford, D., Algebraic geometry, 1. Complex projective varieties, Springer, 1976, Appendix to Chapt. 6.
[A4] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2, v. Nostrand, 1960, Chapt. Ⅷ, §10.

裴定一 译 赵春来 校

奇点的重数 [multiplicity of a singular point; кратность особой точки], 代数簇的

度量**代数簇** (algebraic variety) 在这个点的奇异性的整数. 簇 X 在点 x 处的重数 $\mu(X,x)$ 定义为**局部环** (local ring) $\mathcal{O}_{X,x}$ 里的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的重数. X 在 x 的重数等于**切锥** (tangent cone) $C(X,x)$ 在顶点处的重数, 也等于 X 在 x 的拉开 $\sigma: X' \to X$ 的特殊纤维 $\sigma^{-1}(x)$ 的次数, 这里 $\sigma^{-1}(x)$ 被看作为到射影空间 $P(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ 里的浸入 (见[3]). $\mu(X,x)=1$ 当且仅当 x 是 X 的非异 (正则) 点. 如果 X 在 x 的邻域里是一个超曲面 (即 X 在一个仿射空间 Z 里由一个方程 $f=0$ 给出), 则 $\mu(X,x)$ 等于使 $f \in \mathfrak{n}^n \setminus \mathfrak{n}^{n+1}$ 的数 n, 其中 $\mathfrak{n}$ 是局部环 $\mathcal{O}_{Z,x}$ 的极大理想. 用通过 x 的一般超曲面截 X, 重数不会改变. 如果 X_d 表示使 $\mu(X,x) \geqslant d$ 的点 $x \in X$ 的集合, 则 X_d 是一个闭子集 (闭子簇).

参考文献

[1] Mumford, D., Algebraic geometry, Springer, 1976.
[2] Serre, J.-P., Algèbre locale. Multiplicités, Springer, 1965.
[3] Ramanujam, C. P., On a geometric interpretation of multiplicity, *Invent. Math.*, **22** (1973), 63-67.

В. И. Данилов 撰

【补注】 关于局部环的极大理想的重数, 见**模的重数** (multiplicity of a module).

陈志杰 译

权的重数 [multiplicity of a weight; Кратность веса]

一个 Lie 代数 $\mathfrak{t}$ 在一个有限维向量空间 V 上的一个表示 ρ 的权 M 的重数, 即相应于 M 的权子空间 $V_M \subset V$ 的维数 (见 **Lie 代数的表示的权** (Weight of a representation of a Lie algebra)).

设 $\mathfrak{t}$ 是特征 0 的代数闭域上的半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 **Cartan 子代数** (Cartan subalgebra), ρ 是代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示 σ 到 $\mathfrak{t}$ 的限制. 此时, 空间 V 是 $\mathfrak{t}$ 的对应于不同的权的权子空间的直和. 这些权以及它们的重数常称为代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 σ 的权和重数.

设 σ 是一个不可约表示, 而 Λ 是它的最高权 (见最高权向量的 **Cartan 定理** (Cartan theorem)). 那么, $n_\Lambda = 1$. 有各式各样的方法计算除最高权以外的权的重数. 其中有表示论中的两个经典结果: Freudenthal 公式和 Kostant 公式.

1. Freudenthal 公式 (Freudenthal formula) (见 [4], [1]). 设 $(\ ,\ )$ 是由 $\mathfrak{t}$ 上 **Killing 型** (Killing form) 导出的 $\mathfrak{t}$ 的对偶空间 $\mathfrak{t}^*$ 上的自然标量积; 设 R 是代数 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{t}$ 的**根系** (root system), 又设 $>$ 是由 R 中某个单根系 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 确定的 $\mathfrak{t}^*$ 的一个偏序, 则

$$((\Lambda+\delta, \Lambda+\delta)-(M+\delta, M+\delta))n_M = \\ = 2\sum_{\substack{\alpha\in R\\ \alpha>0}}\sum_{k=1}^{\infty} n_{M+k_\alpha}(M+k\alpha, \alpha),$$

其中 $\delta = \sum_{\alpha\in R, \alpha>0}\alpha/2$; 按照定义, 如果 N 不是表示 σ 的权, 则 $n_N = 0$. 对任意权 $M \neq \Lambda$, 公式左端 n_M 的系数非零. 这个公式本质上是一个递归公式: 它使得人们可将 $N > M$ 的 n_M 用 n_N 表达出来. 因为 $n_\Lambda = 1$ 是已知的, Freudenthal 公式给出计算重数 n_M 的一个有效方法.

2. Kostant 公式 (Kostant formula) (见 [5], [1]). 设 $\Gamma = \{M \in \mathfrak{t}^*: 2(M, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbf{Z}$, 对所有的 $i = 1, \cdots, r\}$. 该集合是 $\mathfrak{t}^*$ 中的一个乘法子群. **Weyl 群** (Weyl group) W 用自然的方法用于 $\mathfrak{t}^*$, Γ 在 W 的作用下是不变的. 元素 δ, 并且表示 σ 的所有的权, 均属于 Γ. 设对每个 $M \in \Gamma$, $P(M)$ 是方程

$$M = \sum_{\substack{\alpha\in R\\ \alpha>0}} k_\alpha \alpha$$

的解 $\{k_\alpha: \alpha \in R, \alpha > 0\}$ 的个数. 其中对任意 α, $k_\alpha \in \mathbf{Z}$, $k_\alpha > 0$. Γ 上的函数 $P(M)$ 作为划分函数 (partition function) 是熟知的. 故

$$n_M = \sum_{S\in W}(\det S)P(S(\Lambda+\delta)-(M+\delta)).$$

上述公式的实际应用涉及繁杂的计算. 对于 2 秩半单代数, 有一个更方便的几何方法估计权的重数 (见 [2]).

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).
[2] Желобенко, Д. П., Лекции по теории групп Ли, Дубна, 1965.
[3] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).
[4A] Freudenthal, H., Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfacher Liescher Gruppen Ⅰ, *Indag. Math.*, **16** (1954), 369-376.
[4B] Freudenthal, H., Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfacher Liescher Gruppen Ⅱ, *Indag. Math.*, **16** (1954), 487-491.
[4C] Freudenthal, H., Zur Berechnung der Charaktere der

halbeinfacher Liescher Gruppen Ⅲ, *Indag. Math.*, **18** (1956), 511 – 514.

[5] Kostant, B., A formula for the multiplicity of a weight, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 53 – 73.

В. Л. Попов 撰

【补注】 有由 M. Demazure ([A3]) 给出的计算权的整个集合和重数的快速算法.

参考文献

[A1] Freudenthal, H. and Vries, H. de, Linear Lie groups, Acad. Press, 1969.

[A2] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

[A3] Demazure, M., Une nouvelle formule des charactères, *Bull. Sci. Math.*, **(2) 98** (1974), 163 – 172.

牛凤文 译

乘子群 [**multiplier group**; **мультипликатор группы**], 乘子 (multiplicator), 表示成为一个自由群 F 的商群 F/R 的群 G 的,

商群

$$R \cap F'/[R, F],$$

其中 F' 是 F 的**换位子群** (commutator subgroup), $[R, F]$ 是 R 和 F 的相互换位子群. 群 G 的乘子与将 G 表示成自由群的商群的方式无关. 它同构于 G 的整系数的第二同调群. 在群论的某些分支中, 一个群的乘子是否平凡的问题是重要的. А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 在西方文献中, 通常的名称是 Schur 乘子 (Schur multiplier) (或者乘子 (multiplicator)). 特别地, 它在 G 的中心扩张和完满群 (perfect groups) G (即群 G 满足 $G=[G, G]$, 其中 $[G, G]$ 是 G 的**换位子群**) 的研究中会碰到.

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1980.

王 杰 译 石生明 校

乘子理论 [**multiplier theory**; **множителей теория**]

【补注】 给定一个 $[-\pi, \pi)$ 上的 **Fourier 级数** (Fourier series), 例如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, 及一个 (双向无穷的) 序列 $\{\lambda_n\}$, 则可以构成一个新的 Fourier 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n c_n e^{inx}$. 序列 $\{\lambda_n\}$ 称为 Fourier 乘子 (Fourier multiplier). 关于 Fourier 乘子的首要问题是: 确定 $\{\lambda_n\}$ 应满足什么条件才能保证, 当原先的 Fourier 级数对应于 $[-\pi, \pi)$ 上某个函数空间或**广义函数** (generalized function) 空间 $\mathscr{E}$ 中的一个元素时, 则新的级数对应于 $[-\pi, \pi)$ 上另外某个给定的函数空间或广义函数空间 $\mathscr{F}$ 中的一个元素. 典型地, $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{F}$ 是 **Lebesgue 空间** (Lebesgue space)、**Соболев 空间** (Sobolev space) 或类似的函数空间. W. H. Young (1913), H. Steinhaus (1915) 和 S. Sidon (1921) 首先解决了这一问题的一些特殊情形, 这些解中最重要的一个是: $\{\lambda_n\}$ 是一个从可积函数空间到自身或从连续函数空间到自身的乘子的充分必要条件是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{inx}$ 是一个 **Fourier-Stieltjes 级数** (Fourier-Stieltjes series). 等价地, 可以探求 $[-\pi, \pi)$ 上具有下面的性质的广义函数 φ 的特征: 如果 $f \in \mathscr{E}$, 则卷积 $\varphi * f \in \mathscr{F}$; 相应地 Fourier 乘子是 φ 的 Fourier 系数序列.

类似的问题, 诸如刻画映射一个空间到另一个空间并且相应于 Fourier 变换乘以一个固定对象的点态乘法的算子等, 都可以在 Fourier 积分而不是在 Fourier 级数的范围里提出, 而且可以是一个变量或几个变量的 (实际上, 这一理论还可以在局部紧群的更广泛的范围内发展).

关于 Fourier 乘子的最重要的结果是和奇异积分算子及**伪微分算子** (pseudo-differential operator) 理论联系在一起的. 其一般的样式用下面的定理作为例子来说明: 设 m 是 $\mathbf{R}$ 上的一个有界函数, 若它在每一个二进区间上的全变差 (见**函数的变差** (variation of a function)) 有界, 则 m 是一个 Fourier L_p 乘子, $1 < p < \infty$ (即与 m 相联系的算子映射 $L_p(\mathbf{R})$ 于自身). 也许, 这一领域中的另一最重要的结果是 Fefferman 定理 (Fefferman theorem): 在 $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 中, 仅当 $p = 2$ 时单位球的特征函数是一个 Fourier L_p 乘子.

参考文献

[A1] Hörmander, L., Estimates for translation-invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.*, **104** (1960), 93 – 139.

[A2] Fefferman, C., The multiplier problem for the ball, *Ann. of Math.*, **94** (1971), 330 – 336.

[A3] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

M. G. Cowling, J. F. Price 撰 朱学贤 译 潘文杰 校

乘子 [**multipliers**; **мультипликаторы**], 第一类和第二类的

典范方程的**单值算子** (monodromy operator) 的本征值.

在复 Hilbert 空间中, 形如 $\dot{x} = iJH(t)x$ 的方程称为典范的 (canonical), 其中 J 和 $H(t)$ 是自伴算子, $J^2 = I$ 且 $H(t)$ 具有周期性. 在有限维情形, 这个方程的单值算子 $U(t)$ 的本征值称为乘子 (multipliers). 如果典范方程的所有解在整个实轴上有界 (方程是稳定的 (stable)), 则其乘子位于单位圆上. 考虑具有实参数 λ 的典范方程 $\dot{x} = i\lambda JH(t)x$; 这时所有的乘子可分为两类: 第一类乘子和第二类乘子, 它们随 λ 的增加而分别按逆时针方向和顺时针方向移动.

典范方程称为强稳定的 (strongly stable), 如果它

是稳定的，且在 $H(t)$ 的小变动下仍保持稳定．强稳定性的必要和充分条件是所有的乘子都位于单位圆上，且没有不同类的重合乘子．

从第一类和第二类乘子理论可以得到很多关于稳定性的精细的检验法以及关于典范方程稳定区带的估计．稳定和不稳定典范方程的同伦分类就是用乘子给出的．

参考文献

[1] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970 (英译本: Daletskiĭ, Yu. L. and Kreĭn, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974).

[2] Якубович, В. А., Старжинский, В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972 (英译本: Yakubovich, V. A. and Starzhinskiĭ, V. M., Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975).

С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kreĭn, M. G., Topics in differential and integral equations and operator theory, Birkhauser, 1983 (译自俄文).

[A2] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., Matrices and indefinite scalar products, Birkhäuser, 1983.

唐 云 译

多连通区域 [multiply-connected domain; многосвязная область]，道路连通空间中的

一个区域 D，在其内存在不同伦于零的闭道路，或者说，它的**基本群** (fundamental group) 不是平凡的．这意味着，在 D 内存在这样的闭道路，它不能在 D 内连续地变形为一个点而且始终全部地在 D 内．换言之，多连通区域 D 就是不是**单连通区域** (simple connected domain) 的区域．

在 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 中 (或在这些空间的紧化 $\overline{\mathbf{R}}^2$ 或 $\overline{\mathbf{C}}$ 中)，平面区域 D 的连通性的阶 (order of connectivity) 是 (同调) 无关的一维闭链的个数，即 D 的一维 **Betti 数** (Betti number) p^1．把平面区域 D 视为紧化空间 $\overline{\mathbf{R}}^2$ 或 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的区域，如果 D 的边界的连通分支数 k 是有限的，则 $p^1=k$；否则令 $p^1=\infty$．当 $p^1=1$ 时，D 是单连通区域，当 $p^1<\infty$ 时 D 是有限连通区域 (finitely-connected domain) (也使用术语双连通区域 (doubly-connected domain)，三连通区域 (triply-connected domain)，…，k 连通区域 (k-connected domain))，当 $p^1=\infty$ 时，D 是无限连通区域 (infinitely-connected domain)．具有相等的连通性阶 k 的所有平面有限连通区域都是相互同胚的．从这样的区域 D 中去掉 $k-1$ 条割线 (即连接边界的一对连通分支的 Jordan 弧) 上的全部点，总可以得到一个单连通区域 $D^* \subset D$．关于共形型平面多连通区域见 **Riemann 曲面的共形类** (Riemann surfaces, conformal classes of)．

$\mathbf{R}^n$ 中，$n \geq 3$，或 $\mathbf{C}^m$ 中，$m \geq 2$，区域的拓扑类型大为不同，且不能用一个简单的数来刻画．有时这里也使用术语“多连通区域”(附带各种各样条件)，那是当基本群是平凡的但某些高维**同调群** (homology group) 非平凡的情形．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 非平面多连通区域的讨论见 [A1]．

有两个略有差别的概念，称为“multi-connected”和“multiple-connected”．上述概念和术语出自复变函数论．

另一方面，在 (代数) 拓扑学中，把 n 连通空间 (n-connected space) 定义为这样的空间 X，使得把球面 S^m，$m \leq n$，映入 X 中的任一映射都同伦于 0．于是，0 连通性就和道路连通性相同．

参考文献

[A1] Francis, G. K., A topological picturebook, Springer, 1987.

[A2] Massey, W., Algebraic topology, an introduction, Springer, 1967.

[A3] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.

白苏华、胡师度 译

多叶函数 [multivalent function; многолистная функция]

一个概念，它是**单叶函数** (univalent function) 概念的自然推广．复数 z 平面的区域 D 内的正则或亚纯函数 $f(z)$ 称为在 D 内是 p叶的 (p-valent) ($p=1, 2, \cdots$)，如果在该区域内它取每一值至多 p 次，即对任何 w，方程 $f(z)=w$ 在 D 内的根的数目不超过 p．在几何上，这意味着 w 平面的上述每个点对应着 $w=f(z)$ 将 D 映入的那个 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 的至多 p 个点．当 $p=1$ 时，$f(z)$ 在 D 内单叶．

与这一最简单的 p 叶函数类相并列的，在某种推广意义下 p 叶："平均 p 叶"的函数在多叶函数理论中起着主要作用．设 $f(z)$ 是 z 平面的区域 D 内的正则或亚纯函数，设 $n(w)$ 是方程 $f(z)=w$ 在 D 内的根的个数并设 p 是一正数．D 内函数 $f(z)$ 称为在圆周上平均 p 叶的，如果对所有的 $R>0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})\,d\varphi \leq p.$$

在几何上，这意味着 $w=f(z)$ 将 D 映入的那个 Riemann 曲面上投射在圆周 $|w|=R$ 上的那段弧的线性测度不超过该圆周长度的 p 倍．函数 $f(z)$ 称为在 D 内面积平均 p 叶的，如果对所有的 $R>0$ 有

$$\int_0^R\left[\int_0^{2\pi} n(\rho e^{i\varphi})d\varphi\right]\rho d\rho \leqslant p\pi R^2 .$$

在几何上，这意味着 $w=f(z)$ 将 D 映入的那个 Riemann 曲面上投影到圆盘 $|w|<R$ 的那一部分面积不超过该圆盘面积的 p 倍．从这些定义推出，某区域内的 p 叶函数也是在该区域内的圆周上平均 p 叶的，而在圆周上平均 p 叶的函数是面积平均 p 叶的．一个平均 p 叶函数可能成为无穷多叶的．

多叶函数同单叶函数一样，已用多种方式进行过研究：从这些函数映射下区域的畸变特征的观点出发，从估计表示这些函数的级数的系数出发，等等．它们具有很多极值性质，同单叶函数的极值性质类似．例如，单叶函数论中的两个经典结果在 p 叶函数情形的下述推广：**面积原理**（area principle）和第二项系数估计（见 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach conjecture））．

若函数

$$F(\zeta)=\sum_{m=1}^{p}\alpha_m\zeta^m+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n},\ \alpha_p\neq 0,\ |\zeta|>1 \tag{1}$$

在区域 $|\zeta|>1$ 内是 p 叶的且除去在 $\zeta=\infty$ 处的一个极点外是正则的，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2\leqslant\sum_{m=1}^{p}m|\alpha_m|^2. \tag{2}$$

若函数

$$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots \tag{3}$$

在圆盘 $|z|<1$ 内是正则的和 p 叶的，则

$$|a_{p+1}|\leqslant 2p. \tag{4}$$

不等式（2）和（4）是最佳的．这两个结果与 p 叶函数理论中的一些最早的基本结果有关．对于 $|\zeta|>1$ 内面积平均 p 叶的形式（1）的函数，不等式（2）亦已获证明，而对 $|z|<1$ 内面积平均 p 叶的形式（3）的函数，（4）已获证明．

p 叶函数类的研究依据可视其为平均 p 叶函数的子类而得到重要的发展．对于 p 叶函数亦已获致同单叶函数的基本畸变定理和覆盖定理的精确类比（见**畸变定理**（distortion theorems）；**覆盖定理**（covering theorems））．即：对于圆盘 $|z|<1$ 内形式（3）的在圆周上平均 p 叶函数 $f(z)$，有精确估计式

$$\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|^p}{(1-|z|)^{2p}},$$

$$|f'(z)|<p|z|^{p-1}\frac{1+|z|}{(1-|z|)^{2p+1}},\ |z|<1;$$

$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内取每个满足 $|w|<1/4^p$ 的 w 值恰好 p 次（Koebe 覆盖定理的直接类比，见 **Koebe 定理**（Koebe theorem））．此后一性质对于 $|z|<1$ 内形式（3）的面积平均 p 叶函数 $f(z)$ 亦成立．对于在圆周上平均 p 叶函数，有一系列表征其系数增长的最佳结果．比如，对于 $|z|<1$ 内形式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{5}$$

的在圆周上平均 p 叶函数，$p>0$，存在极限

$$\alpha=\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{2p}\max_{|z|=r}|f(z)|$$

且为有限值，并且对于 $p>\frac{1}{4}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^{2p-1}}=\frac{\alpha}{\Gamma(2p)}.$$

每当得到关于 α 的一个估计，便推出关于系数渐近增长的一个相应的精确估计．特别，当 $f(z)$ 具有形式（3）时，后一等式有如下形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^{2p-1}}=\frac{\alpha}{(2p-1)!},$$

其中 $\alpha<1$，$f(z)=z^p(1-ze^{i\theta})^{-2p}$ 的情形除外（θ 是实数）．而且，对于 $|z|<1$ 内形式（3）的在圆周上平均 p 叶函数，有精确估计式

$$|a_{p+2}|\leqslant p(2p+1),$$

而对于此种形式的 p 叶函数子类则有下述的系数精确估计式

$$|a_{p+3}|\leqslant\frac{2}{3}p(p+1)(2p+1).$$

后两个不等式是熟知的关于单叶函数的估计式 $|a_3|\leqslant 3$ 和 $|a_4|\leqslant 4$ 在多叶函数方面的类比（见 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach conjecture））．由于上述估计的极值函数是 p 叶函数，所有这些结果即使在 p 叶函数类也是最佳的．

对于圆盘 $|z|<1$ 内形式（5）的面积平均 p 叶函数，已知下列其系数估计式对所有的 $n\geqslant 1$ 都成立：

$$|a_n|<A(p)\mu_pn^{2p-1}\ (p>1/4), \tag{6}$$

$$|a_n|<A|a_0|n^{-1/2}\log(n+1)\ (p=1/4), \tag{7}$$

$$|a_n|<A(p)|a_0|\left[\frac{\log(n+1)}{n}\right]^{1/2}\quad(0<p<1/4), \tag{8}$$

$$||a_{n+1}|-|a_n||<A(p)\mu_pn^{2p-2}\ (p\geqslant 1), \tag{9}$$

以及估计式

$$\max_{|z|=r}|f(z)|<A(p)\mu_p(1-r)^{-2p}(0<r<1); \tag{10}$$

此处 $A(p)$ 仅依赖于 p，$\mu_p=\max_{0\leqslant\gamma\leqslant p}|a_\nu|$．在（6），（9）和（10）中的量的阶是最佳的．

还有一个熟知的关于单叶亚纯函数的定理在多叶函数方面的下述类比：所有在 $|\zeta|>1$ 内是 p 叶且除去极点 $\zeta=\infty$ 外正则的函数

$$F(\zeta)=\zeta^p\left[1+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\cdots\right]$$

并且在该区域的一个固定点 $\zeta_0\neq\infty$ 处具有展开式

$$F(\zeta)=F(\zeta_0)+\frac{F^{(p)}(\zeta_0)}{p!}(\zeta-\zeta_0)^p+\cdots$$

的函数类中，泛函

$$w=\log\frac{F^{(p)}(\zeta_0)}{p!}$$

的值的范围是圆盘

$$|w|\leqslant -p\log\left[1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\right].$$

除了上述提到的基本的多叶函数类外，特殊多叶函数类在研究中占有重要的地位，例如 p 阶典型实照函数，p 叶星形函数，p 叶凸函数，p 叶近于凸函数，p 叶有界函数及其他函数，它们分别是典型实照函数、星形函数、凸函数，近于凸函数，有界单叶函数及其他函数的推广（见**典型实函数**（typically-real function）；**星形函数**（star-like function）；**凸函数（单复变的）**（convex function (of a complex variable)））。函数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n \tag{11}$$

称为 $|z|<1$ 内 p 阶典型实函数（typical real of order p），如果它是正则的，具有实系数 a_n，并且存在数 $\delta=\delta(f)$，$0<\delta<1$，使得对于区间 $1-\delta<\gamma<1$ 内的每个 γ，虚部 $\mathrm{Im}\{f(z)\}$ 在圆周 $|z|=\gamma$ 上改变其符号恰好 $2p$ 次．此处 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内可多于 p 叶．关于其系数有精确估计式

$$|a_n|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{2k(n+p)!}{(n^2-k^2)(p-k)!(p+k)!(n-p-1)!}|a_k|,$$

$$n>p. \tag{12}$$

对于 $|z|<1$ 内形式（11）的正则 p 叶函数的 Bieberbach 猜想的类比之一是 Goodman 猜想（Goodman conjecture）关于系数 a_n 的不等式（12）的正确性．特别，Goodman 猜想对 $|z|<1$ 内 p 叶的 p 阶典型实函数成立．已证明对于作为沿虚轴方向是凸的单叶函数类的推广的一类 p 叶函数，此猜想也成立．关于 p 叶函数的 Bieberbach 猜想的另一类比是下述 Goodman 猜想．设函数

$$f(z)=z^q+\sum_{n=q+1}^{\infty}a_nz^n,\ q\geqslant 1,$$

在 $|z|<1$ 内是正则 p 叶的，$p=1,2,\cdots$，并设它在 $0<|z|<1$ 内有 t 个零点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$，$t\leqslant p-q$．这个猜测是 $|a_n|\leqslant B_n$，$n>q$，其中 B_n 是展开式

$$\frac{z^q}{(1-z)^{2q}}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]^{2(p-q-t)}\frac{1}{(1-z)^{2t}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{t}\left[1+\frac{z}{|\alpha_j|}\right](1+|a_j|z)\equiv$$

$$\equiv z^q+\sum_{n=q+1}^{\infty}B_nz^n,\quad |z|<1,$$

中的 n 次幂项系数．对于 $|z|<1$ 内 p 阶典型实函数，此不等式已被证明．

p 叶星形函数和 p 叶凸函数类，$S(p)$ 和 $C(p)$，分别定义如下．说函数 $f(z)$ 属于 $S(p)$，$p=1,2,\cdots$，如果它在 $|z|<1$ 内是正则的，$f(0)=0$，并且存在数 ρ，$0<\rho<1$，使得对于 $\rho<|z|<1$ 有

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>0,$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]d\theta=2p\pi,\ \theta=\arg z.$$

说函数 $f(z)$ 属于 $C(p)$，$p=1,2,\cdots$，如果它在 $|z|<1$ 内是正则的，$f(0)=0$，并且存在数 ρ，$0<\rho<1$，使得对于 $\rho<|z|<1$ 有

$$1+\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[1+\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\right]d\theta=2p\pi,\ \theta=\arg z.$$

对于这两类函数已得到一系列精确估计．

类 $S(p)$ 和 $C(p)$ 是一类更广的 p 叶函数类——p 叶近于凸函数类的子类．$|z|<1$ 内正则函数

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

称为 p 叶近于凸的（p-valent closed-to-convex），如果满足下列条件之一：

A）存在函数 $f(z)\in S(p)$ 和数 ρ，$0<\rho<1$，使得

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{f(z)}\right\}>0\quad(\rho<|z|<1); \tag{13}$$

B）$F(z)$ 在 $|z|=1$ 上是正则的，并且存在函数 $f(z)\in S(p)$，在 $|z|=1$ 上也是正则的，使得在 $|z|=1$ 上满足式（13）．

对于这类的函数 $F(z)$，$|F'(z)|$ 的精确上下界已找到，并且式（12）已被证明：当 $n=p+1$ 时对于这类的所有函数成立，而当 $n\geqslant p+1$ 时对于这类中具有实系数的函数成立．作为有界单叶函数的某些结

果的推广的精确估计，对于在相应推广意义下的 p 叶有界函数这些精确估计已被获致．比如，圆盘内正则有界函数类的 p 叶性半径（radius of p-valency）已找到：若 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<1$ 内是正则的，模以 1 为界，以及规范化条件 $f(0)=0$, $f'(0)=a_1$, $0<|a_1|<1$，则于其中 p 叶的最大圆盘 $|z|<\rho$ 的半径 ρ 由方程

$$\frac{(p+1)\rho^p(1-\rho^2)}{1-\rho^{2p+2}}=|a_1|,\ 0<\rho<1,$$

给出．对 $p>1$ 的情形，此定理推广了关于圆盘 $|z|<1$ 内有界正则函数的单叶性半径的 Landau 定理（Landau theorem on the radius of univalency）．

在一区域内正则的函数于该区域内为 p 叶的种种充分条件是已知的．例如，若 $f(z)$ 在凸区域 D 内是正则的，并且存在实数 θ 和整数 k, $0\leqslant k\leqslant p-1$，使得

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\frac{d^p}{dz^p}\left[z^kf(z)\right]\right\}>0,\ z\in D,$$

则 $f(z)$ 在 D 内 p 叶．

多叶函数在多连通区域内亦已被研究．在这种情形、许多估计式以通过把给定的多连通区域映射到典型 Riemann 曲面的函数来表达，以及通过 **Bergman 核函数**（Bergman kernel function）来表达．与多连通区域到多叶典型曲面的共形映射的存在性问题相关的第一个基本结果是下述的 Grunsky 定理（Grunsky theorem）：设 D 是 z 平面内的有限连通区域，$z=\infty$ 是它的内点，而且它的边界分支不是点，又设 $Q_p(z)$ 是一给定的 $p\geqslant 1$ 次多项式；则对于任意给定的 θ, $0\leqslant\theta<\pi$，存在唯一的函数 $\Phi_\theta(z)$ 在 D 内除以 $z=\infty$ 为极点外正则，它在 $z=\infty$ 处的主部（包括自由项）与 $Q_p(z)$ 相同，并且它使 D 的每一边界分支对应于一条直线段与实轴成倾角 θ．换言之，函数 $w=\Phi_\theta(z)$ 把 D 映射到具有倾角 θ 的平行裂纹的整个 p 叶 w 平面．一给定的有限连通区域到另一典型多叶曲面的共形映射的存在性已被证明；类似于单叶函数的某些极限性质，已对多叶函数建立了相应的极值性质．已证明在一个有限连通区域内亚纯并使面积定理成立的最一般的多叶函数类具有一个简单的几何特征．

研究多叶函数的基本方法是**边界积分法**（method of boundary integration），**对称化方法**（symmetrization method）以及**二次微分**（quadratic differential）的方法．

变分方法在多叶函数理论中的作用不如它在单叶函数理论中那么有效．

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Матем. сб., 1940, т. 8, в. 2, с. 277 – 283.

[2] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

[3] Jenkins, I. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

[4] Pethe, K., Estimation du coefficient a_{p+3} de la fonction p-valente dans le cercle unité, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **20** (1972), 3, 219 – 220. Russian and English abstracts.

[5] Livingston, A. E., p-valent close-to-convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 3, 161 – 179.

[6] Leach, R. J., Coefficient estimates for certain multivalent functions, *Pacific J. Math.*, **74** (1978), 1, 133 – 140.

[7A] Krzyz, J., On the derivative of bounded p-valent functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A*, **12** (1958), 2, 23 – 28. Russian and Polish abstracts.

[7B] Krzyz, J., Distortion theorems for bounded p-valent functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A*, **12** (1958), 3, 29 – 38. Russian and Polish abstracts.

[8] Ozaki, S., *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A*, **2** (1935), 40, 167 – 188.

[9] Аленицын, Ю. Е., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **37** (1973), 5, 1132 – 1154.

[10] Singh, S. K., *Math. Student*, **30** (1973), 1-2, 79 – 90.

[11] Goodman, A. W., Open problems on univalent and multivalent functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 6, 1033 – 1050.

Ю. Е. Аленицын 撰　杨维奇 译

Mumford 假设 [Mumford hypothesis; Мамфорда гипотеза]

假设每个**半单代数群**（semi-simple algebraic group）G 都是几何约化的，也就是说，对于 G 在有限维向量空间 V 里的任何**有理表示**（rational representation）以及对于被 G 固定的任何非零向量 $v\in V$，存在 V 上正次数的 G 不变齐次多项式 f 使得 $f(v)\neq 0$．

D. Mumford（[1]）提出的这个假设（用一种不同的，但等价的形式），其目的是找出定义在任意特征数的代数闭域上的半单代数群的一个性质，从不变量的几何理论的观点来看（见**不变量理论**（invariants, theory of）），这个性质能作为定义在特征数零的域上的半单群的有理线性表示的完全可约性的经典性质的替代（后一性质对于正特征数的基域不成立）．这样在不变量的几何理论里的许多核心结果，如域上有限型代数的自同构的约化群的不变量代数的有限生成定理（见不变量的 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem）），都可以去掉对基域特征数的限制．

如果基域 k 的特征数是零，则 Mumford 假设的证明可由关于半单群的有理表示的完全可约性的 Weyl 经典定理所给出（见 [2]）：在这种情形，V 里的不变直线 $L=kv$ 有一个不变补集 Γ（一个不变超平面，使得

$L \cap \Gamma = 0$), f 可以取为给出 Γ 的方程的线性形式. 当 k 具有正特征数 p 时, Mumford 假设推广了以下事实: 存在 V 内不变齐次超曲面 Γ 使得 $L \cap \Gamma = 0$(且 Γ 的次数等于 p^n 对于某个整数 n).

Mumford 假设也等价于下述断言: 对于半单群 G 在仿射代数簇 X 上的任何正则作用以及对于 X 内任意两个不相交的闭不变子集 X_1 和 X_2, 存在 X 上不变正则函数 h, 使得 $h(X_1) = 0, h(X_2) = 1$(即 X_1 和 X_2 能被正则不变量所分离, 见 [3]).

Mumford 假设首先在 [4] 内得证, 在 [5] 中, 证明被推广到域上约化群概形的一般情形.

Mumford 假设的证明再加上 [6] 和 [10] 的结果, 首先能使人得到关于不变量的 Hilbert 定理推广的最终形式: 如果 R 是代数闭域 k 上的有限型代数, G 是约化群, 作为自同构群作用在 $\mathbf{R}^n$ 上, R^G 是 R 中 G 不变元素的子代数, 则 R^G 也是 k 上有限型代数; 其次能建立以下事实: 任意特征数的域上的**线性代数群** (linear algebraic group) 是几何约化的, 当且仅当它是约化的 (见**约化群** (reductive group)). Mumford 假设能应用于不变量的几何理论以及参模理论 (见 [7] - [9]).

参考文献

[1] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

[2] Fogarty, J., Invariant theory, Benjamin, 1969.

[3] Dieudonné, J. and Carrell, J. B., Invariant theory: old and new, Acad. Press, 1971.

[4] Haboush, W. J., Reductive groups are geometrically reductive, *Ann. of Math.*, **102** (1975), 67-83.

[5] Seshadri, C. S., Geometric reductivity over arbitrary base, *Adv. Math.*, **26** (1977), 225-274.

[6] Nagata, M., Invariants of a group in an affine ring, *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 (1964), 369-377. With appendix by M. Miyanishi.

[7] Seshadri, C. S., Mumford's conjecture for GL(2) and applications, in Algebraic Geometry. Papers presented at the Bombay Colloq. 1968, Oxford Univ. Press, 1969, 347-371.

[8] Popp, H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, Springer, 1977.

[9] Seshadri, C. S., Theory of moduli, in R. Hartshorne (ed.): Algebraic geometry, Arcata 1974, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 263-304.

[10] Nagata, M. and Miyata, T., Note on semi-reductive groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 (1964), 379-382.

В. Л. Попов 撰 陈志杰 译

Müntz 定理 [Müntz theorem; Мюнца теорема] 关于幂系 $\{x^{\lambda_k}\}$ 在区间 $[a, b]$ $(0 < a < b < \infty)$ 上的完全性的定理.

设 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$. 为了对于 $[a, b]$ 上任一连续函数 f 及对于任何 $\varepsilon > 0$ 均存在线性组合

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

使得

$$\| f - P \|_C = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - P(x) | < \varepsilon,$$

其必要充分条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty. \qquad (*)$$

在区间 $[0, b]$ 的情形, 要将恒等于 1 的函数添入系 $\{x^{\lambda_k}\}$ 中, 而条件 $(*)$ 对于扩充后的系的完全性如前一样是必要且充分的. 条件 $a \geqslant 0$ 是基本的: 系 $\{x^{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ (满足 $(*)$) 在 $[-1, 1]$ 上不是完全的 (奇函数不可能用偶次幂的线性组合任意逼近).

依照 L_p 的度量, $p > 1$, 条件 $(*)$ 对于系 $\{x^{\lambda_k}\}$ 在 $[a, b]$ 上的完全性是必要且充分的, 此处 $a \geqslant 0$, $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$; 即对于每个 $f \in L_p(a, b)$ 与任何 $\varepsilon > 0$ 均存在线性组合 P 使得

$$\| f - P \|_{L_p} = \left| \int_a^b | f(x) - P(x) |^p dx \right|^{1/p} < \varepsilon.$$

此定理为 H. Müntz ([1]) 所证明.

参考文献

[1] Müntz, H., Ueber den Approximationssatz von Weierstrass, Schwarz-Festschrift, Berlin, 1914.

[2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

А. Ф. Леонтьев 撰

【补注】 Müntz 定理有几种推广. 首先, O. Szász 证明: 具有指数 $\lambda_k \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, \lambda_k > 0$,

$$\sum \mathrm{Re} \frac{1}{\lambda_k} = \infty \qquad (\mathrm{A1})$$

是系 $\{x^{\lambda_k}\}$ 在 $C[a, b]$ 或 $L_p[a, b]$ $(p > 1)$ 中的完全性的必要且充分条件; 或者等价地, 比如说, 是系 $\{e^{\lambda_k z}\}$ 在 $C_0(-\infty, 0]$ 中的完全性的必要且充分条件. 尔后, J. Korevaar, А. Ф. Леонтьев, P. Malliavin, J. A. Siddigi 及其他一些人曾研究过关于曲线 $\gamma(x) = x + i\eta(x)$, $-\infty < x \leqslant 0$, 的类似的完全性问题. 最近证明: 若 η 是逐段 C^1, 具有 $\exp|\eta'| < \infty$, 以及 $\{\lambda_k\}$ 满足 (A1) 且被包含在围绕正实轴的一个充分小的扇形内, 则 $\{e^{\lambda_k z}\}$ 生成 $C_0[\gamma]$. 见 [A1], 亦可作为进一步的参考. 最后, 将 Müntz 定理推广到多复变函数已作过一些尝试, 见 [A2].

参考文献

[A1] Korevaar, J. and Zeinstra, R., Transformées de Laplace pour les courbes à pente bornée et un résultat correspondant du type Müntz-Szász, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **301** (1985), 695-698.

[A2] Ronkin, L. I., Some questions of completeness and uniqueness for functions of several variables, *Funct. Anal. Appl.*, 7 (1973), 37 – 45 (*Funkts. Anal. Prilozhen*, 7 (1973), 45 – 55). 杨维奇 译

互易核 [**mutual kernels** 或 reciprocal kernels; **взаимные ядра**]

实变量 x, s (或者, 更一般地, Euclid 空间中的点 P 和 Q) 的两个函数 $K(x, s)$ 和 $K_1(x, s)$, 它们定义在正方形 $[a, b]\times[a, b]$ 上, 并且满足条件

$$K_1(x, s)-K(x, s)=$$
$$=\int_a^b K(x, t)K_1(t, s)dt=\int_a^b K_1(x, t)K(t, s)dt.$$

如果与核 $K(x, s)$ 互易的核 $K_1(x, s)$ 存在, 则 $K_1(x, s)$ 是 **Fredholm 方程** (Fredholm equation)

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (*)$$

的预解核 (resolvent kernel). А. Б. Бакушинский 撰

【补注】 事实上, 如果 $K(x, s)$ 和 $K_1(x, s)$ 是互易核, 则上面的方程 $(*)$ 的解由

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b K_1(x, t)f(t)dt$$

给出. 考虑 Freaholm 方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (A1)$$

和叠核 $K^1(x, t)=K(x, t)$,

$$K^{(n)}(x, t)=\int_a^b K^{(n-1)}(x, s)K(s, t)ds, n=2, 3, \cdots.$$

构成 **Neumann 级数** (Neumann series)

$$R(x, t; \lambda)=K^{(1)}(x, t)+\lambda K^{(2)}(x, t)+\cdots+=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K^{(n)}(x, t).$$

如果 $K(x, t)$ 在 $[a, b]\times[a, b]$ 上是连续的, 则对于小的 λ, 这个级数一致收敛. 这时, $R(x, t; \lambda)$ 满足

$$\lambda\int_a^b R(x, t; \lambda)K(t, s)dt=R(x, s; t)-K(x, s),$$

于是

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x, t; \lambda)f(t)dt$$

是 (A1) 的解.

"互易核" 这个名词很少使用.

参考文献

[A1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 4, М. 1957 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷, 人民教育出版社, 1958).

[A2] Zabreiko, P. P., et al., Integral equations – a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).

[A3] Moiseiwitsch, B. L., Integral equations, Longman, 1977. 张鸿林 译

互素数 [**mutually-prime numbers** 或 coprimes, relatively-prime numbers; **взаимно простые числа**]

一些无 (素) 公因数的整数. 两个互素数 a 和 b 的**最大公因数** (greatest common divisor) 是 1, 通常记为 $(a, b)=1$. 如果 a 和 b 是互素的, 则存在数 u 和 v, $|u|<|b|$, $|v|<|a|$, 使得 $au+bv=1$.

互素的概念也可应用于多项式, 以及更一般地, 可应用于 **Euclid 环** (Euclidean ring).

【补注】

参考文献

[A1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981 (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1956). 张鸿林 译

互相奇异测度 [**mutually-singular measures**; **взаимно сингулярные меры**]

定义于局部紧空间 T 上的两个 (正) 测度 μ, ν, 满足 $\inf\{\mu, \nu\}=0$.

两个测度 μ 与 ν 为互相奇异的, 当且仅当在 T 中存在两个不相交集合 M, N, 使得 μ 集中于 M 上, ν 集中于 N 上.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Integration, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 6, 7, 8 (译自法文).

И. М. Войцеховский 撰

【补注】 如果 μ, ν 是一个抽象**可测空间** (measurable space) 上的 σ 可加和 σ 有限测度, M, N 属于关于此可测空间的 σ 域, 则上面第二段中的刻画仍然成立. 互相奇异测度也称为奇异测度 (singular measures) 或正交测度 (orthogonal measures).

也用 "支集为" 来代替 "集中于" (亦见**测度的支集** (support of a measure).

参考文献

[A1] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: R. 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1965).

[A2] Hewitt, E., Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965. 沈永欢 译

N

n 群 [n-group; n-группа]

群的概念在 n 元运算情形的推广. n 群 (n-group) 是具有一个处处唯一可逆的 n 元结合运算的**泛代数** (universal algebra) (见**代数运算** (algebraic operation)). 当 $n \geqslant 3$ 时, n 群的理论与群 (即 2 群) 的理论有本质的不同. 例如当 $n \geqslant 3$ 时, n 群没有类似的单位元.

设 $\Gamma(\circ)$ 是一个带乘法运算 $\circ$ 的群, $n \geqslant 3$ 为任意正整数. 可以在集合 Γ 上按如下方式定义一个 n 元运算 ω:

$$a_1 \cdots a_n \omega = a_1 \circ \cdots \circ a_n .$$

这样得到的 n 群称为由群 $\Gamma(\circ)$ 确定的 n 群. n 群成为这种形式的充分必要条件已经知道 ([1]). 任一 n 群都可以嵌入一个这样的 n 群 (Post 定理 (Post theorem)).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Общая алгебра, М., 1974 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963).

В. Д. Белоусов 撰

【补注】 不要把通常的 p 群 (p-group) (即其阶为 p 的幂的群) 的概念与上述意义下的 n 群相混淆.

参考文献

[A1] Balci, D., Zur Theorie der topologischen n-Gruppen, Minerva, Munich, 1981.

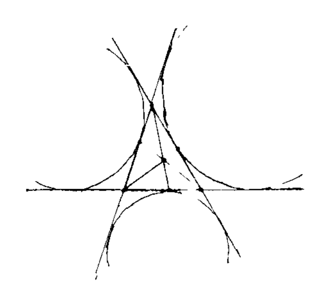
[A2] Rusakov, S. A., The subgroup structure of Dedekind n-ary groups, in Finite groups (Proc. Gomel. Sem.), Minsk, 1978, 81-104 (俄文).

[A3] Rusakov, S. A., On the theory of nilpotent n-ary groups, in Finite groups (Proc. Gomel. Sem.), Minsk, 1978, 104-130 (俄文).

王 杰 译 石生明 校

Nagel 点 [Nagel point; Нагеля точка]

连接三角形的三个顶点与相应对边同旁切圆的切点的三直线的交点 (见图). 因 Ch. Nagel 而得名 (1836).



【补注】

А. Б. Иванов 撰

参考文献

[A1] Court, N. A., College geometry, Barnes & Noble, 1952.

[A2] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一卷, 科学出版社, 1987).

张鸿林 译

名称 [mame; имя], 亦称名字

一个特定对象的语言表示. 被给定的名称所表示的对象称为所指 (denotation). 在数学中广泛地使用名称来表示特定的数学对象, 例如用 e, π 表示熟知的超越数, 用 sin 表示正弦三角函数, 用 $\varnothing$ 表示空集合. 由简单名称可以形成复合名称 (compound name), 即用两个对象的名称给第三个对象命名. 例如, $\sin\pi$ 是数 0 的另外一个名称. 一个名称不仅表示它的所指, 也表示一个确定的意义. 例如, 表达式

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \text{ 和 } \sin\frac{\pi}{2}$$

都是数 1 的名称；但是它们意义是不相同的．在一个复合名称中，如果其中出现的某个名称被另一个具有相同所指的名称所代替，那么这个复合名称的所指不变．如果复合名称中出现的某个名称被该名称的同义词（即具有相同意义的名称）所代替，那么复合名称的意义不改变．

除了名称以外，数学中还使用包含变元的式子．这些式子成为名称的条件是：其中的变元被变元的值域中的对象的名称所代替．这样的式子称为命名式（name form）．式子 e^x 和 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$（其中 x 是取值为实数的变元）都是命名式的例子．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Carnap, R., Meaning and necessity, Univ. Chicago Press, 1947.

苏开乐 译

Napier 数 [Napier number; Неперово число]

见 e（数）（e(number)）．

Nash 定理 [Nash theorem; Нэша теорема]，对策论中的

有限**非合作对策**（non-cooperative game）

$$\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i\in J}, \{H_i\}_{i\in J}\rangle$$

的混合扩张中的平衡点存在定理，这里 J 和 $\{S_i\}_{i\in J}$ 分别是局中人的有限集以及他们的有限策略集，而 H_i: $S=\prod_{i\in J}S_i \to \mathbf{R}^1$ 是局中人 $i\in J$ 的支付函数（也见**对策论**（games, theory of））．它是由 J. Nash 在 [1] 中建立的．设 $M_i(i\in J)$ 是 S_i 上的所有概率测度的集合．Nash 定理断言，存在测度 $\mu^*\in M=\prod_{i\in J}M_i$，使得

$$H_i(\mu^*) \geqslant H_i(\mu^* \| \mu_i)$$

对于所有 $\mu_i\in M_i$, $i\in J$，成立，这里 $\mu^*\|\mu_i$ 表示 M 中的把向量 μ^* 的第 i 个分量代替为 μ_i 所合成的测度，而 $H_i(\mu)=\mathrm{E}(H_i, \mu)$．Nash 定理的已知证明都依赖于不动点定理．

参考文献

[1] Nash, J., Non-cooperative games, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 286－295.

[2] Воробьев, Н. Н., Основы теории игр. Бескоалиционная игра, М., 1984.

[3] Воробьев, Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974（英译本：Vorob'ev, N. N., Game theory. Lectures for economists and system scientists, Springer, 1977）.

Е. Б. Яновская 撰　史树中 译

Nash 定理（微分几何学中的）[Nash theorems (in differential geometry); Нэша теоремы]

Riemann 流形在 Euclid 空间中等距嵌入（imbedding）和等距浸入（immersion）的两组定理（亦见**流形的浸入**（immersion of a manifold）；**等距浸入**（isometric immersion））．最初的叙述是 J. Nash 给出的（[1]）．

1）关于 C^1 嵌入和 C^1 浸入的 Nash 定理．具有 C^0 类度量 g 的 n 维 **Riemann 空间**（Riemannian space）V^n 在 m 维 Euclid 空间 E^m 中的 C^1 类浸入（嵌入）$f: V^n\to E^m$ 称为短的（short），如果它在 V^n 上诱导的度量 g_f 使得二次型 $g-g_f$ 是正定的．若 V^n 有在 $E^m(m\geqslant n+1)$ 中的短浸入（嵌入），则 V^n 也有在 E^m 中的 C^1 类等距浸入（嵌入）．在 $m\geqslant n+2$ 的限制下，该定理在 [1] 中被证明，如上所述形式的定理由 [2] 证明．特别是，这个定理蕴含着：若紧 Riemann 流形 V^n 有在 $E^m(m\geqslant n+1)$ 中的 C^1 嵌入（浸入），则 V^n 也有在 E^m 中的等距 C^1 嵌入（浸入）．Nash 定理的另一个结论是：V^n 的每一个点有一个充分小的邻域，它容许有在 E^{n+1} 中的 C^1 类等距嵌入．

2）关于正则嵌入的 Nash 定理．每一个紧 C^r 类 Riemann 流形（$3\leqslant r\leqslant\infty$）有在 E^m 中的等距 C^r 类嵌入，其中 $m=(3n^2+11n)/2$．若 V^n 不是紧的，则它有在 E^{m_1} 中的等距 C^r 类嵌入，此处 $m_1=(3n^2+11n)(n+1)/2$．

关于正则嵌入的 Nash 定理来自关于很广的一类微分算子的逆算子的 Nash 隐函数定理（Nash implicit-function theorem）的一个应用．该定理的意思是，当自然地联系于微分算子 L 的某个线性代数方程组可解时，且在象和逆象中引进合适的拓扑，则所讨论的算子是开映射，即 L 在其范围内任意一点附近是局部可逆的．对于 Riemann 流形在 Euclid 空间中嵌入的方程，它归结为：映射 $f: V^n\to E^m$ 关于 V^n 的内在坐标的一阶导数和二阶导数必须是线性无关的．这样的嵌入首先是在 [4] 中考虑的；它们被称为自由的（free）．Nash 隐函数定理意味着与自由嵌入在 E^m 中的 Riemann 流形 $\bar{V}^n$ 充分接近的紧 Riemann 流形 V^n 也有在 E^m 中的自由嵌入．这个事实以及关于一个参数的初始延拓方法导至关于正则嵌入的 Nash 定理（见 [3]）．将 Nash 方法推广到非紧流形和解析嵌入，并且将关于一个参数的延拓过程作重要的加细，已经证明每一个无限次可微（解析）的 Riemann 流形 V^n 有在 E^m 中等距的可微（解析）嵌入，其中 $m=n(n+1)/2+3n+5$（见 [5]－[7]）．

参考文献

[1] Nash, J., C^1-isometric imbeddings, *Ann. of Math.*,

60 (1954), 383 – 396.

[2] Kuiper, N., On C^1-isometric imbeddings, *Proc. K. Ned. Akad. Wetensch.*, **A58** (1955), 4, 545 – 556.

[3] Nash, J., The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 20 – 63.

[4] Бурстин, К., 《Матем сб.》, **38** (1931), 3-4, 74 – 85.

[5] Nash, J., Analyticity of the solutions of implicit function problems with analytic data, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 345 – 355.

[6] Громов, М. Л., Рохлин, В. А., 《Успехи мат. наук》, **25** (1970), 53 – 62.

[7] Громов, М, Л.,《Докл. АН СССР》, **192** (1970), 749 – 797.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】微分拓扑中的 Nash 定理说无边的紧连通 C^∞ 流形可微同胚于一个实代数簇的分支.

设 $\pi: X \to V$ 是光滑的 (即 C^∞) 纤维化. 用 $J^r(V,X)$ 记光滑截面 $f: V \to X$ 的 (芽 (germ) 的) r **射流** (jet) 的空间. 截面 $f: V \to X$ 的 r 阶射流记作 $J^r f: V \to J^r(V,X)$. 截面 $\varphi: V \to J^r(V,X)$ 称为完整的 (holonomic), 如果存在 C^r 截面 $f: V \to X$, 使得 $\varphi = J^r f$, φ 唯一地决定了 f (若它存在的话). C^0 截面 $V \to X$ 的空间 $C^0(V,X)$ 的细拓扑 (fine topology) 是通过把子集 $C^0(V,U)$ 作为基获得的, 其中 U 取遍 X 的所有开子集. 在 $C^r(V,X)$ 上的细 C^r 拓扑是通过嵌入 $C^r(V,X) \to C^0(V,J^r(V,X))$, $f \mapsto J^r f$ 从 $C^0(V,J^r(V,X))$ 的细 C^0 拓扑诱导的.

Nash 逼近定理 (Nash approximation theorem) 说 V 上任意一个 C^r-Riemann 度量有 V 上某个 C^r 度量 g' 作为细的 C^r 逼近, 而 (V,g') 容许有 C^r 浸入 $f':(V,g') \to \mathbf{R}^{2l}$, 其中 $l = l(n) < \infty$, $n = \dim V$.

Nash-Kuiper 定理 (Nash-Kuiper theorem) ([1], [2]) 说任意一个可微浸入 $f_0: V \to \mathbf{R}^q$, $q > \dim V$ 容许一个变到等距浸入 $f_1: V \to \mathbf{R}^q$ 的 C^1 连续同伦浸入 $f_t: V \to \mathbf{R}^q$, $t \in [0,1]$.

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

[A2] Gromov, M., Partial differential relations, Springer, 1986.

陈维桓 译

自然标架 [**natural coordinate frame**; **натуральный репер**], Frénet 三棱形 (Frénet trihedron), Frénet 标架 (Frénet frane), 自然三棱形 (natural trihedron)

由空间曲线的切线, **主法线** (principal normal) 和**副法线** (binormal), 以及由这些直线两两确定的三个平面所组成的图形. 如果曲线在已知点的自然标架的棱取作 Descartes 坐标系的轴, 则自然参数化 (见**自然参数** (natural parameter)) 的曲线在该点邻域内的方程为

$$x = s + \cdots, y = \frac{k_1}{2} s^2 + \cdots, z = \frac{k_1 k_2}{6} s^3 + \cdots,$$

其中 k_1, k_2 是曲线在该点的**曲率** (curvature) 和**挠率** (torsion).

А. Б. Иванов 撰

【补注】亦见 **Frénet 三棱形** (Frénet trihedron).

参考文献

[A1] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978 (译自德文).

[A2] Blaschke, W., Leichtweiss, K., Elementare Differential-geometrie, Springer, 1977.

陈维桓 译

自然方程 [**natural equation**; **натуральное уравнение**], 曲线的

把曲线的曲率 k_1 和挠率 k_2 表为曲线上弧长参数 s 的函数的一组方程

$$k_1 = \varphi(s), \ k_2 = \psi(s).$$

对于任意的正则函数 $\varphi(s) > 0$ 和 $\psi(s)$, 存在一条以 $\varphi(s)$ 为**曲率** (curvature) 和以 $\psi(s)$ 为**挠率** (torsion) 的曲线, 唯一确定到至多差空间中的一个位移. 曲线落在一个平面内的充分必要条件是它的挠率恒为零; 曲线为一条直线 (或直线段) 的充分必要条件是它的曲率恒为零.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】在上文, 为了得到曲线的唯一性, φ 必须是正的; 对于存在性, $\varphi(s) \geq 0$ 就够了 (见 [A1], 8.5.8 节和 8.6.15 节).

通常, 曲线的自然方程还称为曲线的内蕴方程 (intrinsic equation). (某些特殊的) 平面曲线表示成关系式 $k_1 = \varphi(s)$ 可以追溯到 L. Euler.

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).

[A2] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976 (中译本: 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988).

[A3] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966.

[A4] Spivak, M., Differential geometry, 2, Publish or Perish, 1979.

[A5] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differential-geometrie, Springer, 1973.

[A6] Struik, D. J., Differential geometry, Addison-Wesley, 1950.

陈维桓 译

自然逻辑演绎 [**natural logical deduction**; **естественный логический вывод**]

尽可能接近数学和逻辑中常用推理过程的实质的形式演绎. 尽管一个演绎的自然性和质量的标准不能完全精确地给出, 但它们通常要求演绎以普遍可接受的

逻辑变换规则来完成，并且是紧致的（特别是，不包含冗余的演绎规则的应用），又完整地“胶合”（演绎中相应的冗余部分需消去，例如借助精选辅助引理），等等.

起初，数学和逻辑的理论的形式化并不顾及到自然性（见**逻辑演算**（logical calculus）），这方面一个显著进步是自然演绎演算的产生（见 **Gentzen 形式系统**（Gentzen formal system）），这个演算模拟常规数学论证形式，允许按通常的方式引入和使用假设. 其他很自然的方法用于处理相继式演算中的假设，它们具有额外的优点——**子表述性质**（subformulation property）——这样形成了在构造自然逻辑演绎的问题上的新进展的一个基础.

为了自然逻辑演绎的自动搜寻，[2]提出了一个辅助的相继式演算，它具有子表述性质，但不允许假设转移到后式（见**相继式（逻辑中的）**（sequent (in logic)））. 在这样的演算中，容易由演绎得到自然逻辑的演绎. 在此基础上，为了缩短演绎并‘胶结’它们，“淘汰”冗余公式和规则的应用，以及在建立可演绎性时改变战术技巧的可能等而考虑到“相似性”（即被检测的公式中具有相同的子公式），自然演绎的一个搜寻方法得到发展. 在古典**命题演算**（propositional calculus）的逻辑工具的范围之内，这些方法已引导出一个计算机的算法；这个程序，从一给出的假设集出发对一给出的断言寻找其一个自然的逻辑演绎，并且以俄语把这个演绎复制为数理逻辑文词.

假设的修正和定理的加强是与自然逻辑演绎的搜寻相关的问题；它们牵涉到在一个给定的公式里作最小的修正使其成为定理或者改变为一个更强的定理的方法，也牵涉到这样的修正的质量的准则的研究.

自然逻辑演绎领域的发展，主要与古典逻辑相关，但其导致的方法具有更一般的特征.

参考文献

[1] Метематическая теория логического вывода, сб. переводов, М., 1967.

[2] Шанин, Н. А. и др., Алгорифм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний, М.-Л., 1965.

[3] Prawitz, D., Natural deduction, Almqvist & Wiksell, 1965.

С. Ю. Маслов 撰

【补注】 亦见**逻辑推导**（derivation, logical）

参考文献

[A1] Schutte, K., Proof theory, Springer, 1977.

[A2] Gentzen, G., M. Szabo (ed.), Collected papers, North-Holland, 1969.

苏开乐 译

自然数 [**natural number**; **натуральное число**]

数学的基本概念之一. 自然数可以解释为非空有限集合的**基数**（cardinal number）. 全体自然数组成的集合 $\mathbf{N}=(1,2,\cdots)$ 和在其中定义的加法（+）及乘法（·）运算一起构成自然数系 $<\mathbf{N},+,\cdot,1>$. 在这个数系中，两个二元运算都是可结合与可交换的，且满足分配律；1是乘法的单位元素，即对任意的自然数 a 有 $a\cdot 1=a$；加法没有零元素，以及对任意的自然数 a,b 有 $a+b\neq a$. 最后，自然数集合 $\mathbf{N}$ 满足下面被称为归纳公理（axiom of induction）的条件：$\mathbf{N}$ 的任一子集，若它包含 1，以及若它包含任一元素 a，则必包含和 $a+1$，那么它必是整个集合 $\mathbf{N}$. 见**自然序列**（natural sequence）；**形式算术**（arithmetic, formal）.

参考文献

[1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. М., 1970.

[2] Нечаев, В. И., Числовые системы, М., 1975.

[3] Davenport, H., The higher arithmetic, Hutchinson, 1952.

А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев 撰

【补注】比上面作为序数来给出的定义（Frege-Russell）更好的是 von Neumann 的定义，把一个数等同于它前面的元素组成的集合：$0=\varnothing$、“$n+1$” $=Sn=\{0,\cdots n\}$. 这里 S 表示“后继（successor）”. 在这样的定义下，0属于 $\mathbf{N}$（这是经常这样规定的）. 这时0是加法运算的零元素. 亦见**自然序列**（natural sequence）.

参考文献

[A1] Scriba, C. J., The concept of number, a chapter in the history of mathematics, with applications of interest to teachers, B. I. Mannheim, 1968.

潘承彪 译 戚鸣皋 校

自然参数 [**natural parameter**; **натуральный параметр**]，可求长曲线上的

参数表示为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的曲线的参数 s，使得曲线在两点 $\mathbf{r}(s_1)$ 和 $\mathbf{r}(s_2)$ 之间的弧长等于 $|s_1-s_2|$. 曲线用自然参数的参数化称为自然参数化（natural parametrization）. 一条无奇点的 k 次可微（解析）曲线的自然参数化也是 k 次可微（解析）的.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】参看**自然方程**（natural equation）的参考文献.

陈维桓 译

自然序列 [**natural sequence**; **натуральный ряд**]，自然数序列（natural number sequence）

非空集 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$，其中定义了一元运算（unary operation）S（即 S 是 $\mathbf{N}$ 到自身的单值映射），满足下列条件（**Peano 公理**（Peano axioms））：

1）对任意 $a\in\mathbf{N}$，

$$1\neq Sa;$$

2）对任意 a，$b\in\mathbf{N}$，如果

$$Sa=Sb,$$

则

$$a=b;$$

3)任何包含1的 N 的子集，当含有元素 a 时，也同时含有 Sa，则这个子集就是 N(归纳法公理 (axiom of induction)).

元素 Sa 通常叫做 a 的紧接后元 (immediate successor). 自然序列是**全序集** (totally ordered set). 可以证明条件

$$a+1=Sa, a+Sb=S(a+b),$$

$$a\cdot 1=a, a\cdot Sb=ab+a,$$

在 N 上定义了二元运算 (+) 和 (·), 这里 a 和 b 是 N 的任意元素. 系统 $<\mathbf{N},+,\cdot,1>$ 是**自然数** (natural number) 系统.

参考文献

[1] Waerden, B. L. ven der, Algebra, 1, Springer, 1967 (译自德文). A. A. Бухштаб, В. И. Нечаев 撰

【补注】 自然数序列通常从0开始，亦见**自然数** (natural number).

系统 $(\mathbf{N},S)$ 是仅有的（精确到同构）满足 Peano 公理的系统.

当说到 $(\mathbf{N},S)$ 是全有序集指的是全序关系 $<$，它的定义为

$$\neg(a<1),$$

$$a<Sb \Leftrightarrow a<b \text{ 或 } a=b.$$

参考文献

[A1] Kennedy, H. C., Selected works of Guiseppe Peano, Allen & Unwin, 1973.

[A2] Landau, E., Grundlagen der Analysis, Akad. Verlagsgesellschaft, 1930.

[A3] MacLane, S. and Birkhoff, G., Algebra, Macmillan, 1967. 戚鸣皋 译 朱尧辰 校

自然序广群 [**naturally ordered groupoid**; **естественно упорядоченный группоид**]

一个偏序广群 (见**偏序集** (partially ordered set); **广群** (groupoid)) H, 其中所有的元素是正的 (即, 对任何 $a,b\in H, a\leqslant ab, b\leqslant ab$) 且两个元素中的较大者总是被较小者整除 (在左和右两边), 即, $a<b$ 蕴涵 $ax=ya=b$ 对某 $x,y\in H$. 任何偏序群 (见**序群** (ordered group)) 的正锥是自然序半群. O. A. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963. 葛显良 译 李慧陵 校

Navier-Stokes 方程 [**Navier-Stokes equations**; **Навье-Стокса уравнения**]

粘性流体运动的基本方程，此方程是动量和质量守恒律的数学表示. 对于一个可压缩流体的非定常流，在 Descartes 坐标系内 Navier-Stokes 方程可写为

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt}&=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right],\\
\rho\frac{dv}{dt}&=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left[2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]\right],\\
\rho\frac{dw}{dt}&=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left[2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{w}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right],\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $\mathbf{w}$ 是速度向量，它在坐标轴 x, y, z 上的投影分别是 u, v, w; p 是压力，ρ 是密度，μ 是粘性系数; X, Y, Z 是惯性力向量 K 在坐标轴上的投影; $d\mathbf{w}/dt=\partial\mathbf{w}/\partial t+\mathbf{w}\operatorname{grad}\mathbf{w}$ 是实质导数. 方程 (1) 的导出是基于关于摩擦力的推广的 Newton 定律，按此定律运动流体的应力或气体的应力和应变率成比例. 为研究可压缩流，人们必须在 (1) 中还要加进与压力、密度和温度有关的状态方程以及能量方程.

作为流体动力学基础的方程 (1)，首先由 L. Navier([1]) 和 S. D. Poisson([2]) 导出，他们以考虑分子间力的作用为基础. B. Saint-Venan([3]) 和 G. G. Stokes([4]) 在唯一的假设法向及切向应力是应变率的

线性函数下导出了这个方程.

对于一个不可压缩等温流体流（ρ = 常数），方程（1）可取为如下向量形式：

$$\left.\begin{array}{c}\rho\,\dfrac{d\mathbf{w}}{dt}=\mathbf{K}-\operatorname{grad}p+\mu\Delta\mathbf{w},\\ \operatorname{div}\mathbf{w}=0.\end{array}\right\}\qquad(2)$$

通常，当分析 Navier-Stokes 方程时，人们将它们变换为无量纲形式，在此形式中用适当的特征单位去除的方法标量化描述所有的量．于是，对于无惯性力的不可压缩流体的定常流，Navier-Stokes 方程包含一个明确的无量纲参数，那就是众所周知的 **Reynolds 数**（Reynolds number）：

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho V l}{\mu}=\frac{V l}{\nu},$$

其中 V，l 是特征速度和线性维数，ν 是运动粘性.

为研究二维不可压缩流，人们经常用 Navier-Stokes 方程的 Helmholtz 形式：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}=\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\xi,\\ \Delta\psi=-\xi,\end{array}\right\}\qquad(3)$$

其中 ψ 是流函数，ξ 是旋度，它们与速度投影 u，v 有关：

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \xi=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

定常 Navier-Stokes 方程的基本的边值问题和如此一些问题的讨论有联系：闭腔及管道内的流，带有自由表面的流，围绕物体的流，射流及物体后的尾流等．在所有这些问题中，方程在区域（有限或无限）上被积分，而这些区域带有由物理考虑的边界条件（附着于物体的表面或沿表面滑动的条件，吹进或吸入到可渗透曲面的条件，在该流中由远离物体的外部流所支配的条件，自由表面上的条件，等等）．对非定常问题，除边界条件外还需适当的初始条件．

迄今（1989）为止，对 Navier-Stokes 方程、流体力学及空气动力学的边值问题的可解性尚无严格的数学分析．对粘性不可压缩流体的数学理论得到了少数的结果，见**流体动力学中的数学问题**（hydrodynamics, mathematical problems in）.

研究者们的努力原先直接去确定其精确解．例如，在不可压缩的情形下对下述一些定常流存在精确解：在平面管道中具有给定的常压力落差（Poiseuille 流（Poiseuille flow））；在两个平行的平面墙之间的定常流，其中一端是不动的，而另一端在其自已的平面内以常速度运动着（Couette 流（Couette flow））；在带有常压力落差且横截面为圆形的直线管筒中定常流（Hagen-Poiseuille 流（Hagen-Poiseuille flow））．同样还发现少数几个自相似解，其中有：在临界点附近平面-平行（且轴对称）流（Howart 流（Howart flow））；以及在收缩及扩张的管道中的流（Hamel 流（Hamel flow））.

Navier-Stokes 方程的近似解是基于简化的假定．在此值得提的是对应于滞缓运动的很小 Reynolds 数（Re≪1）的解，这种运动的最熟知的是围绕一球的 Stokes 流（Stokes flow）．非常大的 Reynolds 数的极限情形导致流体动力学边界层的理论．利用发展得很好的近似及数值方法，边界层方程已可能去解决在实践上有重要意义的广泛范围的问题.

对粘性流体及气体动力学中某些类问题可借助于相当有效的算法解决，这些算法基于差分格式的利用．例如，在简单形状的区域内（或围绕简单形状的物体）粘性不可压缩流体的层流的计算就是如此．在此所用的差分方法被最大地推广到为 Holmholtz 形式（3）的方程上去，虽然这个组包含一些困难，这种困难起源于关于 ξ 的边界条件的确定．在解组（3）的定常型式的第一个结果是用简单的显式五点格式及迭代方法获得的（见[6]）．粘性不可压缩流体动力学中定常问题的解大量地基于调正法及对组（3）所作的显式及隐式格式的应用．在显式格式中，人们用了关于时间 t 的两层格式，且借助于中心差分关于一阶导数进行对称近似以及（3）中第二个方程的解在每个时间层上用 Seidel 方法；同样用了三层格式，在此格式中对流项用一个"交叉"格式去近似，而扩散项用 Dufort-Frankel 格式．这些格式对如此问题的解同样也足以得到某些结果，即此问题是在一个收缩及扩张的管道中二维层流的定常问题，而此管道中与运动着的盖子的剖线是直线．同样对围绕一个垂直于流动方向的平板的管道中流的非定常问题也足可得到一些结果.

隐式格式通常基于分数步长的方法（见[8]）．例如，对方程（3），这些格式的一般结构如下：

$$\frac{\xi^{n+1/2}-\xi^{n}}{0.5\tau}=L_{1\xi}\xi^{n+1/2}+L_{2\xi}\xi^{n},$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^{n+1/2}}{0.5\tau}=L_{1\xi}\xi^{n+1/2}+L_{2\xi}\xi^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{s+1/2,n+1}-\psi^{s,n+1}}{0.5\sigma}+L_{1\psi}\psi^{s+1/2,n+1}+$$
$$+L_{2\psi}\psi^{s,n+1}=-\xi^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{s+1,n+1}-\psi^{s+1/2,n+1}}{0.5\sigma}+L_{1\psi}\psi^{s+1/2,n+1}+$$
$$+L_{2\psi}\psi^{s+1,n+1}=-\xi^{n+1},$$

其中 $L_{1\xi}$，$L_{2\xi}$，$L_{1\psi}$，$L_{2\psi}$ 是一维差分算子：

$$L_{1\xi}=\frac{\delta^2\xi}{\delta x^2}-\frac{\delta\psi}{\delta y}\frac{\delta\xi}{\delta x},\ L_{2\xi}=\frac{\delta^2\xi}{\delta y^2}+$$

$$+\frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\xi}{\delta y},\ L_{1\psi}=\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2},\ L_{2\psi}=\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}.$$

在这些式子中，τ 是时间步长，σ 是迭代参数；s，$s+1/2$，$s+1$ 是在第 $n+1$ 次时间层上（3）中 Poisson 方程的迭代解中的迭代指标；$\delta^2/\delta x^2$，$\delta^2/\delta y^2$，$\delta/\delta x$，$\delta/\delta y$ 是近似于相应的二阶及一阶导数的差分算子．（3）中第一个方程被用来寻找 ξ 的值，而第二个方程则找其次一个时间层上的 ψ 的值．二阶导数的近似常常是对称的，而 ξ 的方程中对一阶导数所作出的近似或者是对称差分或者是面对着流动的单边差分，这取决于所考虑的速度的符号．大力推荐的方法是在[9]中建立的格式以及连同单调逼近在一起（见[10]）．对(3)的第一个方程，此格式是

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau}+\frac{u-|u|}{2}\left[\frac{\delta\xi}{\delta x}\right]^++$$

$$+\frac{u+|u|}{2}\left[\frac{\delta\xi}{\delta x}\right]^-+\frac{v-|v|}{2}\left[\frac{\delta\xi}{\delta y}\right]^++$$

$$+\frac{v+|v|}{2}\left[\frac{\delta\xi}{\delta y}\right]^-=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{1+|u|h/2}\frac{\delta^2\xi}{\delta x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+|v|l/2}\frac{\delta^2\xi}{\delta y^2}\right],\qquad(4)$$

其中 h 和 l 是 x 及 y 方向的网格步长，且

$$\left[\frac{\delta\xi}{\delta x}\right]^+=\frac{\xi^{n+1}_{i+1,j}-\xi^{n+1}_{i,j}}{h},$$

$$\left[\frac{\delta\xi}{\delta x}\right]^-=\frac{\xi^{n+1}_{i,j}-\xi^{n+1}_{i-1,j}}{h},$$

$$\left[\frac{\delta\xi}{\delta y}\right]^+=\frac{\xi^{n+1}_{i,j+1}-\xi^{n+1}_{i,j}}{l},$$

$$\left[\frac{\delta\xi}{\delta y}\right]^-=\frac{\xi^{n+1}_{i,j}-\xi^{n+1}_{i,j-1}}{l}.$$

差分方程（4）常常变换为三-对角线的形式，且连同边界条件近似关系一起是可用双重-扫除的方法去解决．当用调正法解定常问题时，或者能成功地解方程（4）（无关于确定 ψ 的内部迭代），或者同时用一个向量双重-扫除的方法联合地确定 ξ 和 ψ 去解方程（4）．关于方程（3）的边界条件的提法中，困难在于，在 Navier-Stokes 方程情形下，附着于固体墙的通常的边界条件仅产生 ψ 的条件．在 ξ 的方程的数值解中，一个形式的要求是旋转的边界条件的表述．这些条件在每个时间层上如此地得到，或者在区域边界上近似地得到，或者用仅在这样的区域中积分 ξ 的方程得到，使得此区域位于积分的基本区域之内（[9]）．

形如（2）的方程在研究二维流时很少使用；通常，对连续性方程用某种方法进行正则化．变分-网格方法，特别是有限元方法已用于解形如（2）及（3）的粘性流体动力学方程．

差分方法已用于讨论粘性不可压缩流体的多种流动问题．这些问题中有围绕一个椭圆或圆柱体的流（包括一个旋转的柱体），围绕一个有限厚度的板（包括一个带一侵袭角的板），一个柱形的筒端，一个下垂物，一个平面台阶的流等等．对于下面的流业已进行了研究：在空腔中的流，在平面及柱形管道内的流，在一个墙上带有障碍的管道中的流，带有自由表面的流，以及自然的、诱导的及混合的对流的一些流．

关于粘性可压缩气体的计算是基于对整个 Navier-Stokes 方程的差分方法的应用，这里涉及到比粘性不可压缩流体的计算更多的外加的一些困难．其理由是一个可压缩气体流中不仅有边界层区域，而且有另外一些区域，这些区域由对应于无粘性气体流中冲击波及稀疏波的未知函数的高梯度所表征．由于一个粘性可压缩气体本身的 Navier-Stokes 方程的复杂性，对计算机的速度及存储有显著的要求．在此情况下，应用显式格式产生较为简单的算法．由用调正法计算定常流所推荐的一个显式格式，以具常系数的简单方程为例表示如下：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad(5)$$

可写为

$$\frac{u^{n+1}_{m+1}-u^n_m}{\tau}=$$

$$=a\frac{u^n_{m+1}-u^{n+1}_{m-1}}{2h}+\nu\frac{u^n_{m+1}-2u^{n+1}_m+u^{n+1}_{m-1}}{h^2}.$$

这个格式逼近（5）的一个光滑稳态解，其逼近阶数是 $O(h^2)$，且它对 $\tau<h/a$ 是稳定的．稳定性条件与 ν 无关．应用到 Navier-Stokes 方程，此稳定性条件与 Reynolds 数无关．虽然如此，关于时间迭代步长所提示的限制在显式格式中是实质性的．隐式格式通常无此限制且它们对如上常系数线性方程绝对地是稳定的．为计算粘性气体的二维流的隐式格式，结合了分数步长方法进行使用．各种可变方向法的差分格式最近（1982年）已构造出来：带有在中间层上完全及不完全的近似，发散和不发散的格式（见[11]），以及带有关于网格的空间步长的一个改进的精确阶数（高于二阶）的格式（见[12]）．基于 Navier-Stokes 方程的粘性气体流的数值模拟涉及到一个复杂结构的流的计

算以及充分精细的网格的应用．由于计算存储量的限制，不用相互交迭区域的方法是不可能的．解 Navier-Stokes 方程的差分方法已用于讨论粘性气体动力学中的大量问题．这些问题有：围绕钝头物体（球，圆柱体的筒端）的超音速流，围绕复合体（球-柱，球-锥）的超音速流，以及围绕一楔子或平板的锋口的超音速流．在有限度量的物体后的尾流，在喷口及空气入口处的流，以及在空腔内带有外部亚音速及超音速流的流．另外一些已被研究的论题是带有一冲击波的边界层的干扰，在等离子体内冲击波的结构等等．上面提及的流通常假定是分层的．

参考文献

[1] Navier, L., *Mém. Acad. Sci.*, 7 (1827), 375 – 394.

[2] Poisson, S. D., *J. Ecole Polytechn.*, **13** (1831), 1 – 174.

[3] Saint-Venant, B., *Acad. Sci. Paris*, **17** (1843).

[4] Stokes, G. G., *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8** (1843), 287 – 319.

[5] Schlichting, G., Grenzschicht Theorie, Braum, 1958.

[6] Thom, A., Apelt, C. J., Field computations in engineering and physics, v. Nostrand, 1961.

[7] Браиловская, И. Ю., Кускова, Т. В., Чудов, Л. А., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 11, М., 1968.

[8] Яненко, Н. Н., Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967 (英译本: Yanenko, N. N., The method of fractional steps; the solution of problems of mathematical physics in several variables, Springer, 1971).

[9] Полежаев, В. И., Грязнов, В. Л., 《Докл. АН СССР》, **219** (1974), 2, 301 – 304.

[10] Самарский, А. А., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, **5** (1965), 548 – 551.

[11] Ковеня, В. М., Яненко, Н. Н., Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосиб., 1981.

[12] Толстых, А. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, **18** (1978), 1, 139 – 153.

[13] Кокошинская, Н. С., Павлов, Б. М., Пасконов, В. М., Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом, М., 1980.

[14] Temam, R., Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis, North-Holland, 1977.

[15] Численное исследование современных задач газовой динамики, М., 1974.

[16] Roache, P. J., Computational fluid dynamics, Hermosa, 1972.

[17] Peyret, R., Viviand, H., Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour les fluides compressible, in R. Glowinski and J. L. Lions (eds.), Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, 2, Lect. notes in computer Sci., Vol. 11, Springer, 1974, 160 – 184.

[18] Burggraf, O. R., Some recent developments in computation of viscous flow, in A. I. van der Vooren, P. J. Zandbergen (eds.), Proc. 5th Internat. Conf. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lect. notes in Physics, Vol. 59, Springer, 1976, 52 – 64.

В. М. Насконов 撰

【补注】 在最近十年左右，关于 Navier-Stokes 方程与有限维现象相联系的一些问题已得到了显著的进展．例如，关于2维 Navier-Stokes 方程的万有吸引子的维数以及3维 Navier-Stokes 方程的有界不变集的分形维数的上界等，见[A2]．

参考文献

[A1] Kreiss, H. O., Lorenz, J., Initial boundary value problems and the Navier-Stokes equations, Acad. Press, 1989.

[A2] Constantin, P., Foias, C., Navier-Stokes equations, Univ. Chicago Press, 1988.

仇庆久 译

近环 [near-ring; почтикольцо]

结合环(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))概念的一种推广．近环是群上的一个**广环**(ringoid)，即有结合乘法与加法的**泛代数**(universal algebra)；近环关于加法是一个群(不必是交换群)，而且右分配律

$$x(y+z)=xy+xz$$

也必成立．近环也是**多算子群**(multi-operator group)的一个例子．

一个群 Γ 到自身的所有能与 Γ 的一个给定的自同态半群 S 的作用交换的映射基 $M_S(\Gamma)$ 是准环的例子．$M_S(\Gamma)$ 的群运算是逐点定义的，它的乘法是映射的合成．近环 $M_S(\Gamma)$ 类似于矩阵环．子近环、理想、近环上右模的概念按常规的方法给出．

设 $N_0(N_c)$ 是由恒等式 $0x=0(0x=x)$ 定义的近环簇．每个准环 A 可分解为子近环的和 $A=A_0+A_c$，其中 $A_0\in N_0$，$A_c\in N_c$，且 $A_0\cap A_c=0$．循环右 A 模 M 称为0型本原的(primitive)，如果 M 是单 A_0 模；M 称为1型本原的，如果对于任意 $x\in M$ 或有 $xA=0$，或有 $xA=M$；M 称为2型本原的，如果 M 是单 A_0 模．近环 A 称为 v 型本原的($v=0,1,2$)，如果存在 v 型的忠实的单 A 模 Γ．此时有 A 到对于 Γ 的某个自同态半群 S 的 $M_S(\Gamma)$ 的稠密嵌入．对于带恒等元 A 和 A_0 中带右理想极小条件的2本原近环 A，等式 $A=M_S(\Gamma)$ 成立(Wedderburn-Artin 定理的类似结果)．对于每个 $v=0,1,2$，v型 Jacobson 根 $J_v(A)$ 可定义为 v 本原 A 模的零化子的交．根 $J_{1/2}(A)$ 被定义为极大右模理想的交．这四个根互不相同，且有

$$J_0(A)\subseteq J_{1/2}(A)\subseteq J_1(A)\subseteq J_2(A).$$

实际上，这些根具有结合环的 **Jacobson 根**(Jacobson radical)的许多性质(见[4])．

对于近环，分式近环上的 Ore 定理的类似结果([4])成立．

分配生成近环(distributively-generated near-ring)是一个近环，其加群由与近环中对于所有 y 和 z 均满足等式

$$(y+z)x=yx+zx$$

的元素 x 生成．所有分配生成近环生成簇 N_0．对于有限的分配生成近环而言，1和2本原的概念是一致的；1本原分配生成近环具有形式 $M_0(\Gamma)$，其中 Γ 是一个群．在满足恒等式

$$(xy-yx)^{n(x,y)}=xy-yx,\ n(x,y)>1$$

的分配生成近环中，乘法是交换的(见[3],[4])．

N_0 中每个无幂零元的近环都是无零因子近环的一个子直积([4])．近代数 A 可分解为单近环的一个直和，当且仅当：a)它满足主理想极小条件；b) A 不含零乘理想；c)任一极小理想的零化子都是极大的([1])．

对于近环，可以证明关于正则环结构([2])和关于分式近环([5])的类似的结果．近环在研究置换群、块概形和射影几何时有很多应用([4])．

参考文献

[1] Bell, H. E., A commutativity theorem for near-rings, *Canad. Math. Bull.*, **20** (1977), 1, 25–28.

[2] Heatherly, H. E., Regular near-rings, *J. Indian Math. Soc.*, **38** (1974), 345–354.

[3] Ligh, S., The structure of certain classes of rings and near rings, *J. London Math. Soc.*, **12** (1975), 1, 27–31.

[4] Pilz, G., Near-rings, North-Holland, 1983.

[5] Oswald, A., On near-rings of quotients, *Proc. Edinburgh. Math. Soc.*, **22** (1979), 2, 77–86.

[6] Полин, С. В., в кн.: Кольца, Новосиб., 1973, 41–45.

[7] Meldrum, J. D.P., Near-rings and their links with groups, Pitman, 1985.

В. А. Артамонов 撰 郭元春 译 牛凤文 校

必要和充分条件[necessary and sufficient conditions; необходимые и достаточные условия]

使得命题 A 成立的一些条件：当不满足这些条件时命题 A 不能成立(必要条件)，当满足这些条件时命题 A 必定成立(充分条件)．必要和充分条件往往用短语"当且仅当"来代替．必要和充分条件具有重要意义．在一些复杂的数学问题中，寻找便于应用的必要和充分条件有时是很困难的．在这种情况下，人们便试图寻找较宽的充分条件，其中包含可能较多的条件，而所研究的事实仍然成立，以及较窄的必要条件，即其中包含可能较少的条件，使得所研究的事实不再成立．这样，充分条件逐步接近必要条件．

БСЭ-3 张鸿林 译

必要充分统计量[necessary sufficient statistic; необходимая достаточная статистика]

见**最小充分统计量**(minimal sufficient statistic)．

否定[negation; отрицание]

一种逻辑运算，对一个给定的命题 A，执行这种运算就得到命题"非 A"．在形式语言中，命题 A 的否定记作 $\neg A$，$\sim A$，$\overline{A}$，$-A$，A'(读作："非 A"，"A 不真"，"A 不成立"，等等)．从语义上说，命题 A 的否定意味着由假设 A 能推出**矛盾**(contradiction)．在经典二值逻辑中，否定运算的作用由如下**真假值表**(truth table)给出：

A	$\neg A$
T	F
F	T

В. Е. Плиско 撰 沈复兴 译

负二项分布[negative binomial distribution; отрицательное биномиальное распределение]

取非负整数 $k=0,1,\cdots$ 的随机变量 X 按公式

$$\mathrm{P}\{X=k\}=\binom{r+k-1}{k}p^r(1-p)^k \qquad (*)$$

定义的一种**概率分布**(probability distribution)，其中 $0<p<1$ 与 $r>0$ 是实值参数．负二项分布的**生成函数**(generating function)与**特征函数**(characteristic function)分别由下二式定义：

$$P(z)=p^r(1-qz)^{-r},$$

$$f(t)=p^r(1-qe^{it})^{-r},$$

其中 $q=1-p$．数学期望与方差分别等于 rq/p 与 rq/p^2．负二项分布的分布函数在 $k=0,1,\cdots$ 处的值，依下列关系式由 **β 分布**(beta-distribution)函数在点 p 处的值所确定：

$$F(k)=\mathrm{P}\{X<k\}=$$

$$=\frac{1}{B(r,k+1)}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^k dx,$$

其中 $B(r,k+1)$ 为 β 函数．

"负二项分布"一词的由来，是因为这个分布由一带负指数的**二项式**(binomial)所生成，即概率(*)是 $p^r(1-qz)^{-r}$ 依 z 的幂展开式的系数．

负二项分布常在概率论的许多应用中遇到．对于一个整数 $r>0$，负二项分布可解释为，在"成功"

概率为 p 的 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials) 概形中第 r 次 "成功" 以前失败次数的分布；在这种场合通常称之为 **Pascal 分布** (Pascal distribution)，它是 **Γ 分布** (gama-distribution) 在离散情形的类似．当 $r=1$ 时，负二项分布重合于**几何分布** (geometric distribution)．负二项分布经常出现于与分布参数的随机化有关的问题中；例如，如果 Y 是一随机变量，以 λ 为条件时有带随机参数 λ 的 **Poisson 分布** (Poisson distribution)，而 λ 又有密度为

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\, x^{\mu-1}e^{-\alpha x},\ x>0,\ \mu>0$$

的 Γ 分布，那么 Y 的边缘分布将是参数 $r=\mu$，$p=\alpha/(1+\alpha)$ 的负二项分布．负二项分布还可作为 **Pólya 分布** (Pólya distribution) 的极限形式．

有负二项分布，且分别以 p 与 $r_1, \cdots, r_n$ 为参数的 n 个独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 之和，也是负二项分布的，且以 p 与 $r_1+\cdots+r_n$ 为参数．对于大的 r 及小的 q，若 $rq\sim\lambda$，负二项分布可用参数为 λ 的 Poisson 分布逼近．负二项分布的许多性质都由它是广义化的 Poisson 分布这一事实所规定．

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971.

A. B. Прохоров 撰

【补注】 亦见**二项分布** (binomial distribution)．

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Distributions in statistics, discrete distributions, Wiley, 1969.

潘一民 译

负相关 [**negative correlation; отрицательная корреляция**]

随机变量间相关关系的一种形式，在此情形下，一个变量的条件均值随另一变量值的增长而减小．如果 $\rho<0$，**相关系数** (correlation coefficient) 为 ρ 的二变量称做负相关的，见**相关(统计学中的)** (correlation (in statistics))．

A. B. Прохоров 撰　周概容 译

负曲率曲面 [**negative curvature, surface of; отрицательной кривизны поверхность**]，(按直接意义)

在 3 维 Euclid 空间中每一点有负 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) $K<0$ 的 2 维曲面．这种曲面的最简单例子是单叶双曲面 (图 1a)，双曲抛物面 (图 1b) 和**悬链面** (catenoid)

负曲率曲面的概念能够就曲面本身的维数或外围空间的维数和结构进行推广．

负曲率曲面在局部上有鞍状构造．这是指负曲率曲面在它任意一点的一个充分小的邻域内像一个马鞍

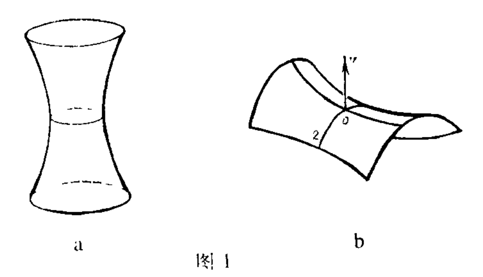


图 1

(参看图 1b，不考虑曲面在所画出部分以外的性态)．所画出的曲面在任意一点 O 的主截线的图清楚地解释了曲面的局部鞍状特征．设 $1/R_1, 1/R_2$ 是它们在点 O 的法曲率，即在该点的**主曲率** (principal curvature)．根据经典的定义，在 O 点的 Gauss 曲率是 $K=1/R_1R_2$．由于 $K<0$，主曲率有不同的符号，因而主截线朝相反的方向凸起；在图 1b 中，主截线 $O2$ 是朝法向量 n 的方向凸起的，而另一条主截线是朝相反方向凸起的，这正好与曲面的鞍状特征相适应．负曲率曲面的大范围 ("整体") 拓扑结构可以是十分不相同的．例如，双曲抛物面 (图 1b) 在拓扑上等价于平面，而单叶双曲面等价于一个柱形的管状面．让两个具有平行轴线的单叶双曲面沿着一条双曲线相交 (图 2a)．假定这两个双曲面不是透明的，并且忽略掉它们的不可见部分 (即落在对方内部的部分)．这样所得到的曲面除了上面所提到的双曲线之外处处有负曲率．一般说来，在这条双曲线上的点没有 (经典意义下的) 曲率，因为该双曲线是曲面的脊线．但是在目前给定的情况下，在脊线附近的曲面能够光滑化 (见 [7])，使所得的曲面在所有的点都有曲率，而且是负曲率 (见图 2b)．它在拓扑上等价于刺破两洞的环面．通过这种容纳大量单叶双曲面的途径可以使负曲率曲面的拓扑结构有任意的复杂程度．

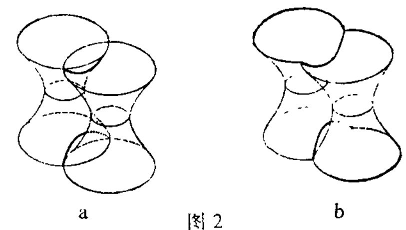


图 2

如果一张曲面关于其内蕴几何 (见**内蕴度量** (internal metric)) 给出的距离是完全度量空间，则称该曲面是完全的 (complete)．在上面所述的例子中，考虑的就是完全曲面．用简单类型的曲面构造各种拓扑类型的负曲率曲面 (如上所示) 的想法归功于 J. Hadamard ([1])．图 3 中提供了一个在根本上不同的例子 (参看 [6]，[7])．这个曲面处处有负曲率，完全包含在一个球面内．它有无限多个分支，沿着分支移动的动点能够无限地接近球面边界，但是永远碰不到它．可以构造这样的曲面，使得沿分支移动的动点总是取一条长度

无限的路径．于是，曲面在其内蕴度量意义下的完全性得到保证．这个例子说明，内蕴完全的负曲率曲面不必像 Hadamard 的例子那样在空间中向无限远处伸展．

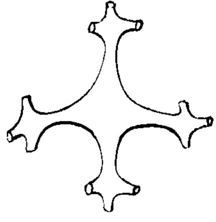


图 3

在这个例子中，若容许曲面有轻微的非正则性，则一般能观察到条件 $K<0$．这是指假定曲面是光滑的(处处是 C^1 类的)，但是在某些孤立点它不属于 C^2 类；在那些点，曲率必定有极限值．在用这些极限值作为曲率之值后，曲率就成为处处有定义的连续函数．下面的定理补充了曲面的延拓问题以及它与正则性条件的联系（[8]）．

如果 C^2 类完全曲面的 Gauss 曲率 K 满足不等式 $-a^2\leqslant K\leqslant 0$，这里 $a=$ 常数，则曲面不能包含在半径小于 $\sqrt{2/3}\ /a$ 的球内．

如果在内蕴意义下无界的 C^2 类完全曲面上，无限远处的 Gauss 曲率 $K\to 0$，则曲面在空间中是无界的（在这个定理中，曲率的符号是可变的）．

负常曲率曲面，即 Gauss 曲率处处取同一个负值的曲面已经受到（并将继续受到）特别的注意，原因是它们的内蕴几何局部地与 Лобачевский 平面上的几何（见 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiĭ geometry））相一致．这是指 Лобачевский 平面度量几何中成立的关系式恰好对负常曲率曲面上的图形成立（测地线担当直线的角色）．例如，在负常曲率曲面上三角形的三角公式与 Лобачевский 非 Euclid 几何学中对应公式是完全一样的．这样，在负常曲率曲面上获得了 Лобачевский 几何学的局部模型．这类模型之一是 E. Beltrami 在 1868 年建立的（见 **Beltrami 解释**（Beltrami interpretation）)，它对于认可 Лобачевский 几何学作出了实质性贡献．Beltrami 还提供了负常曲率曲面的一个重要例子，称为伪球面（pseudo-sphere）（图 4)，它是由一条曳物线围绕它的渐近直线旋转而成的（图 5)．

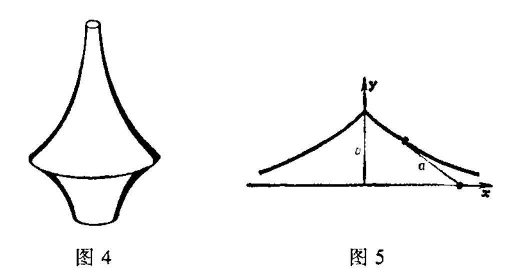


图 4　　图 5

曳物线的特征性质是其切线介于切点和渐近线之间的线段有定长 a．伪球面的 Gauss 曲率为 $K=-1/a^2$．负常曲率旋转曲面在 Beltrami 之前已由 F. Minding 在 1839 年研究过．他发现了负常曲率周期旋转曲面的两种形式，它们与伪球面一起穷尽了所有可能的负常曲率旋转曲面（对于它们的方程，可看 [3]，[5])．

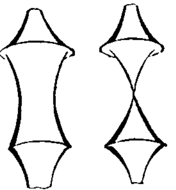


图 6

在负常曲率旋转曲面（如伪球面）上构造 Лобачевский 平面度量几何的整体模型是不可能的，理由有两个．首先，在伪球面上有非正则点，它们形成尖锐的边缘（图 4).其次，伪球面在拓扑上等价于一个管状面，因此从拓扑学观点来看它们不同于 Лобачевский 平面．但是在一个正则的负常曲率曲面上构作 Лобачевский 平面的无限部分的模型是可能的．为此，用垂直于轴的平面从伪球面上截出一个无限的（可伸缩的）区域 U．要求该平面不包含尖锐的边缘．于是伪球面上不含尖锐边缘的部分可作为 U．此后只考虑 U、为简便起见也把它称为伪球面；它没有奇异点．设 U' 是 U 的通用覆盖曲面．此概念可介绍如下：取可数无限多个与 U 完全相同的叠在一起的曲面，用整数标记来区分：$\cdots,U_{-2},U_{-1},U_0,U_1,\cdots$．然后将它们沿一条公共的经线割开，在每一个曲面上分别标出割线的左侧和右侧，使得所有的左侧都重叠在一起（同样，所有的右侧也重叠在一起）．现在对于任意一个整数 k，$-\infty<k<+\infty$，将 U_k 的左侧与 U_{k+1} 的右侧接在一起（同样，U_k 的右侧与 U_{k-1} 的左侧接在一起）．这样得到的连通曲面 U' 就是 U 的万有覆叠曲面，也称为曲面 U 的单连通覆叠（simply-connected envelope)．对于任意一块曲面都能构造它的万有覆叠曲面，但是其构筑的直观描述远非像伪球面那样简单．要紧的是万有覆叠曲面总是单连通的．同样重要的是被覆叠曲面的局部内蕴几何能够转移到万有覆叠曲面上去．为此，只要保证被覆叠曲面上每一点 p 有一个凸邻域 $V(p)$，它被万有覆叠曲面中的一个邻域 $V'(p')$ 恰好覆叠一次（这里 p' 是覆叠在 p 上的一点，且对应 $V\to V'$ 是双向单一的）．$V(p)$ 的几何被原封不动地搬到 $V'(p')$ 上去，即 V' 中两点 p'_1,p'_2 之间的距离等于它们在 V 中的原象之间的距离．万有覆叠曲面的大范围几何由此被确定了，然而它通常与被覆叠曲面的大范围几何是完全不同的．

在伪球面 U 上，朝无限远处移动时子午线是收敛

到一起的；而且它们与 U 的边缘是正交的．因而万有覆叠曲面的边缘是 Лобачевский 平面中的一条曲线，它是一束 Лобачевский 平行（收敛）的直线的正交轨线．这条曲线称为 Лобачевский 几何学中的极限圆（horocycle）．这样，从内蕴几何观点来看，伪球面 U 的万有覆叠是 Лобачевский 平面中一个极限圆的内部．为了构造 Лобачевский 几何学的模型，伪球面 U 的万有覆叠 U' 比伪球面 U 本身更方便．例如，任何半径的圆周能够放进 U' 中去，但可证明，一个大的圆周要没有重叠地放进 U 中去却是太大了．然而，即使是 U' 也尚未延伸到足以包含 Лобачевский 几何学中诸如一条完整直线那样的对象．换句话说，用 U' 构作整个 Лобачевский 平面的模型是不可能的．

在 1900 年，D.Hilbert 提出这样的问题：是否存在一个曲面，使得它的内蕴几何与 Лобачевский 平面几何是完全一致的？由简单的推理可知，如果这样的曲面是存在的，则它必定有负常曲率，并且是完全的．因为 Лобачевский 平面是单连通的，它也必定是单连通的．事实上，只要找出一个完全的负常曲率曲面就够了（如上所述，这样一个曲面的万有覆叠是完全、单连通的）．在此，仅考虑正则曲面（在任意一点至少是 2 次连续可微的，即是 C^2 类曲面）．

早在 1901 年，Hilbert 就从否定的角度解决了这个问题（参看 [2]），即在 3 维 Euclid 空间中不存在任何完全的正则负常曲率曲面．这个定理在几十年间吸引了几何学家的注意，一直延续至今．原因是有许多有趣的问题与该定理及其证明有关（参看下面的讨论）．在负常曲率旋转曲面上出现奇异线不是碰巧发生的，而是与 Hilbert 定理相一致的．

在任意拓扑结构的曲面上的 Hilbert 定理的证明具有特殊的兴趣，因为对此而言万有覆叠曲面的概念是实质性的．这个概念把问题归结为拓扑上最简单的曲面，即单连通曲面．Hilbert 定理显然是阐明这个概念的最早的数学命题之一．在 Hilbert 陈述他的定理证明的第一篇文章发表之后，关于其证明正确性的疑问也随之产生了．质疑与渐近曲线的无限性态有关，它们在曲面上的研究要依据该曲面的拓扑的复杂性．甚至有人提议 Hilbert 应该改善他的证明使之更精确．尽管如此，Hilbert 的证明是相当完美无缺的．如果 Hilbert 明确地声明研究的对象是完全单连通的负常曲率流形，即 Лобачевский 平面本身，而假定它能等距地正

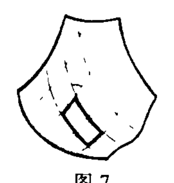


图 7

则浸入在 3 维 Euclid 空间中，则质疑或许就不产生。

Чебышев 网（Chebyshev net），即每个网四边形的对边长度相等的网（图 7），意外地出现在 Hilbert 的证明中也是十分有意思的．而且在负常曲率曲面情形、**渐近网**（asymptotic net）（它在负曲率曲面上有定义，且非退化）是 Чебышев 网．取这个网为坐标网：$u=$ 常数，$v=$ 常数，则线素取 Чебышев 形式

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega du dv + dv^2, \qquad (1)$$

其中 ω 是网的夹角．假定曲面是正则、完全、单连通的，并且考虑到网的 Чебышев 性质，则能证明 u, v 取所有的值：$-\infty < u < \infty$，$-\infty < v < \infty$；它们穷竭整个网．换言之，渐近曲线网在大范围上与 Euclid 坐标平面中的 Descartes 网是同胚的（见 [9]）．另一方面，假定 Gauss 曲率是常数，比如设 $K = -1$，从 (1) 得到方程

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} = \sin\omega, \qquad (2)$$

根据几何上的考虑则有限制

$$0 < \omega < \pi. \qquad (3)$$

Hilbert 证明方程 (2) 在全平面上不能有服从条件 (3) 的正则解 $\omega = \omega(u, v)$，因此完全的 Лобачевский 平面不能正则地等距嵌入到 3 维 Euclid 空间中去．如前面所解释的那样，该定理可叙述成更一般的形式：在 3 维 Euclid 空间中不存在完全的正则的负常数曲率曲面（不管它的拓扑结构如何）．

在各种数学领域中往往会有一个特别的命题或一个特殊的问题在整个领域的发展中具有绝对的重要性．在微分几何中 Hilbert 定理曾经是、而且将继续是这样的一种论断，专门刊载它的大量出版物就是明证．该定理中的趣味主要来自其证明中不同观念和概念的结合（例如，万有覆叠和 Чебышев 网）．与物理学的联系也随后建立了．

结果是，若写成稍微不同的样子，且放弃限制 (3)，则方程 (2) 表示在超导理论中加在所谓的 Josephen 效应的势上的条件．物理学家已经把方程 (2) 命名为 “sine-Gordon” 方程．利用方程 (2) 与负曲率曲面论的联系（见 [13]，[14]）．方程的某些解已经被发现成封闭的形式，它们在全平面上是正则的．

S.E.Cohn-Vossen 提出（参见 [15]），远比 Hilbert 定理一般的定理也成立；即关于 Gauss 曲率的条件 $K=$ 常数 <0 能够用条件 $K \leqslant$ 常数 <0 代替．但是直到 60 年代开始没有发现任何定理包括 Hilbert 定理作为它的特殊情形．只是到了 1961 年才证明了 Hilbert 定理的改进，即证明了关于变负曲率曲面的一个定理，而 Hilbert 定理是它的一个极限情形．换言之，负常曲率曲面的那些产生 Hilbert 定理结果（破坏正则性）的性质以及该结果本身可以在逼近的意义下去理解．在证

明中找到了一个变曲率情形下的方程，它是方程(2)的推广：

$$k^2 \frac{\partial}{\partial s_2}\left[\frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial s_1}\right]=\{k^2+A+\alpha|\operatorname{grad}\omega|\}\sin\omega, \tag{4}$$

其中 ω 的意义如前所述，$k^2=-K$，微分是沿渐近曲线弧取的，A 和 α 是变量，它们的绝对值有一个内在估计，即仅与嵌入度量有关的估计．当 $K=$ 常数时，则得 $A=0$、$\alpha=0$，方程(4)成为方程(2).

在变曲率情形，已得到方程(参看[17])

$$L_{s_2}L^{*}_{s_1}(\omega)=M\sin\omega, \tag{5}$$

其中 L_{s_2} 是线性算子，与沿第二族渐近曲线弧的微分算子成比例，而 $L^{*}_{s_1}$ 是类似结构的拟线性算子．重要的是在度量上给出一定条件的函数 M 有一个以正数为下界的内在估计．由于这个估计以及左边的构造，方程(5)与方程(2)是类似的．因此，在度量上赋予这些条件，则与 Hilbert 的证明一致的论证能够继续进行(虽然要复杂得多)，并且产生类似的结果．这样，首次获得了 Hilbert 定理的推广(见[18]).至于上面提到的加在度量上的条件，包含在下列要求之中：Gauss 曲率K有不等于零的界并且变化缓慢．例如当 $K\leqslant -1$ 时，曲率变化缓慢是指 K 沿任何测地线弧的1阶导数和2阶导数都充分地小．作出足够的估计使得在计算中，由Hilbert 给出的上述论证能够用于方程(5).这些估计用记成 h,Δ 的正常数表示(见[19]).因此，有缓慢变化的负曲率的度量称为 (h,Δ) 度量 ((h,Δ)-metric)(其定义可见[18],或[19])；而且，当 $\Delta=+\infty$ 时，所得的是常曲率度量．于是，一个完全的 (h,Δ) 度量不容许有在三维 Euclid 空间中的正则等距浸入．

沿着上面所指示的路线，即利用曲面论的微分方程，将 Hilbert 定理推广成在1930年间所叙述的形式(关于曲率性态的特征不加限制，参看[12])的问题至今未获得成功．但是，沿着完全不同的路线，即细致地研究负曲率曲面的球面映象的边界性质，获得了该问题的一个解．利用这种方法已经证明([19],[20]) Gauss 曲率 $K\leqslant$ 常数 <0 的完全度量不容许有在 E^3 中的正则等距浸入．这回答了经典形式问题．同时也证明了在 E^3 中每一个有负 Gauss 曲率的完全正则曲面上成立等式

$$\sup K=0. \tag{6}$$

此处，C^2 正则性是足够的．但是，在 $C^{1,1}$ 情形存在反例(表成弱的非正则曲面，参看[7])．对于这些结果可参阅[39].

除了(6)式外，已经得到了对于 E^3 中所有负曲率曲面都成立的其他一些等式和估计(参看[21]).而且证明(6)的方法使得有可能获得这样的定理，它给出充分的判据保证从一个平面到一个平面上的有负 Jacobi 的映射不仅是局部可微同胚，而且是整体可微同胚．

不管现已得到的结果如何，关于 (h,Δ) 度量和其他有缓慢变化曲率的度量(如 q 度量，参看[9])的研究仍旧是合适的．情况是对于曲率缓慢变化的度量的浸入所建立的某些结果在更一般的负曲率度量的情形下是不发生的(例如，参看[9]中关于简单带状区域上的定理)．粗略地说，曲率变化得越慢，负曲率度量在 E^3 中的浸入越困难．在常曲率度量的情形，这是特别引人注意的(参看[9]中加强的 Hilbert 定理)．至于与 (h,Δ) 度量可浸入性问题相联系的微分方程，它们被实质性地用于其他问题的研究．确实，已经用这些方程证明了关于负曲率曲面的内在性质与外在性质相互关联的许多很强的定理；包括关于负曲率曲面的曲率的外在正则性与其度量正则性的依赖关系的定理(参看[7]).

负曲率曲面度量的正则性对于曲面的外在正则性的影响具有特殊的兴趣，因为负曲率曲面构成一类能够用纯几何方式定义的特殊曲面(有趣的是对于凸曲面类纯几何的定义也是可能的)．这类曲面称为鞍状(saddle-like)曲面．在某种意义上说，鞍状曲面是凸曲面的相反情况(见[22]−[25]).

在 Euclid 空间中完全负曲率 $K\leqslant$ 常数 <0 的曲面不存在性定理在曲面能够单一地投射到一个平面上，即它能够表成函数 $z=f(x,y)$ 的图的情形，有特别加强的形式．此时，对于曲面的延伸存在通用的估计，而它的完全性变得不那么重要了．已经证明了下列定理(由 Н.В.Ефимов 证明，见[26]):

1)若一个曲面能正则地投射在边长为 a,b 的矩形上，Gauss 曲率 $K\leqslant-\alpha^2=$ 常数 <0，则不等式 $\sqrt{\alpha}\geqslant C_1+\varepsilon(\varepsilon>0)$ 蕴含着不等式 $a\sqrt{\alpha}\leqslant C_1+C_2/\varepsilon$，其中 C_1,C_2 是通用常数(如 $C_1=4\pi, C_2=12\pi$);

2)设 a,b 如前，且(为简便起见)设 $\alpha=1$，则 $a\leqslant 18.9$.

假定已知有负 Gauss 曲率 K 的度量 ds^2，令 $k=\sqrt{-K}$．设度量 ds^2 浸入在 E^3 中，l,m,n是其第二基本形式的约化系数(约化是指满足方程 $ln-m^2=-K$)．在浸入问题中，l,m,n 是未知函数．Riemann不变量(Riemann invariants)是作为新的未知函数引进的：

$$r=\frac{m+k}{n},\quad s=\frac{m-k}{n}.$$

曲面论基本方程组将采取对称形式

$$\left.\begin{aligned} r_x+sr_y&=A_0+A_1r+A_2s+A_3r^2+A_4rs+A_5r^2s,\\ s_x+rs_y&=A_0+A_1s+A_2r+A_3s^2+A_4rs+A_5s^2r,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中 $A_0,\cdots,A_5$ 是只用度量 ds_2 表达的量．

已经证明曲率 $K \leqslant$ 常数 <0 的完全曲面不容许有在 E^3 中的正则等距浸入．关于负曲率的2维流形在 E^3 中等距浸入的可能性的结果能够限制在完全流形的一部分．流形本身可假定是单连通的．这样，已经证明（见[29],[30]）曲率 $K \leqslant$ 常数 <0 的任何正则流形上每一个测地圆盘能够正则地等距浸入到 E^3 中去．该定理是一个更一般的定理的推论：在负曲率 $K \leqslant$ 常数 <0 的完全曲面度量的正则性上加一定的自然条件，则该流形上每一个无限的等宽带都能够正则地等距浸入到 E^3 中去．这个定理是形如（7）的双曲型拟线性方程组（此处 $r \neq s$）解的存在性定理的一个结果．

能够构造曲率变号的单连通流形的例子，使得在它上面存在测地圆盘不能等距地浸入到 E^3 中去（参看[10]）．已经证明（[31]），若在负曲率 $K \leqslant$ 常数 <0 的单连通曲面的完全度量上加一定的条件，则该流形上在任意一个极限圆的内部都能够等距地浸入到 E^3 中去．于是，对于负曲率 $K \leqslant$ 常数 <0 的单连通曲面已经证明了所有与部分 Лобачевский 平面相应的紧和非紧部分的等距浸入是可能的，至于部分 Лобаческий 平面的等距浸入，通过 Minding 和 Beltrami 的工作，这是已经知道的．

Gauss 曲率 $K=$ 常数 <0 的度量的浸入，即部分 Лобачевский 平面的浸入已经作过研究．已经证明 Лобачевский 平面的所有多边形，甚至于它们的无限延伸，能够等距地浸入在 E^3 中；关于这种浸入的新结果见 [40]－[42]．

由于 E^3 中负曲率完全曲面的拓扑类型的多样性，有必要考虑这个太大的类中满足某些补充条件的子类．特别自然的是有一一的（单叶的（single-sheeted））球面映射的负曲率完全曲面的子类（见[33]）．若该类的一个曲面 F 没有自交点，则它是单连通的，或双连通的．如果这样的一个曲面 F 有一个尖角，则利用鞍状尖角的无界性（[34]），能得到这个曲面的许多外在几何性质：F 能用 (x, y) 平面上去掉一个紧凸集所得的区域上的方程 $z=f(x,y)$ 来定义；F 有一个由对应于尖角的射线与对应于曲面的杯口的凸锥组成的极限锥 $A(F)$；F 的球面象的闭包 F^* 以一个开半球及一个开凸集作为它在球面上的补集（图 8－10）．

对于有一一球面映射的其他类型的负曲率完全曲面也研究过许多类似的问题．

另一类曲面由于它自身的性质以及其球面映射的性质而饶有兴趣，这就是负曲率的可缩曲面（contractible surfaces of negative curvature）类（见[36],[37]）．该类曲面的例子是方程 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=a^2$ 所定义的曲面．在其众多性质中，可缩负曲率曲面仿佛是一个闭曲面．它的球面象能看作有边界的 Riemann 曲面，它的每个分支是落在大圆之一上的球面折线．

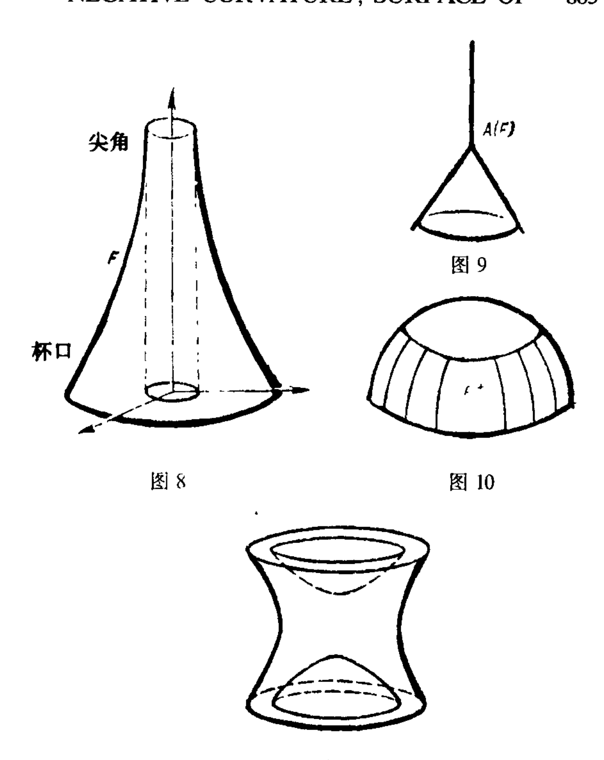


图 8　图 9　图 10　图 11

在伪 Euclid 空间 $E^3_{2,1}$ 中负曲率曲面的理论看上去是不同的．在这个空间中负曲率曲面是凸的；此处的曲率按通常的方式理解为由外围空间诱导的度量的曲率．现在假定它是负的．

空间 $E^3_{2,1}$ 中的单位球面由三个连通分支 L_1, L_2, L_3 组成（图 11）．分支 L_1, L_2 是凸曲面，上面有负常曲率的正定度量；这些曲面提供了 Лобачевский 几何的熟知的解释．曲面 L_3 是鞍状面，在上面诱导出正常曲率的不定度量，称为2维 de Sitte 度量．

有正定度量的负曲率曲面构成 $E^3_{2,1}$ 中自然而广泛的一类曲面，推广了曲面 L_1, L_2 的性质，如同在 Euclid 空间中正曲率曲面类是球面的推广（见[38]）．

全曲率有限的有正定度量的负曲率曲面的性质已被彻底地研究过了．这些曲面的性质类似于 Euclid 空间中曲率小于 2π 的凸曲面（Оловянишников 曲面类）的性质．即，有限全曲率 $\widetilde{K}$ 的负曲率完全正定度量以及具备这个度量的流形上的一条测地射线 γ 唯一地决定一个凸曲面，它有已知的极限锥，该锥面的全曲率为 $\widetilde{K}$，无迷向的母线，且有一条母线为射线 γ 的极限．所得到的曲面的正则性由度量的正则性所决定．

有不定度量的负曲率完全曲面也是凸的．但是，它们的性质部分地与 Euclid 空间中鞍状曲面的性质是一致的．特别地，估计式 $\sup K=0$ 对于它们是成立的．这些曲面也应当对应于空间 $E^3_{2,1}$ 中的单位球面的分支 L_3，然而后者不是凸的．在这里，曲面的 Gauss 曲率符号以及度量形式的行列式符号起着决定性作用．

参考文献

[1] Hadamard, J., Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesique, *J. Math. Pures Appl.*, **4** (1898), 27 – 73.

[2] Hilbert, D., Ueber Flachen von konstanter Gausscher Krummung, in Gesammelte Abhandlungen, Vol. 2, Springer, 1933, 437 – 448.

[3] Bianchi, L., Lezioni di geometria differentiale, 3ed., Vol. 1, part 1, Bologna, 1927.

[4] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., Москва, 1978 (中译本: Н. В. 叶菲莫夫, 高等几何学, 上、下册, 高等教育出版社, 1959).

[5] Норден, А. П., Теория поверхностей, Москва, 1956 (中译本: А. П. 诺尔金, 曲面论, 高等教育出版社, 1965).

[6] Розендорн, Э. Р., 《Успехи матем. наук》, **16** (1961), 2, 149 – 156.

[7] Розендорн, Э. Р., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 5, 59 – 116.

[8] Аминов. Ю. А., 《Укр. геометр. сб.》, **13** (1973), 3 – 9.

[9] Ефимов, Н. В., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 5, 3 – 58.

[10] Позняк, Э. Г., 《Успехи матем. наук》, **28** (1973), 4, 47 – 76.

[11] Позняк, Э. Г., Шикин, Е. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, Москва, 1974, 171 – 207.

[12] Позняк, Э. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Проблеты геометрии, т. 8, Москва, 1977, 225 – 241.

[13] Грибков, И. В., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механика》, 1977, 4, 78 – 83.

[14] Грибков, И. В., 《Успехи матем. наук》, **33** (1978), 2, 191 – 192.

[15] Кон-Фоссен, С. Э., 《Успехи матем. наук》, **1** (1936), 33 – 76.

[16] Ефимов, Н. В., 《Докл. АН СССР》, **136** (1961), 6, 1283 – 1286.

[17] Ефимов, Н. В., Позняк, Э. Г., 《Докл. АН СССР》, **137** (1961), 1, 25 – 27.

[18] Ефимов, Н. В., Позняк, Э. Г., 《Докл. АН СССР》, **137** (1961), 3, 509 – 512.

[19] Ефимов, Н. В., 《Докл. АН СССР》, **150** (1963), 6, 1206 – 1209.

[20] Ефимов, Н. В., 《Матем. сб.》, **64** (1964), 2, 286 – 320.

[21] Ефимов, Н. В., 《Матем. сб.》, **76** (1968), 4, 499 – 512.

[22] Шефель, С. З., Исследования по геометрии седловых поверхностей, Новосиб., 1963.

[23] Шефель, С. З., 《Сиб. матем. ж.》, **5** (1964), 6, 1382 – 1396.

[24] Шефель, С. З., 《Сиб. матем. ж.》, **8** (1967), 3, 705 – 714.

[25] Шефель, С. З., 《Докл. АН СССР》, **162** (1965), 2, 294 – 296.

[26] Ефимов, Н. В., 《Матем. сб.》, **100** (1976), 3, 356 – 363.

[27] Ефимов, Н. В., 《Докл. АН СССР》, **93** (1953), 4, 609 – 611.

[28] Heinz, E., Ueber Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, *Math. Ann.*, **129** (1955), 5, 451 – 454.

[29] Позняк, Э. Г., 《Докл. АН СССР》, **170** (1966), 786 – 789.

[30] Позняк, Э. Г., 《Укр. геометр. сб.》, **3** (1966), 78 – 92.

[31] Шикин, Е. В., 《Докл. АН СССР》, **215** (1974), 1, 61 – 63.

[32] Рождественский, Б. Л., 《Докл. АН СССР》, **143** (1962), 1, 50 – 52.

[33] Вернер, А. Л., 《Матем. сб.》, **74** (1967), 2, 218 – 240, **75** (1968), 112 – 139; **77** (1968), 136.

[34] Вернер, А. Л., 《Сиб. матем. ж.》, **11** (1970), 1, 20 – 29; **11** (1970), 4, 750 – 769.

[35] Вернер, А. Л., 《Матем. заметки》, **12** (1972), 3, 281 – 286.

[36] Соколов, Д. Д., 《Успехи матем. наук》, **30** (1975), 1, 261 – 262; **33** (1978), 4, 227 – 228; **34** (1979), 3, 213 – 214.

[37] Алексендров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948 (中译本: А. Д. 亚历山大洛夫, 凸曲面的内蕴几何学, 科学出版社, 1962).

[38] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

[39] Klotz Milnor, T., Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature, *Adv. in Math.*, **8** (1972), 3, 474 – 543.

[40] Туницкий, D. В., 《Матем. сб.》, **134** (1987), 119 – 134.

[41] Кайдасов, Ц., Шикин, Е. В., 《Матем. заметки》, **39** (1986), 612 – 617.

[42] Кайдасов, Ц., Шикин, Е. В., 《Матем. заметки》, **42** (1987), 842 – 851.

Н. В. Ефимов 撰

【补注】 Hilbert 关于负常曲率曲面不能等距地嵌入 E^3 的结果需要 C^2 正则性. 这里也运用了 C^1 等距嵌入的一般方法, [A1], [A2].

参考文献

[A1] Kuiper, N. H., On C^1-isometric imbeddings I, *Indag. Math.*, **17** (1955), 4, 545 – 556.

[A2] Kuiper, N. H., On C^1-isometric imbeddings II, *Indag. Math.*, **17** (1955), 5, 683 – 689.

[A3] Berger, M. and Gostiaux, M., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988 (译自法文).

[A4] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978(译自德文).
[A5] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1961.
[A6] Pogorelov, A. V., Intrinsic geometry of surfaces, Amer. Math. Soc., 1973(译自俄文).
[A7] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 3, 5, Publish or Perish, 1975.
[A8] Gromov, M., Partial differential relations, Springer, 1986.
[A9] Gromov, M., Embeddings and immersions in Riemannian geometry, *Russian Math. Survey*., **25** (1970), 5, 1-58.
陈维桓 译

负指数分布 [**negative exponential distribution**; **отрицательное показательное распределение**]

同**指数分布**(exponential distribution).

负超几何分布 [**negative hypergeometric distribution**; **отрицательное гипергеометрическое распределение**]

取非负整数值的随机变量 X 的一种概率分布，它由公式

$$\mathrm{P}\{X=k\}=\frac{\binom{k+m-1}{k}\binom{N-m-k}{M-m}}{\binom{N}{M}},$$

$$0\leqslant k\leqslant N-M \qquad (*)$$

定义．其中参数 N, M, m 是满足条件 $m\leqslant M\leqslant N$ 的非负整数．负超几何分布经常出现于不放回抽样方案中．如果在容量为 N 的总体中有 M 个“有标志”与 $N-M$ 个“无标志”元，又如果采样(不放回)至“有标志”元的数量达到一定数目 m 为止，那么此样本中“无标志”元的数量为一随机变量 X，它有负超几何分布(*)．随机变量 $X+m$——样本容量——也服从负超几何分布．分布(*)之所以称为负超几何分布，是因为它类似于**负二项分布**(negative binomial distribution)，后者以同一方式出现于放回抽样中．

负超几何分布的数学期望与方差分别等于

$$m\,\frac{N-M}{M+1}$$

与

$$m\,\frac{(N+1)(N-M)}{(M+1)(M+2)}\left[1-\frac{m}{M+1}\right].$$

当 $N, M, N-M\to\infty$ 且使 $M/N\to p, (N-M)/N\to q, p+q=1$ 时，负超几何分布趋于参数为 m 与 p 的负二项分布．

参数为 N、M, m 的负超几何分布的分布函数 $F(n)$，通过关系式

$$F(n)=1-G(m-1),$$

与参数为 N, M, n 的**超几何分布**(hypergeometric distribution)相联系．这意味着在解决数理统计中与负超几何分布有关的问题时，可以利用超几何分布表．负超几何分布常用于**统计质量控制**(statistical quality control).

参考文献

[1] Беляев, Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.
[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., 1968.
А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Distributions in statistics, discrete distributions, Wiley, 1969.
[A2] Patil, G. P., Joshi, S. W., A dictionary and bibliography of discrete distributions, Hafner, 1968.
潘一民 译

负多项分布 [**negative polynomial distribution** 或 negative multinomial distribution; **отрицательное полиномиальное распределение**]

取非负整数 $m=0,1,\cdots$ 为值的随机变量 $X_1,\cdots,X_k$ 的联合**概率分布**(probability distribution)(亦见**联合分布**(joint distribution))，由如下关系式定义

$$\mathrm{P}\{X_1=m_1,\cdots,X_k=m_k\}=$$
$$=\frac{\Gamma(r+m_1+\cdots+m_k)}{\Gamma(r)m_1!\cdots m_k!}\,p_0^r p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}, \qquad (*)$$

其中 $r>0$ 和 $p_0,\cdots,p_k\,(0<p_i<1,\ i=0,\cdots,k;\ p_0+\cdots+p_k=1)$ 是分布参数．负多项分布是多维**离散分布**(discrete distribution)——具有非负整数值分量的随机向量的分布．

参数为 $r, p_0,\cdots,p_k$ 的负多项分布的**生成函数**(generating function)为

$$P(z_1,\cdots,z_k)=p_0^r\left[1-\sum_{i=1}^{k}z_ip_i\right]^{-r}.$$

负多项分布出现在如下多项概形中．进行一系列独立试验，每次试验有 $k+1$ 种不同的结局，其编号分别为 $0,1,\cdots,k$，其概率相应为 $p_0,\cdots,p_k$．试验进行到第 r 次出现编号为0的结局为止(这里 r 是整数)．假如 X_i 是试验结束前编号为 $i\,(i=1,\cdots,k)$ 的结局出现的次数，那么公式(*)是在编号为0的结局第 r 次出现之前，编号为 $1,\cdots,k$ 的结局相应出现 $m_1,\cdots,m_k$ 次的概率．负多项分布、在此意义上是**负二项分布**(negative binomial distribution)的推广，且当 $k=1$ 时与负二项分布重合．

如果随机向量$(X_0,\cdots,X_k)$服从参数为$n>1$，p_0，$\cdots,p_k$的**多项分布**(multinomial distribution)，其中参数n本身是随机变量，服从参数为$r>0$和$0<\pi<1$的负二项分布，则向量$(X_1,\cdots,X_k)$在$X_0=r$的条件下的分布是负多项分布，参数为$r,p_0(1-\pi),\cdots,p_k(1-\pi)$.

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Neyman, J., Proceedings of the international symposium on discrete distributions, Montreal, 1963.

周概容 译

函数的负变差 [negative variation of a function; отрицательная вариация функции]，函数的负增量(negative increment of a function)

定义在给定区间上其和为**函数的变差**(variation of a function)或完全增量的两项中之一项．设f为区间$[a,b]$上定义的实变量函数并取有限值．

令$\Pi=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$为$[a,b]$的任意分划，并令

$$N_\Pi(f)=-\sum_i{}^-[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

其中求和遍及使差$f(x_i)-f(x_{i-1})$非正的那些指标i．量

$$N(f)\equiv N(f;[a,b])=\sup_\Pi N_\Pi(f)$$

称为f在区间$[a,b]$上的负变差(负增量)．我们恒有$0\leqslant N(f)\leqslant+\infty$．亦见**函数的正变差**(positive variation of a function)；**函数的变差**(variation of a function)．

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

Б. И. Голубов 撰 郑维行 译 沈祖和 校

负向量丛 [negative vector bundle; отрицательное расслоение]

一个在**复空间**(complex space) X上的全纯**向量丛**(vector bundle)(亦见**解析向量丛**(vector bundle, analytic)) E具有一 Hermite **度量**(Hermite metric) h，使得在E上的函数$v\to h(v,v)$在零截面的外面是强拟凸的(记为$E<0$)．向量丛E是负的，当且仅当对偶向量丛$E^*>0$(见**正向量丛**(positive vector bundle))．如果X是一流形，那么负的条件可以用度量h的曲率来表示．一负量丛的任一子丛都是负的．一复流形上的向量丛E称为在 Nakano 意义下是负的(negative in the sense of Nakano)，如果E^*是在 Nakano 意义下是正的．在一紧复空间X上的一全纯向量丛E称为弱负的(weakly negative)，如果它的零截面在E中具有一强拟凸邻域，即如果E^*是弱正的．X上的每一负向量丛都是弱负的．一空间X上的负和弱负线性空间也可照此方法定义．

有关文献见**正向量丛**(positive vector bundle)．

А. Л. Онищик 撰 钟同德 译

邻域 [neighbourhood; окрестность]，拓扑空间中点x(集合A)的

该空间中含有点x(集合A)的任何开集．有时，该拓扑空间中任何集合，如果其内部含有点x(集合A)，也称为点x(集合A)的邻域(亦见**集合的内部**(interior of a set))．

Б. А. Пасынков 撰 胡师度、白苏华 译

Neil 抛物线 [Neil parabola; Нейля парабола]

半立方抛物线(semi-cubic parabola)，因 W. Neil 而得名，他于 1657 年求出这一曲线的弧长．

Некрасов 积分方程 [Nekrasov integral equation; Некрасова интегральное уравнение]

形如

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b[\varphi(y)+R(\lambda,y,\varphi(y))]K(x,y)dy \tag{*}$$

的非线性积分方程，其中R，K是已知函数，K是对称的，φ是未知函数，λ是数值参数．这类积分方程是 А. И. Некрасов(见[1])在求解出现于流体表面上波动理论的问题时得到的． Некрасов 在某些条件下以小参数的幂级数形式构造了(*)的解，并用强级数法证明其收敛性．

有时(*)型方程称为 **Hammerstein 方程**(Hammerstein equation)，尽管 Некрасов ([2]) 在 A. Hammerstein([3]) 之前发表了他的研究．

参考文献

[1] Некрасов, А. И., Собр. соч., т. 1, М., 1961.
[2] Некрасов, А. И., 《Изв. Иваново-Возн. политехн. ин-та》, **6** (1922), 155－171.
[3] Hammerstein, A., Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, *Acta Math.*, **54** (1930), 117－176.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zabreyko [Zabreĭko], P. P., et al., Integral equations —— a reference text, Noordhoff, 1975.

沈永欢 译

Néron 模型 [Néron model; Нерона модель]，Abel 簇的

与 **Abel 簇**(Abelian variety)相关联、具有某种极

小性质的**群概形**(group scheme).如果 R 是局部 Hensel 离散赋值环，具有剩余域 k 和分式域 K, 又如果 A 是 K 上 d 维 Abel 簇，则 A 的 Néron模型定义为 R 上的光滑交换群概形 $\mathfrak{A}$，它的一般纤维 $\mathfrak{A}_K$ 同构于 A，而典范同态 $\mathfrak{A}(R) \to \mathfrak{A}_K(K)$ 是一个同构.这个概念是 A.Néron ([1]) 在完满域的情形下引入的．在局部的情形，Néron 模型存在，并且在相差一个 R 同构的意义下唯一. Néron 模型有以下的极小性质：对于任意的光滑 R 概形 $\mathfrak{X}$ 以及一般纤维的态射 $\varphi:\mathfrak{X}_K \to \mathfrak{A}_K$，存在由 φ 诱导的 R 概形的唯一态射 $\overline{\varphi}:\mathfrak{X} \to \mathfrak{A}$.

如果 S 是一维正则 Noether 概形，η 是它的一般点，$i:\eta \to S$ 是典范嵌入，A 是 $k(\eta)$ 上的 Abel 簇，则 A 的 Néron 模型被定义为 S 上光滑拟射影群概形 $\mathfrak{A}$，它代表了相对于 S 上平坦 Grothendieck 拓扑的层 i_*A (见[4]).

关于 Néron 模型的概念到任意概形的推广可参见[3].

参考文献

[1] Néron, A., Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. Math. IHES*, **21** (1964).

[2] Mazur, B., Rational points of Abelian varieties with values in towers of number fields, *Invent. Math.*, **18** (1974), 183－266.

[3] Raynaud, M., Modèles de Néron, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **262** (1966), 345－347.

[4] Raynaud, M., Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes (d'après Ogg-Shafarévitch et Grothendieck), in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland & Masson, 1968, 12－30.

[5] Grothendieck, A., et al. (eds.), Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA7, Lecture notes in math., 288, Springer, 1972.

И.В.Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Artin, M., Néron models, in G. Cornell and J. Silverman (eds.): Arithmetic Geometry, Springer, 1986, 213－230.

陈志杰 译

Néron-Severi 群 [Néron-Severi group; Нерона-Севери группа]

非异射影簇上除子的代数等价类群.

设 X 是定义在代数闭域 k 上的、维数 $\geqslant 2$ 的非异射影簇，设 $D(X)$ 是 X 的除子群，$D_a(X)$ 是代数等价于零的除子子群．商群 $D(X)/D_a(X)$ 称为 X 的 Néron-Severi 群，记为 $\mathrm{NS}(X)$. Néron-Severi 定理 (Néron-Severi theorem) 断言 Abel 群 $\mathrm{NS}(X)$ 是有限生成的.

在 $k=\mathbf{C}$ 的情形下，F.Severi 在一系列关于基底理论的论文中(见[1]) 利用拓扑和超越工具给出了这个定理的一个证明．第一个抽象证明(对任意特征数的域均有效)是由 A.Néron 给出的(见[2],[3],[4]).

$\mathrm{NS}(X)$ 的秩是 X 上除子群的代数 **Betti 数**(Betty number), 即 X 的代数秩.它也被称为簇 X 的 Picard 数(Picard number). 有限挠子群 $\mathrm{NS}_{\mathrm{tors}}(X)$ 的元素称为 Severi 除子(Severi divisor)，这个子群的阶称为 Severi 数(Severi number); 群 $\mathrm{NS}_{\mathrm{tors}}(X)$ 是一个双有理不变量(见[6]).

Néron-Severi 定理可被推广到代数闭链的其他等价类的群(见[1])(古典理论)及[7](现代理论).

参考文献

[1] Severi, F., La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche, *Mem. Accad. Ital.*, **5** (1934), 239－283.

[2] Néron, A., Problèmes arithmétiques et géometriques attachée à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps, *Bull. Soc. Math. France*, **80** (1952), 101－166.

[3] Néron, A., La théorie de la base pour les diviseurs sur les variétés algébriques, in 2ᵉ *Coll. Géom. Alg. Liège*, G. Thone, 1952, 119－126.

[4] Lang, S. and Néron, A., Rational points of abelian varieties over function fields, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 95－118.

[5] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[6] Baldassarri, M., Algebraic varieties, Springer, 1956.

[7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия., **12** (1974), М., 77－170.

В.А.Исковских 撰

【补注】盐田徹治 (T.Shioda) 对一些代数簇的 Picard 数作了研究.

术语"基底理论"是一个老式术语，它的内容包括证明 $\mathrm{NS}(X)$ 是有限生成 Abel 群，并明显地给出生成元的一个极小集(用 Severi 的话，是一个极小基(minimal base))，可参见[A4], Sect. V.7 (对于曲面的情形).

参考文献

[A1] Shioda, T., On the Picard number of a complex projective variety, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **14** (1981), 303－321.

[A2] Shioda, T., On the Picard number of a Fermat surface, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **28** (1982), 724－734.

[A3] Shioda, T., An explicit algorithm for computing the Picard number of certain algebraic surfaces, *Amer. J. Math.*, **108** (1986), 415－432.

[A4] Zariski, O., Algebraic surfaces, Springer, 1935.

陈志杰 译

集族的神经 [nerve of a family of sets; нерв семейства множеств]

以集族 α 中相交非空的任何有限多个子集作为单

形的**单纯复形**(simplicial complex) $K(\alpha)$. 特别是，$K(\alpha)$ 的顶点就是 α 的非空元素.

М. И. Войцеховский 撰 胡师度、白苏华 译

网 [**net**; **связка**]

平面内曲线或空间内曲面的双参数族，它们以下述方式线性地依赖于参数：设 F_1, F_2, F_3 是两个变量的函数，任何一个都不是其余两个的线性组合. 由方程

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0,$$

其中参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 取遍除 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 以外的一切可能值，定义的平面内曲线的族就是一个网(事实上它仅依赖于比值 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$). 空间内曲面的网的方程可类似地写出. 三个方程 $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ 给出了网的三个元素(三条曲线或三个曲面)，它们确定了整个网.

直线网(net of lines)是直线的集合，其中任两条都位于同一平面上. 在 Euclid 几何学里，直线网是通过一个点的所有直线的集合. 如果这个点是有限的，这个网称为椭圆型的(elliptic)，如果这是无穷远点，则这个网是抛物型的(parabolic).

平面网(net of planes)是通过一个点的所有平面的集合(非退化网(non-degenerate net))或者是平行于某条直线的平面的集合(退化网(degenerate net)).

圆网(net of circles)是线性地依赖于参数的圆的双参数族. 圆的非退化网是这样的圆的集合，一个给定的点(网的中心(centre))相对于这些圆有给定的幂. 圆的退化网(degenerate net)是圆心位于某条固定直线(所谓基本直线(fundamental straight line))上的圆的集合(见图 1).

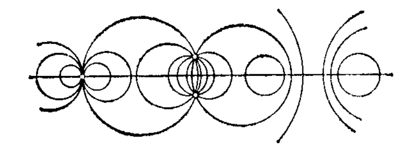


图 1

如果 $(0,0)$ 是非退化网的中心，则它的方程是

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0, a^2 + b^2 > p,$$

其中 a 和 b 是定义圆的参数，p 是网的中心关于它的圆的幂(假设退化网的幂是无限的).

有三类非退化圆网：

1)双曲型圆网(hyperbolic circle net)($p > 0$)，由与一个给定的圆(基本圆(fundamental circle))正交的圆所组成(见图 2).

2)抛物型圆网(parabolic circle net)($p = 0$)，由通过一个给定点(网的中心(centre))的圆所组成(见图 3).

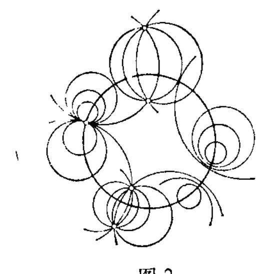


图 2

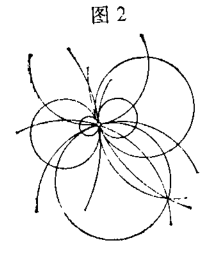


图 3

3)椭圆型圆网(elliptic circle net)($p < 0$)，由与一个定圆相交于这个定圆的两个对径点的圆所组成(见图 4).

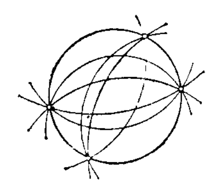


图 4

两个圆网的相交是一个圆束. 一个椭圆圆网只包含椭圆圆束，抛物网仅包含椭圆和抛物束，双曲网包含三种类型的非退化束. 退化网包含退化束和所有三种类型的非退化束.

当一个网是椭圆的时，两个网的相交只能是椭圆束. 当一个网是抛物的时，两个网的相交只能是椭圆或抛物束. 当一个网是非退化的时，两个网的相交只能是非退化束.

球面网(net of spheres)是线性地依赖于参数的球面的双参数族. 一个球面网是由这样的球面的集合组成：某条直线(根轴(radical axis))上的点相对于这些球面有同样的幂(对于不同的点有不同的幂). 根轴与网中的所有球面交于两个点. 根据这些点是实的(不同的)，复共轭的或重合的，球面网被称为椭圆型的(elliptic)(由通过两个公共点的球面组成)，双曲型的(hyperbolic)(由与两个相交的球面正交的球面组合)或抛物型的(parabolic)(由与一条定直线切于一个定点的球面组成). 一个网的所有球面的中心位于根轴的一个垂直平面上.

球面网是两个**球面罗**(web of spheres)的公共球面的集合.

在射影几何学里，网是通过定点的所有直线的集合和所有平面的集合.

参考文献

[1] Постников, М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.

[2] Моденов, П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969.

А.Б.Иванов 撰

【补注】对于二维线性曲线或曲面系统，也用词把 (*bundle*) 代替"网".

[A1] Todd, J. A., Projective and analytical geometry, Pitman, 1947, Chapt. VI.

陈志杰 译

网(有向集) [net (directed set); сеть]

一个**有向集** (directed set) 到一个 (拓扑) 空间中的映射.

М.И.Войцеховский 撰

【补注】一个空间的拓扑能够完全用收敛性来描述. 然而, 这需要比序列收敛性概念更一般的收敛性概念. 所需要的正是网的收敛 (convergence of nets). 拓扑空间 X 中一个网 $S:D\to X$ 收敛到一个点 $s\in X$, 如果对 s 在 X 中每一个开邻域 U, 网 S 最终在 U 中 (eventually in U). 最后的短语是指存在一个 $m\in D$, 使得对 D 中所有的 $n\geqslant m$, $S(n)\in U$.

网的收敛理论以 Moore-Smith 收敛 (Moore-Smith convergence) 而闻名 ([A1]).

参考文献

[A1] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955, Chapt. II (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

葛显良 译　李慧陵 校

网(微分几何学的) [net (in differential geometry); сеть]

在 n 维微分流形 M 的区域 G 中由 n 族充分光滑的曲线构成的组 $\Sigma_n=\{\sigma^1,\cdots,\sigma^n\}$, 使得 1) 对每一个点 $x\in G$, 在每个族 σ^i 中有且只有一条曲线通过它; 2) 这些曲线在 x 的切向量构成 M 在点 x 的切空间 T_x 的基. 族 σ^i 中曲线的切向量属于定义在 G 内的一维分布 Δ_1^i. 曲线族在一点的邻域内构成网的条件在曲线延伸时不需要继续成立. σ^i 的曲线是 Δ_1^i 的积分曲线. 网 $\Sigma_n\subset G$ 是借助于指定 n 个一维分布 Δ_1^i 来定义的, 使得在每一点 $x\in G$ 的切空间 T_x 是子空间 $\Delta_1^i(i=1,\cdots,n)$ 的直和. 网 $\Sigma_n\subset G$ 在 G 内定义了 $n-1$ 维分布 Δ_{n-1}^i, 使得在每一点 $x\in G$, 子空间 $\Delta_{n-1}^i(x)\subset T_x$ 是 $n-1$ 个一维子空间 $\Delta_1^j(x)(j\neq i)$ 的直和. 下列类型的网是有区别的: 完整网 (holonomic net); 部分完整网 (partially holonomic net), 即这种网的某些分布 Δ_{n-1}^i 是可积的, 而其余的分布是不可积的 (这样的网按照不可积分布的数目来区分); 还有不完整网 (non-holonomic net), 即所有的分布 Δ_{n-1}^i 都是不可积的.

若在 $n>2$ 时, 分布 Δ_{n-1}^i 是可积的, 设 γ^i 是 Δ_1^i 的积分曲线, 则通过每一点 $x\in\gamma^i$ 有 Δ_{n-1}^i 的一个积分流形, 它承载了属于 $\sigma^j(j\neq i)$ 的曲线构成的网 $\Sigma_{n-1}(x)$.

网 $\Sigma_n\subset G$ 也能够用下列意义之一来定义: a) 一组向量场 $X_i\subset\Delta_1^i$; b) 一组一次微分式 ω^i, 使得 $\omega^i(X_j)=\delta_j^i$; c) 一个仿射子 (affinor) 场 Φ 使得 $\Phi^n=E$ (E 是恒同仿射子).

在网的研究中有三个基本问题: 网的内在性质, 网的外在性质, 以及网的可微同胚的研究.

网的内在性质是由承载网的流形的结构诱导的. 例如, 具有仿射联络的空间 M 中的网 Σ_n 称为测地的 (geodesic), 如果它的所有曲线都是测地线. Riemann 流形 M 有无挠的、且使其度量张量是协变常量的联络, 如果它具有第一类正交的 **Чебышев 网** (Chebyshev net), 则 M 是局部 Euclid 的. 这种网与曲面上向量平行移动的联系是 L. Bianchi 建立的 (1922). 这个联系是 А. П. Норден 在仿射联络空间中定义第一类 Чебышев 网的基础.

网的外在性质是由外围空间 E 的结构诱导的. 例如, 假设定义在 $(n+k)$ 维射影空间 $(k\geqslant 1)$ 中光滑曲面 V_n 上的区域 G 内的网 Σ_n 是共轭的 (conjugate), 也就是在每一点 $x\in G$, 通过 x 的 Σ_n 中任意两条曲线的切方向 $\Delta_1^i(x)$ 和 $\Delta_1^j(x)$ 是共轭的 (两个方向量共轭的, 如果其中每一个方向属于切平面沿另一方向移动时的特征线). 若 V_n 不包含在维数小于 $n+k$ 的射影空间内, 则当 $k=1$ 时 V_n 能承载无限多个共轭网; 当 $k=2$ 时, 一般说来 V_n 承载唯一的共轭网, 而且存在 n 维曲面, 它没有共轭网; 对于 $k>2$, 仅有特殊构造的 n 维曲面才有一个共轭网. 对于 $n>2$, 共轭网未必是完整的 (见 [3]). 完整共轭网的一个特殊情形是 n 重共轭系 (n-conjugate system): 网 Σ_n 中每一族中沿另一族的任意一条曲线所取的曲线的切线构成可展曲面. 在 $n+k(n\geqslant 2,k\geqslant 0)$ 维射影空间中存在共轭系. 在 $n+k(k\geqslant n)$ 维射影空间中承载 n 重共轭系、且在每一点 $x\in V_n$ 的密切空间 (点 x 的 2 次微分的空间) 的维数为 $2n$ 的曲面 V_n, 首先是 E. Cartan 在"特殊射影型流形" (Cartan 曲面 (Cartan surfaces)) 的名下考虑的 ([4]). **Laplace 变换 (几何学中的)** (Laplace transforomation (in geometry)) 的概念被延用到这种网 (见 [5], [6]).

在研究网的可微同胚时, 用网 $\Sigma_n\subset M$ 的已知性质来描述在一个已知的微分同胚 $\varphi: M\to N$ 下 (例如, 载有网的曲面在弯曲变形下, 或共形映射下) 得到的网 $\varphi(\Sigma_n)\subset N$ 的性质, 或者寻找保持网 Σ_n 的某种性质的可微同胚. 例如, Euclid 空间的曲面上的网 Σ_2 称为菱形网 (rhombic net, 即共形 Чебышев 网), 如果它允许在一个共形映射下映为 Чебышев 网. 在旋转曲面上**渐近网** (asymptotic net) 是菱形网.

参考文献

[1] Норден, А. П., Пространства аффинной связности,

2 изд., М., 1976.
[2] Дубнов, Я. С., Фукс, С. А., 《Докл. АН СССР》, **28** (1940), 2, 102 – 104.
[3] Базылев, В. Т., в кн.: Итоги науки. Геометрия, 1963, М., 1965, 138 – 164.
[4] Cartan, E., Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919), 125 – 160.
[5] Chern, S. S., Laplace transforms of a class of higher dimensional varieties in a projective space of n dimensions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **30** (1944), 95 – 97.
[6] Смирнов, Р. В., 《Докл. АН СССР》, **71** (1950), 3, 437 – 439.
В. Т. Базылев 撰 陈维桓 译

网(有限几何学中的)[net (in finite geometry); сеть]

【补注】 网是点和直线的一个关联结构(incidence structure),即由点的集合 P,直线的集合 L 和一个关联关系 $I \subset P \times L$ 组成的三元组 (P, L, I),满足如下性质:

1)存在点 p,存在直线 l,且对任何一点(直线)存在两直线(点)与之不相关联;

2)通过任给两点至多存在一条直线;

3)如果 p 与 l 不关联,则恰好存在一条直线 m 与 p 关联而与 l 不相交.因此,网是满足平行公理的一部分平面.

网也指称有限几何学中另一更加精细的结构,即几何网(geometrical net).它由一个含有 n^2 个元素的集合和三个含有 n 条直线的族构成,其中每一直线恰好包含 n 个点.点和直线的这种结构要求满足:

a)不在同一族中的任何两条直线恰好有一公共点;

b)同一族中的两条直线没有公共点;

c)对任意一点每个族恰好有一条直线通过这点.

网的这一涵义与微分几何学中的罗(见**罗的几何学**(webs, geometry of))相关.几何网从图形上可以看成点的一个 $n \times n$(方形)阵列.前两个直线族形成行和列;第三族中的直线在每一行及每一列恰好有一点.将方阵中属于第三族的第 i 条直线的点代之以数 i, $i = 1, \cdots, n$,则获得一个**拉丁方**(Latin square)(反之亦然).

参考文献

[A1] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.
[A2] Kàrteszi, F., Introduction to finite geometries, North-Holland, 1976.
[A3] Batten, L. M., Combinatorics of finite geometrics, Cambridge Univ. Press, 1986.
杨路、曾振柄 译

网(拓扑空间中集合的)[net (of sets in a topological space; сеть топологического пространства],网络(拓扑空间中集合的)(network (of sets in a topological space))

拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{S}$,使得对每个 $x \in X$ 和 x 的每个邻域 O_x,存在 $\mathscr{S}$ 的元素 M,满足 $x \in M \subset O_x$.

一个空间的所有单点子集构成的族以及空间的任何**基**(base)都是网.网与基的差别在于:网的元素不必是开集.网在连续映射下出现:如果 f 是把拓扑空间 X 映成拓扑空间 Y 的连续映射,$\mathscr{B}$ 是 X 的基,那么 $\mathscr{B}$ 的元素在 f 下的象构成 Y 中的网 $\mathscr{S} = \{fU: U \in \mathscr{B}\}$.此外,若 X 被子空间族 $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ 所覆盖,那么对每个 $\alpha \in A$ 取 X_α 的任何一个基 $\mathscr{B}_\alpha$,把这些基合并起来就得到 X 中的一个网 $\mathscr{S} = \bigcup\{\mathscr{B}_\alpha: \alpha \in A\}$.具有可数网的空间的特征是:它是可分度量空间的连续象.

空间 X 中网的最小基数称为 X 的网权(net weight)或网络权(network weight),记为 $\mathrm{nw}(X)$.空间的网权决不超过空间的权(见**拓扑空间的权**(weight of a topological space)),但是,正如一个没有可数基的可数空间的例子所示,网权与权可以相异.就紧 Hausdorff 空间而言,网权与权相同.这个结果对局部紧空间、Čech 完全空间以及**羽状空间**(feathered space)也成立.特别是,由此可见,在这些空间的满映射下权不增大.另一个推论是:若羽状空间(特别是 Hausdorff 紧统)X 是一族子空间的并,族的基数 $\leqslant \tau$,每个子空间的权不超过 τ,并且假定 τ 是无限基数,那么 X 的权不超过 τ.

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологий в задачах и упражнениях, М., 1974.
[2] Архангельский, А. В., 《Докл. АН СССР》, **126** (1959), 2, 239 – 241.
А. В. Архангельский 撰

【补注】 大多数英语著作(例如见[A4])都使用网络(net work)来表示上述条目中所描述的"网"(net).这是因为,在一般拓扑学中"网"这一术语还有第二种完全不同的含义.

一个集合(拓扑空间)X 中的网是 X 的一个加标的点集 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$,其中 Σ 是**有向集**(directed set).俄文文献中这称为**广义序列**(generalized sequence).

利用网的概念可以建立一种收敛理论:Moore-Smith 收敛(Moore-Smith convergence)(见 **Moore 空间**(Moore space)).

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, PWN, 1977.
[A2] Kelley, J. L., Convergence in topology, *Duke Math. J.*, **17** (1950), 277 – 283.
[A3] Moore, E. H. and Smith, H. L., A general theory of limits, *Amer. J. Math.*, **44** (1922), 102 – 121.

[A4] Nagata, J., Modern general topology, North-Holland, 1985.
胡师度、白苏华 译

网络 [network; сеть]

图 (graph) 的概念的一种推广. 一个网络被定义为一个 $(V, \mathscr{E})$ 对, 这里 V 是一个集合, $\mathscr{E}=(E_0; E_1, \cdots)$ 是 V 的一些子集构成的集合. E_i 中元一般可以重复, $E_i \in \mathscr{E}$. V 中元称为网络的顶点 (vertices of the network), E_0 中元称为网络的极点 (poles), $E_i (i=1, 2, \cdots)$ 称为网络的边 (edges). 如果极点集 E_0 为空集, 且每个 E_i 为一个非空集合, 则这个网络为一个**超图** (hypergraph). 如果每个 $E_i (i=1, 2, \cdots)$ 只含有两个元, 则这个网络为一个具有特异极点的图 (graph with distinguished poles). 一个网络常常被当作一个图 (具有或没有极点), 它的每个元都赋以某个集合中的一个符号. 例如, 一个具有极点的图称为运输网络 (transport network), 如果它的每条边赋以一个非负数, 这些数称为信道容量.

网络的概念常常用于定义和描述一个**控制系统** (control system), 或一类控制系统 (触点模式, 图表或函数元), 或自动机的变化图, 或通讯网络等等.

参考文献

[1] Яблонский, С. В., 《Проблемы кибернетики》, 1959, 2, 7–38.

[2] Ford, L. R. and Fulkerson, D. R., Flows in networks, Princeton Univ. Press, 1962.

[3] Kuntzmann, J., Théorie des réseaux (graphes), Dunod, 1972 (译自法文).

А. А. Сапоженко 撰

【补注】 拓扑网络 (network in topology), 见**网 (拓扑空间中集合的)** (net of sets in a topological space).

通常一个网络被简单地定义为一个图 (graph) $\Gamma=(V, E)$, 每条边被赋以一个 (正) 数 C_e, 称为边 e 的容量 (capacity). 一个有向网络 (directed network) 是一个有向图, 每一条边 $e \in E$ 被赋以一个容量 c_e. c_e 常常被认作为边 e 上可以运输的某些物的最大量. 但是也存在其他的解释, 这些解释也是合理的. 例如, 对于一个道路网络, $c_e=$ 路 e 的长度, $e \in E$.

一个运输网络 (transportation network) 是一个有向网络, 具有一个指定顶点 v_0, 称为源点 (source), 另外一个指定顶点 v_1, 称为汇点 (sink). 我们通常假设 v_0 没有入弧, v_1 没有出弧. 对所有 $e \in E$, $v \in V$, 令

$$n(e, v)=\begin{cases} 1, & \text{如果 } e \text{ 为 } v \text{ 的入边}, \\ -1, & \text{如果 } e \text{ 为 } v \text{ 的出边}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

一个运输网络中的流 (flow in a transportation network) 是一个函数 $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}$, 使得 $0 \leqslant \varphi(e) \leqslant c_e$, 且对所有 $v \in V \backslash \{v_0, v_1\}$, 下面的 Kirchhoff 定律 (Kirchhoff law) 成立.

$$\sum_e n(e, v) \varphi(e)=0. \tag{A1}$$

有时加入一条从 v_1 到 v_0 的辅助弧, 称为返弧 (return arc), 记返弧的容量为 ∞. 定义 φ(返弧) $=\sum_e n(e, v_1) \varphi(e)$. 一个流被定义为一个函数, 使得 Kirchhoff 定律对每个顶点成立. 这是返弧所起的唯一作用.

网络流问题 (network flow problem), 即计算使得 $\sum_e n(e, v_1) \varphi(e)$ 达到最大的流.

在**网络规划** (network planning) 中, 人们遇到 "运输网络" 问题, 其中边对应要完成的任务, 数 c_e 表示完成任务 e 所需的时间. 这时寻找一条 "最短路径" 是重要的.

一个电网络 (electrical network) 是一个有向图, 每条边 $e \in E$ 赋以两个实数 i_e 和 E_e (分别认作电流和电压). 更一般地, i_e 和 E_e 可以认作为时间或变量的函数.

电流 i_e 要求满足 Kirchhoff 电流定律 (Kirchhoff current law)

$$\sum_e n(e, v) i_e=0.$$

电压 E_e 要求满足 Kirchhoff 电压定律 (Kirchhoff voltage law), 即存在数 E_v, 结点 v 的电位 (potential), 使得

$$\sum_v n(e, v) E_v=E_e.$$

网络的一条支路 (边) 称为电流源, 如果这条支路上的电流为给定的时间 (输入) 函数; 网络的一条支路称为电压源, 如果这条支路上产生的电压为给定的时间函数; 网络的一条支路称为源支路 (source branch), 如果这条支路为电流源或电压源. 源支路数为 n 的电网络称为 n 端对 (n-port) 电网络.

如果 (非源) 支路上的电流和产生的电压满足

$$E_e=\sum_{e'} z_{ee'} i_{e'},$$

或

$$i_e=\sum_{e'} y_{ee'} E_{e'},$$

这里 $z_{ee'}$ 和 $y_{ee'}$ 为线性积分微分算子, 则我们称这个网络为线性电网络 (linear electrical network). 如果 $z_{ee'}=z_{e'e}$ 或 $y_{ee'}=y_{e'e}$, 则网络称为倒易的 (reciprocal). 网络称为无源的 (passive), 如果对所有满足电流 / 电压关系的电流源和电压源有

$$\int_{-\infty}^{t} \sum_{e \in S} i_e(\tau) E_e(\tau) d \tau \leqslant 0,$$

这里 S 表示源支路集.

如果源支路上的电流和产生的电压满足某种非奇异条件，则下面关系式成立：

$$i_e = \sum_{e' \in S} Y_{ee'} E_{e'},\ e \in S;$$

$$E_e = \sum_{e' \in S} z_{ee'} i_{e'},\ e \in S.$$

矩阵 Z 和 Y 分别称为端对阻抗矩阵（port-impedance matrix）和端对导纳矩阵（port-adimittance matrix）.

电网络的综合（synthesis of electrical networks）或可靠性理论（realizability theory），涉及到寻找具有（部分）给定的端对阻抗矩阵和端对导纳矩阵的电网络问题．每个非源线性单端对网络都可以用支路正电阻（resistors）（$E_e = R_e i_e$），正电容（capacitators）（$i_e = c_e(dE_e/dt)$）和正电感（inductors）（$E_e = L_e(di_e/dt)$）来实现合成．每个线性非源 n 端对网络（$n > 1$），除了使用上述三种支路外，还可以使用理想变压器（ideal transformers）（理想变压器是这样一对支路（e_1, e_2），使得 $i_2 = -ne_1$, $i_1 = ne_2$）和理想回转器（ideal gyrators）（理想回转器是这样一对支路（e_1, e_2），使得 $i_2 = E_1$, $E_2 = -i_1$）来实现合成．

参考文献

[A1] Weinberg, L., Network analysis and synthesis, Mc-Graw-Hill, 1962.

[A2] Brune, O., Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency, *J. Math. Phys.*, **10** (1931), 191－236.

[A3] Paradimitriou, Chr. H. and Steiglitz, K., Combinatorial optimization, Prentice-Hall, 1982.

[A4] Fulkerson, D. R., Flow networks and combinatorial operations research, in D. R. Fulkerson (ed.): Studies in graph theory, Vol. 1, Math. Assoc. Amer., 1975, 139－171.

[A5] Berge, C., Graphs, North-Holland, 1985, Chapt. 5.

[A6] Atebekov, G. I., Linear network theory, Pergamon, 1965.

[A7] Slepian, P., Foundations of network analysis, Springer, 1968.

[A8] Bose, N. K., Applied multidimensional system theory, v. Nostrand Reinhold, 1982, Chapt. 5.

[A9] Budak, A., Circuit theory: Fundamentals and applications, Prentice-Hall, 1978.

[A10] Gondran, M. and Minoux, M., Graphs and algorithms, Wiley, 1986, Chapt. 5 (译自法文).

[A11] Burr, S. A. (ed.), The mathematics of networks, Amer. Math. Soc., 1982.

[A12] Cox, C. W., Circuits, Signals and networks, Mac-Millan, 1969.

[A13] Carré, B., Graphs and networks, Clarendon Press, 1979.

[A14] Busacker, R. G. and Saaty, T. L., Finite graphs and networks, McGraw-Hill, 1965.

符方伟 译　沈世镒 校

网络图 [network graph; сетевой график]

网络模型（network model）在平面上的图形表示．

П. С. Солтан 撰　张鸿林 译

网络模型 [network model; сетевая модель]

实现某一组相关运算的程序（计划）的无圈定向图（见**定向图**（graph, oriented））形式的解释．它用这一组运算的某些其他数据（费用、资源、期限等等）来反映按时完成工作的自然阶．网络模型通常用平面图表示，这种表示称为网络图（network graph）．网络模型对于**网络规划**（network planning）、控制和日程规划是十分重要的．依照信息处理的条件，网络模型可以有其他的表示形式：表格、数字等等．一个网络模型的所有表示形式是等价的．

一个网络模型的基础是它的结构，即这组运算的图．它一般按照下面的方法来定义．设 $V_1, \cdots, V_n$ 为一组运算（例如多层建筑物的建筑），阶段 $x_1, \cdots, x_m$ 定义如下：第 1 个阶段为 x_1，最后一个阶段为 x_m，这时我们按照运算的相互关系所确定的顺序来排列，每一个 x_i 是一个中间阶段（例如，如果没有全部完成第九层楼的建造工作，就不能完成第十层楼的建造工作）．中间阶段和它们的序号在一定程度下是有条件的，主要由实现这组运算的对应阶段来定义．设 $V = \{v_i\}$ 是一组运算，$X = \{x_i\}$ 是阶段集．我们现在定义一个图 G，这里 X 是顶点集，运算 $v_j (j = 1, \cdots, n)$，起始于第 x_r 阶段，终止于第 x_s 阶段，为一条弧．因此，无圈定向图 $G = (X, V)$ 就是这一组运算的网络模型的结构．用网络模型的语言来说，$v_1, \cdots, v_n$ 称为运算（operations），阶段 $x_1, \cdots, x_m$ 称为事件（events）．

一个网络模型是在它的结构的基础上构造的，并且依赖于这一组运算的目标．例如，如果目标是在给定资源下以最少时间去完成这一组运算，网络模型就应该包括完成每一个运算 v_j 所需要的时间的数据，这时就说网络模型是按照一个时间准则（time criterion）构造的．网络模型能够按照另外一个准则来构造，或者同时按照多个准则来构造．网络相应地称为一维的（one-dimensional）或多维的（multi-dimensional）．人们将网络模型区分为典范网络模型（canonical network model）和交错网络模型（alternative network model）（见[1]和[3]）．典范网络模型由一个固定的结构和下面的条件来定义，这个条件说明任意一个运算

$v_j=(x_r, x_s)$ 只有在所有终止于 x_r 的运算都完成后才能开始. 交错网络模型具有一个可变结构, 并且允许某一个运算 $v_j=(x_r, x_s)$ 在某一个终止于 x_r 的运算完成以后开始进行. 网络模型可以分为确定性的(deterministic)或者概率的(probabilistic), 这依赖于标准的精确度或某一个概率的预测程度.

参考文献

[1] Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления, 3 изд., М., 1974.

[2] Энциклопедия кибернетики, К., 1974.

[3] Лопатников, Л. И., Краткий экономико-математический словарь, М., 1979. П. С. Солтан 撰

【补注】 其他的参考文献见**网络**(network).

符方伟 沈世镒 译

网络规划 [**network planning**; **сетевое планирование**], 规划和控制的网络方法(network method of planning and control)

实现某组运算(设计, 程序, 主题等等)的一种控制方法, 它以这组运算的**网络模型**(network model)为基础, 也称为 PERT(参见[2]). 网络规划使我们能够显著提高实现这组运算的控制和规划方法的质量; 特别地, 它使我们能够充分协调参与实现这组运算的所有各方(组织)的活动, 辨别最重要的问题, 确定实现设计的最佳时间, 在适当的时间修正实施计划等等.

网络规划条件上可以分为两部分: 1)这组运算的网络模型的构造; 2)使用这个网络模型去规划和控制这组运算的实现(参见[1]-[3]). 一组运算的网络模型的构造归化为用一个特定的定向图去表示阶段(事件)集合和这组运算的自然阶(一般, 特定), 以及所必需的数值信息(完成每一个运算所需的时间, 资源等等). 在构造一个网络模型后, 人们按照提出的目标去分析这个模型, 从而发现达到这些目标的最佳预备计划. 例如, 如果一个网络模型是用时间术语来阐明的, 即整组运算是在给定资源下以最少时间来完成的, 这个分析就归化为寻找临界路径和确定实现这组运算的最少时间. 这意味着下面的描述. 设 $G=(X, V)$ 为一组运算的网络模型的结构. 这里

$$X=\{x_1, \cdots, x_m\},\ V=\{v_1, \cdots, v_n\}$$

分别为事件和运算集, $t(v_j)$ 为完成运算 $v_j\in V$ 所需的时间. 人们考虑由图 G 的所有极大路径(在包含意义下)所构成的集合 P. 一般在图 G 中有许多这样的路径, 对于简单的情形, 即只有一个起始事件 x_1 和一个终止事件 x_m, 所有这些路径都起始于 x_1 和终止于 x_m. 在集合 P 的路径中, 人们能够找到一条具有最短长度的路径(路径 $p=(v_{j1}, \cdots, v_{jk})$ 的长度(length of a path)为 $t(p)=t(v_{j1})+\cdots+t(v_{jk})$). 具有这个性质的路径 $p\in P$ 称为网络规划的临界路径(critical path of the network planning), 它的长度说明这样一个事实: 我们不能以少于 $t(p)$ 的时间去实现这组运算. 因此, 网络规划方法也称为临界路径方法(critical path method)(参见[1]-[4]).

在实现某组运算期间, 网络规划起着控制机制的作用, 这个机制帮助人们去处理给定时刻这组运算的实际状态的有关信息, 去预测计划的变化和修改, 以便完成其余的运算.

参考文献

[1] Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления, 3 изд., М., 1974.

[2] Kaufmann, A. and Desbazeille, G., La méthode du chemin critique, Dunod, 1964.

[3] Сетевое планирование и управление, М., 1967.

[4] Абрамов, С. А., Мариничев, М. И., Поляков, П. Д., Сетевые методы планирования и управления, М., 1965.

[5] Энциклопедия кибернетики, К., 1974.

[6] Лопатников, Л. И., Краткий экономико-математический словарь, М., 1979.

П. С. Солтан 撰

【补注】 其他参考文献见**网络**(network).

参考文献

[A1] Taha, H. A., Operations research, MacMillan, 1982.

符方伟 沈世镒 译

Neumann $\bar{\partial}$ 问题 [**Neumann $\bar{\partial}$-problem**], Neumann *DBAR* 问题(Neumann *DBAR* problem), $\bar{\partial}$ 问题($\bar{\partial}$-problem), $\bar{\partial}$-Neumann 问题($\bar{\partial}$-Neumann problem), *DBAR* 问题(*DBAR* problem), Cauchy-Riemann 复形的 Neumann 问题(Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex)

【补注】 一个关于复 Laplace 的非强迫边界问题. 令 M 为 $n+1$ 维复流形 M' 的具有光滑边界 bM 的相对紧区域. Cauchy-Riemann 算子 $\bar{\partial}$ (由 $\bar{\partial}f=\sum_{j=1}^{n+1}(\partial f/\partial\bar{z}_j)d\bar{z}_j$ 定义在一区域 $M\subset\mathbf{C}^{n+1}$ 的函数上) 自然地推广来定义 Dolbeault 复形或 Cauchy-Riemann 复形(Dolbeault complex or Cauchy-Riemann complex)

$$0\to\Lambda^{p,0}(M)\xrightarrow{\bar{\partial}}\Lambda^{p,1}(M)\xrightarrow{\bar{\partial}}\cdots\xrightarrow{\bar{\partial}}\Lambda^{p,n+1}(M)\to 0,$$

其中 $\Lambda^{p,q}(M)$ 为 M 上 (p, q) 型微分形式的空间. 全纯函数是 $\bar{\partial}f=0$ 的解, 并且非齐次方程 $\bar{\partial}f=\varphi$ (在必要的相容条件 $\bar{\partial}\varphi=0$ 下) 也是有趣的. 例如, 关于 Levi 问题(Levi problem): 给定 $x\in bM$, 是否存在 M 上的全纯函数在 x 爆破? 利用 D. C. Spencer 的

一般表述 (和一般的 Hilbert 空间理论), 问题 $\bar{\partial} f=\varphi$ 引出 $\bar{\partial}$-Neumann 问题

$$(\bar{\partial}\bar{\partial}^{*}+\bar{\partial}^{*}\bar{\partial})u=\varphi. \qquad (A1)$$

在此 $\bar{\partial}^{*}$ 是 $\bar{\partial}$ 的伴随算子, 它由 $<\bar{\partial}^{*}f,g>=<f,\bar{\partial}g>$ 定义, 其中内积由关于由给定在 $\bar{M}$ 上的 Hermite 度量决定的体积形式的积分给出. 算子 $\Box=\bar{\partial}\bar{\partial}^{*}+\bar{\partial}^{*}\bar{\partial}$ 称为复 Laplace (complex Laplacian). 如果 M 是一 **Kähler 流形** (kähler manifold), 那么 $\Box=\Delta/2$, 其中 Δ 是 de Rham 复形 (de Rham complex) 的通常 Laplace, 见 **de Rham 上同调** (de Rham cohomology).

严格说来, 方程 (A1) 应写成

$$(\bar{\partial}_{q}\bar{\partial}_{q}^{*}+\bar{\partial}_{q+1}^{*}\bar{\partial}_{q+1})(u)=\varphi, \qquad (A2)$$

其中 $u\in\Lambda^{p,q+1}(M)$, $\bar{\partial}_{q}:\Lambda^{p,q}(M)\to\Lambda^{p,q+1}(M)$, $\bar{\partial}_{q}^{*}:\Lambda^{p,q+1}(M)\to\Lambda^{p,q}(M)$; $q=-1,0,\cdots,n+1$, $\Lambda^{p,-1}(M)=0=\Lambda^{p,n+2}(M)$. 因此, 方程 (A2) 自然地配备有边界条件

$$u\in \mathrm{Domain}(\bar{\partial}_{q}^{*}), \qquad (A3)$$

$$\bar{\partial}_{q+1}u\in \mathrm{Domain}(\bar{\partial}_{q+1}^{*}). \qquad (A4)$$

($\bar{\partial}$-Neumann 边界条件 ($\bar{\partial}$-Neumann boundary conditions)). 算子 $\Box$ 是椭圆的, 但边界条件不是. 然而, J. J. Kohn 能够证明存在性并提供正则性的系统分析. 一个主要结果是估计

$$\|u\|_{s+1}\leqslant A_{s}\|\Box_{u}\|_{s}+\|u\|,$$

在此 $\|\ \|_{s}$ 是 Sobolev 范数 (见 **Sobolev 空间** (Sobolev space)). 详情见 [A1], [A2]. 许多另外的和有关的材料可以在 [A1]-[A4] 中找到.

参考文献

[A1] Folland, G. B. and Kohn, J. J., The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton Univ. Press, 1972.

[A2] Greiner, P. C. and Stein, E. M., Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Princeton Univ. Press, 1977.

[A3] Treves, F., Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, 1, Plenum, 1980, Sect. Ⅲ. 8.

[A4] Kohn, J. J., Methods of partial differential equations in complex analysis, in R. O. Wells, Jr. (ed.), Several Complex Variables, Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1977, 215-240.

钟同德 译

Neumann 函数 [Neumann function; Неймана функции]

第二类**柱函数** (cylinder functions). Neumann 函数 $N_{p}(x)$ (有时记为 $Y_{p}(x)$) 可以借助于 **Bessel 函数** (Bessel functions) 定义如下:

$$N_{p}(x)=\lim_{k\to p}\frac{J_{k}(x)\cos k\pi-J_{-k}(x)}{\sin k\pi}.$$

对于正实数 x, 它们是实函数, 而当 $x\to\infty$ 时, 趋向于零. 对于大的 x, 它们有渐近表示

$$N_{p}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x-\frac{1}{2}p\pi-\frac{\pi}{4}\right].$$

存在递推公式

$$N_{p-1}(x)+N_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}N_{p}(x),$$

$$N_{p-1}(x)-N_{p+1}(x)=2N_{p}'(x).$$

对于整数 $p=n$,

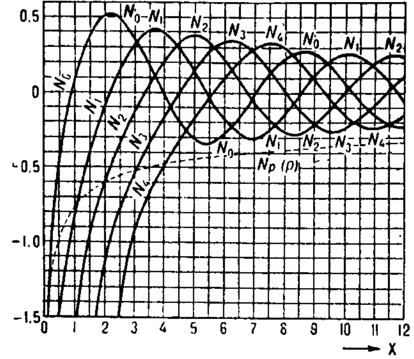
$$N_{-n}(x)=(-1)^{n}N_{n}(x);$$

对于小的 x,

$$N_{0}(x)\approx-\frac{2}{\pi}\ln\left[\frac{2}{\gamma x}\right],$$

$$N_{n}(x)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left[\frac{2}{x}\right]^{n},$$

其中 $\ln\gamma=C=0.5772\cdots$ 是 Euler 常数.



Neumann 函数图形

"半整数"阶 $p=(2n+1)/2$ 的 Neumann 函数可以利用三角函数来表示; 特别是

$$N_{1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\ N_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Neumann 函数是 C. G. Neumann 于 1867 年引进的.

关于参考文献, 见**柱函数** (cylinder functions).

В. И. Битюцков 撰 张鸿林 译

Neumann 问题 [Neumann problem; Неймана задача]

同**第二边值问题** (second boundary value problem). 因 K. Neumann 而得名, 他于 1877 年首先系统地研究了这一问题.

张鸿林 译

Neumann 级数 [Neumann series; Неймана ряд]

1) 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z)$$

的级数，其中 $J_{\nu+n}$ 是 Bessel 函数（第一类柱函数，见 **Bessel 函数**（Bessel functions）），ν 是（实或复）数. C. G. Neumann（[1]）考虑了 ν 为整数时的特殊情形. 他表明，如果 $f(z)$ 是圆心在坐标原点的一个闭圆盘中的解析函数，z 是一个内点，C 表示该圆盘的边界，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z),$$

其中

$$a_0=f(0),\ a_n=\frac{1}{\pi i}\int_C O_n(t)f(t)dt,$$

O_n 是 $1/t$ 的 $n+1$ 次多项式:

$$O_0(t)=\frac{1}{t},$$

$$O_n(t)=\frac{1}{2t^{n+1}}\int_0^{\infty} e^{-x}[(x+\sqrt{x^2+t^2})^n+$$

$$+(x-\sqrt{x^2+t^2})^n]dx,\ n\geqslant 1;$$

O_n 通常称为 n 阶 Neumann 多项式（Neumann polynomial）.（Neumann 本人称它为二阶 Bessel 函数（Bessel function of second order）. 现今这一术语用来表示 Bessel 方程的解之一.）用 Neumann 级数表示函数的例子:

$$\cos(z\sin\varphi)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\varphi,$$

$$\sin(z\sin\varphi)=2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi,$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu+2n)\Gamma(\mu+n)}{n!}J_{\mu+2n}(z),$$

其中 μ 是任一不等于非负整数的数，Γ 是 **Γ 函数**（gamma-function）.

2）在 Fredholm 积分方程（见 **Fredholm 方程**（Fredholm equation））

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),\ x\in[a,b] \tag{1}$$

的理论中，Neumann 级数（Neumann series）定义为核 K 的预解式 $R(x,s;\lambda)$ 的展开式:

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K_n(x,s), \tag{2}$$

其中 K_n 是（K 的）迭代核，它由递推公式

$$K_1(x,s)=K(x,s),$$

$$K_n(x,s)=\int_a^b K_{n-1}(x,t)K(t,s)dt,\ n\geqslant 2$$

定义. 对于小的 λ，(1) 的解可通过 (2) 由

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_n(x,s)f(s)ds \tag{3}$$

表示.

(3) 中的级数也称为 Neumann 级数（Neumann series）. 在 [2] 中，级数 (3) 是对位势论中的 Dirichlet 问题所转化的方程 (1) 的情形考虑的.

3）设 A 是把 Banach 空间 X 映射到 X 中的有界线性算子，其范数 $\|A\|<1$，则算子 $I-A$（I 是恒等算子）有唯一的有界逆算子 $(I-A)^{-1}$，并可有展开式

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n. \tag{4}$$

在线性算子理论中，这个级数称为 Neumann 级数（Neumann series）. 级数 (3) 可看作 (4) 的特殊情形.

参考文献

[1] Neumann, C. G., Theorie der Besselschen Funktionen, Teubner, 1867.

[2] Neumann, C. G., Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Teubner, 1877.

[3] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1, Cambridge Univ. Press, 1952.

[4] Кузьмин, Р. О., Бесселевы функции, 2 изд., Л.-М., 1935.

[5] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1965（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）.

[6] Tricomi, F., Integral equations, Interscience, 1957.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 作用于特殊向量 f 的级数 (4) 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}A^n f \tag{A1}$$

当 $\|A\|\geqslant 1$ 时也可能收敛. 关于其收敛的必要充分条件，见 [A2]（或 [A3]）.

参考文献

[A1] Smithies, F., Integral equations, Cambridge Univ. Press, 1970, Chapt. II.

[A2] Suzuki, N., On the convergence of Neumann series in Banach space, *Math. Ann.*, **220** (1976), 143 – 146.

[A3] Engl, H. W., A successive-approximation method for solving equations of the second kind with arbitrary spectral radius, *J. integral Eq.*, **8** (1985), 239 – 247.

[A4] Gohberg, I., Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhäuser, 1981.

[A5] Taylor, A. E., Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

[A6] Забрейко, П. П., и т. д., Интегральные уравнения, М., 1968 (справочная матем. б-ка)（英译本：Zabreyko [Zabreĭko], P. P. et al., Integral equations —— a reference text, Noordhoff, 1975）.

沈永欢 译

中立型微分方程 [neutral differential equation; нейтрального типа уравнение]

一个**具有分布自变量的常微分方程**(differential equations, ordinary, with distributed arguments),它的最高阶导数出现在自变量的多个值处,其中有一个是基本的(未经变换的),这个自变量值是方程中出现的最大的.例如,方程

$$x'(t)=f(t, x(\alpha(t)), x'(\beta(t))) \qquad (*)$$

当 $\alpha(t)\leqslant t$, $\beta(t)<t$ 时是中立型的.

对于中立型微分方程,初值问题是可解的;例如,如果对(*),当 $\beta(t)$ 增加时有

$$x=\varphi(t), \ t\leqslant t_0,$$

则对

$$f\in C^{m,n,n}, \ \alpha, \beta\in C^m, \ \varphi\in C^p, \ m, n\geqslant 0, \ p\geqslant 1,$$

存在(当 $n\geqslant 1$ 时唯一)分段光滑的解,而当 $k=1+\min\{m, n, p-1\}$ 个相容性条件(compatibility condition),即

$$\varphi'(t_0)=f(t_0, \varphi(\alpha(t_0)), \varphi'(\beta(t_0)))$$

这种类型的条件成立时,解属于 C^k.中立型微分方程在具有分布自变量的方程中是研究得最深入的类型之一.它们自然出现在其陈述中包含着某种回复性质的应用问题之中. А. Д. Мышкис 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J. K., Theory of functional differential equations, Springer, 1977, Chapt. 12. 唐云 译

中子流理论 [neutron flow theory; возраста теория], 中子年龄理论(neutron age theory)

中子受介质核的弹性散射而慢化的近似描述.它可用来确定仅在不含轻核(容许质量数是 A ≫ 2,即例如氢和氘除外)的介质中具有不同能量中子的空间分布.中子流理论的基础假设是,中子慢化过程中其能量的损耗是连续的而非离散的,以及大量个体中子的实际行为由某些平均所代替;仅当由中子源发射出后任何给定时刻,中子能量歧离很小,这个假设才是合理的.在这个假设基础上,有可能引进中子年龄函数作为独立变量并采用中子年龄近似以获得**扩散近似**(diffusion approximation)下的中子流方程(neutron flow equation)或中子年龄方程(neutron age equation):

$$\nabla^2 q=\frac{\partial q}{\partial \tau};$$

方程的形式与热传导方程(heat equation)的形式相同.中子年龄方程是**抛物型偏微分方程**(parabolic partial differential equation),它描述中子的慢化.未知函数 q 是慢化密度,即慢化期间单位体积中在单位时间内越过一给定能量值的中子数.起独立变量作用的中子流函数(neutron flow function)或中子年龄函数(neutron age function) τ,应理解为中子的标志年龄(symbolic age of the neutrons),它等于中子慢化的时间(计时年龄)乘以对慢化时间平均过的扩散系数.热中子年龄的平方根称为热中子的慢化长度(slowing down length)."年龄"概念的物理意义是,中子从点源发射出的瞬间(年龄 $\tau=0$)到研究中的瞬间(对应于年龄 τ)所移动距离的方均值的六分之一.年龄近似(age approximation)与扩散近似一起给出年龄理论的年龄方程,它通过从描述中子慢化的精确能量算子过渡到近似算子来体现.

中子的空间分布,由慢化过程中的扩散所产生.确定核反应堆中中子损耗的概率,并影响其临界大小.

参考文献

[1] Glasstone, S. and Edlund, M., The elements of nuclear reactor theory, New York, 1952 (中译本:S.格拉斯登,M.爱德岩,原子核反应堆理论纲要,科学出版社,1958). В. А. Чуянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weinberg, A. M. and Wigner, E. P., The physical theory of neutron chain reactors, Univ. Chicago Press, 1958.
[A2] Galanin, A. D., Thermal reactor theory, Pergamon, 1960 (译自俄文).
[A3] Williams, M. M. R., The slowing down and thermalization of neutrons, North-Holland, 1966.
徐锡申 译

Neuwirth 纽结 [Neuwirth knot; Нейвирта узел]

一种多项式纽结 (S^3, k^1)(见**纽结理论**(knot theory)),它的群有有限生成的换位子群.Neuwirth 纽结的补 $S^3\setminus k^1$ 是圆上的**纤维空间**(fibre space),而纤维 F 是一个连通曲面,它的亏格就是纽结的亏格.Neuwirth 纽结的群 $G=\pi_1(S^3\setminus k^1)$ 的**换位子群**(commutator subgroup) G' 是秩 $2g$ 的自由群,其中 g 是纽结的亏格.Neuwirth 纽结的 Alexander 多项式(见 **Alexander 不变量**(Alexander invariant))的首项系数是 1,而该多项式的阶是 $2g$.所有的**环面纽结**(torus knot)是 Neuwirth 纽结.每个 Alexander 多项式的首项系数是 ±1 的交错纽结也是如此.

这些纽结是由 L. Neuwirth 引进的(见[1]).

参考文献

[1] Neuwirth, L., Knot groups, Princeton Univ. Press, 1965. М. Ш. Фарбер 撰 徐森林 译

Nevanlinna-Pick 问题 [Nevanlinna-Pick problem; Неванлинны-Пика проблема]

给定复平面(或，更一般地，一个 Riemann 曲面)的区域 G 内的一个解析函数类 $\mathfrak{H}$，要寻求插值问题

$$f(z_\alpha) = w_\alpha \tag{1}$$

在 $\mathfrak{H}$ 里的可解性的必要充分条件，其中$\{z_\alpha\}$是 G 的一个子集，$\{w_\alpha\}$是某个复数集，而 α 通常遍历一个可数的（有时有限的，有时甚至不可数的）指标集. G. Pick ([1])和 R. Nevanlinna ([2])的经典结果（分别对有限的和可数的子集 $\{z_\alpha\} \subset G$）提供了这个问题的解，例如，在单位圆盘内绝对值不超过 1 的解析函数函数类 B_1 里. 这里所要求的条件是二次型

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} \xi_j \overline{\xi}_k, \quad n \in N, \ \xi_j \in C$$

的非负性. 这个命题，以及对于其他的种种函数类 $\mathfrak{H}$ 的与该命题完全相似和类同的结果，其最初的证明(见[3], [4])都依赖代数的和泛函理论的方法. 较晚的一些证明，例如，基于把Nevanlinna-Pick 问题归结为一个矩问题的证明或从 Hilbert 空间理论的观点得到的证明，使得把结果拓广到不可数子集 $\{z_\alpha\} \subset G$ 成为可能，并且指出了达到这些可能的推广途径（见[3]-[5]).

Nevanlinna-Pick 问题的一个自然的发展是插值问题(1)在它的右端$\{w_\alpha\}$所组成的一个类 W 上的可解性问题，这个问题需要泛函分析的一些研究方法；这种情形通常$\{z_\alpha\}$是 G 内的一个可数点集（一个序列），而 W 则可以是各种复数序列空间. 关于单位圆盘内的有界解析函数类 H^∞ 和有界序列空间 l_∞, 对应点列 $\{z_\alpha\}$ (称为万有插值序列 (universal interpolation sequences)) 的完全刻画已被得到 (见[6]), 条件的形式如下:

$$\prod_{j=1, j \neq k}^{\infty} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - z_j \overline{z}_k} \right| \geqslant \delta > 0, \ k \in N. \tag{2}$$

这个结果在刻画代数 H^∞ 的极大理想空间 (见[7])的结构中起着重要的作用，同时是对于 **Hardy 类** H^q (Hardy classes)和空间 l_p (包括权空间) 的 Nevanlinna-Pick 问题（前面推广的叙述）的广泛研究的出发点. 结果是，当 $q = \infty$ 时，解与 p 无关，且由条件(2)给出；而当 $q < \infty$ 时，解必须随 q 和 p 的改变而变化（见[7]). Nevanlinna-Pick 问题的另一个推广与插值问题 $\varphi_\alpha(f) = w_\alpha$ 相联系，其中$\{\varphi_\alpha\}$是类 $\mathfrak{H}$ 上的一组泛函. 集合 $\{\{\varphi_\alpha(f)\}: f \in \mathfrak{H}\}$ 的刻画问题可以看作著名的解析函数类的**系数问题** (coefficient problem) 的一种推广.

参考文献

[1] Pick, G., Ueber die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, *Math. Ann.*, **77** (1916), 7-23.

[2] Nevanlinna, R., Ueber beschränkte analytische Funktionen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, *Ser. A*, **32** (1929), 7, 1-15.

[3] Крейн, М. Г., Нудельман, А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973 (英译本: Kreĭn, M. G. and Nudel'man, A. A., The Markov moment problem and extremal problems, Amer. Math. Soc., 1977).

[4] Garnett, J. B., Bounded analytic functions, Acad. Press, 1981.

[5] Sz.-Nagy, B. and Korányi, A., Rélations d'un problem de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace Hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 295-303.

[6] Carleson, L., An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 4, 921-930.

[7] Shvedenko, S. V., On (H^p, l^r)-interpolation sequences in the unit disk, *Math. USSR Sb.*, **46** (1983), 4, 473-492. (*Mat. Sb.*, **118** (1982), 4, 470-489.)

С. В. Шведенко 撰

【补注】 这个经典的问题在 20 世纪 60 年代和 70 年代初又得到复苏，并且被推广到矩阵值函数. 在这个新的发展中，它和算子理论的联系是本质的(例如，见[A1]-[A3]). 在控制论中一些问题的应用出现在 20 世纪 80 年代，这要求这个理论的一个修改和计算方法的发展，尤其是对于有理矩阵函数（见[A4], [A5]).

亦见 **H^∞ 控制论** (H^∞ control theory).

参考文献

[A1] Adamjan, V. M. [V. M. Adamyan], Arov, D. Z. and Kreĭn, M. G., Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Tagaki problem, *Math. USSR Sb.*, **15** (1971), 31-73. (*Mat. Sb.*, **86** (1971), 1, 34-75.)

[A2] Rosenblum, M. and Rovnyak, J., Hardy classes and operator theory, Oxford Univ. Press, 1985.

[A3] Sarason, D., Operator-theoretic aspects of the Nevanlinna-Pick interpolation problem, in S. C. Power (ed.): Operators and Function Theory, Reidel, 1984, 279-314.

[A4] Kimura, H., Directional interpolation approach in H^∞-optimization, *IEEE Trans. Autom. Control*, **32** (1987), 1085-1093.

[A5] Limebeer, D. J. N. and Anderson, B. D. O., An interpolation theory approach to H^∞ controller degree bounds, *Linear Algebra Appl.*, **98** (1988), 347-386.

[A6] Ball, J. A., Nevanlinna-Pick interpolation: Generalizations and applications, in J. B. Conway (ed.): Proc.

Asymmetric Algebras and Invariant Subspaces. Conf. Indian Univ., Pitman, To appear.

[A7] Dym, H., J contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolatoin, Amer. Math. Soc., 1989.

[A8] Helton, J. W., Operator theory, analytic functions, matrices, and electrical engineering, Amer. Math. Soc., 1987.

[A9] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, Acad. Press, 1970.

陈怀惠 译

Nevanlinna 定理 [Nevenlinna theorems; Неванлинны теоремы]

由 R. Nevanlinna 证明的两个基本定理(见[1],[2]),它们是亚纯函数的值分布理论的基础(见**值分布论**(value-distribution theory)). 设$f(z)$是圆盘

$$K_R = \{z: |z| < R \leqslant \infty\}$$

上的一个**亚纯函数**(meromorphic function),其中$R=\infty$意指$f(z)$是在整个开复平面上亚纯的. 对于每一个$r(0 \leqslant r < R)$, $f(z)$对数a的迫近函数定义为

$$m(r,\infty, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), \ a \neq \infty,$$

$f(z)$对a值点的计数函数定义为

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}\,dt + n(0, a, f)\ln r,$$

其中$n(t, a, f)$表示$f(z)$在圆盘$\{z:|z|\leqslant t\}$内的a值点的个数,即$f^{-1}(a)\cap\{z:|z|\leqslant t\}$的元素个数,而$\ln^+ x = \ln x (x \geqslant 1)$, $\ln^+ x = 0 (0 \leqslant x < 1)$.

函数$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f)$称为$f(z)$的 Nevanlinna 特征(Nevanlinna characteristic).

Nevanlinna 第一定理(Nevanlinna first theorem). 对于任意的在圆盘K_R上亚纯的函数$f(z)$,对于任意的r $(0 \leqslant r < R)$和任意的复数a,有

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + \varphi(r, a), \quad (1)$$

其中

$$|\varphi(r, a)| \leqslant \ln^+|a| + |\ln|c|| + \ln 2.$$

这里,按照$f(0)\neq\infty$或$f(0)=\infty$, c分别表示函数$f(z)-a$或$f(z)$自己在原点的 Laurent 展式的第一个非零系数. 于是,对于在$r\to R$时其特征$T(r, f)$无限增长的函数,对于不同的值a,和式$m(r, a, f) + N(r, a, f)$与$T(r, f)$是相等的,至多相差一个有界的附加项$\varphi(r, a)$. 在这个意义下,对于任意一个在K_R上亚纯的函数,所有的值a都是等价的. 基于这个理由,亚纯函数的值分布理论致力于有关不变和式(1)中的某一项$m(r, a, f)$或$N(r, a, f)$的渐近性状的问题的研究.

Nevanlinna 第二定理(Nevanlinna second theorem)表明,对于几乎所有的点a,在和式(1)中起主要作用的是$N(r, a, f)$. 定理的叙述如下.

对于任意的在圆盘$K_R=\{z:|z|<R\leqslant\infty\}$上亚纯的函数$f(z)$,每一个$q(q\geqslant 3)$和扩充复平面里任意的互不相同的复数$\{a_k\}_{k=1}^q$,关系

$$\sum_{k=1}^q m(r, a_k, f) \leqslant 2T(r, f) - N_1(r, f) + S(r, f) \quad (2)$$

成立,其中

$$N_1(r, f) = N(r, \infty, 1/f') + 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f'),$$

而项$S(r, f)$具有下述性质:

1) 若$R=\infty$,即$f(z)$是在整个开复平面上亚纯的,则当$r\to\infty$时,

$$S(r, f) = O(\ln(rT(r, f)))$$

对r的所有的值成立,可能有一个总测度有限的例外集合E.

2) 若$R<\infty$,则当$r\to\infty$时,

$$S(r, f) = O\left(\ln\left(\frac{R}{R-r}\,T(r, f)\right)\right)$$

对r的所有的值成立,可能有一个满足

$$\int_E \frac{dr}{R-r} < \infty$$

的例外集合E. 函数$N_1(r, f)$在r增加时是非减的,所以,当$r\to\infty$时,在某个例外集合E之外,(2)的右端项不可能比$2T(r, f)$增加得更快.

参考文献

[1] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970(译自德文).

[2] Nevanlinna, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, 1929.

[3] Weyl, H. and Weyl, J., Meromorphic functions and analytic curves, Princeton Univ. Press, 1943.

[4] Ahlfors, L., The theory of meromorphic curves, *Acta Soc. Sci. Fennica. Nova Ser. A*, 3(1941), 4, 1-31.

[5] Cartan, H., Sur les zéros des combinations linéares de *p* fonctions holomorphes données, *Mathematica (Cluj)*, 7(1933), 5-31.

[6] Griffiths. P. and King, J., Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.*, **130**(1973), 145－220.

[7] Петренко, В. П., Рост мероморфных функций, Хар., 1978.

В. П. Петренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hayman, W. K., Meromorphic functions, Oxford Univ. Press, 1964.

[A2] Griffiths, P. A., Entire holomorphic mappings in one and several complex variables, Pinceton Univ. Press, 1976.

【译注】

参考文献

[B1] 杨乐，值分布论及其新研究，科学出版社，1982.

陈怀惠 译

Newton 二项式 [**Newton binomial** 或 binomium of Newton; **Ньютона бином**]

把**二项式**(binomial)的任意正整数幂展开为按其中一项的幂排列的多项式的公式:

$$(z_1+z_2)^m=$$

$$=z_1^m+\frac{m}{1!}z_1^{m-1}z_2+\frac{m(m-1)}{2!}z_1^{m-2}z_2^2+\cdots+z_2^m=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}z_1^{m-k}z_2^k, \qquad (*)$$

其中

$$\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}=\frac{m!}{k!(m-k)!}$$

是**二项式系数**(binomial coefficients). 当含 n 项时，公式(*)取下列形式:

$$(z_1+\cdots+z_n)^m=$$

$$=\sum_{k_1+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!\cdots k_n!}z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}.$$

对于任意指数 m (实数或复数). 一般地说，(*)的右端是一个**二项级数**(binomial series).

二项式公式逐渐形成的过程(从一些最简单的特殊情况——"和的平方与立方"的公式开始)，可以追溯到 11 世纪，严格地说，I. Newton 的贡献在于发现二项级数.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 系数

$$\begin{bmatrix} m\\ k_1\cdots k_n\end{bmatrix}=\frac{m!}{k_1!\cdots k_n!}, \quad k_1+\cdots+k_n=m$$

称为多项式系数(multinomial coefficients).

张鸿林 译

Newton-Cotes 求积公式 [**Newton-Cotes quadrature formula**; **Ньютона-Котеса квадратурная формула**]

用于计算有限区间 $[a, b]$ 上的定积分的插值求积公式(quadrature formula)

$$\int_a^b f(x)dx\cong(b-a)\sum_{k=0}^{n}B_k^{(n)}f(x_k^{(n)}),$$

其结点为 $x_k^{(n)}=a+kh$, $k=0,\cdots,n$, n 为一自然数，$h=(b-a)/n$，结点数 $N=n+1$. 公式中的系数由此求积公式为插值这一事实确定，即

$$B_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}dt.$$

对于 $n=1,2,3,4,5,6,7,9$,所有系数都是正的，对于 $n=8$ 和 $n\geqslant 10$，系数中既有正的，也有负的. 此公式的代数精确度(algebraic degree of accuracy)即使得此公式对所有次数至多为 d 的多项式为精确而对 x^{d+1} 为不精确的数 d，当 n 为奇数时等于 n，当 n 为偶数时等于 $n+1$. Newton-Cotes 求积公式最简单的特殊情形是: **梯形公式**(trapezium formula)，即 $n=1$, $h=b-a$, $N=2$,

$$\int_a^b f(x)dx\cong\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)];$$

Simpson 公式(Simpson formula)，即 $n=2$, $h=(b-a)/2$, $N=3$,

$$\int_a^b f(x)dx\cong\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)];$$

"八分之三"求积公式('three-eighths' quadrature formula)，即 $n=3$, $h=(b-a)/3$, $N=4$,

$$\int_a^b f(x)dx\cong\frac{b-a}{8}[f(a)+3f(a+h)+$$
$$+3f(a+2h)+f(b)].$$

Newton-Cotes 公式很少用于大 n 的情形，其原因是上面提到的 $n\geqslant 10$ 时其系数的性质. 对于小的 n，较好的办法是采用组合 Newton-Cotes 公式，例如梯形公式与 Simpson 公式的组合.

[3] 中列出了 n 从 1 到 20 时 Newton-Cotes 求积公式的系数.

此公式首次出现于 I. Newton 1676 年致 G. Leibniz 的一封信中(见[1])，后来出现于 R. Cotes 写的书[2]中，其中给出了 n 从 1 到 10 时公式中的系数.

参考文献

[1] Newton, I., Mathematical principles of natural philosophy, University of California Press, 1934(I. 牛顿，自然哲学之数学原理，商务印书馆，1931).

[2] Cotes, R., Harmonia Mensurarum, 1－2, London, 1722.

[3] Крылов, В. И., Шульгина, Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966.
[4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.
И. П. Мысовских 撰

【补注】 上述公式常称为闭 Newton-Cotes 公式(Closed Newton-Cotes formula),与之相对的是端点不作为结点的开 Newton-Cotes 公式(open Newton-Cotes formula).

参考文献

[A1] Englls, H., Numcrical quadrature and cubature, Acad. Press, 1980.
[A2] Brass, H., Quadraturverfahren, Vandenhoeck & Ruprecht, 1977.
[A3] Davis, P. J., Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1984(中译本: P. J. Davis, P. Rabinowitz, 数值积分法, 高等教育出版社, 1986).
[A4] Stroud, A. H., Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations, Springer, 1974.
沈永欢 译

Newton 图形 [Newton diagram; Ньютона диаграмма], Newton 多边形(Newton polygon),

一条凸折线, Newton 在 1669 年(见[1])引进, 用以确定代数函数主项的指数. 借助于 Newton 图形逐步找出一个代数函数展开式的项的过程称为 Newton 图解法(method of the Newton diagram). V. Puiseux([2])更详细地设计了 Newton 图形. 因而在数学文献里有时称它为 Puiseux 图形(Puiseux diagram). 在 Puiseux 之前, Newton 图形的一个代数形式由 J. L. Lagrange 研究([3]).

设 $F(x, y)$ 是关于 y 的伪多项式, 即

$$F(x, y)=\sum_{s=0}^{n} F_s(x) y^s,$$

其中

$$F_s(x)=x^{\rho_s}\sum_{r=0}^{\infty} F_{rs} x^{r/p},$$

x 和 y 是复变量, F_{rs} 是复数, p 是自然数, ρ_s 是非负有理数, $F_n(x)\neq 0$, $F_0(x)\neq 0$. 通常假定: 若 $F_s(x)\neq 0$, 则 $F_{0s}\neq 0$, 因而 $F_{00}\neq 0$, $F_{0n}\neq 0$. 现在要寻求方程

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

的级数形式

$$y=y_\varepsilon x^\varepsilon+y_{\varepsilon'} x^{\varepsilon'}+y_{\varepsilon''} x^{\varepsilon''}+\cdots \tag{2}$$

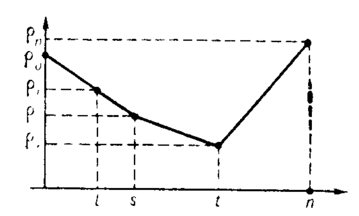
的解 $y=y(x)$, 其中 $\varepsilon<\varepsilon'<\cdots$, 或简言之, $y=y_\varepsilon x^\varepsilon+z$, 当 $x\to 0$ 时, $z=o(x^\varepsilon)$. 为了确定 ε 和 y_ε 的可能的值, 把(2)代入(1)中, 合并 x 的同幂项, 再让这些幂的系数等于零.

这个过程从最低次项开始. 当指数 ε 尚未确定时, 便无法说出合并后哪一项关于 x 是最低次的. 不过, 最低次项肯定在下述诸项之中:

$$F_{00}x^{\rho_0},\ F_{0k}y_\varepsilon^k x^{\rho_k+k\varepsilon},\ F_{0n}y_\varepsilon^n x^{\rho_n+n\varepsilon}, \tag{3}$$

其中 k 取遍值 $1, 2, \cdots$ 中使得 $F_k(x)\neq 0$ 的那些值. 为了零化最低阶项, 必须选取 ε, 使得指数 ρ_0, $\rho_k+k\varepsilon$, $\rho_n+n\varepsilon$ 中至少有两个是相等的, 而其余的都不比它们小. 这个讨论导致 Newton 图形.

在平面上取定一个直角 Descartes 坐标系, 并且标绘出点 $(0, \rho_0)$, (k, ρ_k) 和 (n, ρ_n), 其中 k 取遍和(3)同样的值. 通过点 $(0, \rho_0)$ 画出与 y 轴重合的直线, 然后按逆时针方向绕 $(0, \rho_0)$ 旋转这条直线直至它遇到一个标绘出的点, 设为 (l, ρ_l). 通过 $(0, \rho_0)$ 和 (l, ρ_l) 的直线 L 与负 x 轴的夹角的正切是 ε 的一个值, 因为 $\rho_0=\rho_l+l_\varepsilon$, 而若 $(k, \rho_k)\notin L$, 则 $\rho_k+k\varepsilon>\rho_l+l_\varepsilon$. 设 (s, ρ_s) 是 L 上有最大的 x 坐标的点, 让 L 按逆时针方向绕 (s, ρ_s) 旋转直至它遇到另一个标绘出的点, 设为 $(t, \rho_t)(t>s)$. 设 L' 是通过 (s, ρ_s) 和 (t, ρ_t) 的直线. 在 L' 和负 x 轴之间的夹角的正切是 ε 的另一个可能的值. 继续这样的构造, 得到 Newton 图形.



系数 y_ε 的值按下述办法确定. 设 (i, ρ_i) 和 (j, ρ_j) 是 Newton 图形的一个线段的端点, 这个线段确定 ε 的一个可能的值. 为了在把(2)代入(1)后零化其中的最低阶项, 必须且只需

$$\sum_\varepsilon{}' F_{0s}y_\varepsilon^s=0, \tag{4}$$

其中和号上的"撇"表示求和是对于那些使得 $\rho_s+s\varepsilon=\rho_i+i\varepsilon$ 的 ρ 进行的. 方程(4)有 $j-i$ 个非零根(包括重数), 即和 Newton 图形的相应的线段的投影长度同样多. 由此易见, 通过 Newton 图形的方法, 可以得到(2)中的主项 $y_\varepsilon x^\varepsilon$ 的所有 n 个值. 用同样的方法确定展式(2)的下一项, 以及以后各项. 作为上述方法的一个结果, (1)的所有 n 个解都具有形式(2), 所谓 Puiseux 级数(Puiseux series)(见**代数函数**(algebraic function)). Newton 图形的方法也可用于微分方程的求解.

参考文献

[1] Newton, I., The mathematical papers of I. Newton, 1-8, Cambridge Univ. Press, 1967-1981.

[2] Puiseux, V., Récherches sur les fonctions algébriques, *J. Math. Pure Appl.*, **15** (1850), 365 – 480.
[3] Lagrange, J. L., Solution de quelques problèmes d'astronomie sphérique par le moyen des séries, *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci., Belles Lettres Berlin* (1776).
[4] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本: Vaĭnberg, M. M. and Trenogin, V. A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff, 1974).
[5] Исаак Ньютон. 1643 – 1727. Сб. статей к трехсотлетию со дня рождения, М.-Л., 1943.
[6] Брюно, А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979 (英译本: Bruno, A. D., Local methods in nonlinear differential equations, Springer, 1989).

В. А. Треногин 撰 陈怀惠 译

Newton 插值公式 [Newton interpolation formula; Ньютона интерполяционная формула]

利用均差来表示 **Lagrange 插值公式** (Lagrange interpolation formula) 的一种形式:

$$L_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+\cdots+ +(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0;\cdots;x_n), \tag{1}$$

其中 $f(x_0;\cdots;x_k)$ 为 k 阶均差，它是 I. Newton 在 1687 年研究的. 公式 (1) 称为不等距差分 (unequal differences) Newton 插值公式. 当诸 x_i 为等距时，亦即如果

$$x_1-x_0=\cdots=x_n-x_{n-1}=h,$$

那么，利用引进的记号 $(x-x_0)/h=t$ 并按公式

$$f(x_0;\cdots;x_k)=\frac{f^k_{k/2}}{h^k k!},\quad k=0,\cdots,n,$$

用有限差分 $f^k_{k/2}$ 来表示均差 $f(x_0;\cdots;x_k)$，就可得到一种方法来将多项式 $L_n(x)$ 写成形式

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=f_0+tf^1_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_1+\cdots+ +\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}f^n_{n/2}, \tag{2}$$

它称为 Newton 向前插值 (forward interpolation) 公式. 如果在具有结点 $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-n}$ 的插值多项式 L_n 中实行相同的变量替换，这里 $x_{-k}=x_0-kh$，而

$$L_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_{-1})+\cdots+ +(x-x_0)\cdots(x-x_{-n+1})f(x_0;\cdots;x_{-n}),$$

那么就得到 Newton 向后插值 (backward interpolation) 公式:

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)= =f_0+tf^1_{-1/2}+\frac{t(t+1)}{2!}f^2_{-1}+\cdots+ +\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}f^n_{-n/2}. \tag{3}$$

公式 (2) 和 (3) 在计算一个已知函数 $f(x)$ 的函数表时是方便的，如果点 x 位于该表的开头或末尾. 这是因为在这种情况下要想提高逼近精度而增加一个或几个结点时不致于像用 Lagrange 公式计算那样重复已经做过的全部工作.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods. 1, Pergamon, 1973).
[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

М. К. Самарин 撰

【补注】 均差 $f(x_0;x_1),\cdots,f(x_0;\cdots;x_n)$ 定义为

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$f(x_0;x_1;x_2)= =\frac{1}{x_2-x_1}\left[\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right],$$

或

$$f(x_0;\cdots;x_n)=\sum_{i=0}^{n}{\prod_{j=0}^{n}}'\frac{f(x_i)}{x_i-x_j},$$

其中在记号 $\prod'$ 中的一撇表示须除去因子 $1/(x_i-x_j)$. 公式 (1) 也称为函数 f 的有限 Newton 级数 (finite Newton series).

参考文献

[A1] Atkinson, K. E., An introduction to numerical analysis, Wiley, 1978.
[A2] Davis, P., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975.
[A3] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1974.

史应光 译

Newton 力学定律 [Newton laws of mechanics; Ньютона законы механики]

描述物体在外力作用下的运动的三个基本定律.

第一定律: 如果一个质点上无外力作用 (或者外力彼此平衡)，则相对于惯性**参考系** (reference system)，该质点处于静止状态或作匀速直线运动.

第二定律: 如果力 **F** 作用在一个质点上，则相对于惯性参考系，该质点产生加速度 **a**，使得 **a** 与质点质量 m 之积等于 **F**:

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}.$$

第三定律：两质点相互作用，其作用力绝对值大小相等，方向相反，作用在沿两质点的连线上.

对于尺度很小的物体（基本粒子）的运动和速度接近于光速的运动，Newton 力学定律不再成立.

这些定律是 Newton 于 1687 年阐明的.

C. M. Tapr 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lindsay, R. B. and Margenau, H., Foundations of physics, Dover, 1957.

[A2] Rutherford, D. E., Classical mechanics, Dliver & Boyd, 1957.

[A3] Taylor, Th. T., Mechanics: classical and quantum, Pergamon, 1976.

张鸿林 译

Newton-Leibniz 公式 [Newton-Leibniz formula; Ньютона-Лейбница формула]

把给定的函数 f 在一个区间上的定积分的值表示为函数 f 的任何原函数（见**积分学**（integral calculus））F 在该区间两端点之值的差的公式：

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (*)$$

因 I. Newton 和 G. Leibniz 而得名，他们已经知道由（*）表示的规则，虽然后来才发表.

如果函数 f 在区间 $[a,b]$ 上是 Lebesgue 可积的，特别是如果函数 f 在这个区间上是连续的，且

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C,$$

其中 C 是一个常数，则公式（*）成立. 这时，函数 F 是绝对连续的，等式 $F'(x)=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处成立，如果 f 在 $[a,b]$ 上是连续的，则处处成立.

Newton-Leibniz 公式的推广是关于具有边界的可定向流形的 **Stokes 公式**（Stokes formula）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 由 Newton-Leibniz 公式表示的定理称为微积分学基本定理（fundamental theorem of calculus），例如见 [A1].

参考文献

[A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966.（中译本：W. 卢丁，实分析与复分析，人民教育出版社，1982）.

张鸿林 译

Newton 法 [Newton method; Ньютона метод]，切线法（method of tangents）

求出实方程

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

根的近似位置的一种方法，这里 f 是可微函数. Newton 法的逐次逼近通过公式

$$x^{k+1}=x^k-[f'(x^k)]^{-1}f(x^k),\ k=0,1,\cdots \qquad (2)$$

进行计算. 如果 f 二次连续可微，x^* 是（1）的一个单根，且初始近似值 x^0 充分接近 x^*，则 Newton 法具有二次收敛性，即

$$|x^{k+1}-x^*|\leqslant c|x^k-x^*|^2,$$

其中 c 是只依赖于 f 和初始近似值 x^0 的常数.

在解方程（1）时，经常用所谓修正 Newton 法（modified Newton method）

$$x^{k+1}=x^k-[f'(x^0)]^{-1}f(x^k) \qquad (3)$$

代替（2）. 在使得 Newton 法具有二次收敛性的同样假定下，法（3）具有线性收敛性，即它以公比小于 1 的**等比数列**（geometric progression）的速率收敛.

（2）有一种推广，称为 Newton-Канторович 法（Newton-Kantorovich method），它与解非线性算子方程 $A(u)=0$ 相联系，这里 A 是一个算子，$A: B_1\to B_2$，B_1，B_2 是 Banach 空间. 此法的公式形如

$$u^{k+1}=u^k-[A'(u^k)]^{-1}A(u^k),\ k=0,1,\cdots,$$

其中 $A'(u^k)$ 是 A 在 u^k 处的 **Fréchet 导数**（Fréchet derivative），它是 B_1 作用到 B_2 的可逆算子. 在一些特殊假定下，Newton-Канторович 法具有二次收敛性，而相应的修正方法具有线性收敛性（亦见 **Канторович 方法**（Kantorovich process））.

I. Newton 是于 1669 年设计出他的这个方法的.

参考文献

[1] Канторович, Л. В.,《Успехи матем. наук》, 3 (1948), 6, 89－185（英译本：Kantorovich, L. V., Functional analysis and applied mathematics, *Nat. Bur. Sci. Rep.*, **1509** (1952)).

[2] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977（中译本：Л. В. Канторович, Г. П. Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982）.

[3] Collatz, L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer, 1964.

[4] Красносельский, М. А., и т. д., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969（英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A. et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972）.

[5] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977). Ю. А. Кузнецов 撰

【补注】 Newton 法也称 Newton-Raphson 法 (Newton-Raphson method), 例如, 见 [A4] (10.11) 节 (关于单个方程) 和 (10.13) 节 (关于 n 个方程的方程组).

参考文献

[A1] Lax, P., Burstein, S., Lax, A., Calculus with applications and computing, New York Univ., 1972.

[A2] Dennis, J. E., jr., Schnable, R., Least change secant updates for quasi-Newton methods, *SIAM Review*, **21** (1979), 443 - 459.

[A3] Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations, Acad. Press, 1970.

[A4] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987. 沈永欢 译

Newton 数 [Newton number; Ньютона число]

力学运动相似性准则之一, 它是由表示 Newton 第二定律的方程得到的 (见 **Newton 力学定律** (Newton laws of mechanics)): $\mathrm{Ne} = 2P/\rho v^2$, 其中 P 是特征压力, ρ 是密度, v 是特征速度. 张鸿林 译

Newton 位势 [Newton potential; Ньютонов потенциал], 广义的

具有 Newton 核 $1/|x-y|^{N-2}$ 的**位势** (potential), 即如下形式的积分

$$u(x) = \int_S \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}}, \qquad (1)$$

这里 $|x-y|$ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$ 中两点 x 和 y 之间的距离, 其中积分是关于 $\mathbf{R}^N$ 上某个具有紧支集 S 的 **Radon 测度** (Radon measure) μ 进行的. 当 μ 是非负测度时, Newton 位势 (1) 是整个空间 $\mathbf{R}^N$ 里的一个上调和函数 (见**下调和函数** (subharmonic function)).

在 μ 的支集 S 的外部, Newton 位势 (1) 关于坐标 x 的各阶导数都存在, 且是 **Laplace 方程** (Laplace equation) $\Delta u = 0$ 的一个正则解, 即 u 是开集 CS 上的**调和函数** (harmonic function), 在无穷远点是正则的且 $u(\infty) = 0$. 当 μ 是绝对连续时, 则 u 具有形式

$$u(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y) d\omega(y), \qquad (2)$$

其中 $d\omega$ 是 $\mathbf{R}^N$ 的体积元且 D 是某个有界域. 如果密度 (density) f 在闭区域 $\bar{D}$ 是 Hölder 连续的且如果边界 ∂D 是由有限个闭 Ляпунов 超曲面组成 (见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)), 则 u 在 D 的内部有连续的二阶导数且满足 **Poisson 方程** (Poisson equation)

$$\Delta u(x) = -(N-2)2\pi^{N/2} f(x)/\Gamma(N/2).$$

在 Newton 的工作中, "位势" 这个概念还没有出现. J. L. Lagrange 在 1773 年首先证明了 Newton 万有引力场的力函数的存在性. G. Green 在 1828 年而 C. F. Gauss 在 1840 年, 首先对 $N=3$ 形式 (2) 的积分使用术语 "位势函数" 和 "位势". 术语 "Newton 位势" 有时指狭义的, 只用于形式 (2) 的体位势; 有时只用于, 由具有密度 $f(y)$ 的质量分布在 D 里 ($N=3$) 所产生的万有引力的位势 (2), 这种有确切物理意义的情况.

如果形式 (2) 或 (1) 的积分是在一个超曲面 $S \subset \mathbf{R}^N$ 上, 即如果

$$u(x) = \int_S \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y) d\sigma(y), \qquad (3)$$

那么称之为一个单层 Newton 位势 (simple-layer Newton potential); 它在 S 的外部是一个正则调和函数. 如果 S 是一个闭 Ляпунов 超曲面且密度 $f(y)$ 在 S 上是 Hölder 连续的, 那么单层 Newton 位势在 $\mathbf{R}^N$ 上处处连续, 且它的导数在 S 的外部连续. 此外, 它沿 S 在点 $y_0 \in S$ 的外法线方向 n_0 的方向导数, 当从 S 的内部和外部逼近 S 时有不同的极限. 这可用公式表示为

$$\lim_{x \to y_0} \left. \frac{du}{dn_0} \right|_i = \frac{du(y_0)}{dn_0} + \frac{(N-2)\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} \left. \frac{du}{dn_0} \right|_e = \frac{du(y_0)}{dn_0} - \frac{(N-2)\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

其中

$$\frac{du(y_0)}{dn_0} = (N-2)\int_S f(y) \frac{\cos(y-y_0, n_0)}{|y-y_0|^{N-1}} d\sigma(y), \quad y_0 \in S,$$

是所谓的单层 Newton 位势法向导数的直接值, $(y-y_0, n_0)$ 是向量 $y-y_0$ 与法线 n_0 之间的夹角; 法向导数 $du(y_0)/dn_0$ 在 S 上连续.

双层 Newton 位势 (double-layer Newton potential) 具有形式

$$v(x) = \int_S f(y) \frac{\cos(y-x, n)}{|y-x|^{N-1}} d\sigma(y), \qquad (4)$$

其中 n 是 S 在点 $y \in S$ 的外法线. 它在 S 的外部也是一个调和函数, 但逼近 S 时有间断性. 若对 S 和 $f(y)$ 的假定如同上段, 则 $v(x)$ 从 S 的内部和外部逼近 S 都有极限. 可用公式表示为

$$\lim_{x\to y_0} v(x)|_i = v(y_0) + \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

$$\lim_{x\to y_0} v(x)|_a = v(y_0) - \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

其中

$$v(y_0) = \int_S f(y) \frac{\cos(y-y_0, n)}{|y-y_0|^{N-1}} d\sigma(y)$$

是所谓的双层 Newton 位势在 $y_0 \in S$ 的直接值．但是，当对 S 和 $f(y)$ 稍加较严格的条件，双层 Newton 位势的法向导数穿过 S 时却是连续的．

亦见**双层位势** (double-layer potential)；**位势论** (potential theory)；**单层位势** (simple-layer potential)；**曲面位势** (surface potential)．

参考文献

[1] Günter, N. M., Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F. Ungar, New-York, 1967 (译自法文).

[2] Сретенский, Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.-Л., 1946.

[3] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966 (英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[4] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1959.

[5] Wermer, J., Potential theory, Springer, 1974.

[6] Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, F. Ungar, 1929, Re-issue: Springer, 1967.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 2 维的"类似物"是对数位势．

参考文献

[A1] Gauss, C. F., Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrte Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs-und Abstossungskräfte, in Werke, Vol. 5, K. Gesellschaft Göttingen, 1876, 195–242.

[A2A] Green, G., An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism I, *J. Reine Angew. Math.*, **39** (1850), 73–89, Re-issued by Lord Kelvin.

[A2B] Green, G., An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism II, *J. Reine Angew. Math.*, **44** (1852), 356–374. Re-issued by Lord Kelvin.

[A2C] Green, G., An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism III, *J. Reine Angew. Math.*, **47** (1854), 161–221. Re-issued by Lord Kelvin.

[A3] Lagrange, J.-L., Sur l'équation séculaire de la lune, *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* (1773).

高琪仁、吴炯圻 译

Neyman 置信区间法 [Neyman method of confidence intervals; Неймана метод доверительных интервалов]

置信估计 (confidence estimation) 的方法之一，可用来根据观测结果求概率律的未知参数的**区间估计量** (interval estimator)．此方法由 J. Neyman 提出并发展 (见 [1], [2])，方法的要领如下．假设 $X_1, \cdots, X_n$ 是随机变量，其联合分布函数 $F(x,\theta)$ 依赖于参数 $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n$．其次，假设作为参数 θ 的点估计采用统计量 $T=T(X_1,\cdots,X_n)$，其分布函数为 $G(t,\theta)(\theta \in \Theta)$．那么，对于区间 $0.5<P<1$ 中的任意数 P，可以定义关于 θ 的两个方程组成的方程组:

$$G(T;\theta) = \begin{cases} P, \\ 1-P. \end{cases} \qquad (*)$$

在实际中几乎所有感兴趣场合都满足的，分布函数 $F(x;\theta)$ 的一定的正则性条件下，方程组 (*) 有唯一解

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(T), \overline{\theta} = \overline{\theta}(T), \ \overline{\theta}, \underline{\theta} \in \Theta,$$

满足

$$\mathrm{P}\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} \mid \theta\} \geqslant 2P-1.$$

集合 $(\underline{\theta}, \overline{\theta}) \subset \Theta$ 称为未知参数 θ 的置信概率为 $2P-1$ 的置信区间 (confidence interval) 或置信估计量 (confidence estimator)．统计量 $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为对应于选定的置信系数 P 的下置信限 (lower confidence bound) 和上置信限 (upper confidence bound)．至于数

$$p = \inf_{\theta \in \Theta} \mathrm{P}\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} \mid \theta\}$$

称为置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 的置信系数 (confidence coefficient)．这样，由 Neyman 置信区间法得置信系数为 $p \geqslant 2P-1$ 的置信区间．

例 1．设独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 服从同一正态律 $\Phi(x-\theta)$，其数学期望 θ 未知 (见**正态分布** (normal distribution))．在此情形下，θ 的最优估计量是**充分统计量** (sufficient statistic) $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$，它服从正态律 $\Phi[\sqrt{n}(x-\theta)]$．在区间 $0.5<P<1$ 中固定 P 并解方程组

$$\Phi\left[\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)\right] = P, \quad \Phi\left[\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)\right] = 1-P,$$

求出对应于 P 的下置信限和上置信限

$$\underline{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(P), \quad \overline{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1-P).$$

因为

$$\Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(1-y) \equiv 0, \ y \in [0,1],$$

故正态律 $\Phi(x-\theta)$ 未知数学期望 θ 的置信区间有如下形式:

$$\left(\overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(P), \overline{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(P)\right),$$

且置信系数恰好等于 $2P-1$．

例 2．设随机变量 μ 服从参数为 n 和 θ 的二项律

(见**二项分布**(binomial distribution)), 即对于任何整数 $m=0,1,\cdots,n$, 有

$$\mathsf{P}\{\mu\leqslant m\mid n,\theta\}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\theta^{k}(1-\theta)^{n-k}=$$

$$=I_{1-\theta}(n-m,m+1),\quad 0<\theta<1,$$

其中

$$I_{x}(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_{0}^{x}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

$$(0\leqslant x\leqslant 1,a>0,\ b>0)$$

是**不完全 B 函数**(incomplete beta-function). 如果"成功"参数 θ 未知, 则为求置信限需根据 Neyman 置信区间法解方程

$$I_{1-\theta}(n-\mu,\ \mu+1)=\begin{cases}P,\\1-P,\end{cases}$$

其中 $0.5<P<1$. 利用数理统计表求出这两个方程的根 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$, 分别是置信系数为 P 的置信上限和下限. 这样求出的置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 的系数恰好是 $2P-1$. 显然, 如果试验中得 $\mu=0$, 则 $\underline{\theta}=0$; 如果 $\mu=n$, 则 $\overline{\theta}=1$.

Neyman 置信区间法本质上区别于 **Bayes 方法**(Bayesian approach)和基于 Fisher 信念法(见**信念分布**(fiducial distribution))的方法. 在 Neyman 置信区间法中, 分布函数 $F(x,\theta)$ 的未知参数 θ 视为常数, 而置信区间 $(\underline{\theta}(T),\overline{\theta}(T))$ 本身是试验之前建立的, 并在试验过程中计算统计量 T 的值. 从而, 根据 Neyman 置信区间法, 不等式 $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$ 同时成立的概率, 是置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 覆盖参数 θ 的未知真值的**先验概率**(a priori probability). 事实上, 当 θ 为随机变量时, Neyman 置信区间法仍然可行, 因为在此方法中置信区间在试验之前建立, 从而不依赖于参数的**先验分布**(a priori distribution). Neyman 置信区间优于 Bayes 方法和信念法之处, 在于它与关于 θ 的先验信息无关, 从而与 Fisher 法不同, 它逻辑上是完善的. 在一般情形下, 由 Neyman 置信区间法得出未知参数的整整一组置信区间, 因此产生了建立最优区间估计问题. 这样的估计应具有诸如无偏性、精确性和相似性等性质. 问题将在假设检验理论的范围内得到解决.

参考文献

[1] Neyman, J., On the problem of confidence intervals, *Ann. Math. Stat.*, **6** (1935), 111–116.

[2] Neyman, J., Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability, *Philos. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A*, **236** (1937), 333–380.

[3] Большев, Л.Н., Смирнов, Н.В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1983.

[4] Большев, Л.Н., 《Теория вероятн. и её примен.》, **10** (1965), 1, 187–192.

[5] Lehmann, E.L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

М.С. Никулин 撰 周概容 译

Neyman-Pearson 引理 [Neyman-Pearson lemma; Неймана-Пирсона лемма]

在简单假设 H_0 对简单备选假设 H_1 的统计检验问题中, 断定在具有同一给定的**显著性水平**(significance level) 的统计检验之中, **似然比检验**(likelihood-ratio test)是**最大功效检验**(most-powerful test). 此引理是 J. Neyman 和 E.S. Pearson 证明的(见[1]), 常称为数理统计的基本引理(fundamental lemma of mathematical statistics), 亦见**统计假设检验**(statistical hypotheses, verification of).

参考文献

[1] Neyman, J. and Pearson, E.S., On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, Ser. A, **231** (1933), 289–337.

[2] Lehmann, E.L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

М.С. Никулин 撰 周概容 译

Neyman 结构 [Neyman structure; Неймана структура]

由不依赖于充分统计量的统计量所确定的结构. Neyman 结构的概念, 是 J. Neyman 鉴于统计假设检验理论中建立**相似检验**(similar test)的问题提出的(见[1]). 在此情形下, 如果统计检验的临界函数具有 Neyman 结构, 则"Neyman 结构"一词本身用于统计检验的结构. 设 X 是取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},P_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$ 的随机变量, 欲根据 X 的实现检验复合假设 $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$, 且对于族 $\{P_\theta,\theta\in\Theta_0\}$ 存在**充分统计量**(sufficient statistic) T, 其概率分布属于族 $\{P_\theta^T,\theta\in\Theta_0\}$. 在这种情形下, 用于检验假设 H_0 的任一水平 α 统计检验具有 Neyman 结构, 如果其临界函数 φ 关于测度 P_θ^T $(\theta\in\Theta_0)$ 几乎处处满足条件:

$$\mathsf{E}\{\varphi(X)\mid T=t\}=\alpha. \tag{1}$$

显然, 如果统计检验具有 Neyman 结构, 则它关于族 $\{P_\theta^T,\theta\in\Theta_0\}$ 是相似的(见**相似检验**(similar test)), 因为对于一切 $\theta\in\Theta_0$, 有

$$\mathsf{E}_\theta\{\varphi(X)\}=\mathsf{E}_\theta\{\mathsf{E}[\varphi(X)\mid T=t]\}=\alpha.$$

满足条件(1), 实质上是把复合假设 H_0 的检验问题, 归结为对于充分统计量 T 的每一固定值 t 检验简单假设 H_0 的问题.

例. 设独立随机变量 X_1 和 X_2 服从 Poisson 律(见 **Poisson 分布**(Poisson distribution)), 其参数 λ_1 和 λ_2 未知; 欲检验假设 $H_0:\lambda_1=\lambda_2$, 备选假设为 $H_1:\lambda_1\neq\lambda_2$. 由于 X_1 和 X_2 独立, 知统计量 $T=X_1+X_2$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 律, 而随机变量 X_1 和 X_2 在 $T=t$ 的条件下的条件分布是二项分布, 参数相应为 t, $\lambda_1/(\lambda_1+$

λ_2)和 t，$\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$，即

$$\mathrm{P}\{X_1=k\mid T=t\}=\binom{t}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{t-k},$$

$$(k=0,1,\cdots,t)\ . \qquad (2)$$

在 H_0 成立的情形下，统计量 T 对于未知的公共值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 是充分的．而由(2)可见，如果假设 H_0 成立，则在充分统计量 $T=t$ 的值固定的条件下，随机变量 X_1 的条件分布是参数为 t 和 1/2 的二项分布，即在 H_0 成立时，有

$$\mathrm{P}\{X_1=k\mid T=t\}=\binom{t}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^t,\ k=0,1,\cdots,t\ .$$

这样，在此情形下，复合假设 H_0 的检验问题归结为简单假设 H_0^t 的检验问题．根据假设 H_0^t，随机变量 X_1（在和 $X_1+X_2=t$ 固定的情形下）的条件分布是参数为 t 和 1/2 的二项分布．为检验假设 H_0^t，例如可以利用**符号检验**(sign test)．

Neyman 结构的概念在复合统计假设的检验问题中有重要意义，因为正是在具有 Neyman 结构的检验中常可以找到**最大功效检验**(most-powerful test)．E. Lehmann 和 H.Scheffé 证明，检验复合假设 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 的统计检验具有关于充分统计量 T 的 Neyman 结构，当且仅当由统计量 T 诱导的分布族 $\{P_\theta^T,\theta\in\Theta_0\}$ 是有界完全的．基于 Neyman 结构的概念制订了建立相似检验的方法．参见**完全分布族**(distributions, complete family of)；**相似检验**(similar test)．

参考文献

[1] Neyman, J., Current problems of mathematical statistics, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Amsterdam, 1954, Vol. 1, Noordhoff & North-Holland, 1957, 349—370.

[2] Lehmann, E.L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

[3] Линник, Ю.В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

М.С.Никулин 撰 周概容 译

Nicomedes 蚌线 [**Nicomedes conchoid**; **Никомеда конхоида**]

一种四次平面**代数曲线**（algebraic curve），在 Descartes 直角坐标系中，其方程具有下列形式：

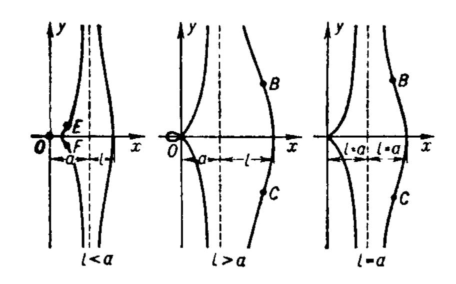
$$(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0;$$

在极坐标中为

$$\rho=\frac{a}{\sin\psi}\pm l.$$

外分支（见图）. 渐近线 $x=a$. 两个拐点：B 和 C.

内分支. 渐近线 $x=a$. 坐标原点是二重点，它的性质取决于 a 和 l 的值. 当 $l<a$ 时，它是孤立点，



曲线具有两个拐点：E 和 F；当 $l>a$ 时，它是**结点**(node)；当 $l=a$ 时，它是**尖点**(cusp). Nicomedes 蚌线是直线 $x=a$ 的**蚌线**(conchoid).

这一曲线因 Nicomedes（公元前 3 世纪）而得名，他试图利用这一曲线解决三等分角问题.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

张鸿林 译

Никольский 空间 [**Nikol'skiĭ space**; **Никольского пространство**]

由定义在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的开集 Ω 上且有某种用向量 $r=(r_1,\cdots,r_n)$，$r_i>0$，$i=1,\cdots,n$，刻画的差分微分性质的函数组成的在 L_p 度量（$1\leqslant p\leqslant\infty$）下的 **Banach 空间**（Banach space）$H_p^r(\Omega)$. 这个概念是由 С. М. Никольский 引进的.

Никольский 空间 $H_p^r(\Omega)$ 能用对变量 x_i 的 r_i^* 阶偏导数的性质来描述，这里 $r_i=r_i^*+\alpha_i$，r_i^* 是一整数，$0<\alpha_i\leqslant 1$，$i=1,\cdots,n$；如果 $\Delta_{h_i}^s$ 表示函数关于 x_i 的步长 h_i 的 s 阶差商，$s=1,2,\cdots$，则

$$f\in H_p^r(M_1,\cdots,M_n;\Omega),\ M_i>0,$$

当且仅当 f 在 Ω 上有广义偏导数

$$f_{x_i}^{(r_i^*)}=\frac{\partial^{r_i^*}f}{\partial x_i^{r_i^*}},$$

$i=1,\cdots,n$，且对 $0<\alpha_i<1$，有

$$\|\Delta_{h_i}^1 f_{x_i}^{(r_i^*)}\|_{L_p(\Omega_{|h_i|})}\leqslant M_i|h_i|^{\alpha_i},$$

而对 $\alpha_i=1$，有

$$\|\Delta_{h_i}^2 f_{x_i}^{(r_i^*)}\|_{L_p(\Omega_{2|h_i|})}\leqslant M_i|h_i|,$$

这里 Ω_η 是 Ω 的边界的距离大于 $\eta>0$ 的点 $x\in\Omega$ 的集合而 h_i 是任意的.

空间 $H_p^r(\Omega)=H_p^{r_1,\cdots,r_n}(\Omega)$ 定义为对所有 $M_i>$

0, $i=1, \cdots, n$, 所有 $H_p^r(M_1, \cdots, M_n; \Omega)$ 的并.

如果 $\Omega \neq \phi$，则对任意的 $r_i>0$, $i=1, \cdots, n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Никольский 空间 $H_p^{r_1, \cdots, r_n}(\Omega)$ 非空且包含那些对任意的 $\varepsilon>0$, 任意的 $i=1, \cdots, n$, 都不属于 $H_p^{r_1, \cdots, r_{i-1}, r_i+\varepsilon, r_{i+1}, \cdots, r_n}$ 的函数.

当 $p=\infty$，r_i 不是整数且有关的导数连续，则 Никольский 空间是 **Hölder 空间** (Hölder space) . Никольский 空间的概念可推广到定义在充分光滑流形上函数的情况 (见 [2]) .

有一种用阶数小于 r_i^* 的偏导数的差分性质来描述 Никольский 空间的方法; 特别地, 用函数本身的高阶差分来描述.

设 $H_p^r(\Omega)$ 是迷向空间, 即 $r_1=\cdots=r_n=r$. 如果区域 Ω 是这样的: 类 $H_p^r(\Omega)$ 中的任一函数 f 能延拓到整个空间 $\mathbf{R}^n$ 而保持在同一类中, 即延拓后的函数属于 $H_p^r(\mathbf{R}^n)$ (当区域的边界充分光滑时, 总是这种情况) , 则 $f \in H_p^r(\Omega)$, 当且仅当对满足条件 $0<r-s<k$ 的任意非负整数 k 和 s, 函数有所有的 s 阶导数 $f^{(s)}$ 且存在常数 $M>0$, 使得

$$\|\Delta_h^k f^{(s)}\|_{L_p(\Omega_{k|h|})} \leqslant M|h|^{r-s}, \tag{1}$$

这里 $h=(h_1, \cdots, h_n)$, 而 $\Delta_h^k f^{(s)}$ 是 $f^{(s)}$ 的带向量步长 h 的 k 阶差分. 条件 (1) 等价于对 $f^{(s)}$ 的连续模的类似条件: 存在 $M>0$, 使得

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta) \leqslant M\delta^{r-s}, \ \delta>0,$$

这里

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta)=\sup_{|h|=1} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \|\Delta_{th}^k f^{(s)}\|_{L_p(\Omega_{kt})} \leqslant M\delta^{r-s}.$$

如果对 $f \in H_p^r(\Omega)$, M_f 表示使得对所有 $h \in \mathbf{R}^n$ 和一个容许阶数 s 的所有偏导数 (1) 式成立的全部 M 中的下确界, 则

$$\|f\|=\|f\|_{L_p(\Omega)}+M_f$$

是 $H_p^r(\Omega)$ 中的范数, 且对不同的容许对 k, s 所得范数是等价的.

由定义在整个空间 $\mathbf{R}^n$ 上的函数组成的 Никольский 空间可以借助于用指数型整函数最佳逼近此空间的函数来刻画其特征. 设 $E_{\nu_1, \cdots, \nu_n}(f)_p$ 是在 $L_p(R^n)$ 度量中用指数型关于 x_i 的阶数为 ν_i $(i=1, \cdots, n)$ 的整函数 $q_{\nu_1, \cdots, \nu_n}(x_1, \cdots, x_n) \in L_p(\mathbf{R}^n)$ 来逼近 $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$ 的最佳逼近 (误差) . 对 Никольский 函数以下的 Бернштейн, Jackson 和 Zygmund 型正定理和逆定理成立.

设 $f \in H_p^{r_1, \cdots, r_n}(M_1, \cdots, M_n; \mathbf{R}^n)$, 则对任何 $\nu_i>0$,

$$E_{\nu_1, \cdots, \nu_n}(f) \leqslant c\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\nu_i^{r_i}} \tag{2}$$

(常数 $c>0$ 不依赖于 f).

反之, 如果 (2) 对任一函数 $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$, 对 $\nu_i=a_i^k$, $k=0, 1, \cdots$, $a_i>1$, $i=1, \cdots, n$ 成立, 且设 q 是关于每一变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 1 阶整函数, 且

$$\|f-q\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c\sum_{i=1}^n M_i$$

(由 (2) , 对 $k=0$, q 是存在的) , 则

$$f-q \in H_p^{r_1, \cdots, r_n}(M_1^*, \cdots, M_n^*; \mathbf{R}^n),$$

这里

$$M_i^*=c_i\sum_{j=1}^n M_j, \tag{3}$$

且 (2) 中的常数 $c>0$ 和 (3) 中的 $c_i>0$ 不依赖于 M_i, $i=1, \cdots, n$.

如果 f 对所有变量是周期的, 则代替指数型函数, 借助于用三角多项式来最佳逼近函数, 能给出 Никольский 空间一个类似的描述 (见 [1], [4]) .

Никольский 空间可以借助应用于某类广义函数的 Bessel-Macdonald 算子来描述 (见**嵌入定理** (imbedding theorem)) .

对空间 $H_p^{r_1, \cdots, r_n}(\Omega)$ Никольский 已证明了对各种维数和度量的传递的嵌入定理 (见 [3] 和**嵌入定理**), 这些随后又被转移到更一般的函数类. 这些定理表明 Никольский 空间相对于出现于其中的函数的边界值形成一封闭系统: 在光滑流形上的 Никольский 空间中函数的迹在一定意义下能用 Никольский 空间的术语来完全描述.

Никольский 空间的性质使得有可能得到在适当的 Никольский 空间中 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 可解性的必要充分条件. 用边界函数属于一定的 Никольский 空间来表述: 当 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有充分光滑的边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $r>1/p$, 调和函数 u 属于类 $H_p^r(\Omega)$, 当且仅当边界值 $u|_{\partial\Omega}$ 属于类 $H_p^{r-1/p}(\partial\Omega)$. 特别地, 由此推出, 当 $p=2$, 如果 $u|_{\partial u} \in H_2^\rho(\partial\Omega)$, $\rho>1/2$, 则 Ω 上 u 的 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral) 是有限的, 因此 Dirichlet 问题可以用直接变分方法求解. 由对 Никольский 空间的嵌入定理推出, 如果 Ω 上 u 的 Dirichlet 积分有限, 则 $u|_{\partial\Omega} \in H_2^{1/2}(\partial\Omega)$ (见 [6]). Никольский 空间的一个推广是 Бесов 空间 $B_{p\theta}^{r_1, \cdots, r_n}$.

参考文献

[1] Никольский, С. М.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **38** (1951), 244 – 278.

[2] Никольский, С. М., 《Матем. сб.》, **33** (1953), 2, 261 − 326.

[3] Никольский, С. М., 《Докл. АН СССР》, **118** (1958), 1, 35 − 37.

[4] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[5] Бесов, О. В., Ильин, В. П., Никольский, С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975 (英译本: Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikol'skiĭ, S. M., Integral representations of functions and imbedding theorems, Wiley, 1978).

[6] Никольский, С. М., 《Докл. АН СССР》, **88** (1953), 3, 409 − 411.

Л. Д. Кудрявцев 撰　葛显良 译　鲁世杰 校

诣零代数 [nil algebra; нильалгебра]

每个元素均为幂零的(见**幂零元**(nilpotent element))幂结合(特别是结合的(见**幂结合代数**(algebra with associative powers)))代数．诣零代数的特殊情形是**幂零代数**(nilpotent algebra)和**局部幂零代数**(locally nilpotent algebra). 在结合代数中构造一个诣零非局部幂零代数是一个难题，实质上只知道唯一的这样的代数的例子(见[5])．

诣零代数类在取子代数和同态象下是封闭的．诣零代数通过诣零代数扩张时还是诣零的．从而，在每个代数里，所有诣零理想的和是一个包含每个诣零理想的最大诣零理想．它被称为该代数的上诣零根(upper nil radical)，而其商代数无非零诣零理想．单边诣零理想的和是否是诣零单边理想这个问题是 Köthe 问题(Köthe problem)．还不知道(1982)单诣零代数是否存在．当"Burnside 型的"条件成立时，诣零代数常常是幂零的或局部幂零的; Noether 诣零代数是幂零的; Artin(特别是有限维)诣零代数亦然; 特征 0 域上有界指数的诣零代数(元素的幂零指数是一致有界的)是幂零的(Higman 定理(Higman theorem)); 满足多项式恒等式的诣零代数是局部幂零的．有限生成诣零代数是否为幂零的尚不清楚(1982)．

人们特别关注在什么条件下域 k 上代数 A 的 **Jacobson 根**(Jacobson radical) $\mathrm{Rad}A$ 与诣零根一致．其中若干条件如下: A 是 Artin 的，特别是有限维代数($\mathrm{Rad}A$ 甚至是幂零的); $\mathrm{card}\,k>\dim_k A$，特别地，当 A 在 k 上有限生成，而且 k 是不可数的; 代数的代数 A; A 是带多项式恒等式，而且在 k 上有限生成的，但 k 是无限的．带多项式恒等式的特征为零的域上有限生成代数的根是幂零的．该条件等价于: 在该代数上某种标准恒等式成立．

在非结合代数中有类似于上面陈述的某些断言．例如，在右理想满足极大条件而且其加群无 2 阶或 3 阶元素的交错环中，每个单边诣零理想都是幂零的．在域 k 上 **Jordan 代数**(Jordan algebra) A 中，如果下述条件之一成立: $\mathrm{card}\,k>2+\dim A$; A 是**代数的代数**(algebraic algebra)，则 Jacobson 根 $\mathrm{Rad}A$ 是诣零理想．加群无二阶元素的有界指数的交错或特殊 Jordan 诣零环是局部幂零的(Ширшов 定理(Shirshov theorem))．有限维广义标准诣零代数是幂零的．

每个反交换代数在上述定义的意义上都是诣零代数; 从而，在反交换环类中诣零代数的概念是无意义的．但是，这个概念的各种模拟还是有用的．于是，在 Lie 环类中诣零代数的模拟是 Engel 代数，即元素的内导子均为幂零的代数．Engel 代数不必是局部幂零的，但是，如果内导子的幂零指数一致有界且基础域是特征 0 的，则 Engel 代数是局部幂零的．还不知道(1982)在这些限制下它是否是幂零的(Higgins 问题)．

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[3] Кострикин, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **21** (1957), 4, 515−540.

[4] Ширшов, А. И., 《Матем. сб.》, **41** (1957), 3, 381−394.

[5] Голод, Е. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 2, 273−276.

[6] Higman, G., On a conjecture of Nagata, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **52** (1956), 1−4.

[7] Higgins, P. J., Lie rings satisfying the Engel condition, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954), 8−15.

[8] Жевлаков, К. А., 《Алгебра и логика》, **6** (1967), 4, 11−17.

[9] McCrimmon, K., The radical of a Jordan algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **612** (1969), 3, 671−678.

В. Н. Латышев 撰

【补注】 带交换未定元 $\{x_i\}$ 的多项式环 $A[x_1,\cdots,x_n]$ 的 Jacobson 根是 A 的一个诣零理想 $N_n(A)$ 上的多项式环 $N_n[x]$．于是 $N_1\supseteq N_2\supseteq\cdots\supseteq N_\infty=\bigcap N_n$．$N_\infty$ 被刻画为使得幂零元的每个有限生成子模都是有界指数的那个极大理想．如果 A 是不可数域上代数，则所有 N_i 等于上根，但一般不知道有无其他关系．

Köthe 问题等价于下述问题: 如果 A 是一诣零代数，则矩阵代数 $M_2(A)$ 也是诣零的? 类似的问题是关于代数的代数的问题(Курош 问题(Kurosh problem))，除了 Π 代数的特殊情形外，答案是未知的(1989)．

参考文献

[A1] Amitsur, S. A., Nil radicals, historical notes, Coll. Math.

Soc. J. Bolyai, Keszthely (Hungary), Vol. 6, Rings and modules and radicals, 1971, 47-65.

【译注】

参考文献

[B1] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.
[B2] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

郭元春 译 牛凤文 校

诣零流 [nil flow; нильпоток]

在一**诣零流形** (nil manifold) $M=G/H$ 上由一幂零 Lie 群 G 的单参数子群 g_t 在 M 上之作用所定义的流：若 M 由陪集 gH 组成，则在诣零流的作用下，此陪集在时刻 t 成为 $g_t gH$.

参考文献

[1] Auslander, L., Green, L. and Hahn, F., Flows on homogeneous spaces, Princeton Univ. Press, 1963.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 一个远离的但不是等度连续的紧极小流的第一个例子就是一个诣零流（见**远离动力系统** (distal dynamical system)；**等度连续性** (equicontinuity)）.

齐民友 译

诣零群 [nil group; нильгруппа]

满足下述性质的群：其中任意两个元素 x 和 y 由关系式

$$[[\cdots[[x, y]y], \cdots]y] = 1$$

联系起来，式中的方括号代表换位子

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab,$$

而定义中换位子的个数 n 一般依赖于元素对 x, y. 如果对于群中所有的 x, y, n 都有界的话，称该群为 **Engel 群** (Engel group). 每个**局部幂零群** (locally nilpotent group) 都是诣零群. 一般地，反之不成立. 但在一些附加的假设之下，例如当群是**局部可解群** (locally solvable group) 的时候，反之也成立.

"诣零群"这一术语间或有不同的含义，即诣零群是一个其任意循环子群皆次正规的群，换言之，它们出现在群的某个次正规列中（见群的**正规列** (normal series)）.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本：А. Г. 库洛什，群论，上、下，高等教育出版社，1987, 1982).

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 [A1] 中证明了，存在非局部幂零的周期 Engel 群.

参考文献

[A1] Golod, E. S., On nil-algebras and residually finite p-groups, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **48** (1965), 103-106. (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **28** (1964), 273-276.)

王 杰 译 石生明 校

诣零理想 [nil ideal; нильалгебра]

【补注】 环 R 的子集 A 称为诣零的 (nil)，如其每元都是幂零的（见**幂零元** (nilpotent element)）. R 的理想是诣零理想，如其为诣零子集. 有最大诣零理想 (largest nil ideal)，称为诣零根 (nil radical). 有如下关系：

$$\mathrm{Jac}(R) \supset \mathrm{Nil\ Rad}(R) \supset \mathrm{Prime\ Rad}(R),$$

其中 Jac(R) 表示 R 的 **Jacobson 根** (Jacobson radical)，而 Prime Rad(R) 表示 R 的素根 (prime radical)，即 R 的全部素理想的交，每一个包含都可能是真的. 若 R 是交换的，则 Nil Rad(R) = Prime Rad(R). 素根也称为下诣零根 (lower nil radical)，而诣零根称为上诣零根 (upper nil radical).

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra, II, Ring theory, Springer, 1976.
[A2] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative noetherian rings, Wiley, 1987.
[A3] Rowen, L., Ring theory, 1, Acad. Press, 1988.

郭元春 译 牛凤文 校

诣零流形 [nil manifold; нильмногообразие]

连通幂零 Lie 群（见**幂零的 Lie 群** (Lie group, nilpotent)）的紧商空间.（然而有时不要求紧性.）

参考文献

[1] Мальцев, А. И., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, **13** (1949), 1, 9-32.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 亦见**诣零流** (nil flow) 及其参考文献.

下面是在各种应用中都相当重要的诣零流形的例子. 考虑以下形式的矩阵所成的三维 Heisenberg 群 (Heisenberg group) N:

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及 x, y, z 为整数时的上述形状的矩阵所成的 N 的离散子群 Γ. 由陪集 Γn ($n \in N$) 所成的相应商空间 $N \backslash \Gamma$ 是一个紧诣零流形，且有一个不变概率测度. 它在调和分析和 ζ 函数理论中起重要作用.

参考文献

[A1] Auslander, L., Lecture notes on nil-theta functions, Amer. Math. Soc., 1977.

齐民友 译

诣零半群 [nil semi-group; нильполугруппа]

具有零元的**半群** (semi-group)，且其中每个元素的某个方幂皆等于零元. 诣零半群构成了**周期半群** (periodic semi-group) 中最重要的类型之一：它们恰为具有唯一幂等元（即零元）的周期半群. 局部幂零半群 (locally nilpotent semi-groups)（即每个有限生成子

半群皆幂零的半群，见**幂零半群**（nilpotent semi-group））构成小一些的类．对于每个 $n>1$，存在满足等式 $x^n=0$ 但非局部幂零的半群（例如见[1]，第 8 章第 4 节）．一个有限诣零半群是幂零的，而局部幂零半群的类与局部有限诣零半群的类相重合（见**局部有限半群**（locally finite semi-group））．具有升零化子序列的半群（semi-groups with an ascending annihilator series）构成一个更小的类．半群 S 具有一个升零化子序列，如果它有一个增加的理想序列（见半群的**理想列**（ideal series）），满足对任意相邻的两项 A_α，$A_{\alpha+1}$ 有

$$SA_{\alpha+1}\cup A_{\alpha+1}S\subseteq A_\alpha.$$

一个诣零半群具有升零化子序列，当且仅当它有一个增加的理想序列，其中每个因子皆为有限．每个具有升零化子序列的半群都有一个由其不可分解元组成的唯一的不可约生成集．任一局部幂零半群有可能与其平方相等．许多有限性条件（见**带有限性条件的半群**（semi-groups with a finiteness condition））加到半群上之后，可以推出该半群是有限的．例如，关于理想的极小条件，或者关于右（或左）理想的极大条件等等．如果诣零半群 S 的所有幂零子半群都是有限的，则 S 也是有限的．

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Шеврин, Л. Н., 《Матем. сб.》, **53** (1961), 3, 367 − 386.

[3] Шеврин, Л. Н., 《Матем. сб.》, **55** (1961), 4, 473−480.

Л. Н. Шеврин 撰　王　杰 译　石生明 校

幂零代数 [nilpotent algebra; нильпотентная алгебра]

存在自然数 n，使得其中任意 n 个元素之积均为零的代数．如果有 $n-1$ 个元素之积非零，则称 n 为该幂零代数的幂零指数(index of nilpotency)．

幂零代数的例子是：零乘代数，严格上三角矩阵代数，幂零指数一致有界的幂零代数的直和，以及一个幂零代数与任意一个代数的张量积．

幂零代数类在取同态象与子代数时是封闭的．在一个结合代数中(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras))，有限个**幂零理想**(nilpotent ideal)之和为幂零理想，而任意多个幂零理想之和一般只是局部幂零的．特征 0 的域上有由幂零元组成基的有限维代数是幂零的．如果一个代数满足 d 次多项式恒等式，则其每个 $[d/2]$ 次的幂零子环属于若干幂零理想的和．特征 0 域上有限维 **Lie 代数**(Lie algerba)的导出代数是幂零的．与其正规化子(Cartan 子代数(Cartan sub-algebras))一致的幂零子代数在有限维单 Lie 代数分类中起着极重要的作用．幂零 Lie 代数有外自同构．带素周期正则自同构(即无非零的固定点)的 Lie 代数是幂零的．

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本：N. 贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964)．

[3] Albert, A. A., Structure of algebras, Amer. Math. Soc., 1939 (中译本：A. A. 阿尔贝脱，代数结构，科学出版社，1963)．

[4] Jacobson, N., A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 2, 281−283.

[5] Higman, G., Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 3, 321−334.

В. Н. Латышев 撰

【译注】

参考文献

[B1] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982．

[B2] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983．

[B3] 万哲先，李代数，科学出版社，1964．

郭元春 译　牛凤文 校

幂零元 [nilpotent element; нильпотентный элемент]

环或有零半群 A 中对于某个自然数 n 满足 $a^n=0$ 的元素 a．使得等式成立的最小的 n 称为 a 的幂零指数(nilpotency index)．例如，当 p 是一个素数时，在模 p^n 的剩余类环中，p 的剩余类就是指数为 n 的幂零元；在域 K 上的 2×2 矩阵环中，矩阵

$$\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}$$

是指数为 2 的幂零元；在群代数 $F_p[G]$ 中，元素 $1-\sigma$ 是指数为 p 的幂零元，其中 F_p 是 p 元域，G 是由 σ 生成的 p 阶循环群．

如果 a 是指数为 n 的幂零元，则有

$$1=(1-a)(1+a+\cdots+a^{n-1}),$$

即 $(1-a)$ 是 A 中可逆元，其逆可写成 a 的多项式．

在交换环 A 中，元素 a 是幂零的，当且仅当它含于该环的所有素理想中．所有幂零元构成一个理想 J，称为该环的诣零根(nil radical)；它与 A 的所有素理想的交一致．环 A/J 中无非零幂零元．

视交换环 A 为空间 $\operatorname{Spec}A$（A 的谱，见**环的谱**(spectrum of a ring)）上的函数环，幂零元对应于恒为零的函数．然而，考察幂零元在代数几何中常常是有用的，因为它能够使分析和微分几何(无穷小形变等等)中的常见概念获得纯代数的模拟．

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[2] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[3] Шафаревич, И.Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I.R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

Л.В.Кузьмин 撰

【补注】 结合环 R 中的元素 a 是强幂零的(strongly nilpotent), 如果每个序列 $a=a_0, a_1, \cdots$, 终归为零, 其中 $a_{n+1}\in a_n R a_n$. 显然, 每个强幂零元都是幂零的. 环 R 的素根(prime radical), 即所有素理想的交, 恰由强幂零元组成. 它是一个**诣零理想**(nil ideal).

参考文献

[A1] McConnell, J.C. and Robson, J.C., Noncommutative Noetherian rings, Wiley, 1987, §0.2.

【译注】

参考文献

[B1] 谢邦杰, 抽象代数学, 上海科学技术出版社, 1982.

[B2] 刘绍学, 环与代数, 科学出版社, 1983.

郭元春 译 牛凤文 校

幂零群 [nilpotent group; нильпотентная группа]

具有**正规列**(normal series)

$$G = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_{k+1} = \{1\}$$

的群, 其中每个商群 A_i/A_{i+1} 包含在 G/A_{i+1} 的中心里(即所谓中心列(central series)). 幂零群的最短中心列的长度称为它的类(class)(或者幂零度(degree of nilpotency)). 在幂零群中, 下(上)中心列(见**子群列**(subgroup series))终止于平凡群(群本身), 且其长度等于群的幂零类.

有限幂零群是 p 群(即阶为 p^k 的群, 这里 p 是素数)的直积. 任意幂零群中有限阶元素全体构成一个子群, 对于它的商群是无挠的. 有限生成无挠幂零群是主对角线上元素等于 1 的整三角阵构成的群或其子群. 对任意素数 p, 有限生成无挠幂零群可被一个有限 p 群逼近. 有限生成幂零群是**多循环群**(polycyclic group), 进一步地, 它们具有因子循环的中心列.

所有类不超过 c 的幂零群构成一个簇(见**群的簇**(variety of groups)), 由等式

$$[[\cdots[[x_1, x_2]x_3], \cdots]x_{c+1}] = 1$$

定义. 这个簇中的自由群称为自由幂零群(free nilpotent groups). 关于无挠幂零群的完全化见**局部幂零群**(locally nilpotent group).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

[2] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 令 G 为一群, R 为群中元素或者元素的集合之间满足的某个关系(或者更广泛些, 一个谓词). 例如, R 可以是相等关系, 亦可是关系"元素 g 属于子群 H", 或者是群中子集之间的共轭关系. 令 $\mathscr{C}$ 为一个群类. 称群 G 为关于关系 R 可由 $\mathscr{C}$ 中的群可逼近的(approximable), 如果只要在 G 中(元素之间、子集之间、或者元素与子集之间)关系 R 不成立, 就存在 G 到 $\mathscr{C}$ 中某个群的同态, 使得关系 R 在相应的同态象之间也不成立. 换言之, 同态 $G\to C$, $C\in\mathscr{C}$ 足以检测元素(或者子集)是否为 R 不同的.

当关系 R 为等式时, 简单地称 G 为可由 $\mathscr{C}$ 中的群逼近.

关于可逼近性亦见**剩余有限群**(residually-finite group).

【译注】

参考文献

[B1] 徐明曜, 有限群导引, 上册, 科学出版社, 1987.

王 杰 译 石生明 校

幂零理想 [nilpotent ideal; нильпотентный идеал]

环或有零半群 A 中对某自然数 n 满足 $M^n=\{0\}$, 即 M 中任意 n 个元素之积均为零的单边或双边理想. 例如, 当 p 是一个素数时, 在模 p^n 剩余类环 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 中, 除了环本身外, 每个理想都是幂零的. 在 p 元域上有限 p 群 G 的群环 $\mathbf{F}_p[G]$ 中, 形如 $\sigma-1(\sigma\in G)$ 的元素生成的理想是幂零的. 在域上的上三角矩阵环中, 主对角线上全为零的矩阵形成一个幂零理想.

幂零理想的每个元素都是幂零的. 每个幂零理想都还是诣零理想, 而且含于环的 **Jacobson 根**(Jacobson radical)中. 在 Artin 环中 Jacobson 根是幂零的, 此时幂零理想与诣零理想的概念是一致的. 后一性质在 **Noether 环**(Noetherian ring)中亦成立. 在左(或右) Noether 环中, 每个左(右)诣零理想都是幂零的.

一个交换环的全部幂零理想都含于诣零根, 而诣零根一般未必是幂零的, 仅是一个诣零理想. 此种情形的一个简单例子就是环 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 的直和, 其中 n 取所有自然数. 在交换环中, 任一**幂零元**(nilpotent element) a 都含于某个幂零理想, 比如由 a 生成的**主理想**(principal ideal)中. 在非交换环中, 可能有幂零元不含于任一幂零理想(甚至不含于任一诣零理想)中. 例如, 域上的全阵环有幂零元; 特别地, 有上边提到的幂零矩阵, 其仅有的非零元均在主对角线的上方, 但因此环是单环, 它不含非零幂零理想.

在有限维 **Lie 代数**(Lie algebra) G 中有极大幂零理想，它由下述 $x \in G$ 组成：此 x 使得自同态 $y \to [x, y]$ $(y \in G)$ 是幂零的．

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.
[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.
[3] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1, Springer, 1973.
[4] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.
[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).

Л. В. Кузьмин 撰

【译注】

参考文献

[B1] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.
[B2] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

郭元春 译 牛凤文 校

幂零半群 [nilpotent semi-group; нильпотентная полугруппа]

具有零元的**半群** (semi-group) S，且存在 n 使得 $S^n = 0$．这等价于 S 中的恒等式

$$x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_n .$$

对于给定的半群，满足上述性质的最小的 n 称为幂零级 (step of nilpotency) 或幂零类 (class of nilpotency). 如果 $S^2 = 0$，则 S 称为具有零乘法的半群 (semi-group with zero multiplication)．下列关于半群 S 的条件等价：1) S 是幂零的；2) S 有一个有限零化子序列 (即一个有限长度的升零化子序列，见**诣零半群** (nil semi-group))；3) 存在 k 使得 S 的每个子半群都可作为一个长度 $\leqslant k$ 的理想序列被嵌入．

更为广泛的概念是 Мальцев 意义下的幂零半群 ([2])．该名称指这样的半群，对于某个 n，它满足恒等式

$$X_n = Y_n ,$$

其中字 X_n 和 Y_n 归纳地定义如下：$X_0 = x$, $Y_0 = y$, $X_n = X_{n-1} u_n Y_{n-1}$, $Y_n = Y_{n-1} u_n X_{n-1}$，这里 x, y 和 $u_1, \cdots, u_n$ 全是变量．一个群是 Мальцев 意义下的幂零半群，当且仅当它在通常群论意义下是幂零的 (见**幂零群** (nilpotent group))，而恒等式 $X_n = Y_n$ 等价于这样的事实：该群的幂零类 $\leqslant n$．满足等式 $X_n = Y_n$ 的消去半群可嵌入到一个满足同样等式的群中．

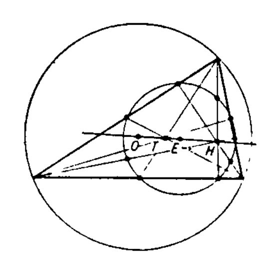
参考文献

[1] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).
[2] Мальцев, А. И., 《Уч. зап. Ивановского гос. пед. ин-та》, **4** (1953), 107 – 111.
[3] Шеврин, Л. Н., 《Матем. сб.》, **53** (1961), 3, 367 – 386.
[4] Шеврин, Л. Н., 《Матем. сб.》, **61** (1963), 2, 253 – 256.

Л. Н. Шеврин 撰 王 杰 译 石生明 校

九点圆 [nine-point circle; девяти точек окружность], Euler 圆 (Euler circle)

一个圆，过三角形的三条边的中点、三条高线的垂足，以及三角形的垂心与三个顶点的连线的中点．它的半径等于三角形的外接圆半径的一半．一个三角形的九点圆与它的内切圆、三个旁切圆相切．设 H 是不等边三角形的垂心，T 是重心，O 是外接圆的圆心，E 是九点圆的圆心．这时，点 H, T, O, E 位于一条直线上 (Euler 直线 (Euler line))，E 是线段 HO 的中点，点对 H, T 调和分割点对 O, E.



参考文献

[1] Зетель, С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962.
[2] Перепелкин, Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.-Л., 1948.

В. Т. Базылев 撰

【补注】 九点圆有时称为 Feuerbach 圆 (Feuerbach circle)．九点圆与三角形的内切圆及三个旁切圆相切，这一事实称为 Feuerbach 定理 (Feuerbach theorem)．

更一般地，还有由射影平面上的射影基 (projective base) $\{a, b, c, d\}$ (给定坐标系) 确定的九点圆锥曲线 (nine-point conic) 和十一点圆锥曲线 (eleven-point conic)，见 [A2], 16.

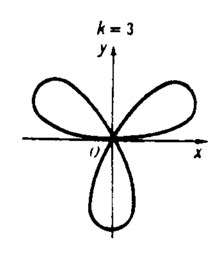
参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.
[A2] Berger, M., Geometry, Ⅰ-Ⅱ, Springer, 1987 (中译本：M. 贝尔热，几何，第一、二卷，科学出版社，1987, 1989).
[A3] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, Ⅱ, Blaisdell, 1946.

杜小杨 译

结点 [node; узловая точка]

1) 曲线的自交点．对于用参数方式给出的曲线，结点对应于两个以上的参数值．例如，坐标原点是曲线 $\rho = a \sin 3\varphi$ 的结点．



【补注】“曲线的结点”的参考书是 [A1].

参考文献

[A1] Coolidge, J., Algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959.

2)结点是二阶常微分方程

$$\dot{x}=f(x), x=(x_1,x_2), f: G\subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad (*)$$

的自守系统的轨线分布的一种类型，其中 $f\in C(G)$，G 是滞留点 x_0 的邻域内唯一性的区域．这种类型用下述方式来表征．存在 x_0 的一个邻域 U 使得对于系统的所有从 $U\setminus\{x_0\}$ 出发的轨线，负半轨线在时间的进程中离开任意一个紧集 $V\subset U$，同时正半轨线趋于点 x_0 而不离开 U，以 x_0 为终端且沿着完全确定的方向触及这一点、或者反过来．点 x_0 本身也称为结点 (node, nodal point) 或基点 (basis point).

结点或是在 Ляпунов 意义（见 **Ляпунов 稳定性** (Lyapunov stability)) 下渐近稳定的，或是全不稳定的（对于 $t\to-\infty$ 是渐近稳定的）．结点的 Poincaré 指标 (Poincaré index) 是 1（见**奇点** (singular point)）．

对于有非零矩阵 $A=f'(x_0)$ 的 C^1 类系统 $(*)$ $(f\in C^1(G))$，如果 A 的特征值 λ_1,λ_2 是实的、且满足条件 $\lambda_1\lambda_2>0, \lambda_1\neq\lambda_2$，滞留点 x_0 是结点；当 $\lambda_1=\lambda_2\neq 0, \lambda_1=0\neq\lambda_2$，$\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，x_0 也能够是结点．在 $\lambda_1=\lambda_2\neq0$ 时，如果 $f\in C^2(G), x_0$ 将是结点；当这个条件不满足时，它可能变成**焦点** (focus)．在上面所列的任何情形，系统的轨线趋于结点 x_0，且沿着用 A 的特征向量定义的确定的方向触及它．如果 $0\leqslant|\lambda_1|<|\lambda_2|$，存在四个这样的方向（如果正对着的相反方向看作是不同的），系统的两条轨线沿着对应于特征值 λ_1 的方向触及 x_0，同时另两条轨线沿着对应于特征值 λ_2 的方向触及 x_0（图 1）．它们是正常结点 (ordinary node)．如果 $\lambda_1=\lambda_2$，则 A 在 x_0 的特征方向或者只有两个正相反的方向（此时，结点是退化的 (degenerate)，见图 2)，或者取所有的方向．在最后这种

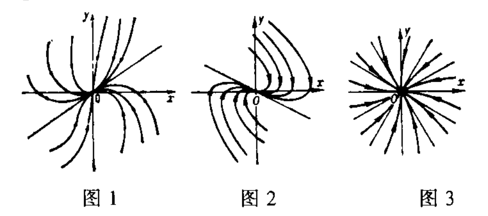


图 1　　图 2　　图 3

情形，在条件 $f\in C^2(G)$ 下，每一个方向与系统的唯一的一条轨线在 x_0 相切．这样的结点称为是双临界的 (dicritical)(图 3).

如果系统 $(*)$ 是线性的 $(f(x)=A(x-x_0)$，其中 A 是一个固定的矩阵)，则 x_0 只在 A 的特征值是实的、且 $\lambda_1\lambda_2>0$ 时是结点．任意一条射线 $x=x_0+ps$（p 是 A 的一个特征向量，$s\neq0$ 是参数）是它的一条轨线．线性系统的正常结点，退化结点，临界结点如图 4,5,6 所描述．在一个正常结点的情形，所有弯曲的轨线是抛物线 $x_2=c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, c\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ 的仿射象．

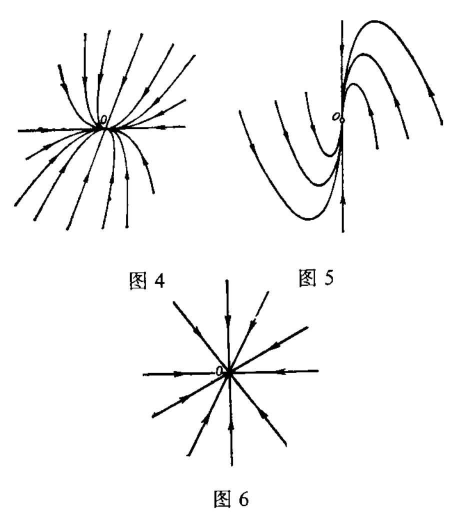


图 4　　图 5

图 6

术语“结点”也用于阶 $\geqslant3$ 的形如 $(*)$ 的系统的滞留点，此时在该点的邻域内轨线有类似的性态．

作为参考可看微分方程的**奇点** (singular point).

А. Ф. Андреев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lefshetz, S., Differential equations: geometric theory, Dover, reprint, 1977, Sect, Ⅸ. 2.

[A2] Birkhoff, G. and Rota, G.-C., Ordinary differential equations, Ginn & Co., 1962, Scet. Ⅵ. 8.

【译注】

参考文献

[B1] 丁同仁，李承治，常微分方程教程，高等教育出版社，1991，北京，第八章 §3.

陈维桓 译

Noether-Enriques 定理 [**Noether-Enriques theorem**; **Нётера-Энрикеса теорема**]，典范曲线的

关于**典范曲线** (canonical curve) 的射影正规性以及它们可用二次方程定义的定理．

设 $X\subset P^{g-1}$ 是代数闭域 k 上亏格 $g\geqslant3$ 的光滑典范（非超椭圆）曲线，设 I_X 是环 $k[x_0,\cdots,x_{g-1}]$ 里定义含于 P^{g-1} 内的 X 的齐次理想．Noether-Enriques

定理(有时称为 Noether-Enriques-Petri 定理(Noether-Euriques-Petri theorem))断言:

1) X 在 P^{g-1} 内射影正规;

2) 如果 $g=3$, 则 X 是 4 次平面曲线, 且当 $g \geqslant 4$ 时, 分次理想 I_X 由 2 次和 3 次分量生成(这蕴含着 X 是 P^{g-1} 内通过 X 的二次与三次超曲面的交);

3) I_X 总是由 2 次分量生成, 除去 a) 当 X 是三角曲线时, 即 X 有一个 3 次 1 维的线性系 g_3^1; 或 b) X 的亏格是 6, 而且 X 同构于 5 次平面曲线;

4) 在例外情形 a) 和 b) 里, 通过 X 的二次超曲面交成一个曲面 F. 在情形 a), F 是 P^{g-1} 里的 $g-2$ 次非异有理直纹面, $g \geqslant 5$, 而且 g_3^1 在 X 上截出由 F 上的直线构成的线性系. 而当 $g=4$ 时, 则是 P^3 里的一个二次曲面(可以是一个锥面); 在情形 b), F 是 P^5 里的 Veronese 曲面 V_4.

这个定理(以一种略有不同的代数形式)是由 M. Noether 在[1]里建立的; 一种几何的表述法是由 F. Enriques 给出的(关于他的结果, 见[2]; 现代的表述参见[3],[4]; 推广可见[5]).

参考文献

[1] Noether, M., Ueber invariante Darstellung algebraischer Funktionnen, *Math. Ann.*, **17** (1880), 263-284.

[2] Babbage, D. W., A note on the quadrics through a canonical curve, *J. London Math. Soc.*, **14** (1939), 4, 310-314.

[3] Saint-Donat, B., On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve, *Math. Ann.*, **206** (1973), 157-175.

[4] Шокуров, В. В., 《Матем. сб.》, **86** (1971), 367-408.

[5] Arbarello, E. and Sernesi, E., Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor, *Invent. Math.*, **49** (1978), 99-119.

В. А. Исковских 撰

【补注】光滑曲线 $C \subset P^{g-1}$ 称为 k 正规的(k-normal), 如果 k 次超曲面截出完全线性系(linear system) $|\mathcal{O}_C(k)|$ 的话. 1 正规也称为线性正规的(linearly normal). 如果曲线 $C \subset P^{g-1}$ 对所有的 k 是 k 正规的, 就称 C 是射影正规的(projectively normal). 见[A2], p. 140 ff 和 221 ff 以得到更多细节和结果.

参考文献

[A1] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A2] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1984.

陈志杰 译

Noether 问题 [Noether problem; Нетер проблема]

有理函数域上的一个有限自同构群的不变子域的有理性问题. 确切地说, 设 $K=\mathbf{Q}(x_1,\cdots,x_n)$ 为系数在有理数域 $\mathbf{Q}$ 中的 n 个变元的有理函数组成的域, 因而 K 是 $\mathbf{Q}$ 的一个超越次数为 n 的纯**超越扩张**(transcendental extension). 设 G 是一个**有限群**(finite group), 它在 K 上的作用是通过对变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的置换得到 K 的自同构. 现在的问题是: 由 K 的所有被 G 固定的元素所构成的子域 K^G, 是否也是一个系数在 $\mathbf{Q}$ 中的 n 个(另外的)变元的有理函数域. 这个问题是 E. Noether 提出来的([1]), 它与 Galois 问题的逆问题有关(见 **Galois 理论的反问题**(Galois theory, inverse problem of)). 如果 Noether 问题的回答是肯定的, 就能构造有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的具有给定有限群的 **Galois 扩张**(Galois extension)(见[5]). 该问题与 **Lüroth 问题**(Lüroth problem)也密切相关.

一般地, Noether 问题的回答是否定的. [2]中构造了第一个非有理域 K^G 的例子. 在这个例子中, G 由变元的一个循环置换所生成. 在[3]中证明了: [2]中所找到的使 K^G 为有理的必要条件也是充分的. 当 G 为 Abel 群时, K^G 的有理性问题与代数环面理论密切相关(见**代数环面**(algebraic torus))(见[4]).

Noether 问题经常被描述为更一般的形式, 这时原来的域 $\mathbf{Q}$ 用任意一个域 k 所代替. 当 k 为代数闭域及 G 为 Abel 群时, 这个问题有肯定的回答.

参考文献

[1] Noether, E., Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, *Math. Ann.*, **78** (1917-1918), 221-229.

[2] Swan, R. G., Invariant rational functions and a problem of Steenrod, *Invent. Math.*, **7** (1969), 2, 148-158.

[3] Воскресенский, В. Е., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **35** (1971), 1037.

[4] Воскресенский, В. Е., Алгебраический торы, М., 1977.

[5] Чеботарев, Н. Г., Теория Галуа, М.-Л. 1936, 18-32 и 90-94.

В. Л. Попов 撰

【补注】对任意 k 及有限 Abel 群 G, 有一个判断 K^G 的有理性的充分必要条件(见[A1]): 例如, 若 $k=\mathbf{Q}$, G 是 8 阶循环群, 则 K^G 不是有理的.

对于 $k=\mathbf{C}$, 第一个使 K^G 非有理的群 G 是由 D. J. Saltman([A2])构造的. 他证明了对每个素数 p, 存在阶为 p^9 的这样一个群.

参考文献

[A1] Lentstra, H. W., Jr., Rational functions invariant under a finite abelian group, *Invent. Math.*, **25** (1974), 299-325.

[A2] Saltman, D. J., Noether's problem over an algebraically closed field, *Invent. Math.*, **77** (1984), 71-84.

裴定一 译 赵春来 校

Noether 定理 [Noether theorem; Нётер теорема]

1) Noether 第一定理(Noether first theorem)建立了形状如下的泛函:

$$A(u(x))=\int L(x,u(x),u_{,j}(x))d^n x$$

的无穷小对称性与相应的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - \frac{d}{dx^i}\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{,i}}=0$$

的守恒律之间的关系．这里 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 是自变量，$u(x)=(u^1(x),\cdots,u^N(x))$ 是定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 中的函数，$u_{,j}=(\partial/\partial x^j)(u(x))$ 是其偏导数，L 是一个函数（称为 Lagrange 函数）．Euler-Lagrange 方程给出了 A 的极值的必要条件．具体说来，对于无穷小对称性 Z，亦即对于生成一个保持 A 不变的单参数变换群的向量场

$$Z=X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+U^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

必相应有一守恒律

$$v_Z=\left[LX^i+(U^\alpha-u^\alpha_{,j}\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{,i}}\right]dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

（这里的符号 ^ 表示略去该因子），即 v_Z 是一个含 $u(x)$ 的 $(n-1)$ 形式，而当 $u(x)$ 满足 Euler-Lagrange 方程时，它是闭的．

在场论中，$n=4$，坐标 x 解释为时空坐标，A 称为作用，而 $u(x)$ 称为场．对给作用泛函以极值的场 $u(x)$，相应有物理上可实现的且具已给 Lagrange 函数的场．若此场在 D 的边界上为零，则由 Stokes 定理，守恒律 v 在超曲面 $D\cap\{x^1=c\}$ 上的积分不依赖于 c 的选取．特别地，若 x^1 是时间坐标，则此积分给出一个不随时间变化的量（守恒律 (conservation law) 一词即由此而来）．

不同的物理场的 Lagrange 函数在平行移动和 Lorentz 变换下的不变性（这是 Minkowski 时-空的齐性与各向同性的结果），由 Noether 定理，可得到场的能量-动量张量与角动量张量的守恒律，从而也导致运动的能量、动量和角动量的相应守恒律．电磁场作用泛函在规范变换下的不变性引导到电荷守恒律．类似地，某场的 Lagrange 函数在规范变换下的不变性导出各种荷的守恒律．

在经典力学中，$n=1$，而坐标 x^1 解释为时间．若 Lagrange 函数不显含 x^1，则向量场 $\partial/\partial x^1$ 是一个对称，而 Noether 定理给出能量守恒律．若一力学系统可用某 Riemann 度量下的测地运动来描述，则相应的作用泛函的对称性是 Killing 向量（更一般地则是 Killing 张量）场．在这个情况下，Noether 定理所提供的守恒律在几何上表示：Killing 向量场在测地线方向的投影的大小沿测地线不变．Noether 定理用现代的纤维丛语言的一般表述如下：令 $\pi:E\to M$ 是 n 维流形 M 上的向量丛，M 上有一固定的体积 n 形式 $\omega\in\Lambda^n(M)$，令 π_k: $J^kE\to M$ 是由 π 的截面的 k 阶节所成的向量丛．若 x^i 是 M 的局部坐标使 $\omega=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$，而 x^i,u^a 是 E 的局部坐标，则 J^kE 中有局部坐标 x^i,u^a,u^a_α，这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是一个重指标而 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant k$．在 π 的截面 $u(x)$ 的 k 阶节 $J^k_{x_0}u(x)$ 上 $u^a_{,\alpha}$ 的值是

$$u^a_{,\alpha}(x_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}u^a(x_0).$$

光滑函数 $L:J^kE\to\mathbf{R}$ 决定一个作用泛函 A，它使截面 $s:x\to u(x)$ 对应于数

$$A(s)=\int_M L(x,u(x),u_{,\alpha}(x))\,\omega.$$

这个泛函（在固定端点问题中）的极值函数 $u(x)$ 适合 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\delta L}{\delta u^a}\equiv\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\\|\alpha|\leqslant k}}(-1)^{|\alpha|}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{\partial L}{\partial u^a_{,\alpha}}=0,$$

这里

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}=\left(\frac{d}{dx^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{d}{dx^n}\right)^{\alpha_n}$$

是全导数．π 的无穷小自同构，即 E 上的如下形状的向量场

$$Z=X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+U^a(x,u)\frac{\partial}{\partial u^a},$$

称为 A 的无穷小对称，如果 Lagrange n 形式 $L\omega\in\Lambda^n(J^kE)$ 在向量场 $Z^{(k)}$（由 Z 在 J^kE 上生成）方向上的 Lie 导数为零：

$$Z^{(k)}(L\omega)=0.$$

对于 Lie 导数，以下的基本的 Noether 公式 (Noether formula) 成立：

$$Z^{(k)}(L\omega)=\left[\overline{U}^a\frac{\delta L}{\delta u^a}+\frac{d}{dx^i}J^i\right]\omega,$$

其中

$$\overline{U}^a=U^a-u^a_{,i}X^i,\quad J^i=LX^i+F^i,$$

F^i 是某一个依赖于 $\overline{U}^a$，L 及其导数的向量场的分量．特别地，当 $k=1$ 时，$F^i=\overline{U}^a(\partial L/\partial u^a_{,i})$．若 Z 是无穷小对称，则

$$-\overline{U}^a\frac{\delta L}{\delta u^a}=\frac{d}{dx^i}J^i,$$

也就是说，Lagrange 函数 L 的变分导数 $\delta L/\delta u^a$ 的某线性组合是向量场 $J=J^i\partial/\partial x^i$ 的散度．E. Noether 就是用这样的形式表述她的第一定理的．J 的散度（一个所谓的 Noether 泛流 (Noether current)），在作用泛函的

极值函数上为零，而对偶于它的 $(n-1)$形式 $v_Z=J\lrcorner\omega$ 为闭的（它是由 J 与 ω 作内乘法得出的），即为一个守恒律．

Noether 定理有一些重要的推广（见 [5]－[7]）．它们都是基于无穷小对称概念的扩充．代替 E 上相应于单参数变换群的向量场，可以考虑 E 上的系数依赖于截面 $U(x)$ 及其任意阶导数的向量场．这种场 Y 不再决定单参数变换群；然而可以用纯粹代数的手段对它们定义 Lie 导数的概念．如果 Lagrange 形式的 Lie 导数在场 Y 的方向上为零（可能需将 Lagrange 形式限制到作用泛函的极值函数上去），这个场 Y 就称为一个代数无穷小对称（algebraic infinitesimal symmetry）．推广的 Noether 定理对每一个代数对称性都给出一个守恒律．把它应用到各种数学物理方程上去，就会得到许多新的重要的守恒律．

2) Noether 第二定理（Noether second theorem）指出，若作用泛函有无穷小对称的无限维 Lie 代数，这些无穷小对称的系数线性依赖于 p 个任意函数 $\varphi^1(x), \cdots, \varphi^p(x)$ 及其直到 n 阶在内的导数，则 Lagrange 函数 L 的变分导数 $\delta L/\delta u^a$ 满足一个由 p 个 m 阶微分方程构成的方程组．即若

$$Z=\varphi^s U_s^a \frac{\partial}{\partial u^a}+\varphi^s_{;\sigma}(x) U_s^{\sigma a} \frac{\partial}{\partial u^a},$$

其中

$$\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n),\ |\sigma|=\sigma_1+\cdots+\sigma_n \leqslant m,$$

对任意的光滑函数 $\varphi^s(x)(s=1, \cdots, p)$ 均为无穷小对称，则恒有

$$U_s^a \frac{\delta L}{\delta u^a}+(-1)^{|\sigma|} \frac{d^\sigma}{dx^\sigma}\left[U_s^{\sigma a} \frac{\delta L}{\delta u^a}\right]=0,\quad s=1, \cdots, p.$$

这个定理例如在规范场理论中有应用．

Noether 在 1918 年证明了她的第一、第二定理（见 [1]）．

参考文献

[1A] Noether, E., Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, *Nachr. Gesellschaft. Wiss. Göttingen* (1918), 37－44; 240．此文又见 Gesammelte Abh., Springer, 1983, 240－247．

[1B] Noether, E., Invariante Variationsproblem, *Nachr. Gesellschaft. Wiss. Göttingen* (1918), 237－257，此文又见 Gesammelte Abh., Springer, 1983, 248－270．

[2] Боголюбов, Н. Н. и Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 2 изд., М., 1973（中译本：Н．Н．波戈留波夫等，量子场论引论，科学出版社，1966）．

[3] Гельфанд, И. М., Фомин, С. В., Вариационное исчисление, М., 1961（英译本：Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963）．

[4] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974（中译本：阿诺尔德，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1993）．

[5] Овсянников, Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978（英译本：Ovsiannikov, L. V., Group analysis of differential equations, Acad. Press, 1982）．

[6] Манин, Ю. И., в кн., Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 11, М., 1978, 5－152．

[7] Виноградов, А. М., 《Докл. АН СССР》, **236** (1977), 2, 284－287．

[8] Лычагин, В. В., 《Успехи матем. наук》, **34** (1979), 1, 137－165． Д. В. Алексеевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Olver, P. J., Applications of Lie groups to differential equations, Springer, 1986．

[A2] Funk, P., Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik, Springer, 1962．

[A3] Ludwig, W. and Falter, C., Symmetries in physics, Springer, 1988．

[A4] Cheng, T. P. and Li, L. F., Gauge theory and elementary particle physics, Oxford Univ. Press, 1984．

[A5] Uhlenbeck, K., Conservation laws and their application in global differential geometry, in B. Srinivasan and J. Sally (eds.): *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Springer, 1983, 103－117．

3) Noether 正规化定理（Noether normalization theorem）：在任意有限生成的交换整 k 代数 A 中，若其在域 k 上的超越性次数为 d，必有 d 个元素 $x_1, \cdots, x_d$ 使 A 在它们生成的子代数 B 上是整的（见**整环**（integral ring）；**环的整扩张**（integral extension of a ring））．若 A 可以分次如下：$A=\oplus_{i\geqslant 0} A_i$，$A_0=k$，则可选 $x_1, \cdots, x_d$ 为齐次的．

这个定理（有时称为 Noether 正规化引理（Noether normalization lemma））是由 E. Noether（[1]）证明的；在分次情况下，它曾由 D. Hilbert（[2]）提出过．

元素 $x_1, \cdots, x_d$ 在 k 上是代数无关的，所以 B 是这些变元的系数在 k 中的多项式代数．若 k 为无限的，则 $x_1, \cdots, x_d$ 可以从 A 的生成元在 k 上的线性组合中选取．若 k 是代数闭的，则可以几何地来陈述正规化定理如下：每一个不可约仿射 d 维代数簇 X 都是一个 d 维仿射空间 A^d 的有限叶(分枝)覆叠；更准确地说，它有一个到 A^d 上的有限态射．更进一步，如果 X 是 k^n 的闭子集，则此态射可以实现为 k^n 到一个 d 维线性子空间上的某线性映射在 X 上的限制．

代数 A 作为一个 B 模是有限生成的．子代数 B 不是唯一的；然而 A 作为 B 模的一些性质并不依赖于 B 的选取．举例来说，若 A 按定理的假设是分次的上），而若 $x_1, \cdots, x_d$ 是齐次的（于是 B 也是分次的），则 A 成为一个自由 B 模，这一性质与 B 的选择无关．

参考文献

[1] Noether, E., Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, **96** (1927), 26 – 61.

[2] Hilbert, D., Ueber die vollen Invariantensysteme, *Math. Ann.*, **42** (1893), 313 – 373.

[3] Atiyah, M. and MacDonald, I.G., Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969(中译本: 阿蒂亚等, 交换代数引论, 科学出版社, 1982).

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

[5] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1–2, v. Nostrand, 1958 – 1960.

[6] Lang, S., Alegbra, Addison-Wesley, 1974.

В.Л.Попов 撰 齐民友 译

Noether 群 [Noetherian group; Нётерова группа], 带子群的极大条件的群 (group with the maximum condition for subgroups)

其中每个严格递升的子群链都是有限链的群. 这类群是以 E. Noether 的名字命名的, 她研究了满足理想的极大条件的环——**Noether 环** (Noetherian rings). 一个 Noether 群的子群和商群仍是 Noether 的. 已经构造出了这样的 Noether 群的例子, 它不是**多循环群** (polycyclic group) 的有限扩张 ([1]).

参考文献

[1] Ольшанский, А. Ю., 《Докл. АН СССР》, **245** (1979), 4, 785 – 787.

В. Н. Ремесленников 撰 王 杰 译 石生明 校

Noether 归纳法 [Noetherian induction; Нётерова индукция]

一个推理原理, 可应用于其中每一非空子集包含一个极小元的**偏序集** (partially ordered set); 例如, 某 **Noether 空间** (Noetherian space) 中的闭子集的集合. 设 M 是这样一个集合, 而 F 是它的具有以下性质的子集: 对每一个 $a\in F$ 存在一个严格地比 a 小的元素 $b\in F$. 那么 F 是空集. 例如, 设 M 是一个 Noether 空间的所有闭子集的集合, 又设 F 是不能表成不可约连通分支的有限并的那些闭集的集合. 如果 $Y\in F$, 则 Y 是可约的, 即 $Y=Y_1\cup Y_2$, 这里 Y_1 和 Y_2 是闭集, 两者都是严格地包含于 Y 中且至少其中之一属于 F. 因而 F 是空集.

序的反向使得可能把 Noether 归纳法应用于其中每个非空子集包含极大元的偏序集; 例如, 用于一个 **Noether 环** (Noetherian ring) 中理想的格上.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

Л.В.Кузьмин 撰

【补注】术语理由充足的归纳法 (well-founded induction) 也在使用着.

葛显良 译 李慧陵 校

Noether 积分方程 [Noetherian integral equation; Нётерово интегральное уравнение]

使 Noether 的定理 (见下文) 成立的一个**积分方程** (integral equation). 设 X 是 Banach 空间, A 是把 X 映射到自身中的有界线性算子 (映射): $A: X\to X$, 且设 A^* 是 A 的伴随算子. 设

$$Ax=y \tag{1}$$

是一个线性方程, 这里 x 是未知的而 y 是 X 中给定元素. 其次, 设 $R(A)$ 是使得 (1) 可解的所有 $y\in X$ 的集合 (A 的值域 (range)), 且设 $N(A)$ 是对应齐次方程

$$Ax=0 \tag{2}$$

所有解的集合 (A 的零空间 (null space) 或核 (kernel)). 映射 A(方程 (1)) 称为 **Noether 算子** (Noetherian operator) (Noether 方程 (Noetherian equation)), 如果下面的条件满足.

1) 定义在整个 Banach 空间上的算子 A(方程 (1)) 是正规可解的 (normally solvable), 即 (1) 可解当且仅当右边 y 正交于伴随齐次方程

$$A^*\varphi=0,\ \varphi\in X^* \tag{3}$$

的解, 即对每一个 $\varphi\in N(A^*)$, $(\varphi, y)=0$.

2) 齐次方程 (2) 和 (3) 只有有限多个线性无关解; 如 $k=\dim N(A)$, $k^*=\dim N(A^*)$, 数

$$\kappa_A=k-k^*$$

称为算子的指标 (index of the operator) (方程 (1) 的指标 (index of the equation)).

指标为零的 Noether 算子称为 (抽象) Fredholm 算子 (Fredholm operator), 而对应的方程 (1) 称为 Fredholm 方程 (Fredholm equation). 例如, 如果 V 是**完全连续算子** (completely-continuous operator), $V: X\to X$, 则

$$x-Vx=y \tag{4}$$

是 Fredholm 方程. 它称为典范 Fredholm 方程 (canonical Fredholm equation). 如果 (4) 中在某空间上的完全连续映射是一个积分算子,

$$(Vx)(s)=\int K(s, t)x(t)dt,$$

则这个方程称为 Fredholm 积分方程 (Fredholm integral equation). 类似地, 如果在 Noether 方程 (1) 中的线

性映射用积分算子给出，则它称为 Noether 积分方程.

F. Noether ([1]) 讨论了具有 **Hilbert 核** (Hilbert kernel) 的积分方程，

$$(A\varphi)(s)=a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cot\frac{t-s}{2}\varphi(t)dt$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}K(s,t)\varphi(t)dt=f(t), \qquad (5)$$

这里反常积分认为是在主值意义下的. 对 (5) 他建立了三个定理的有效性，它们现在称为 Noether 定理 (Noether theorems). (假设数据和未知函数是实的和 Hölder 连续的且 $a^2(s)+b^2(s)\neq 0$.) 这些定理是:

1) 这方程是正规可解的;

2) 这方程的指标是有限的;

3) 这指标能用公式

$$\kappa_A=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_{-\pi}^{\pi}$$

计算，这里 $[\ ]_{-\pi}^{\pi}$ 表示括号中函数的增量.

定理 (3) 第一次指出存在有不同个数线性无关解的伴随线性积分方程. 此外，由这定理推出 (5) 的指标不依赖于它的完全连续部分.

一个 Noether 算子有时称为 Fredholm 算子，广义 Fredholm (generized Fredholm) 算子，Φ 算子 (Φ-operator)，或 F 算子 (F-operator).

参考文献

[1] Noether, F., Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Math. Ann.*, **82** (1921), 42 – 63.

[2] Никольский, С. М., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **7** (1943), 3, 147 – 166.

[3] Аткинсон, Ф. В., 《Матем. сб.》, **28** (1951), 1, 3 – 14.

[4] Крейн, С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971 (英译本: Krein, S. G., Linear equations in a Banach space, Birkhäuser, 1982).

[5] Крачковский, С. Н., Диканский, А. С., в кн: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, 39 – 71.

[6] Данилюк, И. И., Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975.

[7] Prössdorf, Z., Einige Klassen singulärer Gleichungen, Akad. Verlag, 1974.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 在现代文献中术语“完全连续”常用“紧”代替. 还有术语 **Fredholm 算子** (Fredholm operator) 一般地用于有有限指标的线性算子. Fredholm 算子类包括许多重要的算子而且关于这个主题有大量的文献. 指标满足对数律 $\kappa_{AB}=\kappa_A+\kappa_B$. 对 Fredholm 算子的一些特殊类，指标能与某些拓扑概念相联系，如曲线的卷绕数 (亦见上文). 一个有界线性算子是 Fredholm 的，当且仅当它是模紧算子可逆的，即当且仅当它对应 Calkin 代数 (Calkin algebra) 中的一个可逆元. 正规可解性 (亦即，有闭值域的性质) 被指标的有限性所蕴涵.

参考文献

[A1] Booss, B., Topologie und Analysis, Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel, Springer, 1977.

[A2] Conway, J. B., A course in functional analysis, Springer, 1985.

[A3] Gohberg, I. C. and Kreĭn, M. G., The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **13** (1960), 185 – 264 (《Успехи матем. наук》, **12** (1957), 2, 43 – 118).

[A4] Goldberg, S., Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[A5] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, 1976.

[A6] Gohberg, I. C. and Krupnik, N., Einführung in die Theorie der eindimensionalen singulären Integraloperatoren, Birkhaüser, 1979.

[A7] Zabreyko, P. P. [P. P. Zabreĭko], et al., Integral equations — a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).

[A8] Meister, E., Randwertaufgaben der Potentialtheorie, Teubner, 1983.

葛显良 译 鲁世杰 校

Noether 模 [Noetherian module; Нётеров модуль]

一个模 (module)，它的每个子模都有有限生成元系. 等价条件是: 每个子模严格升链只有有限多项; 每个非空子模集合，若以包含关系为序，其中必包有一极大元. Noether 模的子模和商模仍是 Noether 模. 若在**正合序列** (exact sequence)

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

中，M' 和 M'' 是 Noether 模，则 M 也是. **Noether 环** (Noetherian ring) 上的模是 Noether 的，当且仅当它是有限生成的.

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

Л. В. Кузьмин 撰 冯绪宁 译

Noether 算子 [Noetherian operator; Нётеров оператор]

一个(具有闭值域)同时是 n 正规和 d 正规的线性算子(见**正规可解算子** (normally-solvable operator)). 换句话说，Noether 算子 A 是有有限 d 特征 ($n(A)<+\infty$, $d(A)<+\infty$)的正规可解算子. Noether 算子 A 的指标 $\chi(A)$(见**算子的指标** (index of an operator))也是有限的. Noether 算子最简单的例子是从 $\mathbf{R}^k$ 作用到 $\mathbf{R}^l$ 的线性算子. 它以 F. Noether 命名，在她的工作

([1])中Noether算子的理论与奇异积分方程的理论平行发展．椭圆型方程的一般边值问题生成的线性算子常常是Noether的．

在实践中，通常相继验证下面命题的有效性(Noether的定理(Noether theorems))：

1) 方程$\dot{A}x=0$没有非平凡解或者有有限的n个线性无关的解；并且

2) 非齐次方程$Ax=y$对任何右边的y是可解的，或者它的可解性的必要和充分条件是$\langle y,\psi_i\rangle=0(i=0,\cdots,m)$，其中$[\psi_i]_0^m$是伴随齐次方程线性无关解的完全系，或者它形式上伴随于齐次问题．

由(1)和(2)得出A是一个Noether算子．

Noether算子这一性质是稳定的：如果A是一个Noether算子，并且B是有充分小范数的线性算子，或者是完全连续的，那么$A+B$也是Noether的，并且$\chi(A+B)=\chi(A)$．

假设$A\in L(X,Y)$是Noether的，其中$L(X,Y)$是从X到Y的线性算子的空间．那么有直接分解

$$X=N(A)\dot{+}\hat{X},\ Y=Z\dot{+}R(A),$$

这里$N(A)$是A的零空间，$R(A)$是A的值域，并且$\dim Z=d(A)$．方程$Ax=y$，$y\in R(A)$的通解具有形式$x=\hat{A}^{-1}y+v$，这里$\hat{A}\in\hat{L}(\hat{X},R(A))$，$\hat{A}=A$在$\hat{X}$上($A$的限制)，并且$v\in N(A)$是任意的．如果$A$是Noether的，有$d$特征$(n,m)$，那么$A^*$是Noether的，有$d$特征$(m,n)$．

参考文献

[1] Noether, F., Ueber eine klasse singulärer Integral glei-chungen, *Math. Ann.*, **82** (1921), 42–63.

[2] Крейн, С.Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971(英译本:Kreĭn, S.G., Linear differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1971).

[3] Вайнберг, М.М., Треногин, В.А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本: Vaĭnberg, M.M. and Trenogin, V.A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff, 1974).

В.А. Треногин 撰

【补注】 在西方文献里Noether算子通常称为Fredholm算子(Fredholm operator)．这样一个算子的指标是数$\dot{\chi}(\dot{A})=n(A)-d(A)$．两个Noether算子$A$和$B$的乘积还是一个Noether算子，并且$\chi(AB)=\chi(A)+\chi(B)$．在第一批具体的应用中，指标是作为与一个一定的连续函数相联系的分枝数计算的(见Noether的文章[1])．不同类型算子指标的计算在现代数学中是一个重要的问题(见例如[A1])．

参考文献

[A1] Palais, R.S., Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Univ. Press, 1965.

[A2] Gohberg, I.C. [I.Ts. Gokhberg] and Kreĭn, M.G., The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, *Transl. Amer. Math. Soc.*(2), **13** (1960), 185–264. (*Uspekhi Mat. Nauk*, **12** (1957), 43–118).

[A3] Gohberg, I. [I.Ts. Gokhberg] and Krupnik, N., Einführung in die Theorie der eindimensionalen singulären Integraloperatoren, Birkhäuser, 1979 (译自俄文).

[A4] Goldberg, S., Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[A5] Kato, T., Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. d'Anal. Math.*, **6** (1958), 261–322.

[A6] Kreĭn, S.G., Linear equations in Banach spaces, Birkhäuser, 1982 (译自俄文).

鲁世杰 译　葛显良 校

Noether 环 [Noetherian ring; Нётерово кольцо]，*左的(右的)*

满足下述等价条件之一的**环**(ring)A：

1) A是自身上的左(或右)**Noether模**(Noetherian module)；

2) A中的每个左(或右)理想都有有限的生成集；

3) A中的每个左(或右)理想的严格升链在有限多项以后都终止．

Noether环的一个例子是主理想环，即每个理想具有一个生成元的环．

Noether环是以E. Noether命名的，她对于这种环作了系统的研究，并把以前人们所知道的仅在更严格的限制下的若干结果(例如，Lasker的准素分解理论)推广到这种环上．

右Noether环不一定是左Noether环，反之亦然．例如，设A是形如

$$\begin{Vmatrix} a & \alpha \\ 0 & \beta \end{Vmatrix}$$

的矩阵在通常的加法和乘法下构成的环，其中a是有理整数，α，β是有理数，则A是右Noether环，但不是左Noether环，因为形如

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

的元素构成的左理想没有有限生成集．

Noether环的商环以及有限直和仍是Noether环．但是Noether环的子环不一定是Noether环．例如，域上的无穷多个变元的多项式环不是Noether环，尽管它含于Noether环——它的分式域中．

如果A是一个左Noether环，则多项式环$A[x]$亦然．类似的性质对于Noether环上的形式幂级数环也成立．特别地，形如$K[X_1,\cdots,X_n]$或$\mathbf{Z}[X_1,\cdots,X_n]$的多项式环是Noether环，这里$K$是一个域，$\mathbf{Z}$是整数环，它们的商环也是Noether环．任一**Artin环**(Artinian

ring)是 Noether 环. 交换的 Noether 环关于某个乘性系 S 的局部化仍是 Noether 环. 在一个交换 Noether 环 A 中, 如果 $\mathfrak{m}$ 是一个理想, 满足: 对于任一 $m \in \mathfrak{m}$, $1+m$ 都不是零因子, 则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k = 0$. 这意味着任一这样的理想 $\mathfrak{m}$ 在 A 上定义了一个可分的 $\mathfrak{m}$ 进拓扑. 在交换的 Noether 环中, 每个理想可以表示为有限多个准素理想的不可约交. 尽管这种表示不是唯一的, 但是这些理想的个数以及与给定的准素理想相伴的素理想的集合都是唯一确定的.

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (译自德文) (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, Ⅰ-Ⅱ, 科学出版社, 1978).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[3] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1, Springer, 1973.

Л. В. Кузьмин 撰 赵春来 译

Noether 概形 [Noetherian scheme; Нётерова схема]

容许有 **Noether 环** (Noetherian ring) 的谱作有限开覆盖的**概形** (scheme). 仿射 Noether 概形正是 Noether 环的谱. Noether 概形 X 的拓扑空间是一个 Noether 拓扑空间, 局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 是 Noether 环. 如果概形的每个点都有一个开仿射 Noether 邻域, 这个概形称为局部 Noether 的 (locally Noetherian). 拟紧局部 Noether 概形是一个 Noether 概形. 域上有限型概形 (代数簇) 或 Noether 环上有限型概形都是 Noether 概形的例子.

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

Noether 空间 [Noetherian space; Нётерово пространство]

一个**拓扑空间** (topological space) X, 其中闭子空间的任何严格下降的链都会中断. 一个等价条件是: X 的闭子集的任何非空族都有关于包含关系为序的极小元. Noether 空间的每个子空间本身也是 Noether 空间. 如果空间 X 有一个 Noether 子空间的有限覆盖, 则 X 也是 Noether 的. 空间 X 是 Noether 的当且仅当 X 的每个开子集都是拟紧的. Noether 空间 X 是有限多个不可约分支的并.

Noether 空间的例子是交换环的谱 (见**环的谱** (spectrum of a ring)). 对于一个环 A, 空间 Spec(A)(A 的谱)是 Noether 的当且仅当 A/J 是 **Noether 环** (Noetherian ring), 这里 J 是 A 的幂零理想.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

抗噪声性 [noise immunity; помехоустойчивость]

刻画信息传输系统抗噪声失真效应的能力的一个概念. 一个最优传输方法所达到的最大抗噪声性称为潜抗噪声性 (potential noise immunity). 在信息传输理论中, 一个特定的信息传输系统的抗噪声性由**信息复制精确度** (information, exactness of reproducibility of) 来刻画, 特别可由一个传输消息的**译码错误概率** (erroneous decoding, probability of) 来刻画.

参考文献

[1] Харкевич, А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

[2] Wozencraft, J. and Jacobs, I., Principles of communication engineering, Wiley, 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kotelnikov, A. V., The theory of optimum noise immunity, McGraw-Hill, 1959.

符方伟 沈世镒 译

算图法 [nomography; номография]

数学中研究函数关系的图形表示法的一个分支. 所得的设计图称为算图 (nomograms). 每个算图是对变量变化具有特殊限制下确定的函数关系而制作的. 在算图法中计算工作是由执行用户要求与应答者估计所指的最简单的几何运算来代替的.

算图法的精确性依赖于算图表现关系的式样, 变量的变化范围, 设计维数以及算图类型的选择. 平均说来, 算图可提供应答者 2-3 位真数字. 当算图的精度不够时, 它们可用以暂时计算, 用于寻求零阶逼近, 以及用于为发现大的误差的计算控制.

算图也可用来研究函数关系, 如果把算图置于这些函数关系的基础上. 通常此项研究用算图来进行比用其他方法要更为简单、更为直观. 利用算图人们可以研究各种变量对要求变量的影响, 给出问题中关系的已知性质的直观解释, 以及建立前所未知的特异性质. 算图法的研究, 例如, 可应用于观察结果的经验公式中参数的选择问题, 用另一函数逼近函数以及寻求函数的极值问题.

变量的值在算图中是用标号点、标号线来表示的. 依赖于单变量的标号点的集合称为标量 (scale). 在直角坐标系 $x0y$ 中变量 α_1 的标量方程写为下列形式:

$$x=f_1,\ y=g_1,$$

其中 f_1 与 g_1 分别表示函数 $f_1(\alpha_1)$ 与 $g_1(\alpha_1)$. α_1 的标量格式如图 1 所示．

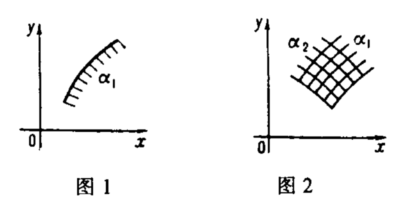


图 1　　图 2

依赖于两个变量的标号点的集合称为二元域（binary field）．二元域通常用两族标号线组成的格网来描述．二元域中的点是由所给标号线的交确定的．在直角坐标系 $x0y$ 中，两变量 α_1, α_2 的二元域由方程

$$x=f_{12},\ y=g_{12}$$

给出，其中 f_{12} 与 g_{12} 分别为函数 $f_{12}(\alpha_1,\alpha_2)$ 与 $g_{12}(\alpha_1,\alpha_2)$. 假定在变量的给定变化区域中，$f_{12}$ 与 g_{12} 使每对值 α_1, α_2 仅对应唯一的一对值 x, y. 二元域 (α_1,α_2)的格式如图 2 所示．

构制标号线的标量、族与二元域时应使易于找到具有给定标号的点与线，并且易于确定解答点与线的标号.

基本算图（elementary nomograms）指的是由执行简单几何运算即可找到解答的算图（确定标度上或二元域中的点；过两点作直线；作具有给定中心与半径的圆；分一线段为给定比；作一直线平行于给定直线；在一线段上划出一定长线段；把一平面与另一平面叠合）.

属于基本算图的内容有：函数的图象；将列线图标量加倍；据调节点算图；据等距点算图；利用圆规的算图；具有平行指标的算图；重心算图；长菱形算图；具有定向透明片的算图；以及具有一般形式透明片的算图.

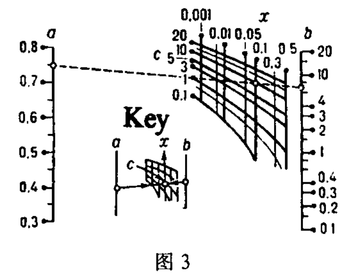


图 3

图 3 是据调节点作出的基本算图，用以确定方程

$$x^{a-1}=b\,\frac{\ln(c-x)}{c-x-1}$$

中的量 x，此方程用于包括鼓风机在内的热量计算．算图在下列范围内作出：$0.3\leqslant a\leqslant 0.8$; $0.1\leqslant b\leqslant 20$; $0.1\leqslant c\leqslant 20$; $0.001\leqslant x<0.5$. 变量 a 与 b 在算图上用标量表示；变量 c 与 x 则用二元域表示．此算图给出数值例的解（数据：$a=0.75$; $b=7$; $c=10$; 解答：$x=0.1$）.

基本算图有简单的几何基础：三点共线条件的算图解释导致据调节点的算图；两点距离公式导致据等距点的算图以及圆规的使用；分线段为定比的点的坐标公式导致重心算图；两直线平行条件导致其平行指标的算图；由平行四边形的三个顶点去确定它的第四个顶点坐标的公式导致长菱形算图；具有或没有坐标轴旋转的直角坐标变换公式导致（具有定向透明片或一般形式的）两个平面上的算图.

每个基本算图对应于能用算图阐明的相关性的一典则形式．某些典则形式允许有各种类型基本算图的构造．

由调节点的一类基本算图表示的最一般典则形式为

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}.$$

对应的算图由三个二元域 (α_1,α_2), (α_3,α_4) 与 (α_5,α_6) 组成，其间有一个简单的列线图相连接．

下面给出关于由种种类型算图表示的单个方程与方程组的常见典则形式.

关于个别方程的典则形式：a）具有三个变量：

$$f_1=f_{23},\ f_1f_3+f_2g_3+h_3=0,\ f_1+f_2=f_3,\ f_1=f_2f_3;$$

b）具有四个变量：

$$f_{12}=f_{34},\ f_1f_{34}+f_2g_{34}+h_{34}=0,\ f_{12}=f_3+f_4;$$

c）具有五个变量：

$$f_{12}=f_{34}+f_{35};\ f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=0,\ f_5=F(f_{12}+f_{34},\ g_{12}+g_{34});$$

d）具有六个变量：

$$f_{12}+f_{13}=f_{45}+f_{46},\ f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=0;$$

e）具有七个变量：

$$f_7=F(f_{12}+f_{34}+f_{56},\ g_{12}+g_{34}+g_{56}),\quad f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7=0.$$

关于方程组的典则形式：

$$\begin{cases}f_3=f_{12},\\ g_4=g_{12};\end{cases}\begin{cases}f_{12}+f_{34}=f_{56},\\ g_{12}+g_{34}=g_{56};\end{cases}\begin{cases}f_{12}-f_{56}=f_{34}-f_{56},\\ g_{12}-g_{56}=g_{34}-g_{78};\end{cases}$$

$$\begin{cases}f_{12}-f_7=f_{34}-f_8=f_{56}-f_9,\\ g_{12}-g_7=g_{34}-g_8=g_{56}-g_9.\end{cases}$$

复合算图（composite nomograms）由同一类型或

数种类型的基本算图组成．复合算图的引进在极大程度上扩大了能用算图表示的相关性的类．关于能用基本与复合算图表示的典则形式的一概述，见[3]与[4].

具有三个变量的相关性总可以用算图表示．四个或更多个变量的相关性只在特殊情况下才有算图构造．

利用近似表示去扩大算图可表示的相关性的范围．其中之一是基于用算图表示给定相关性到某个容许误差．

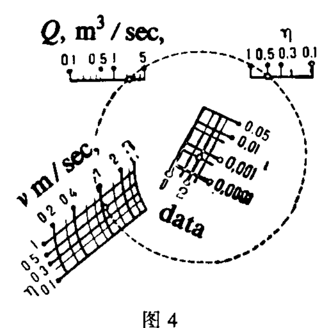


图 4

图 4 画的是据等距点的一近似算图，目的是为了确定方程组

$$\begin{cases} Q=(76.9+17.72\log\dfrac{b\eta}{1+2\eta})\dfrac{b^{2.5}\eta^{1.5}i^{0.5}}{(1+2\eta)^{0.5}}, \\ v=(76.9+17.72\log\dfrac{b\eta}{1+2\eta})\dfrac{b^{0.5}\eta^{0.5}i^{0.5}}{(1+2\eta)^{0.5}}. \end{cases}$$

中的量 η 与 v（或 Q 与 v），此方程组是用来计算水力学中的矩形流的．为了应用算图，此方程组要用近似组

$$Q=\frac{76b^{2.616}\eta^{1.616}i^{0.5}}{(1+2\eta)^{0.616}},\quad v=\frac{76b^{0.616}\eta^{0.616}i^{0.5}}{(1+2\eta)^{0.616}}$$

代替，关于 Q 与 v 的相对误差不超过 2.5%．算图中点圆周对应于数值实例的解（数据：$i=0.0005$，$b=2\,\mathrm{m}$，$Q=2.2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}$；解答：$\eta=0.5$，$v=1.1\,\mathrm{m/sec}$）．

在某些情况下近似算图方法可以用算图表示具有若干个表值元的表格．

为了获得给定的相关性的算图表示，人们精确或近似地将它表成算图形式并在直角坐标系下写出算图元的方程组．选择这些方程中出现的变换参数时，应使它们给出算图的一个便于应用的形式．其次便是计算算图的各个元素的坐标表格，然后画出相应的算图．

机器算图（machine nomography）已有进展（见[4]－[6]）：借用计算机的自动计算与构造初等算图，图形构造以及关于各种类型算图的自动构造、计算与设计的标准程序等过程与标准程序系统已经作出来．

理论算图的主要问题是可表示性与唯一性．第一个问题的实质在于弄清一个方程或方程组是否能化为某种典则形式，并且如果可能，去确定此过程的算法．对某些典则形式此问题的解已经获得．它们是麻烦的且在实际上很少应用．第二个问题的实质在于去确定是否有唯一的方法，将给定的相关性化为典则形式，并且当不唯一时去指出所有可能的方法，且对每种方法去建立算图是否能变换成相应的典则形式．

参考文献

[1] Пентковский, М. В., Номография, М.-Л., 1949.

[2] Невский, Б. А., Справочная книга по номографии, М.-Л., 1951.

[3] Хованский, Г. С., Основы номографии, М., 1976.

[4] Хованский, Г. С., Номография и ее возможности, М., 1977.

[5] Khovanskiĭ, G. S. (ed.), Nomography collection, 15, Moscow, 1986（俄文）.

[6] Khovanskiĭ, G. S., Nomography today, Moscow, 1987（俄文）.

Г. С. Хованский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rektorys, K. (ed.), Survey of applicable mathematics, Iliffe, 1969, p. Sect. 32 A.

[A2] Sauer, R. and Szabó, I. (eds.), Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, III, Springer, 1968, p. Sect. G. 1.3.

[A3] Davis, D. S., Nomography and empirical relations, Wiley, 1962.

[A4] Levens, A. S., Nomography, Wiley, 1959.

[A5] Johnson, L., Nomography and empirical equations, Wiley, 1952.

郑维行 译 沈祖和 校

非 Abel 上同调 [non-abelian cohomology; неабелевы когомологии]

上同调，其系数在一个非 Abel 群中，非 Abel 群的一个层中，等等．最熟知的例子是群的上同调，拓扑空间的上同调，而更一般的例子是维数为 0，1 的位相（site）（即，拓扑范畴；见**拓扑化范畴**（topologized category））的上同调．对于非 Abel 上同调的一致的研究途径可基于下述的概念．设 C^0，C^1 为群，C^2 为一个具有一个特异点 e 的集合，$\mathrm{Aff}\,C^1$ 为 C^1 的全形（即 C^1 与 $\mathrm{Aut}(C^1)$ 的半直积；亦见**群的全形**（holomorph of a group）），并设 $\mathrm{Aut}\,C^2$ 为 C^2 的保持 e 固定的置换的群．那么，一个**非 Abel 上链复形**（non-Abelian cochain complex）是一个集体

$$C^*=(C^0,C^1,C^2,\rho,\sigma,\delta),$$

其中 $\rho: C^0\to\mathrm{Aff}\,C^1$，$\sigma: C^0\to\mathrm{Aut}\,C^2$ 都是同态，而 $\delta: C^1\to C^2$ 是一个映射，使

$\delta(e)=e$，且 $\delta(\rho(a)b)=\sigma(a)\delta(b)$, $a\in C^0$, $b\in C^1$.

定义 0 维上同调群为

$$H^0(C^\cdot)=\rho^{-1}(\operatorname{Aut}C^1),$$

1 维上同调集（具有特异点的）为

$$H^1(C^\cdot)=Z^1/\rho,$$

这里 $Z^1=\delta^{-1}(e)\subseteq C^1$，而因式分解是模 ρ 的，ρ（见上面的定义）是群 C^0 的作用.

例 1）设 X 为具有一个群之层 $\mathscr{S}$ 的拓扑空间，$\mathfrak{U}$ 为 X 的一个覆盖，于是有 Čech 复形（Čech complex）

$$C^\cdot(\mathfrak{U},\mathscr{S})=(C^0(\mathfrak{U},\mathscr{S}),\ C^1(\mathfrak{U},\mathscr{S}),\ C^2(\mathfrak{U},\mathscr{S})),$$

这里 $C^i(\mathfrak{U},\mathscr{S})$ 的定义如同 Abel 的情况（见**上同调**（cohomology）），

$$(\sigma(a)(c))_{ijk}=a_ic_{ijk}a_i^{-1}$$
$$(\delta b)_{ijk}=b_{ij}b_{jk}b_{ik}^{-1}$$
$$a\in C^0,\ b\in C^1,\ c\in C^2.$$

关于覆盖取极限，就从上同调集 $H^i(C^\cdot(\mathfrak{U},\mathscr{S}))$ $(i=0,1)$ 得到空间 X 的系数在 $\mathscr{S}$ 内的上同调 $H^i(X,\mathscr{S})$ $(i=0,1)$. 在这些条件下，$H^0(X,\mathscr{S})=\mathscr{S}(X)$. 如果 $\mathscr{S}$ 是取值在一个拓扑群 G 内的连续映射的芽的层，那么，$H^1(X,\mathscr{S})$ 就可解释为具有结构群 G 的 X 上的拓扑主丛的同构类的集合. 类似地，可以得到平滑且全纯的主丛的一种分类. 用同样的方式，可以对于一个拓扑范畴来定义非 Abel 上同调；说明见**主 G 对象**（principal G-object）.

2）设 G 为群而 A 为一个（不必为 Abel 群）G 群，即，一个算子群，其算子的群为 G. 一个算子 $g\in G$ 作用于一个元素 $a\in A$ 上表以 a^g. 用公式

$$C^k=\operatorname{Map}(G^k,A),\ k=0,1,2$$
$$(\rho(a)(b))(g)=ab(g)(a^g)^{-1},$$
$$(\sigma(a)(c))(g,h)=a^gc(g,h)(a^g)^{-1},$$
$$\delta(b)(g,h)=b(g)^{-1}b(gh)(b(h)^g)^{-1},$$
$$a\in C^0,\ b\in C^1,\ c\in C^2,\ g\in G,$$

来定义一个复形 $C^\cdot(G,A)$. 群 $H^0(G,A)=H^0(C^\cdot(G,A))$ 是 A 中 G 固定之点的子群 A^G，而 $H^1(G,A)=H^1(C^\cdot(G,A))$ 则是叉同构 $G\to A$ 的等价类的集合，理解为 A 上**主齐性空间**（principal homogeneous space）的同构类的集合. 关于非 Abel 上同调群的应用与实际计算见 **Galois 上同调**（Galois cohomology）. 模拟上述定义可得范畴与半群的非 Abel 上同调.

3）设 X 为一个光滑的流形，G 为一个 Lie 群而 $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数. 非 Abel de Rham 复形（non-Abelian de Rham complex）$R_G^\cdot(X)$ 定义如下：$R_G^0(X)$ 是所有平滑函数 $X\to G$ 的群；$R_G^k(X)(k=1,2)$ 是 X 上取值于 $\mathfrak{g}$ 内的外 k 形式的空间；

$$\rho(f)(\alpha)=df\cdot f^{-1}+(\operatorname{Ad}f)\alpha;$$
$$\sigma(f)(\beta)=(\operatorname{Ad}f)\beta,$$
$$\delta\alpha=d\alpha-\frac{1}{2}[\alpha,\alpha],$$
$$f\in R_G^0,\ \alpha=R_G^1,\ \beta=R_G^2.$$

集合 $H^1(R_G(X))$ 是取形为 $df\cdot f^{-1}=\alpha(\alpha\in R_G^1)$ 的全可积方程模规范变换之类的集合. 模拟 de Rham 定理就对此集合提供了一种解释，它可作为同态 $\pi_1(M)\to G$ 的共轭类的集合 $H^1(\pi_1(M),G)$ 的一个子集. 在一个复流形 M 与一个复 Lie 群 G 的情况，又定义了一个非 Abel 全纯 de Rham 复形与一个非 Abel Dolbeault 复形，它们是与全纯丛的分类问题（[3]）密切联系着的. 微分形式的非 Abel 复形在流形上伪群结构理论中，也是一个重要的工具.

对一个非 Abel 上链复形的每一个子复形，都有一个相伴的正合的上同调序列. 例如，对于例 2 中的复形 $C^\cdot(G,A)$ 与其子复形 $C^\cdot(G,B)$，这里 B 是 A 的一个 G 不变子群，这个序列是

$$e\to H^0(G,B)\to H^0(G,A)\to(A/B)^G\to$$
$$\to H^1(G,B)\to H^1(G,A).$$

如果 B 是 A 的一个正规子群，这个序列可以延续到 $H^1(G,A/B)$ 这一项，而若 B 在中心内，这序列可延续到 $H^2(G,B)$. 在一个有特异点的集合的范畴中这个序列是正合的. 再者，有一工具（"扭的"上链复形）可用来描述所有——不仅是特异的——元素的原象（见[1]，[6]，[3]）. 也可以构造关于一个双重非 Abel 复形与其相应的正合边缘序列的谱序列.

除了刚描述的 0 维与 1 维的非 Abel 上同调群以外，也有 2 维的例子. 一个典型的例子是一个群 G 以系数在一个群 A 内的 2 维上同调；其定义如下. 设 $\mathscr{X}^2(G,A)$ 表示所有的元素偶 (m,φ) 的集合，这里 $m:G\times G\to A$，$\varphi:G\to\operatorname{Aut}A$ 都是映射，使

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_1g_2)^{-1}=\operatorname{Int}m(g_1,g_2)$$
$$m(g_1,g_2)m(g_1g_2,g_3)=$$
$$=\varphi(g_1)(m(g_2,g_3))m(g_1,g_2g_3);$$

此处 $\operatorname{Int}a$ 是由元素 $a\in A$ 所生成的内自同构. 在 $\mathscr{X}^2(G,A)$ 中定义一个等价关系如下，令 $(m,\varphi)\sim(m',\varphi')$ 如果有一映射 $h:G\to A$，使

$$\varphi'(g)=(\operatorname{Int}h(g))\varphi(g)$$

且

$$m'(g_1, g_2) =$$
$$= h(g_1)(\varphi(g_1)h(g_2))m(g_1, g_2)h(g_1, g_2)^{-1}.$$

这样得到的等价类是上同调集 $\mathscr{H}^2(G, A)$ 的元素．它们与 A 由 G 的扩张（见**群的扩张**（extension of a group））的等价类一一对应．

对应 $(m, \varphi) \to \varphi$ 给出集合 $\mathscr{H}^2(G, A)$ 到所有同态

$$G \to \mathrm{Out}\,A = \mathrm{Aut}\,A / \mathrm{Int}\,A$$

的集合的一个映射 θ．对 $\alpha \in \mathrm{Out}\,A$，令 $H^2_\alpha(G, A) = \theta^{-1}(\alpha)$．如果固定 $\alpha \in \mathrm{Out}\,A$，$A$ 的中心 $Z(A)$ 就取成一个 G 模的结构，于是上同调群 $H^k(G, Z(A))$ 就定义了．$H^2_\alpha(G, A)$ 是非空的，当且仅当 $H^3(G, Z(A))$ 中的某一类是平凡的．此外，在这个条件下，群 $H^2(G, Z(A))$ 简单可传递地作用于集合 $H^2_\alpha(G, A)$ 上．

2 维上同调的定义可以推广到拓扑范畴的情况（见[2]，这里也陈述了这个概念的应用）．给出 2 维上同调的一个一般的代数概形在 [4] 中列出了纲要；正如上面所描述的特殊情况，2 维上同调的计算化简成 1 维非 Abel 与通常 Abel 上同调的计算．

参考文献

[1] Serre, J.P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[2] Giraud, J., Cohomologie non abélienne, Springer, 1971.

[3] Онищик, А. Л.《Тр. Моск. матем. об-ва》, **17** (1967), 45 – 88.

[4] Толпыго, А. К., в сб.: Вопрссы теории групп и гомлогической алгебры, в. 1, Ярославль, 1977, 156 – 197.

[5] Dedecker, P., Three-dimensional nonabelian cohomology for groups, in Category theory, homology theory and their applications (Battelle Inst. Conf.), Vol. 2, Springer, 1968, 32 – 64.

[6] Frenkel, J., Cohomology non abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 2, 135 – 220.

[7] Goldschmidt, H., The integrability problem for Lie equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84** (1978), 4, 531 – 546.

[8] Springer, T. A., Nonabelian H^2 in Galois cohomology, in A. Borel and G. D. Mostow (eds.): Algebraic groups and discontinuous subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 164 – 182.

А. Л. Онищих, А. К. Толпыго 撰　周伯埙 译

非 Abel 数域 [non-Abelian number field; неабелево числовое поле]

在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上具有非 Abel 的 **Galois 群**（Galois group）的代数**数域**（number field），或者在 $\mathbf{Q}$ 上不正规的域．有时，人们考虑以其他的代数数域 k 作为基域来代替 $\mathbf{Q}$，这时的术语“非 Abel”理解为是针对 k 上的 Galois 群而言的．

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.

赵春来 译

非 Archimedes 几何学 [non-Archimedean geometry; неархимедова геометрия]

Euclid 几何学中可由 Hilbert 公理系统的关联、顺序、合同和平行等一组与连续性公理（Archimedes 公理和完全性公理）无关的公理推导出的几何学命题全体．狭义而言，非 Archimedes 几何学刻画使得 Archimedes 公理不成立的直线（非 Archimedes 直线（non-Archimedean line））的几何性质．

为研究非 Archimedes 几何学中的几何关系，引进线段的演算——非 Archimedes 数系，作为一特别数系；定义线段的概念和两线段之商、和以及乘积的概念．特别可引进一个非 Archimedes 有序域，即 Desargues 数系．借助这些数系就可以建立图形的相似理论，面积理论等等．作为非 Archimedes 平面的面积测度理论基础的多角形面积理论是基于多角形拼补相等的概念，这是比剖分相等更广泛的概念．

非 Archimedes 几何学中存在等高等底的三角形，它们拼补相等，却非剖分相等．拼补相等的多角形面积相同，而且面积相同的两个多角形总是拼补相等的．关于直角三角形的 Pythagoras 定理在非 Archimedes 几何学中成立．

线段的演算用于在非 Archimedes 空间引入仿射（或射影）坐标．例如，在平面上选取通过一固定点的两条直线为坐标轴，然后在每一条上标出相等线段．在此仿射坐标系中，直线的方程是线性的，即形式为 $ax + by + c = 0$，其中 x, y 是确定直线上点的坐标的数（线段）而 a, b, c 是固定的数（线段）．

非 Archimedes 几何学数值模型的构造导致所谓 Hilbert 超限（非 Archimedes）空间（Hilbert transfinite (non-Archimedean) spaces）．实直线上的这种数空间叫做线性 Verone 空间（linear Veronese space）．

非 Archimedes 几何学的数值实现，其中乘法交换律不一定成立，也在**非 Desargues 几何学**（non-Desarguesian geometry）的构造中起重要作用．非 Desargues 几何学基于关联、顺序和平行公理，没有合同公理．

非 Archimedes 几何学的重要意义在于它在 Euclid 空间 Hilbert 公理系统的独立性和相容性研究中的作用．关联、顺序、合同和平行公理在一个数值模型中实现既证明了它们独立于完备性公理，也证明了非 Archimedes 几何学自身的相容性．另一方面也在于澄

清了 Euclid 几何学以 Hilbert 公理为基础的构造中连续性公理所起的作用．特别是，没有连续性公理就不能证明 Euclid 平行公理等价于任一三角形的内角之和等于两个直角这个命题．

非 Archimedes 平面上的几何作图总是借助于一个划分成标准长度（划分成线段）的直尺而实现的．

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 亦见 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms）．

杨路、曾振柄 译

非结合环与非结合代数［non-associative rings and algebras; неассоциативные кольца и алгебры］

具有两个二元运算 + 与 ·，除了可能不满足乘法结合律外，满足**结合环与代数**（associative rings and algebras）之所有公理的集合．非结合环与代数的第一批例子出现在 19 世纪中叶，是不结合的（**Cayley 数**（Cayley numbers）和更一般的**超复数**（hypercomplex number））．给定一个结合环（代数），如果用运算 $[a, b]=ab-ba$ 代替原有的乘法，其结果是一个非结合环（代数），这是个 Lie 环（代数）．另一类重要的非结合环（代数）是 Jordan 环（代数），它们可由在特征非 2 的域（或有 1 和 1/2 的交换的算子环）上的结合代数中定义运算 $a \cdot b=(ab+ba)/2$ 得到．非结合环与代数的理论已经发展成代数学的一个独立分支，展现出与数学的其它领域以及物理学、力学、生物学及其他学科的许多联系．这个理论的中心部分是熟知的拟结合环和代数（nearly-associative rings and algebras）的理论，它们有：Lie 环和 Lie 代数，交错环和交错代数，Jordan 环与 Jordan 代数，Мальцев 环和 Мальцев 代数，以及它们的某些推广（见 **Lie 代数**（Lie algebra）；**交错环与代数**（alternative rings and algebras）；**Jordan 代数**（Jordan algebra）；**Мальцев 代数**（Mal'tsev algebra））．

在研究任意一类非结合代数时，要解决的最重要的问题之一是刻画有限维和无穷维的单代数．在本文中，刻画一词可理解为模去含在被描述的类中的某个"典型"类（例如，给出交错环类的单代数的刻画模去结合环；对于 Мальцев 代数——模去 Lie 代数；对 Jordan 代数——模去特殊 Jordan 代数；等等）．按照这种观点，各式各样的非结合代数可以分成两种：一种含很多单代数，一种含很少单代数．有很多单代数的典型类有结合代数，Lie 代数和特殊 Jordan 代数．亦即，在这些类中，下面嵌入定理成立：域上任意结合的（Lie 的，特殊 Jordan）代数均可嵌入一个同型的单代数．在某些代数类中，有很多单代数远远不是结合的——例如所有代数的类和所有交换（反交换）的代数的类．对于这些类，也有类似于上面提到的那种嵌入定理．

刻画有限维结合（Lie，交错或 Jordan）单代数的问题是这些代数理论的经典部分的主要对象．紧接着，关于有限维单结合（交错，Jordan）代数的结构的主要结果被转入同型的 Artin 环——对单边理想具极小条件的环；在 Jordan 环中，用二次理想代替单边理想（见 **Jordan 代数**（Jordan algebra））．

有"很少"单代数的代数类是有趣的．典型的例子是交错，Мальцев，Jordan 代数类．在交错代数类中，模去结合代数，仅有的单代数是在一个结合且交换的中心上的（8 维）Cayley-Dickson 代数．在 Мальцев 代数类中，模去 Lie 代数，仅有的单代数是与 Cayley-Dickson 代数结合的（7 维）代数（对换位算子运算 $[a, b]$）．在 Jordan 代数类中，模去特殊 Jordan 代数，单代数是在其结合中心（叙列 E 的代数）上的（12 维）Albert 代数（Albert algebras）（见 **Jordan 代数**（Jordan algebra））．在更大的类中，诸如右交错代数或 2 元 Lie 代数，关于单代数的刻画仍然是不完全的（1989）．已经知道，除 Мальцев 代数外，零特征域上没有其他有限维单的 2 元 Lie 代数，但不知道该结果在无限维情形是否成立．对于右交错代数，已经知道，虽然这个类中的有限维单代数都是交错的，但确有无穷维单右交错代数不是交错的．对于所谓 (γ, δ) 代数（设 $(\gamma, \delta) \neq (1, 1)$），所有单代数都是结合的；这些代数由给定理想的平方仍为理想而自然地产生．对于所有具有二生成元的 Jordan 代数已有一个刻画：任意具有二生成元的 Jordan 代数都是特殊 Jordan 代数（Ширшов 定理（Shirshov theorem））．所有 Jordan 可除代数已经被刻画（模去结合可除代数）．在交错代数，Мальцев 代数和 Jordan 代数类中，有一个关于准素环（primary rings）（即其双边理想的群胚不含零因子的代数）的刻画：一个准素交错环（在交换的算子环中有 1/3），或者是结合的，或者是一个 Cayley-Dickson 环．一个准素的非退化的 Jordan 代数，或者是特殊的，或者是个 Albert 环（一个 Jordan 环称为 Albert 环（Albert ring），如果它的结合中心由正则元组成且代数 $Z^{-1}A$ 是其中心 $Z^{-1}Z$ 上的 27 维 Albert 代数）．

在特定的意义下，单代数或准素代数的反面是**诣零代数**（nil algebra）．对于不是反交换的幂结合代数（见**具可结合幂的代数**（algebra with associative powers））（诸如结合的，交错的，Jordan 等等代数），诣零代数被定义成其每个元素的某个方幂均为零的代数；在反交换的情形下（即有恒等式 $x^2=0$ 的代数，诸如 Lie 代数，Мальцев 代数和 2 元 Lie 代

数)，诣零代数与 Engel 代数 (Engel algebras) 是一样的，即满足条件

$$\forall x, y \exists ((\overbrace{xy)\cdots y}^{n}) = 0$$

的代数. 在交错的 (包括结合的) 代数中，任意指数有界 (即有恒等式 $x^n = 0$) 的诣零代数都是局部幂零的，且如果对于 $m \leqslant n$ 它无 m 扭 (即 $mx = 0 \Rightarrow x = 0$)，它是可解的 (在结合情形下，它是幂零的). 涉及指数有界的 Jordan 诣零代数的局部幂零性的 Ширшов 问题 (Shirshov problem) 已经被肯定地解决. 但不知道 (1989) 是否存在单的结合的诣零环.

在 Lie 代数情形下、Engel Lei 代数的局部幂零性问题已经被 Кострикин 定理 (Kostrikin theorem) 解决: 特征 $p > n$ 的域上的具有恒等式

$$[\cdots[\overbrace{xy]\cdots y}^{n}] = 0$$

的任意 Lie 代数必然是局部幂零的. 这个定理蕴含着对于 p 指数群的限制 **Burnside 问题** (Burnside problem) 的一个正面解决. 最近，Е. И. Зельманов (1989) 证明了任意特征的域上的 Engel Lie 代数的局部幂零性. 由此，他已经推断出对任意 n 指数群的限制 Burnside 问题的正面解答 (运用单群分类理论). 一般地，所有涉及到诣零代数的局部幂零性的问题统称为 Burnside 型问题 (Burnside-type problems). 其中，Курош 问题 (Kurosh problem) 涉及**代数的代数** (algebraic algebra) 之局部有限性. 一个有界次交错的 (特别是结合的) 代数的代数 A (即 A 的元素所满足的多项式的次数是一致有界的) 是局部有限的. 不过，在一般情形下，Burnside 型问题 (如结合的诣零环的局部幂零性) 有否定的回答.

另外的研究课题有自由代数和在不同的簇中的代数的自由积. 在所有非结合代数的簇中，自由代数的任意子代数是自由的，且代数的自由积的任意子代数是它与各因子的交及其某自由代数的自由积 (Курош 定理 (Kurosh theorem)). 这种形式的定理在交换 (反交换) 代数簇中仍然成立. 这些问题对于 Lie 代数来说是最为有趣的. 一个自由 Lie 代数的任意子代数本身是一个自由 Lie 代数 (Ширшов-Witt 定理 (Shirshov-Witt theorem)). 尽管对于 Lie 代数的自由积的子代数而言，类似的 Курош 定理不再成立，但是这类子代数可以用一个理想的生成元来刻画，交集和某自由子代数的自由积模去该理想是可分解的. 关于自由交错代数已经作了研究——它们的 Жевлаков 根 (**拟正则根** (quasi-regular radical))，它们的中心 (结合的和交换的)，模 Жевлаков 根的商代数，等等. 与自由结合代数相反，具有 $n \geqslant 4$ 个生成元的自由交错代数含有零因子，甚至平凡理想 (平方为零的非零理想). 同样也有具 $n \geqslant 5$ 个生成元的自由 Мальцев 代数中平凡理想的例子; 关于具有 $n \geqslant 3$ 个生成元的自由 Jordan 代数，它们包含零因子，诣零元和中心元都是已知的事实.

自由代数理论与各类代数中的恒等式问题密切地联系在一起. 在这种联系中有一个关于各簇的基本秩的问题 (基本秩 (basis rank) 是这样的一个最小的自然数 n，使问题中的簇由一个具 n 个生成元的自由代数生成; 如果没有这样的 n 存在，基本秩定义为无穷). 结合代数簇和 Lie 代数簇的基本秩是 2; 交错代数和 Мальцев 代数簇的基本秩是无穷.

非结合代数簇与类的一般理论处理典型的代数类以及它们之间的关系. 下面是一个很有特性的结果. 已经证明，在不同的时间被不同的作者定义的容许的、广义容许的和广义标准的代数簇，实际上都属于非结合代数的所有簇作成的格的 8 元子格，它也可由 Jordan，交换，结合，结合 - 交换，以及交错代数簇做出来. 由一个有限结合 (交错，Lie，Мальцев，或 Jordan) 环生成的簇是有有限基的，但存在有限非结合环 (有限域上的一个代数) 生成一个有无穷基的簇. 有无限域上的一个 Lie 代数具有此性质. 同时，仍然不清楚 (1989) 是否存在零特征域上 Lie 代数的非有限基的簇. A. R. Kemer ([18]) 已经证明，特征零域上的结合代数的每个簇都是有限基 (对 Specht 问题 (Specht problem)) 的一个正面回答.

非结合环与代数理论中的算法问题在数理逻辑的影响下被公式化了. 所有非结合代数簇的字的问题已经解决 (Жуков 定理 (Zhukov theorem)). 类似的结果对于交换 (反交换) 代数是正确的. 具有一个关系的 Lie 代数有可解字问题. 同时，存在带有一个不可解字问题的有限出现 Lie 代数. 对于一个具有给定可解次数 n 的可解 Lie 代数簇研究了字的问题; 对于 $n = 2$ 它是可解的，对 $n \geqslant 3$ 不可解. 已经证明，一个素域上的任意递归定义的 Lie 代数 (结合代数) 均可嵌入一有限出现 Lie 代数 (结合代数).

参考文献

[1] Ширшов, А. И., 《Успехи. матем. наук》, **13** (1958), 6, 3 – 20.

[2] Жевлаков, К. А., Слинько, А. М., Шестаков, И. П., Ширшов, А. И., Кальца, Близкие к ассоциативным, М., 1978.

[3] Кострикин, А. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23** (1959), 1, 3 – 34.

[4] Бокуть, Л. А., 《Colloq Math.》, **14** (1966), 349 – 353.

[5] Бокуть, Л. А., 《Сердика》, **3** (1977), 299 – 308.

[6] Кузьмин, Е. Н., 《Алгебра и логика》, **7** (1968), 4, 48 – 69.

[7] Филиппов, В. Т., 《Алгебра и логика》, **15** (1976), 2, 235 – 242.
[8] Филиппов, В. Т., 《Алгебра и логика》, **16** (1977), 1, 101 – 108.
[9] Кукин, Г. П., 《Алгебра и логика》, **17** (1978), 4, 402 – 415.
[10] Кукин, Г. П., 《Алгебра и логика》, **11** (1972), 1, 59 – 86.
[11] Львов, И. В., 《Алгебра и логика》, **12** (1973), 3, 269 – 297.
[12] Дорофеев, Г. В., 《Алгебра и логика》, **15** (1976), 3, 267 – 291.
[13] Голод, Е. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **28** (1964), 273 – 276.
[14] Курош, А. Г., 《Матем. сб.》, **37** (1955), 251 – 264.
[15] Ширшов, А. И., 《Матем. сб.》, **33** (1953), 441 – 452.
[16] Jacobson, N., Structure and representation of Jordan algebras, Amer. Math. Soc., 1968.
[17] Зельманов, Е. И., 《Докл. АН СССР》, **249** (1979), 1, 30 – 33.
[18] Kemer, A. R., 《Алгебра и логика》, **26** (1987), 5, 597 – 641.
[19] Медведев, Ю. А., 《Алгебра и логика》, **27** (1988), 2, 172 – 200.

Л. А. Бокуть 撰 牛凤文 译

非原子对策 [non-atomic game; неатомическая игра]

一种有下列性质的对策：如果 I 表示所有局中人的集合，则存在一个给定的 I 上的子集 σ 代数 $\mathscr{C}$ 以及一个 $\mathscr{C}$ 上的**非原子测度** (non-atomic measure)，使得零测度的局中人集 $C\in\mathscr{C}$ 不影响对策的结局．非原子对策用来作为具有大量很“小”的诸如经济系统中的消费者那样的个体的形势下的模型；从而非原子对策的发展紧密联系着具有大量参与者的经济模型的研究（见[1]）．非原子对策在**对策论** (games, theory of) 的分类常规中是从属性的，基本的对策论最优化原理（见**对策论中的核心** (core in the theory of games)；**Shapley 值** (Shapley value)）都可能以自然的方式对它照搬．然而，对非原子对策来说，非合作最优性原理照例是在不加通常的凸性假定下来执行的（见[2]），并且不同的最优性原理之间变得有更强的内部联系．例如，对于一大类的市场型的非原子对策，竞争均衡集与核心重合，它们由单个元素组成，并与对策的值（Shapley 值对于非原子对策的向量类似；见[1]）相符．非原子对策论有两个研究方向——合作非原子对策理论（见[1]，[3]，[4]）和非合作对策理论（见[2]）．

一个合作非原子对策 (cooperative non-atomic game)，类似于通常的**合作对策** (cooperative game)，是一个三元组 $\langle J, v, H\rangle$，其中 $J=(I,\mathscr{C})$ 是局中人的可测空间，元素 $C\in\mathscr{C}$ 称为联盟 (coalition)；v 是 $\mathscr{C}$ 上的实值函数，它称为特征函数 (characteristic function)；而 H 是 $\mathscr{C}$ 上的所有有限可加的有界变差测度集合 FA 的某个子集（通常假定 $\mu(I)=v(I)$ 对于所有 $\mu\in H$ 成立）．在最简单的情形，v 是 $\mathscr{C}$ 上的非原子可测函数．这时假定空间 J 是标准的（即 $(I,\mathscr{C})$ 同构于单位区间及其 Borel 子集的 σ 代数），以及集合函数 v 是有界变差的（即可表示为两个单调函数的差）．$\mathscr{C}$ 上的所有有界变差函数的空间 BV 有各种对其可构造 Shapley 值的向量类似（作为在 FA 中取值的正线性算子）的子空间，对这种子空间的描述已在[1]中作出．

平衡对策、市场对策、无旁支付对策（见**合作对策** (cooperative game)）等概念及其有关结果都可照搬到合作非原子对策情形（见[3]，[4]）．

非合作非原子对策 (non-cooperative non-atomic game) 的定义与经典的**非合作对策** (non-cooperative game) 的定义类似．对于非合作非原子对策也有 **Nash 定理** (Nash theorem, in game theory) 的类似，以及有在有限多个局中人的对策情形不成立的无凸性假定的均衡形势存在的一般结果（见[2]）．

参考文献

[1] Aumann, R. J. and Shapley, L. S., Values of non-atomic games, Princeton Univ. Press, 1974.
[2] Кирута, А. Я., в кн.: Математические методы в социальных науках, 6, Вильнюс, 1975, 18 – 71.
[3] Rosenmüller, J., Kooperative Spiele und Märkte, Springer, 1971.
[4] Rosenmüller, I., Large games without side-payments, *Operat. Res. Verfahren*, **20** (1975), 107 – 128.

А. Я. Кирута, Е. Б. Яновская 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hildenbrand, W., Core and equilibria of a large economy, Princeton Univ. Press, 1974.
[A2] Owen, G., Game theory, Acad. Press, 1982.

史树中 译

非原子测度 [non-atomic measure; неатомическая мера]

可测空间 $(X,\mathscr{S})$ 上的一个**测度** (measure)，其中没有正测度原子，亦即，集 $A\in\mathscr{S}$，$\mu(A)>0$，使当 $B\subset A$ 与 $\mu(B)>0$ 时即有 $B=A$．

Н. Н. Воробьев 撰

【补注】 测度空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 的一个原子 (atom) 是指这样的集 $A\in\mathscr{S}$，满足 i) $\mu(A)>0$；ii) $B\in\mathscr{S}$ 且 $B\subset A$ 蕴含，或者 $\mu(B)=0$，或者 $\mu(B)=\mu(A)$．亦见**原子** (atom)．

测度空间 $(X, \mathscr{S}, \mu)$ 称为非原子的 (non-atomic),如果 $\mathscr{S}$ 中的元都不是原子.在概率论中测度空间完全由原子建立,亦即利用原子测度 (atomic measure) 来研究概率论是常有的事.见**原子分布** (atomic distribution).

将概率 F 分解为和 $F=pF_a+(1-p)F_c(0\leqslant p\leqslant 1)$,这里 F_a 为原子分布,而 F_c 为**连续分布** (continuous distribution) 即非原子分布.此结果称为 Jordan 分解定理 (Jordan decomposition theorem).

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971, 135.

郑维行 译 沈祖和 校

非中心 χ^2 分布 [**non-central 'chi-squared' distribution**; **нецентральное 'хи-квадрат' распределение**]

集中在正半轴 $0<x<\infty$ 的连续型概率分布,其密度为

$$p(x)=\frac{e^{-(x+\lambda)/2}x^{(n-2)/2}}{2^{n/2}\Gamma(1/2)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r x^r}{(2r)!}\frac{\Gamma(r+1/2)}{\Gamma(r+n/2)},$$

其中 n 是自由度,λ 是非中心参数.对于 $\lambda=0$,此密度与普通的(中心) χ^2 **分布** (χ^2 distribution) 密度相同.非中心 χ^2 分布的**特征函数** (characteristic function) 为

$$\varphi(t)=(1-2it)^{-n/2}\exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it}\right\};$$

数学期望 (mathematical expectation) 和**方差** (dispersion) 分别为 $n+\lambda$ 和 $2(n+2\lambda)$.非中心 χ^2 分布属于**无穷可分分布** (infinitely-divisible distribution) 类.

通常,非中心 χ^2 分布作为相互独立具有非零均值 m_i 和单位方差的正态分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的平方和出现;确切地说,$X_1^2+\cdots+X_n^2$ 有非中心 χ^2 分布,自由度为 n 和非中心参数为 $\lambda=\sum_{i=1}^n m_i^2$.若干相互独立具有非中心 χ^2 分布的随机变量之和仍具有非中心 χ^2 分布,其参数等于各变量相应的参数之和.

如果 n 是偶数,则非中心 χ^2 分布的分布函数 $F_n(x;\lambda)$(当 $x\leqslant 0$ 时它都等于 0)当 $x>0$ 时等于

$$F_n(x,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+n/2}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^m(x/2)^k}{m!k!}e^{-(\lambda+x)/2}.$$

此式建立了非中心 χ^2 分布与 **Poisson 分布** (Poisson distribution) 之间的联系.具体地说,如果 X 和 Y 为分别有参数 $x/2$ 和 $\lambda/2$ 的泊松分布,则对于任意 $s>0$,有

$$\mathrm{P}\{X-Y\geqslant s\}=F_{2s}(x,\lambda).$$

非中心 χ^2 分布常出现在研究 χ^2 型检验的功效的数理统计问题中.因为现有非中心 χ^2 分布的数值表不够完全,故在统计应用中广泛使用利用 χ^2 分布和正态分布的逼近.

参考文献

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1983.

[2] Kendall, M. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

[3] Patnaik, P. B., The non-central χ^2- and F-distributions and their applications, *Biometrika*, **36** (1949), 202–232.

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distributions in statistics, 2, Continuous univariate distributions, Wiley, 1970.

周概容 译

非经典模型论 [**non-classical theory of models** 或 non-classical model theory; **неклассическая теория моделей**]

与经典理论不同的模型理论(见**模型论** (model theory));其中或者是相关的**形式语言** (formal language) 不是一阶语言 $L_{\omega\omega}$,或是它所依据的逻辑不是典型的(二值)逻辑.以下若不另作声明,说到逻辑都是指二值逻辑.

在语言 L 的模型论中最重要问题是:

a) 永真公式集合的可公理化性.如果存在一个用自然数对语言 L 中公式的能行枚举,问题就变得更精确:永真公式所对应的自然数的集合是递归可枚举的吗?

b) 一个语言 L 叫做 (α,β) 紧的 ((α,β)-compact),如果对 L 的任一基数 $\leqslant\alpha$ 的命题集合 Σ,只要每一基数 $<\beta$ 的子集 $\Sigma'\subseteq\Sigma$ 可实现,那么 Σ 可实现.紧性问题在于刻画使得 L 是 (α,β) 紧的基数对 $<\alpha,\beta>$.

c) 如果 L 的公式形成一个集合(而不是一个真类),那么存在一个基数 α,使得 L 的每一个有基数 $\beta\geqslant\alpha$ 的模型的命题集合,也有任意大的基数的模型.这种基数中的最小者,叫做 L 的 Hanf 数 (Hanf number).对 $L_{\omega\omega}$ 来说,这个基数是可数基数 ω.要研究的问题是计算 L 的 Hanf 数以及建立小基数模型的存在条件.

以下列举研究的较好的非经典语言以及对于问题 a) – c) 解的每一个的描述.

1) 二阶逻辑语言 L_2.它是由 $L_{\omega\omega}$ 增加谓词变元及谓词变元上的量词而得.语言 L_2 的一个命题 Φ 在一个系统 $<A, F_1,\cdots,F_n,\cdots>$(其中 A 是表征 Φ 的一个模型,并且 $F_n(n\geqslant 1)$ 是 A 上 n 元谓词的集合)中真,如果当把 n 元谓词量词限制于 F_n 中的 n 元谓词时,Φ 在 A 中真.如果这里的 $F_n(n\geqslant 1)$ 是 A 上所有 n 元谓词形成的集合,那么就说 Φ 在模型 A 中为真.存

在语言 L_2 的一个命题，从同构的观点来说刻画了自然数算术．由算术的 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem），L_2 的在所有模型中真的命题集合是不可公理化的．然而存在一阶谓词演算公理的一个自然的推广 Σ_2，使 Henkin 完全性定理（Henkin completeness theorem）在其中成立：由 Σ_2 可以推演出且仅能推演出在满足 Σ_2 的公理的所有系统 $<A, F_1, \cdots, F_n, \cdots>$ 中真的那些命题．在这种情况下，存在与语言 $L_{\omega\omega}$ 的 Löwenheim-Skolem 定理类似的定理：如果 L_2 的一个命题 Φ 与 Σ_2 的公理在同一个系统中为真，那么 Φ 与 Σ_2 在一个系统 $<A, F_1, \cdots, F_n, \cdots>$ 中亦为真，其中 A 及 $F_n(n \geqslant 1)$ 都是至多可数的．语言 L_2 的模型论的某些问题与集合论的问题有联系，并且在 Zermolo-Fraenkel 公理集合论中是不可解的．

2）语言 $L_{\alpha\beta}$（其中 α, β 都是基数）．这个语言的公式由一阶语言的公式经过基数小于 α 的公式集的合取及析取，以及经过否定和冠以长度 $<\beta$ 的量词串构成．与一阶语言时类似，公式在一个模型中的真值通过对公式的结构归纳地定义．一个基数 α 叫做紧的（compact），如果对任一基数 γ，语言 $L_{\alpha\alpha}$ 是 (γ, α) 紧的．继语言 $L_{\omega\omega}$ 之后，形如 $L_{\alpha\ \beta}$ 语言中研究的最成熟的语言是 $L_{\omega_1\omega}$．从同构的观点来说，可数表征的每一可数模型可以用语言 $L_{\omega_1\omega}$ 的一个命题来刻画．对任意的 α，语言 $L_{\omega_1\omega}$ 是 (α, ω_1) 紧的．$L_{\omega_1\omega}$ 的 Hanf 数是 $2^{\omega, \omega_1}$，其中 $2^{\alpha, \nu}$ 由对序数 ν 归纳地定义：$2^{\alpha, 0} = \alpha$、$2^{\alpha, \delta+1} = 2^{\alpha, \delta}$，并且当 δ 是一个极限序数时，$2^{\alpha, \delta} = \sum_{\mu<\delta} 2^{\alpha, \mu}$.

3）带有量词"至少存在 ω_α 个"的语言 $\mathscr{L}_\alpha$．语言 $\mathscr{L}_\alpha$ 是由语言 $L_{\omega\omega}$ 增加新量词 Q^α 而得．其公式的真值由对其长度用归纳法而决定．如果集合 $\{a: a \in A, \Phi(a)$ 在 A 中为真$\}$ 的基数至少为 ω_α，那么公式 $(Q^\alpha x)\Phi(x)$ 在模型 A 中为真．设 V_α 是在基数 $\geqslant \omega_\alpha$ 的所有模型中真的 $\mathscr{L}_\alpha$ 公式的集合．集合 V_0 不可公理化，但是 V_1 可公理化．语言 $\mathscr{L}_0$ 不是 (ω, ω) 紧的．然而形如 $\mathscr{L}_\alpha$ 的语言中有某种紧性．设符号 $\omega_\beta \lll \omega_\alpha$ 表示 $\lambda < \omega_\beta$，并且 $\gamma_\iota < \omega_\beta (\iota \in \lambda)$ 蕴涵 $\prod_{\iota \in \lambda} \gamma_i < \omega_\alpha$．如果 $\omega_\beta \lll \omega_\alpha$，那么 $\mathscr{L}_\alpha$ 是 (ω_β, ω) 紧的．$\mathscr{L}_1$ 的 Hanf 数为 $2^{\omega, \omega}$.

我们以上只考虑了这样的模型，即表征为 σ 的语言 L 的任一命题在其中或者真或者假．此外，还可以考虑表征为 σ 的如下的模型 A，在其中 n 元谓词不是视为 A^n 的子集，而是视为 A^n 到一个集合 X 的映射．如果在 X 上定义了对应于语言 L 的逻辑联接词及量词的运算（量词理解为无限运算），那么就可以定义语言 L 的任一命题 Φ 在 A 中的真值 $\|\Phi\|^A \in X$．这样就得到以 X 为真值集合的模型论．当 X 是紧 Hausdorff 空间或完全布尔代数时，其理论最富有成果．经典模型论研究中的很多方法也适用这种情形．当 X 是一个完全 **Boole 代数**（Boolean algebra）时，合取、析取及否定分别定义为交、并及补．值 $\|(\forall x)\Phi(x)\|^A$ 定义为形如 $\|\Phi(a)\|^A (a \in A)$ 的所有元素的交．布尔值模型在证明各种集合论命题与公理集合论的基本公理的相容性方面，找到了广泛的应用．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model theory, North-Holland, 1973.

Е. А. Палютин, А. Д. Тайманов 撰

【补注】 无限长逻辑的进一步文献有 [A1], [A2].

参考文献

[A1] Keisler, H. J., Model theory for infinitary logic, North-Holland, 1971.

[A2] Dickmann, M. A., Large infinitary languages, North-Holland, 1975.

卢景波 译

非合作对策 [non-cooperative game; бескоалиционная игра]

系统

$$\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J} \rangle,$$

其中 J 是局中人集，S_i 是第 i 个局中人的策略集（见**策略（对策论中的）**（strategy (in game theory))），H_i 是第 i 个局中人的增益函数，它定义在 Descartes 积 $S = \prod_{i \in J} S_i$ 上．非合作对策如下进行：各自（不形成联盟、没有合作）行动的局中人选择他们的策略 $s_i \in S_i$，作为它们的结果，形势 $s = \prod_{i \in J} s_i$ 出现，从而第 i 个局中人得到增益 $H_i(s)$．在一个非合作对策中的主要最优性原理是目标可实现性原理（[1]），由此产生 Nash 平衡解．解 s^* 被称为平衡解（equilibrium solution），如果对于所有 $i \in J$, $s_i \in S_i$，不等式

$$H_i(s^*) \geqslant H_i(s^* \| s_i)$$

成立，其中 $s^* \| s_i = \prod_{j \in J \setminus i} s_j^* \times s_i$．这样，没有一个局中人对单方面干扰他们间事先同意的平衡解感兴趣．已经证明（Nash 定理（Nash theorem）），有限非合作对策（集合 J 和 S_i 都是有限的）对混合策略有平衡解．这条定理已被推广到包括有有限个局中人的无限非合作对策（[3]）和有无限个局中人的非合作对策（见**非原子对策**（non-atomic game））在内的情形．

两个平衡解 s 和 t 称为是可交换的，如果任何解 $r = \prod_{i \in J} r_i$（其中 $r_i = s_i$ 或 $r_i = t_i$, $i \in J$）也是平衡解．它们称为等价的，如果 $H_i(s) = H_i(t)$ 对于所有 $i \in J$ 成立．设 Q 是所有平衡解的集合，$Q' \subset Q$ 是

Pareto 最优（见**裁决方案**（arbitration scheme））的平衡解集．一个对策被称为 Nash 可解的（Nash solvable）以及 Q 被称为 Nash 解（Nash solution），如果所有 $s\in Q$ 是等价的和可交换的．一个对策被称为是严格可解的，如果 Q' 非空，且所有 $s\in Q'$ 是等价的和可交换的．有最优策略的**二人零和对策**（two-person zero-sum game）是 Nash 可解的和严格可解的；然而，在一般情形，这样的可解性通常是不可能的．

在完善目标的可实现性原理方面的其他尝试已经做过．例如，建议（[4]）把唯一平衡解或最大解（在后一形势下，每个局中人可保证他自身的增益与其他局中人选择的策略无关）来看作非合作对策的解，它们的选取基于在解集中引入新的偏好关系．在另外的方法中，非合作对策的解被定义为局中人行为的主观判决（[5]）．

参考文献

[1] Воробьев, Н. Н., 《Успехи матем. наук》, **25** (1970) (152), 2, 81 – 140.

[2] Nash, J., Non-cooperative games, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 286 – 295.

[3] Glicksberg, I. L., A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 1, 170 – 174.

[4] Harsanyi, J. C., A general solution for finite noncooperative games based on risk-dominance, in L. S. Shapley, A. W. Tucker and M. Dresher (eds.): *Advances in game theory*, Princeton Univ. Press, 1964, 651 – 679.

[5] Вилкас, Э. Й., 《Теория вероят. и ее примен.》, **13** (1968), 3, 555 – 560.

Э. Й. Вилкас, Е. Б. Яновская 撰

【补注】

参考文献

[A1] Vorob'ev, N. N., Game theory, Springer, 1977(译自俄文).

史树中 译

非退化表示 [non-degenerate representation; невырожденное представление]

一个群（环，代数，半群）X 在一个向量空间 E 内这样的一个**线性表示**（linear representation）π，如果对于某个 $\xi\in E$ 和一切 $x\in X$ 来说，$\pi(x)\xi=0$，则 $\xi=0$．

А. И. Штерн 撰 郝钢新 译

非 Desargues 几何学 [non-Desarguesian geometry; недезаргова геометрия]

其中 **Desargues 假设**（Desargues assumption）不必为真的平面几何学．此平面称为非 Desargues 平面（non-Desarguesian plane）．仅用平面的射影公理而不借助于合同公理（度量公理）或者空间的公理、在平面上不能证明 Desargues 定理．例如，由 Hilbert 的所有的平面公理（见 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms））除去关于三角形合同的公理之后不能推出 Desargues 定理．以此系统为基础的平面几何学是非 Desargues 几何学；它不能看作是 Hilbert 系统所有公理除去上述合同公理之外都成立的三维几何学的一部分．一个非 Desargues 射影平面不能嵌入到一个维数较高的射影空间（见[1],[4],[5]）．

非 Desargues 平面几何学确实可以构造，这一事实产生 Hilbert 系统各公理组的独立性的证明，同时突出显示了 Desargues 定理作为平面射影几何学一个独立的附加公理的作用（见[2]）．

此外考虑所谓的非 Desargues 系统（non-Desarguesian systems），其中 Desargues 定理作为一个**构形**（configuration）命题不成立．非 Desargues 系统一般在某些呈现为直线空间的 Riemann 流形上，特别是在某些曲面上存在．一个简单的例子是抛物面 $z=xy$，它上面的点及其最短连线形成一个非 Desargues 系统．另外一个例子由环面给出：存在没有共轭点的环面的度量化，其一致覆盖空间的测地线形成一个非 Desargues 系统（亦见[5]，[6]）．

参考文献

[1] Hilbert, D., The foundations of geometry, Open Court, La Salle, Illinois, 1950(译自德文).

[2] Скорняков, Л. А., 《Успехи матем. наук》. **6** (1951), 6, 112–154.

[3] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad. Press, 1955.

[4] Mohrmann, H. (ed.), Festschrift D. Hilbert: zu seinem 60. ten Geburtstag, Springer, reprint, 1982.

[5] Bieberbach, L., Einleitung in die höhere Geometrie, Teubner, 1933.

[6] Narayana Rao, M. L. and Kuppuswamy Rao, K., A class of non-desarguesian planes, *J. Comb. Theory Ser. A*, **19** (1975), 247 – 255.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 一些有限射影平面是非 Desargues 平面，见[A2]．

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Twelve geometric essays, Southern Ill. Univ. Press, 1968, p. 248.

[A2] Hall, M., The theory of groups, MacMillan, 1959, 394 – 397.

[A3] Pickert, G., Projective Ebenen, Springer, 1975.

[A4] Hughes, D. and Piper, F. C., Projective planes, Springer, 1973.

杨路、曾振柄 译

不可微函数 [non-differentiable function; недифференцируемая функция]

不存在微分(differential)的函数．在单元函数情形就是不存在有限导数的函数．例如，函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处为不可微，尽管它在该点处左、右可微(即在该点处有有限的左、右导数)．连续函数 $f(x)=x\sin(1/x)$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ 不但在 $x=0$ 处不可微，而且在该点处既没有左导数也没有右导数(有限或无穷)．

在整个实直线上连续但在任何点都没有有限导数的函数的最早例子是由 B. Bolzano 于 1830 年(发表于 1930 年)和 K. Weierstrass 于 1860 年(发表于 1872 年)构造的．Weierstrass 的例子是级数的和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),$$

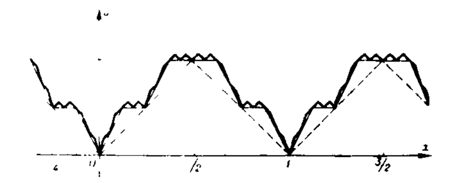
其中 $0<a<1$, b 是奇自然数且 $ab>1+3\pi/2$．基于同样的想法，但以比较简单的周期函数——折线——来代替 $\cos\omega x$ 的比较简单的例子，由 B. L. van der Waerden 所构造．设 $u_0(x)$ 是对于实数 x 定义的函数，它等于 x 与最近整数之差的绝对值．此函数在每个区间 $[n/2,(n+1)/2]$ (n 是一整数)上是线性的；它是连续的、周期的，周期为 1．令

$$u_k(x)=\frac{u_0(4^kx)}{4^k},\ k=1,2,\cdots,$$

则 van der Waerden 函数由

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$$

定义．此函数在整个实直线上连续但在任何点没有有限导数．下图显示了此级数前 3 个部分和．



对于多元函数，在一点处的可微性并不等价于该点处偏导数的存在性；有不可微函数但存在偏导数的例子．例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{若 } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{若 } x=y=0\end{cases}$$

在平面上每个点连续且处处存在偏导数，但它在 (0, 0) 处不可微．

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 S. Banach 证明，“大多数”连续函数是处处不可微的．具体地说，他证明，如果以 C 表示单位区间 $[0,1]$ 上所有连续实值函数的空间，赋予一致度量(上确界范数)，则 C 中在 $[0,1)$ 的某个点具有有限右导数的元素的集合在完全度量空间 C 中是第一 Baire 范畴的(见 **Baire 类**(Baire classes))．这一事实的证明以及上述 Weierstrass 例子中处处不可微性的证明可在 [A1] 中找到．van der Waerden 例子中的函数具有所述性质的证明可在 [A2] 中找到．

参考文献

[A1] Hewitt, E., Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A2] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

【译注】 关于 van der Waerden 例子中函数处处不可微的证明，也可见 [B1]．

参考文献

[B1] Фихтенгольц, Г. М., Курс дефференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., 1951, § 416 (中译本：Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第二卷第二分册，高等教育出版社，1954, § 416).

沈永欢 译

非 Euclid 几何学 [non-Euclidean geometry; неевклидовы геометрии]

字面含义指所有与 Euclid 几何学不同的几何学系统；但通常“非 Euclid 几何学”一词专指其中定义了图形运动的(不是 Euclid 几何学的)几何学系统，这个运动与 Euclid 几何学中的运动具有相同的自由度．Euclid 平面中图形运动的自由度是由如下条件确定的：每一图形可以运动而不使其点之间的距离有所改变，并可使图形的一个任意选定的点处于某一预定位置；此外每一图形可绕其任何一点旋转．在 Euclid 三维空间每一图形可以运动使其任意选定之一点处于某一预定位置；加之图形可绕通过其任何一点的任意轴旋转．

主要的非 Euclid 几何学是双曲几何学(hyperbolic geometry)(即 **Лобачевский 几何学**(Lobachevskiĭ geometry))和椭圆几何学(elliptic geometry)(即 Riemann 几何学(Riemann geometry))，它们即“非 Euclid 几何学”通常所指．双曲几何学是最先发现的不同于 Euclid 几何学的几何学系统，也是第一个更一般的理论(它包括 Euclid 几何学作为其极限情况)．后来发现的椭圆几何学在某些方面是双曲几何学之对立．对 Euclid 几何学、Лобачевский 几何学和 Riemann 几何学并列研究，能在很大程度上揭示三者之特性，并查明它们和其他几何学系统之间的关系．下面将依次从综合理论、微分几何、群论等方面比较两种非 Euclid 几何学和 Euclid 几何学．

非 Euclid 几何学的综合理论．除平行公理以外，双曲几何学建立在和 Euclid 几何学相同的公理基础上．根据 Euclid 几何学的平行公理，通过不在直线 a 上的任何一点正好有一直线与 a 在同一平面而与 a 不

相交；在双曲几何学中则假定有很多（因而可证明有无穷多）这样的直线．

椭圆几何学采用公理：与一直线共面之任何直线必与该直线相交．这一公理与除开平行公理以外的 Euclid 几何学公理系统矛盾．所以，构成椭圆几何学的公理系统与 Euclid 几何学公理系统的差异不仅只是平行公理这一个公理的替换，而且也在于部分其他公理．使之产生差异的是有关几何元素的序关系的公理．具体即是：在 Euclid 几何学和双曲几何学中直线上点的顺序是线性的，类似于实数的顺序；在椭圆几何学中直线上点的顺序是循环的，如同圆周上的点．此外，在 Euclid 几何学和双曲几何学中平面上每一直线将平面分成两部分；而此性质在椭圆几何学中不成立，平面上不在某一给定直线上的任意两点可用一与此直线不相交的连续曲线相连接（椭圆平面的拓扑模型是射影平面）．

三种几何学中图形的运动由相同的公理决定．

非 Euclid 几何学定理的例子．

1）双曲几何学中任意三角形的内角和小于两个直角；椭圆几何学中三角形内角和大于两个直角（在 Euclid 几何学中自然等于两个直角）．

2）双曲几何学中三角形的面积公式是

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \qquad (1)$$

其中 α, β, γ 是三角形的内角，R 是取决于面积之测量单位的一个常数．椭圆几何学的面积公式和**球面几何学**（spherical geometry）的一样，是

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \qquad (2)$$

其中符号的含义和双曲几何学中一样（而在 Euclid 几何学中三角形的面积与其内角之和无固定关系）．

3）双曲几何学中有各种关于三角形的边和角的关系式，例如

$$\cosh\frac{a}{R} = \cosh\frac{b}{R}\cosh\frac{c}{R} - \sinh\frac{b}{R}\sinh\frac{c}{R}\cos\alpha, \qquad (3)$$

其中 sinh, cosh 表示双曲正弦和余弦，a, b, c 是三角形的边，α, β, γ 是其对角，而 R 是一由尺度之选择所决定的常数；对于直角三角形（设斜边是 c，γ 是直角）则有下例：

$$\cosh\frac{c}{R} = \cot\alpha\cot\beta. \qquad (4)$$

经过线性尺度和面积单位之某一调整，公式（1），（3），（4）中的常数 R 是同一个．数 R 是双曲平面（或空间）的曲率半径．对于一给定之线性尺度，R 表示双曲平面（空间）之某一线段的长度，该线段又称曲率半径．如将曲率半径本身选作长度之单位，则 $R = 1$．如同球面三角学（spherical trigonometry），椭圆几何学也有类似公式：

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \qquad (5)$$

对一任意三角形成立，而

$$\cos\frac{c}{R} = \cot\alpha\cot\beta \qquad (6)$$

对直角三角形成立，其中记号含义相似．数 R 叫椭圆平面（或空间）的曲率半径．如同公式（4），（6）显示，每一非 Euclid 几何学中一直角三角形的斜边由该三角形的角决定；一般则有，任意三角形的边由其角所决定，这说明不存在相似而不合同的三角形（Euclid 几何学中没有类似于（4），（6）的公式，也没有其他用角度来表示线性量的公式）．将 R 换为 iR 则公式（1），（3），（4）分别变成（2），（5），（6）；一般，双曲几何学之任一度量公式中的 R 换为 iR 即得到椭圆几何学之相应公式，并保持其几何意义．当 $R \to \infty$ 时，两种非 Euclid 几何学的公式都变成 Euclid 几何学的公式（或者失去意义）．而 R 之无限增长意味着尺度线段与曲率半径（作为一线段）相比变成无穷小量．非 Euclid 几何学的公式的极限趋于 Euclid 几何学的公式此一事实表明，与曲率半径相比较小的非 Euclid 图形之中元素的关系同相应的 Euclid 图形中的关系相差甚小．

有关微分几何之非 Euclid 几何学．每一非 Euclid 几何中平面的微分性质类似于 Euclid 空间中曲面的微分性质．具体来说，在一非 Euclid 平面中可以引入内蕴坐标 u, v 使得坐标的微分 du, dv 所对应的曲线弧长之微分 ds 定义为

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \qquad (7)$$

特别，可假定一任意点 M 的坐标 u 是 M 到某一固定直线的垂线长度，坐标 v 是此直线上一固定点 0 到垂足的距离；u, v 的符号按通常的坐标系选择．这时，公式（7）对双曲几何变成

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2, \qquad (8)$$

而对椭圆几何变成

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2, \qquad (9)$$

其中 R 是上一节中相同的常数（曲率半径）．（8），（9）两式右边即是 Euclid 空间常曲率曲面的度量形式——第一种情况为负曲率 $K = -1/R^2$（例如伪球面），第二种为正曲率 $K = 1/R^2$（例如球面）．因此，双曲平面与上一充分小部分的内蕴几何学合同于常数负曲率曲面上相应部分的内蕴几何学．类似地，椭圆平面上的充分小部分的内蕴几何学在常数正曲率曲面上实现（Euclid 空间不存在实现整个双曲平面之几何学的曲面）．

将 R 换为 iR 则度量形式 (8) 变成度量形式 (9).

因为度量形式决定曲面的内蕴几何学, 上面同一变换也将双曲几何学中其他度量关系式变成椭圆几何学中的度量关系式 (如前所述). 如果 $R=\infty$, 则 (8), (9) 两式都导致

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

此即 Euclid 平面的度量形式.

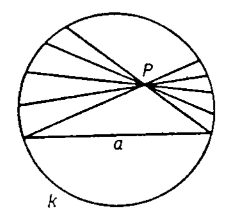
就其微分性质而论, 三维非 Euclid 空间属于 Riemann 空间类, 主要因为它们具有常 Riemann 曲率. 常曲率保证了这样的二维和三维空间都是齐性的, 即图形的运动是局部可能的 (并且分别跟 Euclid 平面和空间中的图形运动有相同的自由度). 双曲空间具有负曲率 $-1/R^2$, 椭圆空间具有正曲率 $1/R^2$ (R 是曲率半径). Euclid 空间处于中间地位, 它是一零曲率空间.

常 Riemann 曲率空间可具有多种不同的拓扑结构. 所有常数负曲率空间中, 双曲空间由完全性 (意指作为度量空间的完全性) 和与通常 Euclid 空间拓扑等价这两条性质唯一确定. 椭圆空间在所有常数正曲率空间中由拓扑等价于射影空间此一性质唯一确定. 类似条件可定义常 Riemann 曲率高维空间类中之双曲空间和椭圆空间.

有关群论之非 Euclid 几何学. 考虑一射影平面, 其射影齐次坐标为 (x_1, x_2, x_3), 假设给定某一二阶卵形曲线, 以下记为 k, 其方程为

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

每一从射影平面到自身并保持曲线 k 不变的射影映射称为关于 k 的一个自同构. 每一自同构将 k 内部的点映在 k 的内部. 关于曲线 k 的全体自同构的集合是一个群. 只考虑射影平面上位于 k 内的点; k 的弦称为“直线”. 两个图形视为相等如果其中之一可经某一自同构变换为另一个. 由于全体自同构构成一个群, 所以图形之相等有以下之基本性质: 1)如果图形 A 等于图形 B, 则 B 等于 A; 2)如果 A 等于 B 且 B 等于 C, 则 A 等于 C. 由此所得之几何学理论中, Euclid 几何学除去平行公理以外的所有公理都成立, 而此几何学满足双曲几何学的平行公理 (见图, 其中表明经过一点 P 可画无穷多条“直线”与“直线” a 不相交).



上述构造借助射影平面得出 (二维) 双曲几何学的一个解释, 通常称之为双曲几何学的射影模型; 曲线 k 称为此模型的绝对形 (absolute). 关于 k 的自同构起着运动的作用. 因此, 双曲几何学可以看成是研究在某些自同构下保持不变的图形性质及有关的量的理论; 简而言之, 双曲几何学实质上就是有关自同构群关于某一绝对形卵形线的不变量理论.

椭圆几何学 (二维时) 也有类似解释, 即它是关于如下虚绝对形的不变量理论:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{10}$$

这一模型中的点和直线包括射影平面上的所有点和直线, 自同构在代数上明确定义为将方程 (10) 变为同一形式方程的线性变换.

Euclid 几何学也可以当成某一射影变换群的不变量的理论, 即关于退化绝对形

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

也就是关于虚点 $(1, i, 0)(1, -i, 0)$ 的自同构群的不变量的理论; 这两个虚点被称为无穷远圆点 (circular points at infinity). 此模型的全域包含射影平面上不在直线 $x_3=0$ 上的所有的点和 $x_3=0$ 以外的所有直线. 这时, 自同构起着相似变换的作用, 而不像在非 Euclid 几何学中那样它只是运动.

以上是二维几何学的模型; 高维射影模型的构造与此类似.

参考文献

[1] Александров, П. С., Что такое неэвклидова геометрия, М., 1950.

[2] Klein, F., Nicht-Euklidische Geometrie: Vorlesungen gehalten während des Wintersemesters 1889 – 1890, Göttingen, 1893.

[3] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд, М., 1978.

Н. В. Ефимов 撰

【补注】 关于非 Euclid 几何学的模型亦见 **Beltrami 解释** (Beltrami interpretation); **Klein 解释** (Klein interpretation); **Poincaré 模型** (Poincaré model). 双曲几何学又以其两位发现者之名而称为 Bolyai-Лобачевский 几何学 (Bolyai-Lobachevskiĭ geometry).

参考文献

[A1] Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie, Teubner, 1908 (译自意大利文).

[A2] Carslaw, H. S., The elements of non-Euclidean plane geometry and trigonometry, Longmans, 1916.

[A3] Sommerville, D. M. Y., The elements of non-Euclidean geometry, Dover, reprint, 1958.

[A4] Liebmann, H., Nichteuklidische Geometrie, Gösschen, 1912.

[A5] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965.

[A6] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988(译自俄文).

[A7] Berger, M., Geometry, 1-2, Springer, 1987 (译自法文).

[A8] Busemann, H., Recent synthetic geometry, Springer, 1970.

[A9] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometry, Freeman, 1980.

[A10] Kelly, P. and Matthews, G., The non-Euclidean, hyperbolic plane, Springer, 1980. 杨路、曾振柄 译

非 Euclid 空间 [**non-Euclidean space; неевклидово пространство**]

其性质基于与 Euclid 系统相异的某一公理系统的空间. 非 Euclid 空间的几何学就是**非 Euclid 几何学**(non-Euclidean geometries). 根据其中非 Euclid 几何学展开所依据的具体公理, 非 Euclid 空间可以按各种准则相应分类. 一方面, 非 Euclid 空间可以是一个有限维向量空间, 其内积在 Descartes 坐标系中可以表示为

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i y_i .$$

此种情形称之为**伪 Euclid 空间**(pseudo-Euclidean space). 另一方面, 非 Euclid 空间可以被刻画为一个 n 维流形, 其结构由一非 Euclid 公理系统所描述.

非 Euclid 空间也可以按其微分几何性质分类为常曲率 Riemann 空间(此亦包括零曲率空间情形, 不过其拓扑结构不同于 Euclid 空间). Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Greenberg, M., Euclidean and non-euclidean geometries, Freeman, 1974.

[A2] Rosenfeld, B., A history of non-euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文). 杨路、曾振柄 译

非 Fredholm 积分方程 [**non-Fredholm integral equation; нефредгольмово интегральное уравнение**]

一个**积分方程**(integral equation), 对于它某些 **Fredholm 定理**(Fredholm theorems)不成立. 有时这样的积分方程称为奇异积分方程(singular integral equation).

例如, Fourier 积分方程(Fourier integral equation)

$$\varphi(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xs)\varphi(s)ds = 0 \qquad (1)$$

具有解

$$\varphi_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} + \frac{x}{a^2 + x^2},$$

其中 a 是任意正常数; 它们构成对应于 (1) 的本征值 $\sqrt{2/\pi}$ 的线性无关解的一个无穷集; 这就是说, 对于方程 (1), 齐次方程只有有限多个线性无关解的 Fredholm 定理不成立.

对于 Lalesco-Picard 积分方程(Lalesco-Picard integral equation)

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\varphi(s)ds = 0 \qquad (2)$$

的情形, 每个 $\lambda \in (0, +\infty)$ 是一个本征值, 即对于每个正数 λ, 有两个线性无关的解

$$\varphi_\lambda^{(1)}(x) = e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}, \quad \varphi_\lambda^{(2)}(x) = e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}$$

与之对应. 于是对于方程 (2), 一个方程的本征值集至多可数的 Fredholm 定理不成立.

对于下面两类非 Fredholm 积分方程, 其理论已得到详尽开发: 未知函数出现于主值意义下广义积分号后的方程(**奇异积分方程**(singular integral equation)); 未知函数出现于积分卷积变换号后的方程(见**卷积型积分方程**(integral equation of convolution type)). 对于这样的方程, 一般地说, Fredholm 择一定理以及齐次方程线性无关解的个数等于其伴随方程线性无关解的个数这一命题均不成立.

参考文献

[1] Привалов, И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.-Л., 1937.

[2] Петровский, И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1951 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 积分方程论讲义, 高等教育出版社, 1954).

亦见**卷积型积分方程**(integral equation of convolution type)和**奇异积分方程**(singular integral equation)的参考文献. Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] 英译本: Zabreyko [Zabreĭko], P. P., et al., Integral equations —— a reference text, Noordhoff, 1975. 沈永欢 译

非完整系统 [**non-holonomic systems; неголономные системы**]

所受的约束中有对各点在所有可能位置上的速度(而不是位置)施加的运动学约束的质点系(见**完整系统**(holonomic system)); 这些约束假定为可以表达成不可积微分关系式

$$\varphi_s(x_1, \cdots, x_{3N}, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_{3N}) = 0, \qquad (1)$$

$$s = 1, \cdots, m, \ \varphi_s(x, \dot{x}, t) \in C^1,$$

它们不能为坐标的等价有限关系式所代替. 这里, x_v 代表点的 Descartes 坐标, t 为时间, N 为系统中的点

数．多数情况下考察相对于 $\dot{x}_i$ 为线性的约束(1)

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{s_i} d x_i + A_s dt = 0;\ A_{s_i}(x, t),\ A_s(x, t) \in C^1.$$

约束(1)当 $\partial \varphi / \partial t \equiv 0$ 时称为定常的．这些约束还对于点的加速度 w_ν 施加条件:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad}_{\dot{r}_\nu} \varphi_s \cdot w_\nu + \cdots = 0.$$

按照 Н. Г. Четаев，受到非线性约束(1)限制的系统的可能的运动满足如下类型的条件:

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \dot{x}_\nu} \delta x_\nu = 0,\ s = 1, \cdots, m. \qquad (2)$$

在线性约束的情况下，这些条件意味着通常的关系式

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{s_i} \delta x_i = 0.$$

与完整系统的情况不同，在相距无限小距离内的相邻位置间的运动在非完整系统中可能是不可能的(见[1])．

在广义 Lagrange 坐标系中、方程(1)，(2)可以写成

$$\Phi_s(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0,\ s = 1, \cdots, m.$$

在一个非完整系统中，自由度数 $n-m$ 比独立坐标 q_i 的数 n 小一个不可积约束方程数 m．对于不完整系统推导出了许多各种形式的运动微分方程，如第一类 Lagrange 方程(见 **Lagrange 方程(力学中的)** (Lagrange equations (in mechanics)))，Lagrange 坐标系和准坐标系中的 **Appell 方程** (Appell equations)，Lagrange 坐标系中的 Чаплыгин 和 Воронец 方程，**Boltzmann 方程** (Boltzmann equation)，准坐标系中的 Hamel 方程，等等(见[3])．

非完整系统的特点在于，在一般情况下，它们的运动微分方程包括约束方程．

参考文献

[1] Hertz, H., The principles of mechanics presented in a new form, Dover, 1956 (译自德文).
[2] Четаев, Н., 《Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те》, (3), **6** (1932), 68 – 71.
[3] Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А., Динамика неголономных систем, М., 1967.

В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Course of theoretical physics. 1. Mechanics. Pergamon, 1976.
[A2] Sudarshan, E. G. G. and Mukunda, N., Classical dynamics, Wiley, 1974.

沈 青 译

非 Hopf 群 [**non-Hopf group**, non-Hopfian group; **не-хопфова группа**]

具有满自同态，且其核非平凡的群．换言之，是同构于自身的真商群的群(无此性质的群称为 **Hopf 群** (Hopf group))．这一名词源于 Hopf 问题 (Hopf problem) (1932): 是否存在有限生成的这样的群．其结果是，甚至存在有限表现的非 Hopf 群．有限生成非 Hopf 群的例子是具有两个生成元 x 和 y 以及单个定义关系

$$x^{-1} y^2 x = y^3$$

的群．无限生成的非 Hopf 群很容易构造．例如，无限多个同构的群的直积．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什，群论，上、下．高等教育出版社，1987、1982).
[2] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations, Interscience, 1966.

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 上面提到的二元生成非 Hopf 群的例子属于 G. Baumslag 和 D. Solitar ([A1])．

参考文献

[A1] Baumslag, G. and Solitar, D., Some two-generator one-relator non-Hopfian groups, *Bull Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 199 – 201.

王 杰 译 石生明 校

非线性边值问题 [**non-linear boundary value problem**; **нелинейная краевая задача**]

在自变量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 的某一区域 D 中确定微分方程

$$(Lu)(x) = f(x),\ x \in D$$

的解 $u(x)$，使其在这个区域的边界 S (的一部分)上的值满足条件

$$(Bu)(y) = \varphi(y),\ y \in S,$$

其中算子 L 或 B 中至少有一个是非线性的．

亦见**常微分方程边值问题** (boundary value problem, ordinary differential equations); **偏微分方程边值问题** (boundary value problem, partial differential equations)．

А. П. Солдатов 撰 张鸿林 译

非线性边值问题，数值方法 [**non-linear boundary value problem, numerical methods**; **нелинейная краевая задача, численные методы решения**]

以离散问题代替边值问题的方法（见**线性边值问题，数值方法**（linear boundary value problem, numerical methods）和**非线性方程，数值方法**（non-linear equation, numerical methods））.

在许多情况特别是常微分方程组边值问题的讨论中，数值方法的描述一般并不是从原始问题离散化着手，而这种离散总是隐式的，它是已知模型的具体实现.

例如，假设所讨论的两点边值问题是一个常微分方程组

$$y' = f(x, y),\ 0 < x < X, \tag{1}$$

$$B(y(0)) = 0,\ D(y(X)) = 0, \tag{2}$$

其中

$$y \equiv (y_1, \cdots, y_l)^T,\ f \equiv (f_1, \cdots, f_l)^T,$$

$$B \equiv (B_1, \cdots, B_{l-r})^T,\ D \equiv (D_1, \cdots, D_r)^T,$$

$$0 \leqslant r \leqslant l.$$

假设向量 $G(y) = (G_1(y), \cdots, G_r(y))$ 满足这样的条件，即方程组

$$B(y) = 0,\ G(y) = g \tag{3}$$

对于每一个向量 $g \equiv (g_1, \cdots, g_r)^T$ 唯一地确定了一个向量 $y = \alpha(g)$；例如常常可以方便地取

$$G_1 \equiv y_{l-r+1}, \cdots, G_r \equiv y_l.$$

于是问题（1）－（2）能够化作方程组（算子方程）

$$\psi(g) = 0. \tag{4}$$

其中 $\psi(g) = D(\omega(g))$，而 $\omega(g)$ 为满足初始条件 $y(0) = \alpha(g)$ 的（1）的解在 $x = X$ 处的值. 为了得到 $\psi(g)$ 的值需要数值求解（见[1]，[2]）相应的微分方程组，即利用原始问题的离散化. 解方程组（4）可使用求解非线性方程组的各种迭代法. 在获得（4）的一个解 g^* 之后便可由方程组（3）确定向量 $y^* = \alpha(g^*)$，进而由解带有初始条件 $y(0) = y^*$ 的（1）得出问题（1）－（2）的解. 在一些方法中，除了 ψ 的值还使用其导数值，它是由积分下面的方程

$$\eta' = \frac{\partial f}{\partial y}\eta \tag{5}$$

（（1）的变分方程）或者使用某些数值微分公式得到. 当把边值问题归结为（4）的这种方法应用于如下更一般形式的问题时，称为打靶法（shooting method）：

$$y' = f(x, y, g),\ 0 < x < X,$$

$$y(0) = \alpha(g),\ D(y(X(g), g)) = 0,$$

特别，对特征值问题其中明显地包含了某向量参数；这里设 $\alpha(g)$ 为已知. 但是，如果（5）的解随 x 增长很快，那么数值积分的误差将导致 $\psi(g)$ 及其导数值的误差增大，并且最终使解的误差增大.

在线性化（见，例如[1]，[3]）方法中对问题（1）－（2）解的逼近由下面线性方程序列的解来确定

$$y'_{n+1} = A_n(x)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n),$$
$$0 < x < X. \tag{6}$$

其线性边界条件为

$$\left.\begin{aligned} B_n(y_{n+1}(0) - y_n(0)) + B(y_n(0)) = 0, \\ D_n(y_{n+1}(X) - y_n(X)) + D(y_n(X)) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中 $A_n(x)$ 为包含函数的 l 阶方阵，B_n 和 D_n 为数值（$(l-r)\times n$）和（$r \times l$）矩阵，$n = 0, 1, \cdots$. 初始近似 $y_0(x)$ 设为已知. 在 Newton-Канторович 方法（见 **Канторович 方法**（Kantorovich process）；**Newton 法**（Newton method））情形下，方程（6）和（7）为下列形式

$$y'_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n(x)),$$
$$0 < x < X, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial y}(y_n(0))(y_{n+1}(0) - y_n(0)) + \\ &\qquad + B(y_n(0)) = 0, \\ &\frac{\partial D}{\partial y}(y_n(X))(y_{n+1}(X) - y_n(X)) + \\ &\qquad + D(y_n(X)) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

如果 $f(x, y)$，$B(y)$ 和 $D(y)$ 对 y 二次连续可微，问题（8）－（9）适定，且 $y_0(x)$ 与所求的解 $y(x)$ 充分接近，则

$$\| y_n - y \|_C \leqslant K^{-1}(K\| y_0 - y \|_C)^{2n},$$

其中 $K > 0$ 为常数且 $\| y \|_C \equiv \max_{0 \leqslant x \leqslant X}|y(x)|$（见[1]）.

所提到的方法可推广到更一般的下述情况

$$A(y(X_0), y(X_1), \cdots, y(X_m)) = 0,$$

其中

$$A \equiv (A_1, \cdots, A_l)^T,\ 0 = X_0 < X_1 < \cdots < X_m \equiv X.$$

许多重要的理论和应用问题都归结为求解椭圆型方程和方程组的非线性边值问题（或相关问题）（见，例如[4]－[8]）. 对这类问题，基本的数值方法是投影法（投影网格，变分差分，有限元）和差分法（见[7]－[17]）. 它们的构造方法在许多方面类似于线性边值问题的那些相应方法（见 **Laplace 方程**，

数值方法 (Laplace equation, numerical methods), **Poisson 方程**, **数值方法** (Poisson equation, numerical methods)). 但是, 在这些方法中, 关于如下非线性方程的边值问题

$$L_N(\overline{u}_N)=\overline{f}_N, \tag{10}$$

其中

$$\overline{u}_N\equiv(u_1,\cdots,u_N)^T \text{ 和 } \overline{f}_N\equiv(f_1,\cdots,f_N)^T$$

所使用的离散(网格)模拟常常包含许多额外的困难, 既需要分析方程组本身和在这种那种意义下解对于原始问题的近似, 也产生于确定方程组(10)时数值工作的引入及其解的研究. 边值问题的非线性特性迫使人们要格外注意选取 Banach 空间及其网格模拟, 使得其问题本身及有限维的近似都便于作分析工作(见, 例如[5]-[12], [15]). 但是, 大量细致的研究工作, 特别是算法方面, 只是对在某种意义下与线性问题相关的若干类型非线性问题的数值方法作出的(弱非线性方程, 对非线性加限制的方程), 对此可能应用 Hilbert 空间及其有限维模拟(Euclid 空间)的理论进行研究.

令 $H_N\equiv H$ 为向量值函数 $\overline{u}_N\equiv u$ 的 Euclid 空间, 其中定义了数积 $(u,v)=\sum_{i=1}^N u_iv_i$, 而 $l(H)$ 是从 H 到 H 的自相伴正定线性算子映射的集合; 除 H 以外还应用 Euclid 空间 H_B, $B\in l(H)$, 它只是与 H 的数积定义不同

$$(u,v)_{H_B}\equiv(u,v)_B\equiv(Bu,v),$$
$$\|u\|_B\equiv(Bu,u)^{1/2}.$$

其次, 令

$$S_B(r)\equiv\{u:\|u\|_B\leqslant r\},\ r>0.$$

如果算子 L_N 在 $S_B(r)$ 上连续, 而且使得对任何 u, $\|u\|_B=r$,

$$(L_N(u)-\overline{f}_N,u)\geqslant 0, \tag{11}$$

那么方程组(10)在 $S_B(r)$ 中至少有一个解. 这个论断(见, 例如[9])是关于建立在拓扑原理(见, 例如[14])和算子单调性(见, 例如[6], [11], [14])之上的非线性算子方程解的经典存在性定理的推论之一. 特别, 如果 L_N 处处连续, 而且若

$$(L_N(u),u)\geqslant\delta\|u\|_B^2,\ \delta>0, \tag{12}$$

对任何 u 成立, 那么方程组(10)恒有解并都属于 $S_B(r)$, $r=\delta^{-1}\|\overline{f}_N\|_B^{-1}$. 而且, 如果对任意 u,v,w 不等式

$$(L_N(u)-L_N(v),u-v)\geqslant\delta_0\|u-v\|_B^2,\quad \delta_0>0, \tag{13}$$

$$|(L_N(u)-L_N(v),w)|\leqslant\delta_1\|u-v\|_B\|w\|_B \tag{14}$$

成立, 它们表示 L_N 的强单调性和 Lipschitz 连续性, 那么(10)和它的唯一解都可用如下迭代法计算

$$Au^{n+1}=Au^n-\gamma(L_N(u^n)-\overline{f}_N), \tag{15}$$

其中 $A\in l(H)$, 而且迭代参数 $\gamma>0$ 是由像 δ_0 和 δ_1 这类常数确定, 当在(13)和(14)中以 A 代替算子 B 时可以得到这些参数(见, 例如[8], [9]). 因此, 差分方法的误差估计可以作为如下事实的推论, 即方程组(10)是适定的, 而且用差分边值问题逼近原来的边值问题是有效的. 由此可方便地选取算子 B 使得空间 H_B 成为相应的 Соболев 空间(例如, 二阶方程的 $W_2^1(\Omega)$)的离散(网格)模拟, 并且因此为验证诸如(12)-(14)这些不等式可能应用其嵌入定理(在投影逼近情形)或网格模拟(见, 例如[5]-[9]). 投影方法, 特别是投影网格(有限元)方法具有一些优点, (12)-(14)式可从相应的微分算子不等式得出, 估计方法误差的任务容易归结为用所选取的有限维子空间中元素对原始问题解的逼近(见[6]-[9], [11]). 代替(13)-(14)在整个空间成立, 只要它们譬如在包含所求解的 H_B 内的某个球内成立就可以了. 有时可由(12)-(14)得出一些有用的不等式, 只要其左端的数积由 H_B 中数积代替, 右端的范数 $\|z\|_B$ 由 $\|Bz\|$ 代替. 有不少问题, 在对它们的解进行先验估计的基础上, 可用等价的边值问题来代替, 其中像(12)-(14)这类不等式是满足的(见[9]).

当(13)和(14)成立时, $A=B$ 情形下的迭代方法(15)对于任何初始近似都收敛, 并且若常数 δ_0 和 δ_1 与 N 无关, 则能够得到(10)的解, 其精度为 ε, 迭代次数为 $O(|\log\varepsilon|)$ (一般 $\varepsilon\approx N^{\alpha}$, $\alpha<0$, 即 $0<c_0\leqslant\varepsilon N^{-\alpha}\leqslant C_1$). 为了成功地构造一种网格方法, 有时需要设法选取算子 B 使得用(15)这种迭代法求解阶数不超过 N^{α} 的方程组(10), 只需执行 $O(N\log^2N)$ 甚至 $O(N\log N)$ 次算术运算即可达到(见**计算工作量的极小化** (minimization of the labour of calculation)), 在解某些椭圆型边值问题时, 使用不断加密的网格序列可能使上述估计下降至 $O(N\log N)$ 和 $O(N)$ 次运算, 这样便得了渐近最优的数值方法(关于所含工作量). 这里假定数值剩余 $L(u^n)-\overline{f}_N$ 本身最多需要 KN 次运算. 不过, 对某些问题(K 很大时)应考虑减少这种运算的次数. 当使得 L_N 线性化并应用关于某参数为连续的一类方法能够找到更为精确的初始近似时, 这是可以办到的(见**非线性方程, 数值方法** (non-linear equation, numerical methods)). 在大多数情况下, **线性化方法** (linearization meth-

ods）与非线性算子的参数连续方法（见**连续方法（对非线性算子的）**（continuation method (for nonlinear operators)））结合起来用于最为困难的情形，例如当（13）式不成立的时候．某些特征值问题（见，例如[9],[12],[14]）也可以作为椭圆型非线性边值问题来考虑；有关数值方法的构造在许多方面与以上提到的方法类似．

有些其他的定常边值问题数值上也可以用同样方式处理（见[8],[9],[17]）．虽然类似于上述情况的椭圆型算子的离散模拟方法也已经投入使用，非定常非线性边值问题的数值方法却包括了抛物型方程和方程组的问题，双曲型、混合型和其他问题，而对于这些问题在单个时间层给出近似计算方法甚至更为重要一些．

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[2] Sewell, G., The numerical solution of ordinary and partial differential equations, Acad. Press, 1988.

[3] Bellman, R. and Kalaba, R., Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems, Amer. Elsevier, 1965.

[4] Березовский, А. А., Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики, 2 изд. ч. 1, К., 1976.

[5] Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения аллиптического типа, М., 1964（中译本：拉迪任斯卡娅，О. А.，乌拉利采娃，Н. Н.，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1985）.

[6] Lions, J.-L., Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites nonlineaires, Dunod, 1969.

[7] Glowinski, R., Lions, J.-L. and Trémolières, R., Numerical analysis of variational inequalities, North-Holand, 1981（译自法文）.

[8] Glowinski, R., Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer, 1984.

[9] Дьяконов, Е. Г., Разностные методы решения краевых задач. в. I – Стационарные задачи, М., 1971.

[10] Карчевский, М. М., Ляшко, А. Д., Разностные схемы для нелинейных задач математической физики, ч. 1, Казань, 1976.

[11] Varga, R., Functional analysis and approximation theory in numerical analysis, SIAM, 1971.

[12] Strang, G. and Fix, J., An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973（中译本：G. 斯特朗，J. 菲克斯，有限元法分析，科学出版社，1983）.

[13] Oden, J., Finite elements of non-linear continua, McGraw-Hill, 1972.

[14] Красносельский, М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

[15] Brezzi, F., Rappaz, T. and Raviart, P., Finite dimensional approximation of nonlinear problems Ⅲ, *Numer. Math.*, **38** (1981), 1 – 30.

[16] Амосов, А. А., Бахвалов, Н. С., Осипик, Ю. И., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, **20** (1980), 1, 104 – 111.

[17] Thomasset, F., Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer, 1981.

Е. Г. Дьяконов, А. Ф. Шапкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ascher, A. M., Mattheij, D. M. and Russell, R. D., Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice-Hall, 1988.

张宝琳、袁国兴 译

非线性联络（non-linear connection; нелинейная связность）

对于与某个 G 主丛相配的光滑纤维空间的范畴所定义的**微分几何结构**（differential-geometric structure），它决定了该范畴中的丛沿着底空间中每一条分段光滑曲线的纤维关于该非线性联络的同构（平行移动），且与 G 主丛的对应纤维的同构是相容的．在这里假定所谈论的结构与**线性联络**（linear connection）的经典概念是不一样的，它是用这样或那样的 G 不变**水平分布**（horizontal distribution）定义的．术语非线性联络的不同意义在于向量丛的纤维用水平分布定义的转移不再有线性特征，即不是这些纤维的线性同构．

引进和研究非线性联络的必要性是由于研究各种高阶微分几何结构（诸如**河口商次空间**（Kawaguchi space））的需要产生的．非线性联络一般理论的基础已有相当好的发展，某些特殊类型的应用已经作过研究（见[2]－[4]）．

设 $\pi: X(B,G) \to B$ 是光滑 G 主丛，以 G 为结构群，以 π 为到底 B 上的典型投影，令 $K(X)$ 是所有的与 X 相配的丛的范畴．$G_x=\pi^{-1}(x)$ 到 $G_y=\pi^{-1}(y)(x,y\in B)$ 上的丛同构定义为与 G 在 X 上的作用可交换的映射 $i: G_x \to G_y$．同构 i 能描述为 $i(\xi_0 g)=i(\xi_0)g, \xi_0\in X, g\in G$，因此是纤维 G_x 和 G_y 的可微同胚．在主丛 X 的所有可能的纤维之间的所有同构的集合 $\Gamma(X)$ 是底 $B\times B$ 上有结构广群的光滑丛（**广群**（groupoid）是有逆元素的范畴）．同构 $i\in\Gamma(X)$ 产生了任意的配丛 $Y\in K(X)$ 在 $x,y\in B$ 上的纤维的相应的同构，广群 $\Gamma(X)$ 用于整个范畴 $K(X)$．

设 $\Lambda(B)$ 是底流形 B 上所有分段光滑曲线的范畴. 光滑丛的范畴 $K(X)$ 中的联络(connection in the category)在最一般意义下是函子

$$\gamma:\Lambda(B) \to \Gamma(X),$$

它在底 $B\times B$ 上是恒同的. 设 $\alpha\times\beta:\Gamma(X)\to B\times B$ 是广群 $\Gamma(X)$ 到它的底空间 $B\times B$ 上的典型投影, 定义为: 若 $\Gamma(X)\ni i:G_x\to G_y$, 则 $\alpha(i)=x,\beta(i)=y$. 这样, B 等同于 $\Gamma(X)$ 的所有左单位元和右单位元的子流形 $\widetilde{B}\subset\Gamma(X)$. 设 $\Pi(X)$ 是 $B\equiv\widetilde{B}$ 上由形如 $T_e[\alpha^{-1}(e)](e\in\widetilde{B})$ 的纤维构成的向量丛, $T^p(B)$ 是 B 上 B 的 p 速度的纤维($T^p(B)$ 的元素是所有可能的光滑映射 $\mathbf{R}\to B$ 在源点 $0\in\mathbf{R}$ 的正则 p 射流). 从 $\Pi(X)$ 和 $T^p(B)$ 有到切丛 $T(B)$ 上的典型投影,

$$\pi':\Pi(X)\to T(B),\pi^p:T^p(B)\to T(B).$$

联络 γ 称为 $p(=1,2,\cdots)$ 阶非线性联络(non-linear connection), 如果 p 是函子 γ 所决定的映射

$$\gamma^p:T^p(B)\to\Pi(X)$$

使得 $\pi'\circ\gamma^p=\pi^p$ 成立的最小整数. 当 $p=1$ 时, 映射 $T(B)\to\Pi(X)$ 依纤维方式是线性的, 联络退化为 $K(X)$ 上的线性联络. 在研究非线性联络的性质以及它们的分类中, 映射 $\gamma^p:T^p(B)\to\Pi(X)$ 起着基本的作用. 它们能写成与描述丛 $T^p(B)$ 和 $\Pi(X)$ 的几何对象的相对坐标的微分有关的 Pfaff 方程的形式. 用结构方程的系数, 且借助于结构方程的微分延拓和限制的运算, 已经建立了如下结果([2]): $X(B,G)$ 中的非线性联络 γ^p 产生了底 $T^p(B)$ 上的光滑 G 丛 $X(B,G)\otimes_B T^p(B)$ 中一个特殊构造的线性联络, 且它由这个联络完全刻画了. 已经找到了这些线性联络的形式及它们的结构方程. 和乐群定理在非线性联络情形已经被发现了, 其叙述不仅涉及曲率, 而且与水平锥(在非线性情形用来替代线性联络的水平子空间)分布的线性凸包有关.

参考文献

[1] Вагнер, В. В., 《Тр. семинара по векторному и тензорному анализу》, 1950, 8, 11 - 72.

[2] Евтушик, Л. Е., 《Изв. ВУЗов. Математика》, 1969, 2, 32 - 44.

[3] Евтушик, Л. Е., 《Сиб. матем. ж.》, 14 (1973), 3, 536 - 548.

[4] Евтушик, Л. Е., Третьяков, В. Б., 《Тр. геометр. семинара》, 6 (1974), 243 - 255.

[5] Kawaguchi, A., On the theory of non-linear connections I. Introduction to the theory of general non-linear connections, *Tensor*, *New ser*., 2 (1952), 123 - 142.

Л. Е. Евтушик 撰 陈维桓 译

非线性微分方程[non-linear differential equation; нелинейное дифференциальное уравнение]

一种(常或偏)微分方程, 其中至少有一个未知函数的导数(包括零阶导数, 即函数本身)以非线性形式出现. 通常, 使用这个名称是为了特别强调所考虑的方程 $H=0$ 是非线性的, 即它的左端 H 不是未知函数的导数的、具有仅依赖于自变量的系数的**线性型**(linear form).

有时, 非线性微分方程指的是更一般形式的方程. 例如, 一阶非线性常微分方程是方程

$$f\left[x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right]=0,$$

其中 $f(x,y,u)$ 是任意函数; 这里, 一阶线性常微分方程对应于特殊情况

$$f(x,y,u)=a(x)u+b(x)y+c(x).$$

对于含 n 个自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的未知函数 z 的一阶非线性偏微分方程具有形式

$$F\left[x_1,\cdots,x_n,z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right]=0,$$

其中 F 是其变元的未知函数; 当

$$F=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\cdots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_i}+B(x_1,\cdots,x_n,z)$$

时, 这样的方程称为拟线性的(quasi-linear); 当

$$F=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i}+$$

$$+B(x_1,\cdots,x_n)z+C(x_1,\cdots,x_n)$$

时, 它称为线性的(linear)(亦见**线性偏微分方程**(linear partial differential equation); **非线性偏微分方程**(non-linear partial differential equation)).

Н. Х. Розов 撰 张鸿林 译

非线性方程, 数值方法[non-linear equation, numerical methods; нелинейное уравнение, численные методы решения]

解非线性方程的迭代法.

非线性方程意指(见[1]-[3])形如

$$\varphi(x)=0 \tag{1}$$

的代数方程或超越方程, 其中 x 是实变量, $\varphi(x)$ 是非线性函数, 非线性方程组意指形如

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x_1,\cdots,x_N)=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \varphi_N(x_1,\cdots,x_N)=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的方程组，其中 $\varphi_i\ (i=1, \cdots, N)$ 是非线性函数；(2) 的解是 N 维向量 $x=(x_1, \cdots, x_N)$. 方程 (1) 和方程组 (2) 可以看作非线性算子方程

$$L(u)=f, \tag{3}$$

其中 L 是有限维向量子空间 H_N 到 H_N 的非线性算子.

如果非线性方程 (3) 的解是用下述方法确定的，即用已知的第 n 次迭代的近似解 u^n 求出新的迭代近似解 u^{n+1}，并经过足够多的迭代次数后，使 (3) 的解满足所规定的精度 ε，则称求解非线性方程 (3) 的数值方法为迭代法. 本文所要研究的是求 (3) 的近似解的一般形式与特殊形式的最重要的迭代法，它们具有解强椭圆型偏微分方程和方程组边值问题的离散（网格）法的特性. 在无穷维空间讨论有关的非线性算子方程（例如见 [4]－[8]）是一个非常宽广的数学概念，它包含了特殊情况，例如，非线性积分方程和非线性边值问题. 求它们近似解的数值方法也包括用有限维方程来近似它们的方法；这些方法是分别地给以论述的.

解方程 (3) 的一种最重要的方法是简单迭代法 (simple iteration method)（逐次代换法 (successive substitution)），它假定可以用等价方程组

$$u=P(u) \tag{4}$$

代替 (3)，其中 $u=(u_1, \cdots, u_N)$ 是有限维赋范空间 H_N 的一个元素，而 P 是从 H_N 映射到 H_N 的压缩算子：

$$\exists q<1\ \forall\ u, v\ \|P(u)-P(v)\| \leqslant q\|u-v\|. \tag{5}$$

那么由**压缩映射原理** (contracting-mapping principle)（见 [1]－[4]）方程 (1) 有唯一解，对任何初始近似值 u^0，简单迭代法

$$u^{n+1}=P(u^n),\ n=0, 1, \cdots, \tag{6}$$

均收敛，而且第 n 次迭代误差 z^n 满足估计式

$$\|z^n\| \leqslant q^n(1-q)^{-1}\|u^0-u^1\|.$$

假定 (3) 的某个解 $\bar{u}$ 有一包围球 $S(\bar{u}, R) \equiv \{v: \|v-\bar{u}\| \leqslant R\}$，使得方程组 (3) 和附加条件

$$u \in S(\bar{u}, R) \tag{7}$$

与 (4) 和 (7) 等价，而且对 $u=\bar{u}$ 和满足 $\|z\| \leqslant R$ 的任意 $v=\bar{u}+z$, (5) 成立. 这时在方法 (6) 中，对从 $S(\bar{u}, R)$ 选定的一个初始近似值 u^0, u^n 收敛于 $\bar{u}$，且其误差估计为 $\|z^n\| \leqslant q^n R$.

对两次连续可微函数 φ_i，如果对方程组 (2) 的解有一个好的初始近似，那么通常改进精度的有效方法是 Newton-Канторович 法 (Newton-Kantorovich method)，在这个方法中，(2) 中确定某个曲面 P_i 的方程 $\varphi_i(x_1, \cdots, x_N)=0$，由在点 x^n 处 P_i 的切曲面方程代替，其中 x^n 是前面得到的 (2) 的解的近似（见 [1]－[5]）. 在某些附加条件下，Newton-Канторович 法有形如

$$\|z^n\| \leqslant c_1(c\|z^0\|)^{2^n}$$

的误差估计，其中 c_1 和 c 是一些确定常数. 该方法的每次迭代，必须解一个其矩阵为

$$A^{(n)} \equiv \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{x=x^n}$$

的线性代数方程组. 有时，对若干次迭代让这个矩阵保持不变，有时可用差分近似代替导数 $\partial\varphi_i/\partial x_j$.

Newton-Канторович 法属于 (3) 的一组**线性化方法** (linearization methods)，而这组中的另一个方法是**割线法** (secant method).

许多迭代法（所谓下降法 (descent methods)）（见 [1]－[3], [9], [10]－[13]）都是基于使某个泛函 $I(u)$ 降至最小值来代替解方程 (3)（亦见**下降法** (descent, method of)). 例如，对 $I(u)$，可以取

$$I(u) \equiv \|L(u)-f\|^2. \tag{8}$$

在许多情况，即对于使某个泛函 $I(u)$ 最小化的问题，其初始非线性方程是 Euler 方程时，那么该问题的变分公式甚至是更自然的；在类似情况算子 L 是泛函 $I(u)$ 的梯度，而且称它为位势算子 (potential operators)（见 [5]－[6]）. 在下降法的若干种变型中，可以提到坐标下降法，几种梯度法，特别是最速下降法，共轭梯度法，以及其他等等，而且还有它们的变型（见 [2], [9], [10]－[13]）. 求解描述某种定态方程 (3) 的许多迭代法可以看作对应的非定态问题的离散化. 所以称这类方法为稳定法（见**调节法** (adjustment method) 和，例如，[2]）. 用一个常微分方程组

$$A_1\frac{d^2u}{dt^2}+A_2\frac{du}{dt}+L(u)-f=0$$

描述的问题是这种非定态问题的例子. 引入另一个自变量是对一个参数的微分方法 (method of differentiation with respect to a parameter) 的特点（一种连续方法 (continuation method)，见 [5], [13]）. 它的实质在于引入一个辅助参数 $\lambda \in [0, 1]$，选择连续可微函数 $F_i(x, \lambda)$ 和用方程组

$$F_i(x, \lambda)=0,\ i=1, \cdots, N,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{9}$$

代替 (2)；当 $\lambda=0$ 时，方程组 (9) 必定容易求

解，而且函数 $F_i(x,1)$ 一定与 $\varphi_i(x)$ $(i=1,\cdots,N)$ 一致．一般地说，方程组 (9) 确定了

$$x(\lambda)\equiv(x_1(\lambda),\cdots,x_N(\lambda))$$

为 λ 的函数，而且要求的 (2) 的解为 $x(1)$．如果 (9) 对 λ 可微，则得到一个常微分方程组

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{d\lambda}+\frac{\partial F_i}{\partial\lambda}=0,\ i=1,\cdots,N. \tag{10}$$

如果在 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上解该方程组的 Cauchy 问题，其初始条件为方程组

$$F_i(x,0)=0,\ i=1,\cdots,N$$

的解，则可以得到 (2) 的解．(10) 对 λ 的离散化得到解方程组 (2) 的一个数值方法．

在对参数的连续方法 (method of continuation with respect to a parameter) 中 (见**连续方法 (对非线性算子的)** (continuation method (for nonlinear operators)))．对 $\lambda=\tau,\cdots,m\tau,m\tau=1$，解方程组 (9)，而对其中的每个 λ，则应用某个迭代法，其初值就是解前面 λ 值的方程组时得到的近似值．这两种方法实质上是为了求解 (2) 在给出好的初始近似条件下的一种特殊的迭代法．

在方程组的情况下，将解局部化的问题会引起很大困难．由于大多数迭代法只有在对解有相当好的近似的时候才收敛，上面叙述的两种方法可能不需要直接将解局部化．对局部化也常常应用基于拓扑原理和算子单调性的定理 (见 [4]－[8])．

为了求解 (3) 的最简单的特殊情况方程 (1)，在实际中可用的已知迭代法数量不少 (例如见 [1]－[3], [12], [14])．除了已经考虑过的方法外，可以提到，例如高阶迭代法 (iteration methods of higher order) (见 [1], [14])，其中包括其特殊情况的 Newton 方法，和特别适合于找如下多项式的实根或复根而形成的许多迭代法

$$p_n(z)\equiv a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0,$$

其中 a_i 是实数或复数 (见 [1], [2])．

将 (1) 的解局部化的问题归结为找一个区间，在这个区间的端点，连续函数 φ 异号．当 φ 是一个多项式时，工作几乎没有什么困难，因为理论界是已知的 (见 [1])，而且有多种方法可用来找出多项式的所有根，在没有给出根的好的初始近似时，就可使求出的根满足要求的精度 (见 [12])．

在偏微分方程非线性边值问题的网格－模拟中提出的求解方程 (3) 的迭代法是求解格点方程组方法的特殊情况 (例如见 [13], [15]－[19])．也许求解 (3) 最有用的方法之一是简单迭代的修正法，它可以写成以下形式

$$Bu^{n+1}=Bu^n-\gamma(L(u^n)-f), \tag{11}$$

这里把 (3) 看作 N 维空间 $H_N=H$ 中的算子方程，而 $B\in S$，其中 S 为 H 到 H 映象的对称正线性算子集．为方便起见，这些方法的研究不应在空间 H 中，而应当在空间 H_B 中，该空间有内积

$$(u,v)_{H_B}\equiv(Bu,v),\ \|u\|^2\equiv(Bu,u),$$

其中 (u,v) 是空间 H 中的内积．

如果算子 L 满足严格单调条件，而且 Lipschitz 连续：

$$\forall\ u,v\ (L(u)-L(v),u-v)\geqslant\delta_0\|u-v\|_B^2,\quad \delta_0>0, \tag{12}$$

$$\forall\ u,v\ \|L(u)-L(v)\|_{B^{-1}}^2\leqslant\delta_2\|u-v\|_B^2, \tag{13}$$

则 (3) 有唯一解，而且对一个适当挑选的 γ，对任意的 u_0，方法 (11) 收敛，且有误差估计

$$\|z^n\|_B\leqslant q^n\|z^0\|_B, \tag{14}$$

其中 $q\equiv q(\delta_0,\delta_2,\gamma)<1$ (见 [13], [15])．

在这个定理的最一般形式中，只要对球 $S_B(u,R)\equiv\{v:\|v-u\|\leqslant R\}$ 中的解 u 和所有 v, (12) 和 (13) 成立，而且 u^0 亦在此球中就足够了．在这种情况，常数 δ_0 和 δ_2 可以与 R 有关．为了证明这些条件，例如用先验估计使 u 局部化，得到 $\|u\|_B\leqslant R_0$，然后取 $S_B(u,R)\equiv S_B(u,R_1-R_0)$，使得对 $S_B(0,R_1)$ 中的任意 u 和 v，其中 $R_1>R_0$, (12) 和 (13) 成立就足够了．如果 L 可微而且它的导数为 L'_v，把它的对称部分之和记为 $L'_{v,\mathrm{sym}}$，斜对称部分之和记为 $L'_{v,\mathrm{skew}}$，且不等式

$$\forall\ v\in S_B(u,R),\ \sigma_0B\leqslant L'_{v,\mathrm{sym}}\leqslant\sigma_1B,\ \sigma_0>0;$$

$$\forall\ w\ \|L'_{v,\mathrm{skew}}w\|_{B^{-1}}^2\leqslant\sigma_2\|w\|_B^2$$

已知，则可以确定 (14) 中的常数 q．这时 $q\equiv q(\gamma,\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2)$ (见 [11], [13], [15])．有时在讨论某些非线性类型时，用下面的不等式

$$(L(u)-L(v),B(u-v))\geqslant\bar{\delta}_0\|B(u-v)\|^2,\quad \bar{\delta}_0>0;$$

$$\|L(u)-L(v)\|^2\leqslant\bar{\delta}_2\|B(u-v)\|^2$$

代替 (12) 和 (13) 是合理的 (见 [13])．对 (11) 中的算子 B，例如可以应用分裂差分算子 (交替方向法) 或因子分解差分算子 (交替三角法，不完全矩阵因子分解法)，等等．从渐近观点看最有吸引力的是用算子 B，使得常数 δ_i 或 $\bar{\delta}_i$ 与空间 H_N 的维数无

关(见[13])，而且算子 B 足够地简单．由此，在许多情况，人们成功地构造迭代法，使之可能找出具有精度 ε 的(3)的解，如果对一个给定的 u^n，计算 $L(u^n)$ 的工作量可以用 $O(N)$ 估计，则对 $\varepsilon \approx N^{-\alpha}$，$\alpha>0$，需要花费总共 $O(N\log N|\log\varepsilon|)$(或者甚至 $O(N\log N)$)个算术运算(见[13])．为了证明(12)和(13)这种条件，在许多情况，使用 Sobolev 嵌入定理的网格(差分)形式是非常有效的(见[13])．考虑非线性的特殊性质是重要的．例如，当 $L(u)=\Lambda u+Pu$ 时，其中 Λ 是一个正线性算子，而 P 是一个二次非线性算子，且有"斜对称"性质(即对一切 u 有 $(Pu,u)=0$)，人们常常成功地得到任意球 $S_B(0,R)$ 中的常数 $\delta_2(R)$ 和只与 $\|u\|_B$ 有关的 δ_0；这时对任意的 u^0，(11)收敛(见[13])．在许多情况下，人们可以用要求的条件在全空间上成立的等价问题来代替以先验估计为基础的原问题．

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., М., 1966(英译本：Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975(英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[3] Ortega, J. and Rheinboldt, W., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad. Press, 1970(中译本：J. M. 奥特加，W. C. 莱因博尔特，多元非线性方程组迭代解法，科学出版社，1983).

[4] Красносельский, М. А. [и др]., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969(英译本：Krasnosel'skiǐ, M. A., et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972).

[5] Михлин, С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966(英译本：Mikhlin, S. G., The numerical performance of variational methods, Wolters-Noordhoff, 1971).

[6] Вайнберг, М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., 1972(英译本：Vaǐnberg, M. M., Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973).

[7] Gajewski, H., Gröger, K. and Zacharias, K., Nichtlineare operatorengleichungen und operatoren differentialglei-Chungen, Akad Verlag, 1974.

[8] Lions, J.-L., Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites nonlineaires, Dunod, 1969.

[9] Васильев, Ф. П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М., 1974.

[10] Пшеничный, Б. Н., Данилин, Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975(英译本：Pshenichnyǐ, B. N. and Danilin, Yu. M., Numerical methods in extremal problems, Mir, 1978).

[11] Glowinski, R., Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer, 1984.

[12] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры. теория и алгорифмы, М., 1966.

[13] D'yakonov, E. G., Minimization of computational work. Asymptotically-optimal algorithms, Moscow, 1989(俄文).

[14] Traub, J. F., Iterative methods for the solution of equations, Prentice-Hall, 1964.

[15] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978(英译本：Samarskiǐ, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1-2, Birkhäuser, 1989).

[16] Glowinski, R., Lions, J.-L. and Tremolieres, R., Numerical analysis of variational inequalities, North-Holland, 1981(译自法文).

[17] Hackbusch, W., Multigrid solution of continuation problems, in R. Ansorge, Th. Meis and W. Törnig (eds.): Iterative solution of nonlinear systems of equations, Lecture notes in math., Vol. 953, Springer, 1982, 20-44.

[18] Thomasset, F., Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer, 1981.

[19] Hackbusch, W. and Trottenberg, V. (eds.), Multigrid methods. Proc. Köln-Porz, 1981, Lecture notes in math., 960, Springer, 1982.

Е. Г. Дьяконов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Daniel, J. W., The approximate minimization of functionals, Prentice-Hall, 1971.

袁国兴、张宝琳 译

非线性泛函 [non-linear functional; нелинейный функционал]

定义在一个实(或复)向量空间 X 上的**非线性算子**(non-linear operator)的一个特殊情况，并且它的值是实(或复)数．非线性泛函的例子是变分学中的泛函

$$f(x)=\int_a^b F(t,x(t),x'(t))\,dt,$$

或者由条件

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x)\leqslant \lambda f(y)+(1-\lambda)f(x)$$

定义的凸泛函，其中 $x,y\in X$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，以及，比如说，$f(x)=\|x\|$——一个赋范空间中元素的范数．

В. И. Соболев 撰

【补注】 亦见**非线性泛函分析**(non-linear functional analysis)．

鲁世杰 译 葛显良 校

非线性泛函分析 [**non-linear functional analysis**; **нелинейный функциональный анализ**]

泛函分析 (functional analysis) 的一个分支，研究无穷维向量空间之间的非线性映射（算子，见**非线性算子** (non-linear operator)）和某些非线性空间类及其映射，非线性泛函分析的基本部分如下：

1) Banach 空间、拓扑向量空间和某些更一般空间之间的非线性映射的微分学，包括关于可微映射局部反演的定理和隐函数定理.

2) 寻求从一个特定的无穷维空间到另一个空间的非线性算子的作用条件，如连续性、紧性的条件.

3) 对各种不同类非线性算子（收缩的（contractive）、紧的、压缩的（compressing）、单调的以及其他）的不动点原理；这些原理在各种非线性方程解的存在性证明中的应用.

4) 研究赋予序向量空间结构的空间中的非线性算子，如单调的、凹的、凸的、有单调弱函数的以及其他的算子.

5) 无穷维向量空间中非线性算子的谱性质的研究（分歧点、本征向量的连续分支等等）.

6) 非线性算子方程的逼近解.

7) 局部线性的空间和 Banach 流形的研究——整体分析 (global analysis).

8) 非线性泛函极值的研究和研究非线性算子的变分方法.

参考文献

[1] Вайнберг, М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972 (英译本: Vaĭberg, M. M., Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973).

[2] Gajewsky, H., Gröger, K. and Zacharias, K., Nichtlineare Operatorgeleichungen und Operator differentialgleichungen, Akad. Verlag, 1974.

[3] Иллс Дж., 《Успехи матем. наук》, 24 (1969), 3, 157 – 210.

[4] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962 (英译本: Krasnosel, skiĭ, M. A., Positive solutions of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1964).

[5] Красносельский, М. А., Забрейко, П. П., Геометрические мотоды нелинейного анализа, М., 1975 (英译本: Krasnosel,skiĭ, M. A. and Zabreĭko, P. P., Geometric methods of non-linear analysis, Springer, 1983).

[6] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

[7] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 第二版, 科学出版社, 1985).

[8] Nirenberg, L., Topics on nonlinear functional analysis, New York Univ., 1974.

[9] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: E. 希尔, R. 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964).

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schwartz, J. T., Nonlinear functional analysis, Gordon & Breach, 1969.

[A2] Zeidler, E., Nonlinear functional analysis and its applications, 1-3, Springer, 1986 (译自德文).

[A3] Berger, M. S., Nonlinearity and functional analysis, Acad. Press, 1977 (中译本: M. S. 博格, 非线性与泛函分析, 科学出版社, 1989).

葛显良 译　鲁世杰 校

非线性积分方程 [**non-linear integral equation**; **нелинейное интегральное уравнение**]

非线性地包含未知函数的**积分方程** (integral equation). 下面引述在各种应用问题的研究中经常遇到的非线性积分方程的基本类，它们的理论在一定程度上已有相当好的发展.

一个重要的例子是 **Урысон 方程** (Urysohn equation)

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\Omega}K[x, s, \varphi(s)]ds, \ x\in\Omega, \qquad (1)$$

这里 Ω 是一个有限维 Euclid 空间中的闭有界集，$K[x, s, t]$ 是一个给定的函数，称为核，它是对 x, $s\in\Omega$, $-\infty<t<\infty$ 定义的，λ 是数值参数，而 φ 是未知函数.

П. С. Урысон（见 [2]）在一定的假设下对允许有正本征函数的方程 (1) 的本征值的谱作了彻底的研究. 他证明正本征函数 $\varphi(x, \lambda)$ 对应的值 λ 仅在一定的区间 (α, β) 内，且 $\varphi(x, \lambda)$ 是 λ 的单调增函数，并有 $\varphi(x, \alpha)=0$ 和 $\varphi(x, \beta)=\infty$.

Урысон 方程的一个特殊情况是 **Hammerstein 方程** (Hammerstein equation)

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\Omega}K(x, s)f[s, \varphi(s)]ds, \ x\in\Omega, \quad (2)$$

这里 $K(x, s)$ 和 $f(s, t)$ 是已知函数. 存在性和唯一性定理首先由 A. Hammerstein 建立（见 [9]）. 他在这样的假设下研究了方程 (2)，实值函数 $f(s, t)$ 关于它的自变量是联合连续的，且由核 K 生成的线性积分算子是 $L_2(\Omega)$ 中自伴的，正的，而作为从 $L_2(\Omega)$ 到连续函数空间中的映射是紧的.

非线性积分方程的另一例子是 **Ляпунов-Schmidt**

方程 (Lyapunov-Schmidt equation)

$$\sum_{\alpha,\beta}\int_\Omega\cdots\int_\Omega K_{\alpha,\beta}(x,s_1,\cdots,s_l)\times$$

$$\times\varphi^{\alpha_0}(x)\varphi^{\alpha_1}(s_1)\cdots\varphi^{\alpha_l}(s_l)\times \tag{3}$$

$$\times v^{\beta_0}(x)v^{\beta_1}(s_1)\cdots v^{\beta_l}(s_l)ds_1\cdots ds_l=0,\ x\in\Omega,$$

其中 $K_{\alpha,\beta}$ 和 v 是给定的函数，φ 是未知函数，i 是固定的，求和是对所有的带非负整数分量的向量 $\alpha=(\alpha_0,\cdots,\alpha_l)$ 和 $\beta=(\beta_0,\cdots,\beta_l)$. (3) 的左边称为两个函数自变量 v 和 φ 的**积分幂级数** (integral power series).

型 (3) 的方程首先由 А. М. Ляпунов 考虑 (见 [1])，尔后，更一般的形式由 E. Schmidt 考虑 (见 [8])．在他们的研究中，奠定了非线性积分方程分歧理论的基础，其目标在于解决下面的问题．设寻找依赖于一定的参数的非线性问题的一个解且对它们的某些值解可以分歧．这里产生了求解本身和求使它分歧 (分支) 的那些参数值、分支的数目、以及每个分支作为参数的函数的表示等工作 (见 [6]).

非线性积分方程理论是非线性算子方程一般理论的一部分，即积分方程能看成相应的算子方程的特殊实例．为此目的必须阐明在方程中出现的具体的积分算子的一般性质 (连续性，紧性等等)．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., 《Записки Академии Наук》, СПБ, 1906, 1 - 225.

[2] Урысон, П. С., 《Матем. сб.》, **31** (1923), 236 - 255.

[3] Вайнберг, М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956 (英译本: Vaĭnberg, M. M., Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, 1964).

[4] Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A., Topological methods in the theory of non-linear integral equations, Pergamon, 1964).

[5] Красносельский, М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A., et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff, 1976).

[6] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本: Vaĭnberg, M. M. and Trenogin, V. A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noodhoff, 1974).

[7] Вайнберг, М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972 (英译本: Vaĭnberg, M. M., Variational methods and methods of nonlinear operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973).

[8] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen Ⅲ, *Math. Ann.*, **65** (1908), 370 - 399.

[9] Hammerstein, A., Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, *Acta Math.*, **54** (1930), 117 - 176.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zabreyko, P. P. [P. P. Zabreĭko], et al., Integral equations——a reference text, Noordhoff, 1975 (译自

葛显良 译 鲁世杰 校

非线性算子 [**non-linear operator; нелинейный оператор**]

一个空间(通常是向量空间) X 到同一标量域上的向量空间 Y 中不具有线性性质的映射，即一般来说，使得

$$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\neq\alpha_1Ax_1+\alpha_2Ax_2.$$

如果 Y 是实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$，那么一个非线性算子称为一个**非线性泛函** (non-linear functional)．非线性算子(非线性泛函)最简单的例子是除了线性函数外的实变元的实值函数．非线性算子起因的一个重要来源是数学物理中的问题．如果在一个过程的局部数学描述中不仅一阶的微小量而且高阶的微小量也加以考虑，那么就产生带非线性算子的方程．数理经济、自动调节、控制论，等等中的一定的问题也导致非线性算子方程．

非线性算子的例子．

$$1)\ Ax=\int_a^b K(t,s,x(s))ds,$$

其中 $K(t,s,u)$，$a\leqslant t,s\leqslant b$，$-\infty<u<\infty$ 是一个函数，使得对任意的 $x(s)\in C(a,b)$，$g(t)=\int_a^b K(t,s,x(s))ds$ 在 $[a,b]$ 上是连续的 (例如，$K(t,s,u)$ 在 $a\leqslant t$，$s\leqslant b$，$-\infty<u<\infty$ 是连续的)．如果 $K(t,s,u)$ 关于 u 是非线性的，那么 A 是一个映 $C[a,b]$ 到其自身的非线性 Урысон 算子 (Urysohn operator)．在关于 $K(t,s,u)$ 的其他限制下，Урысон 算子作用在其他空间上，例如，$L_2[a,b]$ 或者映一个 Orlicz 空间 $L_{M_1}[a,b]$ 到另一个 $L_{M_2}[a,b]$ 中．

$$2)\ Bx=\int_a^b K(t,s)g(s,x(s))ds,$$

其中 $g(t,u)$ 关于 u 是非线性的，并且对 $a\leqslant t\leqslant b$，$-\infty<u<\infty$ 有定义．在关于 $g(t,u)$ 的适当限制下，

算子B从一个函数空间作用到另一个中，并且称为一个非线性 Hammerstein 算子(Hammerstein operator)．

3) $F(x)=f(t,x(t))$

是一个叠加算子(superposition operator)，也称为Heмыцкий算子(Nemytskiĭ operator)，并且在关于这个函数第二个变元的非线性的适当限制下，它把可测函数$x(t)$的空间变换到它自身．

4) $D(x)=\sum_{|k|\leqslant m}D^k(a_k(t,x,Dx,\cdots,D^kx))$

在关于非线性函数$a_k(t,u_0,\cdots,u_m)$适当的限制下是作用在Соболев空间$W_p^{2m}(G)$上发散型$2m$阶非线性微分算子．这里k是多重指标$(k_1,\cdots,k_n)$，$|k|=k_1+\cdots+k_n$，$D^k=\partial^{|k|}/\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}$，并且$G$是$\mathbf{R}^n$中的一个有界域．

5) $J(x)=\int_a^b K(t,s,x(s),x'(s))ds$

是一个在函数$K(t,s,u_0,u_1)$的适当限制下作用在连续可微函数空间$C^1[a,b]$上的非线性积分微分算子(integro-differential operator)．

一个实变元的实值函数的数学分析中的许多概念和运算，可以转移到从一个拓扑向量空间作用到另一个Y中的非线性算子上．这样，一个非线性算子$A:M\to Y$，$M\subset X$，称为有界的(bounded)，如果$A(B\cap M)$对任何有界集$B\subset X$在Y中是有界的；一个非线性算子A在一个点$x\in M$是连续的(continuous)，如果点Ax的一个邻域U_{Ax}的原象$A^{-1}(U_{Ax})$对x的某个邻域U_x包含$M\cap U_x$．犹如函数，一个在紧集M上的每一点都连续的非线性算子在这个集合上有界．不同于线性算子，如果作用在赋范空间上的一个非线性算子A在某个球上有界，不必有A在这个球上连续．然而，在一定的情形下，非线性算子在一个球上的连续性(有界性)蕴涵这个算子在它的整个定义域上的连续性(有界性)．

在从X作用到Y的非线性算子中可以区分出某些重要的类．

1) 半线性算子(semi-linear operators)$A:X\times\cdots\times X\to Y$，对每一个变元是线性的．所有$n$线性算子的空间$L_n(X,Y)=(I)$同构于空间$L\{X[\cdots L(X,Y),\cdots]\}=(II)$，其中$L(X,Y)$是从$X$到$Y$的所有线性算子的空间．如果$X$和$Y$是赋范空间、那么$(I)$和$(II)$是等距的．如果$A$关于所有的变元对称，那么$\widetilde{A}(x,\cdots,x)$记为$\widetilde{A}x^n$，并且称为$n$次齐次算子(homogeneous operator)．

2) 在赋予一个偏序的空间中，由条件$x\leqslant y\Rightarrow Ax\leqslant Ay$和$x\leqslant y\Rightarrow\widetilde{A}x\geqslant\widetilde{A}y$刻画的保序算子(isotone operators)A和反序算子(antitone operators)$\widetilde{A}$．

3) 在 Hilbert 空间H、由条件$\langle Mx-My,x-y\rangle\geqslant 0$对任意的$x,y\in H$定义的单调算子(monotone operator)M．

4) 把定义域中的有界子集变为准紧集的紧算子(compact operators)；其中同时是紧和连续的完全连续算子(completely-continuous operators)．

对非线性算子微分和导数的概念是非平凡的和有用的．从赋范向量空间X的一个开集G作用到赋范向量空间Y中的一个算子A，称为在点$x\in G$是 Fréchet 可微的(Fréchet differentiable)，如果存在一个连续线性算子$A'(x):X\to Y$，使得对$x+h\in G$的任意的$h\in X$有

$$A(x+h)-A(x)=A'(x)h+\omega,$$

其中$\omega/\|h\|\to 0$，当$h\to 0$．在这种情形下，增量$A(x+h)-A(x)$关于h的线性部分$A'(x)h$称为A在x的 Fréchet 微分(Fréchet differential)，并且用$dA(x,h)$表示，$\omega=\omega(A,x,h)$称为增量的剩余(remainder of the increment)．有界线性算子$A'(x)$称为A在x的 Fréchet 导数(Fréchet derivative)．除了 Fréchet 可微性以外还引入 Gâteaux 可微性．亦即算子A称为在点x Gâteaux 可微(Gâteaux differentiable)，如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x+th)-A(x)}{t}=DA(x,h)$$

存在，称为A在x的 Gâteaux 微分(Gâteaux differential)．Gâteaux 微分关于h是齐次的，亦即$DA(x,\lambda h)=\lambda DA(x,h)$．如果$DA(x,h)$关于$h$是线性的，并且$DA(x,h)=A_0'(x)h$，那么线性算子$A_0'(x)$称为$A$的 Gâteaux 导数(Gâteaux derivative)．Fréchet 可微性蕴涵 Gâteaux 可微性，并且还有$A_0'(x)=A'(x)$．Gâteaux 可微性一般不蕴涵 Fréchet 可微性，但是如果$DA(x,h)$在x的一个邻域中存在，关于h连续，并且关于x一致连续，那么A在x是 Fréchet 可微的．对非线性泛函$f:G\to\mathbf{R}$ Fréchet 和 Gâteaux 微分和导数类似地定义．这里 Gâteaux 导数f_0'称为泛函f的梯度(gradient of the functional f)，并且是一个从G到X^*的算子．如果$Ax=\operatorname{grad}f(x)$对某个非线性泛函$f$，那么$A$称为位势算子(potential operator)．

对作用在 Hausdorff 拓扑向量空间上的算子可以用这种或那种方法定义微分．设$\mathfrak{M}$是拓扑向量空间X中有界集的一个集合．映射$\omega:G\times X\to Y$称为$\mathfrak{M}$小的($\mathfrak{M}$-small)，如果对任何$M\in\mathfrak{M}$有$\omega(x,th)/t\to 0$，当$t\to 0$时对$h\in\mathfrak{M}$一致成立．映射$A:G\to Y$(其中$G\subset X$是开的)称为在$x\in G$是$\mathfrak{M}$可微的($\mathfrak{M}$-differentiable)，如果

$$A(x+h)-Ax=A'(x)h+\omega(A,x,h),$$

其中 ω 是一个 $\mathfrak{M}$ 小映射．最经常地 $\mathfrak{M}$ 取为 X 的所有有界，所有紧或所有有限集的集合．对赋范空间上的非线性算子第一个情形导致 Fréchet 可微性，第三个导致 Gâteaux 可微性．

算子 A 的高阶导数 $A^{(n)}(x)$ 和 $A_0^{(n)}(x)$ 按通常的方法定义为导数的导数．他们是对称多重线性映射．于是一个 n 阶微分是一个 n 次齐次形式 $A^{(n)}(x)h^n$．高阶导数的其他定义是可能的．假设，例如，X 和 Y 是赋范向量空间，$G\subset X$ 是开的，并且 $x\in G$．如果对任何使 $x+h\in G$ 的 h，

$$A(x+h)-A(x)=a_0(x)+a_1(x)h+\cdots+a_n(x)h^n+\omega, \quad (*)$$

其中 $\omega=o(\|h\|^n)$，那么多重线性形式 $k!a_k(x)$ 称为 k 阶导数 (derivative of order k)．表达式 (*) 称为差分 $A(x+h)-A(x)$ 的 n 阶有界展开 (bounded expansion)．在适当的限制下，高阶导数的各种定义是等价的．

如果在 X 中给出一个标量可数可加测度，那么一个非线性算子可以在 **Bochner 积分** (Bochner integral) 的意义下求积分 $\int A(x)dx$．

对于非线性算子 $A:M\to Y$，如同线性算子的情形，参数 λ 使 $(I-\lambda A)^{-1}$ 存在且在 $A(M)$ 上连续的值自然称为正则的 (regular)，剩下的点 λ 属于谱 (spectrum)．在它的性质方面非线性算子的谱可以和线性算子的谱有很大的不同．这样，一个完全连续非线性算子的谱可以有连续部分；算子 A 的一个本征元 (eigen element) x_0，亦即一个元素 x_0 使得 $x_0=\lambda Ax_0$，可以分叉 (bifurcate) 成若干个本征元分支（当 λ 变化时），见**分歧** (bifurcation)．

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В.И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 列斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 科学出版社, 1985).

[2] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本: Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析, 高等教育出版社, 1982).

[3] Вайнберг, М.М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956 (英译本: Vaĭnberg, M. M., Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, 1964).

[4] Красносельский, М. А., Забрейко, П.П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A. and Zabreiko, P.P., Geometric methods of non-linear analysis, Springer, 1983).

[5] Gajewski, H., Gröger, K. and Zacharias, K., Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen, Akad. Verlag, 1974).

В. И. Соболев 撰　鲁世杰 译　葛显良 校

非线性振动 [**non-linear oscillations**; **нелинейные колебания**]

由非线性常微分方程组

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)x+\mu\mathbf{X}(t,x,\mu)+\mathbf{f}(t) \qquad (1)$$

描述的物理系统的振动，这里 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$，$\mathbf{X}$ 的项中包含向量 $\mathbf{x}$ 的至少为二次的分量，$\mathbf{f}$ 是时间 t 的向量函数，$\mu>0$ 为 (1) 的小参数（或 $\mu=1$ 及 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t,\mathbf{x})$）．一些可能的推广关系到讨论不连续系统，具有不连续特征的作用（例如，滞后类型），延迟和随机作用，积分微分方程和微分算子方程，由偏微分方程描述的具有分布参数的振动系统，还关系到非线性振动系统最优控制方法的应用．基本的非线性振动的一般问题是：寻找平衡点位置及平稳状态（尤其是对周期运动，自振动），研究其稳定性，以及非线性振动的同步和镇定的问题．

严格说来，所有的物理系统都是非线性的．非线性振动的一个最特殊的性质是违反振动的叠加原理：瞬间存在的每个作用其结果都会随着这个瞬间作用的消失而改变．

拟线性系统 (quasi-linear system) 是指系统 (1) 中 $\mu>0$ 的情况．其基本研究方法是**小参数法** (small parameter, method of the)．首先，可以用 Poincaré-Lindstedt 法 (Poincaré-Lindstedt method) 来确定拟线性系统关于参数在其值充分小时解析的周期解，它们或者表成 μ 的幂级数形式（见 [1]，第 IX 章），或者表成 μ 与加在 $\mathbf{x}$ 分量的初始值上的 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的幂级数形式（见 [1]，第 III 章）．这种方法的进一步发展，例如，见 [2] - [4]．

另一种小参数法是**平均化** (averaging) 法．在研究拟线性系统的同时，出现了一些新的方法：渐近法（见 [5]，[6]），V 函数法（见 [7]），后者是以 А. М. Ляпунов 和 Н. Г. Четаев 等人的基本结论为基础的．

本质非线性系统 (essentially non-linear system)，指前面提到的不存在小参数的系统（(1) 中 $\mu=1$ 且 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t,x)$）．对 Ляпунов 系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{X}(\mathbf{x}), \qquad (2)$$

这里

$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{J}_2+\mathbf{P}_1,\ \mathbf{J}_2=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{Vmatrix},$$

并且在 $k\times k$ 矩阵 $\mathbf{P}$ 的本征值中无重根 $\pm\lambda i$，$\mathbf{X}(x)$ 是 $\mathbf{x}$ 的解析向量函数，其展式首项至少为二阶，且具有特殊形式的解析首次积分．Ляпунов（见 [8]，第 42 节）提出了寻找任意常数 c 的幂级数形式的周期解的

方法（可以利用两个临界变量 x_1 或 x_2 之一的初始值）.

对于与 Ляпунов 系统接近的系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, v),$$

这里 **A** 和 **X**(**x**) 同（2）中一样，**F** 是 **x** 和小参数 v 的解析向量函数，关于 t 连续且以 2π 为周期，也已提出确定其周期解的办法（见[4]，第Ⅷ章）. 对于 Ляпунов 型系统（2），其中矩阵 **A** 有 l 个具有简单初等因子的零本征值，一对纯虚本征值 $\pm\lambda i$，且没有多重本征值 $\pm\lambda i$，而 **X**(**x**) 同（2）中一样，则它可化成 Ляпунов 系统（见[9]，第Ⅳ章第2节）. 对于 Ляпунов 系统和所谓有阻尼的 Ляпунов 系统（Lyapunov system with damping）中的非线性振动也已经做了研究，其中关于能量传输的一般性问题已得到了解决（见[9]，第Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ章）.

假设一本质非线性**自治系统**（autonomous system）其线性部分已化成 Jordan 形式：

$$\dot{x}_v = \lambda_v x_v + \delta_v x_{v+1} + x_v \sum_{Q \in \mathfrak{M}_v} f_{vQ} x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}, \quad (3)$$

$$v = 1, \cdots, n; \ \delta_n = 0,$$

这里向量 $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 按假定至少有一个非零分量，而 $\delta_1, \cdots, \delta_{n-1}$ 为零或一，由线性部分矩阵有没有非单的初等因子而定，f_{vQ} 为系数，$\mathfrak{M}_v$ 是具有整数分量的向量 $Q = (q_1, \cdots, q_n)$ 的值集，满足

$$q_1, \cdots, q_{v-1}, q_{v+1}, \cdots, q_n \geqslant 0,$$
$$q_v \geqslant -1, \ q_1 + \cdots + q_n \geqslant 1.$$

这时，存在正规化变换

$$x_v = y_v + y_v \sum_{Q \in \mathfrak{M}_v} h_{vQ} y_1^{q_1} \cdots y_n^{q_n}, \ v = 1, \cdots, n, \quad (4)$$

它将（3）化为微分方程的**正规形式**（normal form）

$$\dot{y}_v = \lambda_v y_v + \delta_v y_{v+1} + y_v \sum_{\substack{Q \in \mathfrak{M}_v \\ (\Lambda, Q) = 0}} g_{vQ} y_1^{q_1} \cdots y_n^{q_n}, \quad (5)$$

$$v = 1, \cdots, n; \ \delta_n = 0,$$

使得当 $(\Lambda, Q) \neq 0$ 时，$g_{vQ} = 0$. 这样，正规形式（5）只有共振项，即（5）中的系数 g_{vQ} 只有在 Q 满足共振方程（resonance equation）

$$(\Lambda, Q) \equiv \lambda_1 q_1 + \cdots + \lambda_n q_n = 0$$

时可以不为零. 共振方程在振动理论中起着根本的作用. 已对正规化变换（4）的收敛性和发散性进行了研究（见[10]，第一部分，第Ⅱ，Ⅲ章）；也已对系数 h_{vQ}（通过它们的对称化）做出计算（见[9]，5.3节）. 在很多本质非线性自治系统的非线性振动问题中，正规形式方法已证明是很有效的（见[10]，[9]，第Ⅳ－Ⅷ章）.

在研究本质非线性系统的其他方法中，点映射法（见[2]，[11]），频闪观测法[12]和泛函分析法[13]都得到应用.

非线性振动的定性方法. 它起源于由 H. Poincaré（见[14]）所作的对非线性常微分方程积分曲线形式的研究. 对于可用二阶自治系统描述的非线性振动问题的应用，可在[2]和[15]中找到. 高维系统中周期解的存在性及全局稳定性问题在[16]中作了研究；殆周期非线性振动在[13]中作了讨论. 关于在某些导数前含小参数的常微分方程理论对非线性松弛振动（relaxation oscillation）问题的应用，见[17].

关于非线性振动其他重要方面和进一步的文献，见**扰动理论**（perturbation theory）和**振动理论**（oscillations, theory of）.

参考文献

[1] Poincaré, H., Oeuvres, 1, Gauthier-Villars, 1951.
[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959（中译本：A. A. 安德罗诺夫等，振动理论，科学出版社，上册 1973，下册 1974）.
[3] Булгаков, Б. В., Колебания, М., 1954.
[4] Малкин, И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956.
[5] Боголюбов, Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969.
[6] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974（英译本：Bogolubov, N. N. and Mitropol'skiĭ, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Gordon & Breach, 1961）.
[7] Каменков, Г. В., Избр. труды, т. 1－2, М., 1971－1972.
[8] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956, 7－263（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.
[9] Старжинский, В. М., Прикладные методы нелинейных колебаний, М., 1977（英译本：Starzhinskiĭ, V. M., Applied methods in the theory of non-linear oscillations, Mir, 1980）.
[10] Брюно, А. Д., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **25**（1971）, 119－262; **26**（1972）, 199－239.
[11] Неймарк, Ю. И., Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, М., 1972.
[12] Minorsky, N., Introduction to non-linear mechanics, Ann. Arbor, 1947.
[13] Красносельский, М. А., Бурд, В. Ш., Колесов, Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970（英译本：Krasnosel'skiĭ, M.

A., Burd, V. Sh. and Kolesov, Yu. S., Nonlinear almost periodic oscillations, Wiley, 1973).

[14] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I − IV, in Oeuvres, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1951, pp. Part V; nos. 74 − 77.

[15] Бутенин, Н. В., Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А., Введение в теорию нелинейных колебаний, М., 1976.

[16] Плисс, В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.-Л., 1964 (英译本: Pliss, V. A., Nonlocal problems of the theory of oscillations, Acad. Press, 1966).

[17] Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (英译本: Mishchenko, E. F. and Rozov, N. Kh., Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum, 1980).

В. М. Старжинский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience, 1950.

[A2] Hale, J. K., Oscillations in nonlinear systems, McGraw-Hill, 1963.

[A3] Minorski, N., Nonlinear oscillations, v. Nostrand, 1962.

[A4] Guckenheimer, J. and Holmes, Ph., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

[A5] Hayashi, C., Nonlinear oscillations in physical systems, McGraw-Hill, 1964.

[A6] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear oscillations, Wiley, 1979.

唐 云 译

非线性偏微分方程 [non-linear partial differential equation; нелинейное уравнение с частными производными]

一个形如

$$F(x, u, \cdots, D^{\alpha}u)=0 \qquad (1)$$

的方程，其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$，$u=(u_1, \cdots, u_m)\in\mathbf{R}^m$，$F=(F_1, \cdots, F_k)\in\mathbf{R}^k$，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是由非负整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 组成的一个多重指标，$D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_i=\partial/\partial x_i (i=1, \cdots, n)$. 在复值函数的情形下，可类似地定义非线性偏微分方程. 若 $k>1$，通常称为向量的非线性偏微分方程或非线性偏微分方程组. 方程中出现的最高阶导数的阶数称为 (1) 的阶.

最为熟知的一个非线性方程是 **Monge-Ampère 方程** (Monge-Ampère equation)

$$\det\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x, u, Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+ + B(x, u, Du)=0; \qquad (2)$$

此处及以下，$Du=(D_1 u, \cdots, D_n u)$.

若 $k=m$ 且 F 关于最高阶数所对应的变量是可微的，方程 (1) 的类型由 F 关于这些导数的主要线性部分的类型所定义 (见**偏微分方程** (differential equation, partial)). 对于相应的变量的导数 (或由微分运算所产生的导数)，一般地，人们相应地赋予一个确定的权. 例如，在非线性热传导方程中，

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f\left[x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right],$$

此处 $\partial f/\partial p_{22}>0$，$p_{22}\Longleftrightarrow\partial^2 u/\partial x_2^2$，则导数 $\partial f/\partial p_{22}$ 有权为 2.

因为 (1) 关于最高阶导数的线性化是在一个固定解的邻域内进行的，(1) 的类型将可能依赖于这个解 (对照线性方程，甚至在一固定点 x 处). 例如，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(x_1, x_2) \qquad (3)$$

在具 $\partial u/\partial x_2>0$ 的解 u 处为椭圆型的，而在具 $\partial u/\partial x_2<0$ 的解 u 处则为双曲型的.

一个方程的类型决定了此方程的边值 (混合) 问题是否适定以及影响研究它们的方法.

若函数 F 线性地依赖于它的最高阶导数，则 (1) 称为*拟线性方程* (quasi-linear equation). 例如，(3) 是拟线性的. 否则，方程称为是*本质非线性方程* (essentially non-linear equation). 例如，Monge-Ampère 方程 (2) 是本质非线性的.

若一个拟线性方程的最高阶导数的系数不依赖于解 (或它的导数)，则方程称为*弱非线性方程* (weakly non-linear equation). 例如，方程

$$\Delta u=f(x, u, Du) \qquad (4)$$

是弱非线性的.

拟线性和弱非线性偏微分方程之间的区分是承担了一个有条件的特性而不反映方程的内在性质. 弱非线性方程可能有较拟线性甚至本质非线性方程更强的非线性性质. 例如，存在形如 (4) 的弱非线性方程，它的在一有界区域内的一个给定的 Dirichlet 问题有可数多个不同的解.

形如 (1) 的方程可在全空间 $\mathbf{R}^n$ 内考虑，或者在它的某一子域内研究. 在第一种情形下，解空间的定义含有在无穷远处解的性态的条件. 而在区域的情形下，人们在边界上或其一部分上提一个或更多的边界条件. 这些边界条件同样可含有非线性算子.

一个非线性偏微分方程连同一个边界条件（或一些边界条件）一起形成一个非线性问题，此问题必须在一个适当的函数空间内讨论．这个解空间的选取由该区域内的非线性微分算子 F 及边界算子的结构所决定．一个非线性问题的解空间的选取对问题的讨论是一个本质的因素．例如，对如下非线性问题：在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 内，

$$\sum_{|\alpha|=m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(|D^\alpha u|^{p-1}\operatorname{sgn}D^\alpha u)=f(x),\ p>1,$$

在边界 $\partial\Omega$ 上，$D^\beta u=0,\ |\beta|\leqslant m-1$，

此问题对应于 Соболев 空间 $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$．对于其对偶空间 $W_q^{-m}(\Omega)=(\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega))^*$，$q^{-1}+p^{-1}=1$ 中任一函数 f，此问题在 $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ 内有唯一的解．此处及以下，$\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ 是所有在 Ω 内无限次可微且有紧支集的函数所成的集合在 Соболев 空间 $W^m_p(\Omega)$ 内的闭包．

在研究非线性微分方程的问题时，人们要处理这样一些问题：解的存在性及解的数目，或不存在性，以及解的破裂或分歧（分支）．另一问题是当变量趋于边界，特别地，在无界区域情况下趋于无穷远时，解的渐近状态．这种方程的理论有二个方面：局部及整体方面．局部理论对椭圆型、抛物型或双曲型的一般的非线性问题已相对完全地建立．这个理论是基于非线性泛函分析中的隐函数定理以及对应同类型的线性问题的一般理论．

对非线性抛物型或双曲型方程的边值（混合）问题，在问题的数据与相近问题的已知解（通常是零解）的数据仅有充分小的偏差（在适当的度量下）的条件下，局部理论可能使得在充分小的时间区间或一固定的区间上建立问题的可解性．

非线性问题的整体理论还很不完全，且仅对个别的方程类建立．

非线性一阶偏微分方程．对于形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i(t,x,u)+\psi(t,x,u)=0 \tag{5}$$

的一大类拟线性标量一阶方程，关于在 $t=0$ 上的初始条件的 Cauchy 问题的存在性和唯一性问题已在所有 $t>0$ 部分建立．

对于形如（5）的范围狭小的一类方程，此问题当 $t\to+\infty$ 时的解的渐近状态及边值问题也已经作了讨论．

对拟线性一阶偏微分方程组的理论还很不完全，见**拟线性双曲型方程和方程组**（quasi-linear hyperbolic equations and systems）．

非线性二阶偏微分方程．

椭圆及抛物型方程（equations of elliptic and parabolic type）．对于形如

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u,Du)+a(x,u,Du)=0, \tag{6}$$

或

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+a(x,u,Du)=0 \tag{7}$$

的一大类拟线性标量二阶椭圆型方程，在已具有 $\max_x|u(x)|$ 的一个先验估计的条件下，其边值问题的整体可解性理论相对地比较完全．此处方程的系数要服从一些条件．

类似的情况在形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u,Du)+a(x,u,Du), \tag{8}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+ +a(x,u,Du) \tag{9}$$

的一大类拟线性标量二阶抛物型方程的边值（混合）问题的整体可解性理论中存在．可解性理论是建立在先验估计及 Leray-Schauder 方法的基础上的．

对一些非线性方程（6）－（9）类的关于 $\max_x|u(x)|$ 的先验估计可由**最大值原理**（maximum principle）或特殊的积分不等式以及关于相应的函数空间的**嵌入定理**（imbedding theorems）得到．

关于本质非线性椭圆型标量方程的边值问题的整体可解性理论对于狭小的一类方程且为二个独立变量时业已建立．

关于本质非线性抛物型标量方程的边值（混合）问题的整体可解性对形如下述的单个空间变量 $x\in\mathbf{R}$ 的一大类方程也已建立：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left[x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].$$

关于椭圆或抛物型拟线性方程组的问题的整体可解性问题，仅对这些方程组的范围狭小的个别的类讨论过．

研究二阶椭圆或抛物型非线性偏微分方程的一个有效的方法是上、下解方法．例如，考虑边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u,Du), & \text{在有界区域 } \Omega\subset\mathbf{R}^n \text{ 内},\\ u=0, & \text{在 } C^2 \text{ 类边界 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases} \tag{10}$$

其中 f 是确定在 $\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，且使得 Бернштейн 不等式

$$|f(x,u,\xi)|\leqslant M(|u|)\cdot(1+|\xi|^2)$$

对所有 $(x,u,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 成立，M: $\mathbf{R}_+\to$

$\mathbf{R}_+=\{t\in\mathbf{R}: t\geqslant 0\}$ 是一个递增函数．若存在函数 u^+，$u^-\in W_p^2(\Omega)$ $(p>n)$，使得在 Ω 内几乎处处有 $-\Delta u^+\geqslant f(x, u^+, Du^+)$，而在 $\partial\Omega$ 上 $u^+\geqslant 0$，在 Ω 内几乎处处有 $-\Delta u^-\leqslant f(x, u^-, Du^-)$，而在 $\partial\Omega$ 上 $u^-\leqslant 0$（u^+ 和 u^- 分别称为问题（10）的上、下解），且在 Ω 内 $u^+(x)\geqslant u^-(x)$，则（10）有解 $u\in W_p^2(\Omega)$ 且在 Ω 内 $u^-(x)\leqslant u(x)\leqslant u^+(x)$．基于模型问题的解上面的非线性初值问题上、下解的很好的选取，不仅可以建立可解性及得到解的数目的一个下界，而且还可以得到非线性初值问题的解的精确的先验估计以及渐近状态．

非线性抛物型方程的边值（混合）问题的解的整体性态的研究与相应的非线性椭圆型方程的边值问题的稳态解有联系，这如同在常微分方程中那样．

由于非线性椭圆型方程的边值问题不总是有解，并且非线性抛物型和双曲型方程的边值（混合）问题对所有 $t>0$ 不一定存在解，因此非线性偏微分方程的解的不存在性理论已发展起来．

双曲型方程（equations of hyperbolic type）．这些方程在二阶非线性微分方程中占有一个特别的位置．二阶双曲型算子的逆中出现的“一次导数的损失”使其成为在研究非线性双曲型方程时的主要障碍．甚至非线性双曲型方程及方程组的局部理论要求建立非线性泛函分析中一个特殊的隐函数的理论，这是因为泛函分析中经典的隐函数定理在此不能应用了．

关于多于二个自变量的（本质）拟线性双曲型二阶方程，其整体可解性问题，甚至对 Cauchy 问题，还未研究．

在二个自变量的情形（$t\in\mathbf{R}_+$，$x\in\mathbf{R}$）下，对于形如

$$u_{tt}-a^2(u_x)u_{xx}=f(t, x, u_t, u_x)$$

的个别的方程，其 Cauchy 问题的整体可解性业已建立．用守恒原理可将上述形式的方程化为一特殊的拟线性双曲型组（见**拟线性双曲型方程和方程组**（quasi-linear hyperbolic equations and systems））．

在形如

$$u_{tt}-a^2\left[\int_\Omega |Du|^2 dx\right]\Delta u=f(t, x),$$

$$(\text{在 } \Omega\times[0, T] \text{ 内})$$

的拟线性双曲型方程情形下，对具以下条件：在 $\partial\Omega\times[0, T]$ 上 $u=0$ 及在 $t=0$，$x\in\Omega$ 处 $u=\varphi$，$u_t=\psi$ 的混合问题，其整体可解性（对任意 $T>0$）已在 x 的某一个光滑函数类中建立．此处 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一有界区域，它带有 C^∞ 类边界 $\partial\Omega$，$|Du|^2=\sum_{i=1}^n(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2$．

对形如

$$u_{tt}-\Delta u=f(t, x, u, u_t, Du),\ t>0,\ x\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$$

的一大类弱非线性双曲型方程，其 Cauchy 问题以及边值（混合）问题的整体可解性业已建立．

在非线性双曲型方程的理论中，这些方程的边值问题的周期解（关于 t）的存在性问题占有一个特别的位置．但是，甚至对弱非线性方程，此问题仅对形如

$$u_{tt}-u_{xx}=f(t, x, u)$$

的方程已经进行了讨论，此处自变量是二个，$t\in\mathbf{R}$ 及 $x\in[a, b]\subset\mathbf{R}$．此问题的复杂性起源于对应的线性问题的核是无限维的．

对于具耗散项的弱非线性和拟线性双曲型方程的研究已较为完全．

高阶非线性偏微分方程．

对于发散型的一大类拟线性方程

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x, u, \cdots, D^\beta u)=f(x), \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(t, x, u, \cdots, D^\beta u)=$$
$$=f(t, x),\ |\beta|\leqslant m,$$

已研究了它们的边值（混合）问题的可解性．此时对函数 A_α 要假设满足许多条件以确保非线性算子在相应的函数空间内有定义且满足某些条件．例如，关于方程（11）在有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 内具条件

$$D^\omega u=0,\ |\omega|\leqslant m-1,\ \text{在边界 } \partial\Omega \text{ 上} \quad (12)$$

的边值问题的可解性，下面一些条件是充分的：

1）函数 $A_\alpha(x, \xi_0, \cdots, \xi_\beta)$，$\xi_\beta\Leftrightarrow D^\beta u$，对所有 $\xi_0, \cdots, \xi_\beta$ 而言，它关于 x 是可测的，而对几乎处处 $x\in\Omega$ 而言，关于 $(\xi_0, \cdots, \xi_\beta)$ 是连续的，并且满足不等式

$$|A_\alpha(x, \xi_0, \cdots, \xi_\beta)|\leqslant K\left[1+\sum_{|\gamma|\leqslant m}|\xi_\gamma|^{p-1}\right],$$

其中 $p>1$，$K>0$，$|\alpha|\leqslant n$．

2）下述强制性条件成立：对 Соболев 空间 $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ 内任一函数 u，有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^\beta u)D^\alpha u\,dx\geqslant$$
$$\geqslant a_0\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx-K,\ a_0>0.$$

3）单调性条件成立：对 $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ 任意函数 u 和 v，有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega (A_\alpha(x, u, \cdots, D^\beta u)+$$
$$-A_\alpha(x, v, \cdots, D^\beta v)\ (D^\alpha u-D^\alpha v))dx\geqslant 0.$$

在条件 1）－3）下，对于在对偶空间 $(\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))^*$

中任意函数 f，方程（11）的边值问题（12）在 $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ 中有解．

所有这些条件可实质性地被放宽．例如，对于具边界条件（12）的形如（11）的微分算子，它在原则上是奇的且齐次的，即服从于无强制性的一些条件，则 Fredholm 交替原则成立．在此情况下，对具 $f=0$ 的方程（11），若其带有零边界条件（12）的边值问题仅有平凡解，则此问题对相应对偶空间中的任意函数 f 是可解的．

对于广泛一类的非线性偏微分方程的边值（混合）问题业已建立了正规可解性理论，这个理论将线性算子的正规可解性（Hausdorff）理论推广到非线性情形．这个理论为抛物型非线性方程和方程组以及双曲型弱非线性方程和方程组的边值（混合）问题的可解性给出了充分条件．

在椭圆型非线性方程的边值问题的理论中，本征函数的存在性问题占有一个特殊的地位．椭圆型拟线性方程的边值问题的本征函数理论已对相当广泛一类问题建立了．特别地，关于可数个本征函数的存在性的抽象 Люстерник-Шнирельман 理论已经转移到广泛一类问题．

高阶椭圆型非线性方程理论以及多于二个自变量的椭圆型非线性方程组理论中的一个特别项目是这些方程及方程组的解的正则性问题．

在二阶标量拟线性一致椭圆型方程情形下，若它有充分光滑的系数，且这些系数连同它们的一阶导数满足某些增长性条件，则它的解有超过其右端项光滑性的内部光滑，即可微性多两次．

在高于二阶的椭圆型拟线性方程以及二阶或二阶以上且自变量个数大于二的椭圆型拟线性方程组的情形，解的相应的光滑性在区域内不是处处成立，但几乎处处成立．在一些附加条件下，人们成功地作出（Hausdorff）测度为零的一些集合的精确的维数，而这些集合就是解在其上一般地光滑性违反的所在地方．对一个特别的且具有界非线性的拟线性椭圆型组类，已得知解在区域内处处正则．

对有散度形式的无限阶的广泛一类拟线性方程，已建立了其边值问题的理论．

精确解的理论．关于构造精确解的方法中有：基于非线性偏微分方程的分析中应用群论的方法，基于 Lie-Bäcklund 变换的方法，以及基于散射理论的反问题的方法．

反散射方法已可能用来研究许多在物理上重要的方程，如非线性 **Korteweg-de Vries 方程**（Korteweg-de Vries equation）

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0;$$

非线性 **Sine-Gordon 方程**（Sine-Gordon equation）

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0;$$

非线性 **Schrödinger 方程**（Schrödinger equation）

$$-i\psi_t + \psi_{xx} + \kappa|\psi|^2\psi = 0,$$

以及具一个空间变量 $x\in\mathbf{R}$ 的其他许多方程．借助于这个方法，人们已能考虑像在二个空间变量下的 Korteweg-de Vries 方程那样一些特别的非线性方程．

参考文献

[1] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（中译本：R．柯朗，D．希尔伯特，数学物理方法，2，科学出版社，1977）．

[2] Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973（中译本：О．А．拉德任斯卡娅，Н．Н．乌拉采娃，线性和拟线性椭圆型方程，科学出版社，1987）．

[3] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977（中译本：D 吉耳巴格，N．S．塔丁格，二阶椭圆型微分方程，上海科学技术出版社，1981）．

[4] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., Уральцева, Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967（英译本：Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N., Linear and quasi-linear equations of parabolic type, Amer. Math. Soc., 1968）．

[5] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964（中译本：А．弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1964）．

[6] Nirenberg, L., Topics in nonlinear functional analysis, New York Univ., 1974.

[7] Lions, J.-L., Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites nonlineaires, Dunod, 1969.

[8] Рождественский, Б. Л., Яненко, Н. Н., Системы квазилинейных уравнений ···, М., 1978（英译本：Rozhdestvenskiĭ, B. L., Yanenko, N. N., Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer. Math. Soc., 1983）．

[9] Скрыпник, И. В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973.

[10] Fučik, S., Nečas, J., Souček, V., Spectral analysis of nonlinear operators, Springer, 1973.

[11] Овсянников, Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978（英译本：Ovisannikov, L. V., Group analysis of differential equations, Acad. Press, 1982）．

[12] Захаров, В. Е., Манаков, С. В., Новиков, С. П., Питаевский, Л. П., Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980.

[13] Вишик, М. И., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **12** (1963), 125 – 164.

[14] Giaquinta, M., Modica, G., Almost-everywhere regularity results for solutions of non-linear elliptic systems, *Manuscripta Math.*, **28** (1979), 109 – 158.

[15] Дубинский, Ю. А., 《Матем. сб.》, **98** (1975), 2, 163 – 184.

[16] Kazdan, J. L., Krammer, R., Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31** (1978), 5, 619 – 645.

[17] Кошелев, А. И., 《Успехи матем. наук》, **33** (1978), 4, 3 – 49.

[18] Кружков, С. Н., 《Матем. сб.》, **81** (1970), 2, 228 – 255.

[19] Кружков, С. Н., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **16** (1967), 329 – 346.

[20] Олейник, О. А., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 2, 165 – 170.

[21] Похожаев, С. И., 《Матем. сб.》, **82** (1970), 2, 192 – 212.

[22] Похожаев, С. И., 《Матем. сб.》, **96** (1975), 1, 152 – 166.

[23] Похожаев, С. И., 《Матем. сб.》, **113** (1980), 2, 324 – 338.

С. И. Похожаев 撰

【补注】 非线性抛物型偏微分方程的最新发展在[A2]及[A3]中概略叙述了.

在受控的扩散过程的理论中出现了一大类重要的椭圆型二阶非线性方程. 这些方程如 **Bellman 方程** (Bellman equation). 对这些方程, 为研究可解性及得到解, 概率的技术及思想能被利用. 并且事实上, 许多重要的结果首先用此方法获得且仅仅随后同样用分析方法导出, 参见[A1]. 同样可知 **Monge-Ampère 方程** (Monge-Ampère equation) 是 Bellman 方程的一个特殊情形.

参考文献

[A1] Krylov, N. V., Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order, Reidel, 1987(译自俄文).

[A2] Amann, H., Quasilinear parabolic systems, in L. Boccardo and A. Tesei (eds.): Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions, Longman, 1987, 5 – 12.

[A3] Campanato, S., $L^{2,\lambda}$ theory and nonlinear parabolic systems, in L. Boccardo and A. Tesei (eds.): Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions, Longman, 1987, 55 – 62.

[A4] Garabedian, P., Partial differential equations, Wiley, 1964.

仇庆久 译

非线性位势 [non-linear potential; нелинейный потенциал]

由 **Radon 测度** (Radon measure) μ 生成的一个函数 $U_\mu(x)$, x 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N (N \geqslant 2)$ 的点, 它非线性依赖于生成测度 μ. 例如, 研究偏微分方程解的性质和解析函数的边界性质, 如下形式的非线性位势是有用的:

$$U_\mu(x) = U_\mu(x; p, l) = \qquad (*)$$

$$= \int \left[\int \frac{d\mu(z)}{|y-z|^{N-l}} \right]^{1/(p-1)} \frac{dy}{|x-y|^{N-l}}, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

其中 $|x-y|$ 是 x 和 y 之间的距离, μ 是具有紧支集的 Radon 测度, p 和 l 是实数, $1 < p < \infty$, $0 < l < \infty$.

当 $p = 2$ 时, 非线性位势 $(*)$ 变成线性 **Riesz 位势** (Riesz potential); 当 $p = 2$ 和 $l = 1$ 时, 变成经典 **Newton 位势** (Newton potential). 对于非线性位势 $(*)$, 容量和能量的概念已经建立, **位势论** (potential theory) 的一些基本定理的类似结果也已证明 (见[1]).

参考文献

[1] Мазья, В. Г., Хавин, В. П., 《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 6, 67–138.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 近几年, 位势论各个分支 (具体的或公理的) 的非线性理论已建立. [A1]–[A6] 给出这些发展的实例.

参考文献

[A1] Adams, D. R., Weighted nonlinear potential theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **297** (1986), 73–94.

[A2] Bertin, E. M. J., Fonctions convexes et théorie du potentiel, *Indag. Math.*, **41** (1979), 385–409.

[A3] Grandlund, S., Lindqvist, P. and Martio, O., Note on the PWB-method in the non-linear case, *Pacific J. Math.*, **125** (1986), 381–395.

[A4] Hedberg, L. I. and Wolff, Th. H., Thin sets in nonlinear potential theory, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **33** (1983), 4, 161–187.

[A5] Laine, I., Axiomatic non-linear potential theories, in J. Král, et al. (ed.): Potential Theory. Survey and Problem. Prague, 1987, Lecture notes in math., Vol. 1344, Springer, 1988, 118–132.

[A6] Mizuta, Y. and Nakai, T., Potential theoretic properties of the subdifferential of a convex function, *Hiroshima Math. J.*, **7** (1977), 177–182.

高琪仁、吴炯圻 译

非线性规划 [non-linear programming; нелинейное программирование]

数学规划 (mathematical programming) 的分支, 它涉及在由非线性约束 (等式和不等式) 给定的集合上求解非线性函数的最优化问题的理论和方法.

求解非线性规划问题的主要困难在于其多极值本性, 而已知的求解数值方法在一般情形只能保证极小

化序列收敛于局部极值点.

非线性规划中研究最充分的分支是**凸规划**(convex programming),其中问题的特征在于每个局部极小点是整体极小点.

参考文献

[1] Zangwill, W. I., Nonlinear programming: a unified approach, Prentice-Hall, 1969.

[2] Карманов, В. Г., Математическое программирование, М., 1975.

[3] Polak, E., Computational methods in optimization: a unified approach, Acad. Press, 1971.

В. Г. Карманов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Minoux, M., Mathematical programming: theory and algorithms, Wiley, 1986.

【译注】

参考文献

[B1] Avriel, M., Nonlinear programming: analysis and methods, Prentice-Hall, Unc., 1976(中译本: M. 阿弗里尔,非线性规划——分析与方法,上海科学技术出版社,上册,1979,下册,1980).

[B2] 席少霖、赵凤治,最优化计算方法,上海科学技术出版社,1983.

史树中 译

不可测集 [non-measurable set; неизмеримое множество]

不是**可测集**(measurable set)的集合.详细地说,可传 σ 环 $H(S)$ 中的集合 X 称为不可测的,如果 $\mu^*(X) > \mu_*(X)$;这里 S 是赋予测度 μ 的 σ 环,而 μ^* 与 μ_* 分别是外测度与内测度(见**测度**(measure)).

为了直观理解不可测集概念,下列"有效构造"是有用的.

例 1. 令

$$K = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

为单位正方形并在集合

$$\hat{E} = \{(x, y): x \in E, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

上定义测度 μ,这里 E 取遍测度为 $m(E)$ 的 Lebesgue 可测集,$\mu(\hat{E}) = m(E)$.这时集合

$$X = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1/2\}$$

是不可测的,这是由于 $\mu^*(X) = 1$,$\mu_*(X) = 0$.

不可测集的最早与最简单的构造属于 G. Vitali (1905).

例 2. 设 $\mathbf{Q}$ 为有理数集,那么据**选择公理**(axiom of choice)与每个形如 $\mathbf{Q} + a$(a 为任意实数)的集合恰好有一个公共元的集合 X(称为 Vitali 集)是不可测的.Vitali 集均没有 **Baire 性质**(Baire property).

例 3. 设 B(相应地 C)为形如 $n + m\xi$ 的数集,这里 ξ 为无理数,m 与 n 为整数且 n 为偶数(相应地 n 为奇数),并且设 X_0 为据选择公理由实数集依关系

$$x \sim y,\ 当且仅当\ x - y \in A = B \cup C$$

的等价类得到的集合.再令 $X = X_0 + B$.这时对每个可测集 E,有

$$\mu_*(X \cap E) = 0,\ \mu^*(X \cap E) = \mu(E).$$

还有不可测集的其他构造,这是以一个具有连续势的集合中引进全序的可能性为基础的.

例 4. 存在集合 $B \subset \mathbf{R}$,使 B 与 $\mathbf{R} \setminus B$ 同时与每个不可数闭集相交.任何这样的集合(Bernstein 集(Bernstein set))是不可测的(且不具有 Baire 性质).特别地,任何具有正外测度的集合包含一个不可测集.

尽管有在位移(例 2)与拓扑性质(例 3)下的不变性,但从集合论观点看来仍有理由去问,为什么不可能对给定的集合的一切子集去定义非平凡测度;对此,例如有关于有界势集的 Ulam 定理(Ulam theorem)(见[2]).

迄今尚无不用选择公理作出的 Lebesgue 不可测集的具体例子.

参考文献

[1] Halmos, P., Measure theory, v. Nostrand, 1950(中译本: 哈尔摩斯,测度论,科学出版社,1958).

[2] Oxtoby, J., Measure and category, Springer, 1971.

[3] Gelbaum, B. and Olmsted, J., Counterexamples in analysis, Holden-Day, 1964.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 亦见**测度**(measure);**Gödel 构造集**(Gödel constructive set);**描述集合论**(descriptive set theory).

在 ZF(非 ZFC)的某些模式中实数的每个子集是 Lebesgue 可测的(Solovay 的一个结果),因此对构造 Lebesgue 不可测集,选择公理是必要的.

关于 Ulam 定理,见**基数**(cardinar number).

郑维行 译 沈祖和 校

不可定向流形 [non-orientable manifold; неориентируемое многообразие]

不允许有**定向**(orientation)的**流形**(manifold),例如 **Möbius 带**(Möbius strip),**Klein 曲面**(Klein surface)和偶数维的射影空间 $\mathbf{RP}^n$.

М. И. Войцеховский 撰 薛春华 译

非振动区间 [**non-oscillation interval; неосцилляции промежуток**]，不共轭区间 (interval of disconjugacy)

实轴 **R** 上的一个连通区间 J，使得给定的 n 阶实系数线性常微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (*)$$

的任一非零解 $x=x(t)$ 在该区间上有多于 $n-1$ 个零点，这里 m 重零点算作 m 个．(*) 的解在非振动区间上的性质已得到很好研究 (例如，见[1]－[3])．非振动区间概念可有一些到线性微分方程组、非线性微分方程以及其他类型方程 (如具有变差自变量的差分方程) 的推广．

参考文献

[1] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[2] Левин, А. Ю.,《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 2, 43－96.

[3] Coppel, W. A., Disconjugacy, Springer, 1971.

Ю. В. Комленко 撰　沈永欢 译

统计学中的非参数方法 [**non-parametric methods in statistics; непараметрические методы статистики**]

数理统计中不假定知道总体分布之函数形式的方法．"非参数方法"的名称强调这类方法与经典(参数)方法的区别．在参数方法中，假定总体的分布精确到有穷个参数是已知的，并且可以根据观测结果估计这些参数的未知数值和检验关于其数值的假设．

例　设 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是两个独立样本，来自具有连续型总体分布函数 F 和 G 的总体；又设欲检验假设 H_0：分布 F 和 G 相同，其备选假设为移位假设，即对于一切 t 和某个 $\theta\neq0$，

$$H_1:\ G(t)=F(t-\theta)\ .$$

该问题的经典形式为，假设 F 和 G 是正态分布函数，而所作假设的检验使用 **Student 检验** (Student test)．在问题的非参数提法中，关于 F 和 G 的形状除连续型外不作任何假设．检验假设 H_0 对 H_1 的典型非参数检验，是基于第一个样本的元素在两样本联合顺序统计量序列中秩之和的 **Wilcoxon 检验** (Wilcoxon test)．假如根据观测结果计算的检验统计量的值太大或太小，则否定关于分布相同的假设．Wilcoxon 检验的统计量计算简单，并且在 H_0 下与 F 无关．对应于给定**显著性水平** (significance level) 的临界值，对于较小的 m 和 n 可由表查出(如，见[1])；对于较大 m 和 n 利用正态逼近．

在一些场合，重要的不仅是检验无移位的假设，而且还要估计此移位 θ．例如，移位可以视为在更换土壤的耕耘方法时收获量的变化，或采用轮种时延长的休眠时间．用变量 $\overline{Y}-\overline{X}$ 估计参数 θ，在正态情形是相当满意的，而偏离正态性时就很不合适了，甚至可能不是相合的．θ 的非参数估计(见[2])——mn 个数 $Y_j-X_i(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 的数组的中位数，具有好得多的性质．此估计与 Wilcoxon 检验紧密联系．可以说，它与估计量 $\overline{Y}-\overline{X}$ 的关系和 Wilcoxon 检验与 Student 检验的关系类似．

尽管利用非参数方法解决的问题多种多样，但是这些问题可以大致分为两大部分：假设检验问题和未知分布及参数的估计问题，其中参数可以看成分布的某些泛函．

统计假设的非参数检验，是非参数统计方法最发达的部分．要求建立规则(检验)，借以接受或否定所检验的假设(对给定的备选假设)．典型例子是**拟合优度检验** (goodness-of-fit test)．对应用重要的另一些例子，是对称性检验、独立检验和随机性检验．

拟合优度检验问题 (problem of testing goodness-of-fit)．其提法是：设 F 是已知连续型分布函数，要求根据来自分布函数为 G 的总体的样本检验关于 $G=F$ 的假设．这里，问题的非参数性质表现在备选假设的非参数性上．例如，备选假设可以表述为单侧形式：$F<G$ 或 $F>G$，或者双侧形式：$F\neq G$．

对称性检验问题 (problem of testing symmetry) 在于检验总体分布函数 G 关于给定点 x_0 的对称性，即

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)=1\ .$$

备选假设可以是单侧条件

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)\geqslant1,$$
$$G(x_0+t)+G(x_0-t)\leqslant1,$$

其中假定至少对于一个 t 满足严格不等式；也可以是同类型双侧条件．

独立性检验问题 (problem of testing independence) 出现在如下一些场合：对同一对象观测其两个特征，需要根据对这样一些对象的观测结果检验两个特征是否独立．

类似地可以提出随机性假设，即假设样本元素是独立同分布变量．除一般形式的备选假设外，还会遇到这样的情形，即在备选假设下可以指出样本元素之分布的具体差别所在．这样就产生了诸如趋势和回归的备选假设．

从算法上建立具有给定性质的非参数程序的方法，到目前为止研究的尚不充分，并且在选择相应的程序时直观和经验的考虑通常起着很大作用．在这方面，积累了常见非参数问题的大量求解方法和途径(见[3])．

很大一组非参数检验以利用经验分布函数为基础．设 F_n 是一经验分布函数，基于来自总体分布函数

为 F 的总体的，容量为 n 的样本．根据 Гливенко-Cantelli 定理，以概率 1，有

$$\sup_t |F_n(t)-F(t)| \to 0(n\to\infty).$$

这样，经验分布函数和真实分布函数以概率 1 无限接近，并且可以把关于真实分布函数假设的拟合优度检验建立在二者的接近程度上．最早的此类检验，是 20 世纪 30 年代初提出的 **Колмогоров 检验**(Kolmogorov test)和 **Cramér-von Mises 检验**(Cramér-von Mises test)，分别基于统计量

$$D_n=\sqrt{n}\ \sup_t |F_n(t)-F(t)|$$

和

$$\omega_n^2=n\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(t)-F(t)]^2\,dF(t).$$

需要指出，这两个统计量的分布不依赖于总体分布函数 F，只要 F 是连续型的．其极限分布，是在 30 年代中叶由 А. Н. Колмогоров 和 Н. В. Смирнов 得到的，并且已编制了数值表，故可以近似地求出对应于给定显著性水平的临界域的界限(见[1])．

提出并研究了许多不同形式的基于 F_n 与 F 之差的拟合优度检验，如 **Rényi 检验**(Rényi test)，Anderson-Darling 检验，Watson 检验以及其他一些检验(见[4])．为在大样本情形下有成效地运用这些检验，首先必须知道相应的极限分布．极限分布可以利用如下方法求得：将检验的统计量表示为经验过程

$$\xi_n(t)=\sqrt{n}\,[G_n(t)-t],\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

的连续泛函，其中 $G_n(t)$ 是来自 $[0,1]$ 上均匀分布的容量为 n 的样本之经验分布函数．过程 $\xi_n(t)$ 在空间 $D[0,1]$ 中弱收敛于某称为 Bronw 桥的 Gauss 过程(见[6])．因此，所研究统计量的极限分布与 Bronw 桥的相应泛函的分布相同，而后者可利用标准方法来计算．

存在统计量 D_n 和 ω_n^2 的修正，用于在多维情形下检验关于分布的假设，以及独立性和对称性假设的检验．在这些情形下产生一系列附加困难．例如，在多维情形下，上述所有统计量失去普遍性(对原分布的独立性)．在单位正立方体中的均匀分布情形最重要，因为取自多维分布的样本可以用各种不同方法变为来自均匀分布的样本．然而，甚至在这一简单的情形下，Колмогоров 统计量的精确分布和极限分布都是未知的(1982)．类似的困难还出现在，当要检验的关于分布的假设不是简单假设而是复合假设时，即如果假设总体分布函数形如 $F(t,\theta)$，其中 θ 是一维或多维未知参数．在此情形下，自然由样本估计 θ，例如利用最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$(见**最大似然法**(maximum-likelihood method))，并将 $F_n(t)$ 与 $F(t,\hat{\theta}_n)$ 进行比较．在简单假设的场合，亦可建立统计量 D_n,ω_n^2 及其各种变形．然而，这些统计量的分布(包括精确分布和极限分布)仍然依赖于 F 的形式，而且在许多场合还依赖于 θ 的未知真值．虽然在有些场合对于 ω_n^2 型统计量得以编制其极限分布表(见[5])，但求这些分布是困难的，且其分布的精确形式未知．对于某些其他统计量，通过模拟计算出了它们的百分位点．

除上面提到的拟合优度检验外，还建立了其双样本和多样本类似．类似的检验既可用于拟合优度检验，又可用于检验多个样本的齐一性(见 **Смирнов 检验**(Smirnov test))．

基于经验分布函数的拟合优度检验和齐一性检验的共同性质，是它在任何备选假设下的相合性．然而，在实际问题中选取任何一个统计量都是困难的，因为其功效性质研究的不充分．对于大样本容量，可以依据对一些最简单统计量求出的 Pitman 渐近相对效率的值(见[7])．

秩检验构成另外一组非参数检验(见**秩检验**(rank test))．秩符号检验最早在 J. Arbuthnott (1710) 的工作中已出现．他为获取"有利于神的天意的论据"而分析男孩和女孩出生率的统计数据时使用秩符号检验．不过，秩检验的现代发展时期始于 20 世纪 30 年代末．F. Wilcoxon 于 1945 年发表的文章提出了秩检验，在这之后秩检验以 Wilcoxon 命名(见 **Wilcoxon 检验**(Wilcoxon test))，而秩方法进入蓬勃发展的时期．

秩方法的使用基于如下想法．由于秩向量连同顺序统计量向量包含样本中的全部信息，可见此信息量某一部分仅包含在秩向量中．因此，可以只以秩为依据而不利用样本值本身的知识来建立统计程序．这样程序的优点是计算简便，因为秩只取整数为值．秩程序的另一重要特点是，它亦可用于观测结果不是数值而带有质的特征的情形，只要这样的观测结果可以排序．这在社会学、心理学和医学的研究中特别重要．最后，在零假设下秩统计量的分布不依赖于总体分布，故完全可以求出这些分布．

随着秩方法的发展，已经阐明，包含在秩向量中的信息量大到足以保障这些程序的高有效性．在前面讨论的与检验两样本齐一性有关的例中，检验的应用范围的拓广导致功效的损失，且在正态场合 **Student 检验**(Student test)比任何秩检验有更高的功效．不过，当观测次数很大时，Wilcoxon 检验与 Student 检验相差很小．结果表明，在正态情形下，Wilcoxon 检验对 Student 检验的渐近相对效率等于 $3/\pi=0.995$．假如总体分布偏离正态分布，则上述渐近相对效率可以任意大，但永远不会低于 0.864(见[4])．此外，存在秩检验(称为正态分数检验(normal scores test))，在正态场合其对 Student 检验的渐近相对效率等于 1，在任何偏离

正态性的情形下都大于 1．这样，此检验渐近优于 Student 检验．

另一例子与对称性假设的检验有关．设样本 X_1, $\cdots$, X_n 来自一般密度为 f 的总体，欲检验 f 关于 0 对称的假设，备选假设仍然是移位假设．在此情形下，最简单的检验是基于 X_i 中正值个数的**符号检验**(sign test)．Wilcoxon 符号秩检验基于统计量 $\sum_{X_i>0} R_i^+$，其中 R_i^+ 是 $X_i>0$ 在 $|X_1|$, $\cdots$, $|X_n|$ 的顺序统计量序列中的秩．此检验的统计量不仅利用了关于观测结果符号的信息，而且利用了关于观测值的信息．因此可以指望 Wilcoxon 检验比符号检验更加有效．事实上，这些检验(在正态场合)对 Student 检验的渐近相对效率分别为 $3/\pi=0.955$ 和 $2/\pi=0.637$．这样，Wilcoxon 检验的渐近效率是符号检验的 1.5 倍，并且与 Student 检验相差甚小．

与独立性假设检验相联的另一个例子．假设有一组对象，其中每个对象有两个数量或质量特征(如学生的数学和音乐能力，野果的色泽和成熟程度等等)．假设对质量特征的观测结果可以排序．要求根据对对象的 n 次独立观测，检验关于二特征独立的假设，其备选假设例如为二特征正相依．设 R_i 和 S_i 分别为二特征对应于第 i 次观测结果的秩．检验独立性假设的自然检验基于 Spearman 等级相关系数 r_s，它可用如下公式计算:

$$r_s=1-\frac{6\sum(R_i-S_i)^2}{n^3-n}\quad .$$

当 r_s 的值很大，即接近于 1 时，否定独立性假设．临界值，当 n 较小时可以查表；当 n 较大时利用正态逼近．在正态场合，基于 r_s 的检验对基于样本相关系数的检验的渐近相对效率，仍然足够高，它等于 $9/\pi^2=0.912$(见[9])．

由于对于每一非参数假设的检验存在多种秩检验，而它们往往是由直观的想法提出的，故检验的选择应以某种最优性构想为依据．众所周知，甚至在参数情形下，在一切可能的备选假设类中存在一致最大功效检验的情形也极少．因此，对于有限样本容量，最优秩检验指的是局部最大功效检验．例如，在双样本齐一性检验问题中，对于密度为 $e^x(1+e^x)^{-2}$ 的逻辑斯谛分布的移位备选假设情形，Wilcoxon 检验是局部最大功效的；在同一检验问题中，对于正态分布情形，正态分数检验是局部最大功效的．在反映最优性的渐近理论中，使用不同的渐近有效性的概念，并且局部最大功效检验通常也是渐近最优的(见[8])．

在秩检验理论中，假设观测结果的分布是连续型的，故观测结果可以排序且无重合，而秩统计量应唯一确定．然而实际中观测值总要舍位，因此重合往往出现．克服此困难有如下两种方法最常用．第一种方法将重合观测值随机排序；第二种方法给每组重合观测值中的每个值都赋予该组秩的平均值．两种方法的优劣暂时尚未得到充分研究．

非参数估计是非参数统计的一个分支，涉及未知分布的估计，或诸如分位数、矩、众数、熵、Fisher 信息量等未知分布的这样一些泛函的分布．

经验分布函数是普遍采用的未知分布函数的估计．由 Гливенко-Cantelli 定理，可知经验分布函数作为未知分布函数估计的强相合性，而其极小极大性在 [10] 中有证明．未知分布密度的相合估计则是更复杂的问题．设要估计的密度 f 属于密度类 F，则为适当地表述 f 的估计问题，必须有关于 F 的补充先验信息．在经典提法中，先验密度族以参数的形式给出，并且决定于未知参数的有限维向量． 在非参数提法下，问题具有无限维性质，并且未知密度的估计精度本质上依赖于(见[11])类 F"坚实性"的几何特征．

未知密度 f 的最普遍采用的估计是"核估计"

$$f_n(t)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right),$$

其中 X_i 是观测值，核函数 K 绝对可积并且满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=1,$$

而对于数列 h_n，有 $h_n\to 0$，$nh_n\to\infty$．在某些场合采用密度的其他一些非参数估计，较简单的(直方图、频率折线)或较复杂的，如 Ченцов 投影估计．对涉及密度类 F 性质未知密度的这些估计的精度问题，有很好的研究(见[11],[12])．

可以利用经验分布函数和密度的非参数估计，来估计未知总体分布的泛函．为此只需在欲估计泛函的表达式中将未知分布换成其估计．该思想本身及其实现的开始出现在 R.von Mises 1930 — 1940 年的工作中．已经证明，在对被估计泛函类和非参数分布类的一定约束下，存在衡量非参数估计的质量的极小化极大下界(见[12])．非参数估计与建立稳健估计量的问题紧密相联．

参考文献

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1983．

[2] Hodges, J. and Lehmann, E., Estimates of location based on rank tests, *Ann. Math. Stat.*, **34** (1963), 598－611．

[3] Walsh, J. E., Handbook of nonparametric statistics, 1－3, v. Nostrand, 1965.

[4] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

[5] Мартынов, Г. В., Критерии омега-квадрат, М., 1978．

[6] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.

[7] Wieand, H., A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide, *Ann. of Stat.*, **4** (1976), 1003–1011.

[8] Hájek, J. and Šidak, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[9] Kendall, M., Rank correlation, Griffin, 1968.

[10] Dvoretzky, A., Kiefer, J. and Wolfowitz, J., Asymptotic minimax characterization of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator, *Ann. Math. Stat.*, **27** (1956), 642–669.

[11] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972 (英译本: Chentsov, N.N., Statistical decision rules and optimal inference, Amer. Math. Soc., 1982).

[12] Ибрагимов, И.А., Хасьминский, Р.З., Асимптотическая теория оценивания., М., 1979 (英译本: Ibragimov, I.A. and Has'minskii, R.Z., Statistical estimation: asymptotic theory, Springer, 1981).

[13] Waerden, B.L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[14] Lehmann, E.L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

[15] Schmetterer, L., Einführung in die mathematische statistik, Springer, 1966.

[16] Lehmann, E. L., Nonparametrics: statistical methods based on ranks, McGraw-Hill, 1975.

Я.Ю. Никитин 撰

【补注】 设 $X(t)$ 是 **Brown 运动** (Brownian motion), $X(0)=0$. 对于固定的 $t_0>0$, $x, y\in \mathbf{R}$, 定义一过程 $X(x, y; t_0)$: 对于 $0\leqslant t\leqslant t_0$, 令

$$X(x, y, t_0)(t)=x+X(t)+\frac{t}{t_0}(y-x-X(t_0)).$$

这样, $X(x, y; t_0)(0)=x$, $X(x, y; t_0)(t_0)=y$. 此过程称为固連 Brown 运动 (pinned Brownian motion) 或 (由 x 到 y 的) Brown 桥 (Brownian bridge). 其随机微分方程为

$$dX(t)=dB(t)+\frac{1}{t-t_0}(y-X(t))dt,\quad X(0)=x.$$

详见 [A1].

参考文献

[A1] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion process, North-Holland, 1981, Sect. Ⅳ. 8.5.

[A2] Nadaraya, E. A., Nonparametric estimation of probability densities and regression curves, Kluwer, 1989 (译自俄文).

周概容 译

非参数检验 [non-parametric test; непараметрический критерий]

检验假设 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 对备选假设 $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\backslash\Theta_0$ 的**统计检验** (statistical test), 如果 H_0 对 H_1 的统计检验问题本身是非参数的, 即两参数集 Θ_0 和 Θ_1 中至少一个拓扑上不等价于 Euclidean 空间的子集. 除此定义外还普遍使用另一定义: 统计检验称为非参数的, 如果利用此检验得到的统计推断, 不依赖于被观测随机变量在所作零假设下的概率分布, 而检定 H_0 对 H_1 的检验正是其观测结果. 在这种情形下, 常用"分布自由检验"一词代替术语"非参数检验". **Колмогоров 检验** (Kolmogorov test) 是非参数检验的经典例子. 亦见**统计学中的非参数方法** (non-parametric methods in statistics); Колмогоров-**Смирнов 检验** (Kolmogorov-Smirnov test).

参考文献

[1] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965 (中译本: C.R. 劳, 线性统计推断及其应用, 科学出版社, 1985).

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

[3] Ибрагимов, И.А., Хасьминский, Р.З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979 (英译本: Ibragimov, I. A., Has'minskii, R. Z., Statistical estimation: asymptotic theory, Springer, 1981).

[4] Kendall, M.G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2. Inference and relationship, Griffin, 1979.

М.С. Никулин 撰 周概容 译

非 Pascal 几何学 [non-Pascal geometry; непаскалева геометрия]

具有非交换乘法的几何学. 在仿射几何学中交换性等价于 **Pascal 定理** (Pascal theorem), 由此, 非 Pascal 几何学一般指其中下述定理不成立的几何学: 在两条相交直线上分别取定三点 A, B, C 和 A_1, B_1, C_1, 假设它们不是这两条直线的交点; 如果 CB_1 平行于 BC_1 并且 CA_1 平行于 AC_1, 则 BA_1 平行于 AB_1, 此定理有时称之为 Pappus 定理 (Pappus theorem), 它是圆锥曲线论中 Pascal 定理的一个特殊情况 (即当此二次曲线退化为一对直线时).

将度量公理从 Hilbert 系统 (见 **Hilbert 公理系统** (Hilbert system of axioms)) 中删除后, Pascal 定理不能由关联、顺序和平行诸公理推出, 这使构造非 Pascal 几何学成为可能. 另一方面, 非 Pascal 几何学的存在也关系到构造非交换体上的几何学 (一种同时也是**非 Archimedes 几何学** (non-Archimedean geometry) 的非 Pascal 几何学) 的可能性.

非 Pascal 几何学的意义在于 Pascal 定理在有关建立公理系统独立性和命题之间的逻辑关系等研究中的作用.

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913.

[2] Bieberbach, L., Einleitung in die höhere Geometrie, Teubner, 1933.

[3] Скорняков, Л. А., 《Успехи матем. наук》, 6 (1951), 6, 112 – 154.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】"(非) Pascal 几何学"之称已废弃，为"(非) Pappus 几何学"((non)-Pappian geometry) 取代.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Twelve geometric essays, Univ. Illinois Press, 1968.

杨路、曾振柄 译

非直谓定义 [non-predicative definition; непредикативное определение]

一种仅在定义对象被假定存在时才有意义的定义．所有集合形成的集合是非直谓的．任一实数集的上确界的定义也如此．对任何非直谓定义可视之为把需要的对象从一确定集类中选出来．由于这里涉及的对象的存在性问题尚未解决，人们也可通过谈论非直谓性质来代替非直谓定义．一旦表述性质的语言固定，非直谓概念可如下精确化．一个性质（更确切地说是相关性质的语言表达式）称为非直谓的 (non-predicative)，如果它含有一个使所定义对象落在其作用域中的约束变元．一个性质称为直谓的 (predicative)，如果它不含这种约束变元．

随着集合论悖论的发现，非直谓性这一概念产生了，术语本身是由第一个反对非直谓定义的 H. Poincaré 在 1906 年提出的．

20 世纪初发现的**悖论** (antinomy) 都包含非直谓性．例如，在 Russell 悖论中所有不包含自身作为元素的集合构成的集合 R 由公式

$$\forall x (x \in R \Longleftrightarrow \neg x \in x)$$

来定义，这里 x 是取遍所有集合的变元．在这个公式中 R 是变元 x 的一个可能值．在数学中广泛使用了非直谓定义．例如所有满足条件 φ 的自然数集合的并 S 可用下式定义:

$$\forall n \ (n \in S \Longleftrightarrow \exists M (\varphi(M) \& n \in M)), \quad (*)$$

其中变元 n 取遍全体自然数，而变元 M 可取自然数集的任一子集．在这公式中 S 是约束变元 M 的一个可能值域．非直谓定义方法有时也可用直谓的来代替．例如，如果性质 $\varphi(M)$ 取成公式 $M = A \vee M = B$，这里 A 和 B 是两个固定的集合，则 (*) 等价于直谓公式

$$\forall n (n \in S \Longleftrightarrow n \in A \vee n \in B),$$

它表明 S 是 A 和 B 的并集．

B. Russell 曾尝试在直谓基础上构造数学．在他发展的**类型论** (types, theory of) 中集合依定义它们的表达式排成一个层次系统．例如 (*) 中集合 S 必须放到比 M 和包含于公式 φ 中的变元所在层次更高的层次中去．在直谓基础上不可能建立满意的分析．对于一个语句，仅当到它涉及的层次上的某些限制得到满足时才有意义．Russell 不得已引入了可化归性公理，它事实上消除了层次间的区别．然而，伴有算术公理的直谓理论得以建立对许多应用为足够的分析（见 [4]）．

非直谓现象实质上是基于对"所有"这个词的绝对特征（无限制的一切，无例外的一切）的理解．把所有集合分成不同的"集合层次"是限制绝对特征的一种尝试．数学中的直觉主义和构造主义（见**直觉主义** (intuitionism) 和**构造数学** (constructive mathematics)）更本质地修改了基于对"所有"这个概念的绝对理解的思想方法．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

[3] Hilbert, D. and Ackermann, W., Principles of mathematical logic, Chelsea, 1950 (译自德文).

[4] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics, Shoten, 1978.

В. Н. Гришин 撰　孙智伟 译

非剩余 [non-residue; невычет], n 次幂模 m 的

一个数 a，对于它**同余式** (congruence) $x^n \equiv a \pmod m$ 无解．亦见**整数的剩余** (remainder of an integer)．

【补注】通常这一术语用于 $n = 2$ 的情形．C. F. Gauss 在其《算术研究》(Disquisitiones Arithmetica) 中首次使用这一名词．

沈永欢 译

非自伴算子 [non-self-adjoint operator; несамосопряженный оператор]

Hilbert 空间中的线性算子，它的谱分析不能纳入**自伴算子** (self-adjoint operator) 理论和它最简单的推广：**酉算子** (unitary operator) 理论和**正规算子** (normal operator) 理论的框架．非自伴算子产生于没有能量守恒条件进行的过程的讨论中：带摩擦的问题，开谐振器的理论，非弹性散射问题及其他．一定的自伴问题，其中的算子值函数 $\mathscr{L}(\lambda)$ 通过变量分离显示出非线性地依赖于一个谱参数 λ，也导致非自伴算子的研究．有关非自伴算子理论的许多命题对作用在任意 Banach 空间，F 空间，拓扑向量空间等等空间上的算子也成立．

研究非自伴算子最广泛的方法是**预解式** (resolvent) 的估计、其中用到解析函数，渐近展开等理论．

有关非自伴算子理论的第一批工作是 G.Birkhoff, Я.Д.Тамаркин, В.А.Стеклов 和其他人在研究关于常微分方程的问题时作出的．这些研究应用了预解式围道积分的 Cauchy 方法．

对非自伴偏微分算子很长时间一直缺乏有效的研究方法．这可以用这样的算子的预解式作为解析函数的复杂结构来解释．

在非自伴算子(特别地，偏微分算子)一般理论的发展中，M.B.Келдыш([1]，也见[2])的工作起了重要的作用．他研究了形如

$$y=\mathscr{L}(\lambda)y \tag{1}$$

的方程，其中 y 是一定的 Hilbert 空间 H 中的元素，并且算子 $\mathscr{L}(\lambda)$ 有以下表示:

$$\mathscr{L}(\lambda)=B_0+\lambda H_0 B_1+\cdots+\lambda^{n-1}H_0^{n-1}B_{n-1}+\lambda^n H_0^n .$$

其中 H_0 是一个有限阶的完全连续可逆自伴算子，并且 $B_j(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 是任意的完全连续算子．(作用在 Hilbert 空间上的完全连续算子 A 称为一个有限阶算子 (operator of finite order)，如果对某个 ρ $(0<\rho<\infty)$ 有 $\sum s_k^\rho(A)<\infty$; $s_k(A)$ 表示 A 的奇异数 (singular numbers)，即 $(AA^*)^{1/2}$ 的本征值．) (1) 的本征值 (eigen values) 是使方程有非平凡解 y 的那些 λ; 这些解称为本征向量 (eigen vectors).

在上面作出的假设下，(1) 的谱是离散的．由于 $\mathscr{L}(\lambda)$ 是非自伴的，除了本征向量外(在出现多重谱的情形下)自然出现相伴向量．在[1]中根据规则

$$y_v=\mathscr{L}(\lambda)y_v+\frac{1}{1!}\frac{\partial\mathscr{L}(\lambda)}{\partial\lambda}y_{v-1}+\cdots+\frac{1}{v!}\frac{\partial^v\mathscr{L}(\lambda)}{\partial\lambda^v}y, \tag{2}$$
$$v=1,\cdots,k,$$

构造了对应于一个本征值 λ 和本征向量 y 的相伴向量 $y_1,\cdots,y_k$ 的链．$\mathscr{L}(\lambda)$ 的本征向量和相伴向量的系称为 n 重完全的 (n-fold complete)，如果 H 中任何 n 个向量 $\varphi_0,\cdots,\varphi_{n-1}$ 可以用形如

$$\sum_k c_k\left[\frac{d^v v_k(t)}{dt^v}\right]_{t=0}$$

的带相同系数 c_k 的有限线性组合按 H 中的范数以任意精度逼近，其中 $v_k(t)$ 是形如

$$e^{\lambda t}[y_k+\frac{t}{1!}y_{k-1}+\cdots+\frac{t^k}{k!}y]$$

的向量值函数．n 重完全性的定义自然与对应于 (1) 的不稳定方程的 Cauchy 问题的解相联系．

按照 Келдыш 的一个定理，在对 $\mathscr{L}(\lambda)$ 的系数所作的假设下，$\mathscr{L}(\lambda)$ 的所有本征向量和相伴向量的系在 H 中是 n 重完全的．在[1]中他也证明了 $\mathscr{L}(\lambda)$ 的本征值在 $\arg_\lambda x=\sqrt{\pi}/n$ 的射线上可以渐近地逼近．在完全性的证明中，Келдыш 发展了一种新的估计有限阶抽象完全连续非自伴算子预解式的方法．这里显示出在完全性问题中 Volterra 算子 (Volterra operators)，即以零为其单一谱点的完全连续算子起了特殊的作用．在确立本征值的渐近行为的过程中，Келдыш ([3])用了属于他的一个新的 Tauber 定理．

Келдыш 的研究为许多作者所继续．他的定理在[4]中延拓到算子 $\mathscr{L}(\lambda)$ 有理地依赖于 λ 的情形．

在[5]－[7]中考虑了 $M(\lambda)=I+\lambda B+\lambda^2 C$ 的方程 $M(\lambda)y=0$，其中 C 是一个完全连续正定算子，而 B 是一个有界自伴算子．Понтрягин 关于一个 J 自伴算子 A 的极大 J 非负不变子空间存在性的定理(见[8])的一个推广，使有可能(见[6]和[7])确立在应用中有重要地位的 $M(\lambda)$ 的所有本征向量和相伴向量的二重完全性，并且也确立对应于谱在左(或右)半平面的子系统的一重完全性．这些结果已经得到更为深入地发展．

有限阶 ρ 的完全连续算子 A 关于本征向量和相伴向量的 Fourier 级数的可和性已经建立(见[9])，如果二次型 (Ax,x) 的本征值位于复平面中开角小于 π/ρ 的一个扇形内．(关于这个定理的应用和它的进一步推广见[10]及此文的参考文献．)

许多文章研究了本征向量和相伴向量的系何时组成这个 Hilbert 空间的一个基的问题．使一个耗散完全连续算子的本征向量和相伴向量的系组成一个基的最一般的条件在[12]中得到．

在有离散谱的奇异微分算子的情形下已经得到许多关于带复位势的 Sturm - Liouville 算子的本征函数和相伴函数的完全性的精巧的结果(见[11]和[13])．在椭圆型算子的情形下已经得到重要结果(见[14])．Келдыш 的定理已经推广到非自伴椭圆型算子的广义本征函数和相伴函数的情形(见[15],[16])．

把有限维算子约化为 Jordan 形式的定理推广到无穷维情况的尝试导致三角形积分表示的构造．对完全连续算子 $B=B_R+iB_I$，其中 B_R 和 B_I 是自伴的并且 B_I 是有限阶的，已经得到一个关于 B 酉等价于一个三角形算子的 Schur 定理的类似结果(见[17])．Volterra 算子在三角形表示的问题中占有特别的位置．

von Neumann 叙述的 Hilbert 空间中一个完全连续线性算子必有一个不变子空间的定理在这个问题中起了特别的作用; Banach 空间中一个任意的有界线性算子不必有不变子空间; 对 Hilbert 空间的情形相应的问题仍然没有解决(1989)．一个 Volterra 算子称为单胞算子 (unicellular operator)，如果对它的任意两个不变子空间 Q_1 和 Q_2 或者 $Q_1\subset Q_2$ 或者 $Q_2\subset Q_1$．在 B_I 是核型和非负定的假设下，[18]中得到 B 是单胞算子的一个必要和充分条件; 这个条件可以用 $\lambda\to\infty$ 时 B 的预解式的增长的术语叙述．[19]中指出了一个成为单胞算

子的简单的充分条件．

带连续谱的非自伴算子由 M.A. Наймарк 首先研究(见[20],[21])，他得到一个与非自伴问题

$$l(y)=-y''+p(x)y=\lambda y,\ 0\leqslant x<\infty, \quad (3)$$

$$y'(0)-\theta y(0)=0 \quad (4)$$

相关的用 Fourier 积分的展开式，其中 $p(x)$ 是服从条件

$$\int_0^\infty (1+x^2)|p(x)|dx<\infty \quad (5)$$

的复值函数，而 θ 是一个复数．[20] 中的结果，特别蕴涵在实轴上 $A(s)=\omega_x(0,s)-\theta\omega(0,s)$ 为零($s=\sqrt{x}$)的那些点的一个邻域里，算子 (3)－(4) 的谱投影是无界的．(这里 $\omega(x,s)$ 表示(3)的当 $x\to+\infty$ 时 $\omega(x,s)$. $e^{-ixs}\to 1$ 的解，Jost 解 (Jost solution))．在 [20] 中，$A(s)$ 的实零点称为谱奇点(spectral singularities)．在 [22] 得到了[20] 的结果到三维空间中 Schrödinger 方程情形的一个推广．在 [20] 的进一步发展中，证明了(见 [23])一般来说(没有型 (5) 的限制)微分算子的谱函数必须看作一定的拓扑空间上的连续线性泛函．

文献[24]研究了一个带其位置依赖于谱参数的奇点的非自伴方程组．这些组出现在无矩壳体的理论中(见**壳体理论**(shell theory))．对这样的组解的渐近性质已经确立，并且还证明了 Cauchy 型的可解性定理．生成非正则问题的非自伴积分微分算子的本征函数和相伴函数系的完全性定理已经建立．

非自伴算子理论中的一个重要问题是本征函数和相伴函数的双正交级数的 Gree 算子的核的展开以及基的问题．Тамаркин([25])研究了一个可和函数关于一个正则问题的本征函数和相伴函数的级数展开，并且还有三角 Fourier 级数的等度收敛性问题．后来证明了(见[26],[27])对于非正则问题三角级数的等度收敛性不成立．

对强正则条件本征函数和相伴函数的系组成 L_2 中的一个基．已经证明(见[28],[29])这个系不仅组成一个基，甚至是一个所谓的 Riesz 基．

为了研究关于一个通常的非自伴算子的本征函数和相伴函数的展开式的基本性质和一致收敛性，在[30]中发展了一个重要的方法．这个方法是用于自伴问题研究的思想的进一步发展．对本征函数和相伴函数提出了一种新的处理，使有可能去掉边界条件的特殊形式；考虑了一般常微分算子或这样算子的束，并且确立了有关这些算子的本征函数和相伴函数基本性质的充要条件，以及等度收敛准则．这个方法仅仅建立在本征函数和相伴函数的一个中值公式的基础上(也见[31])．如果算子有无穷多个相伴函数，那么基本性质原来也依赖于后者的选择(见[32])．

对非自伴椭圆型算子有双正交级数部分和的 Poisson 型平均的一定序列的收敛性(见[33])，即提出了一个求和法．

对于非正则问题的本征函数和相伴函数的展开式，首先是对形如 $y'''=\lambda y$，$y(0)=y'(0)=y(1)=0$ 的问题得到的．已经证明(见[26])，这种形式的一致收敛级数展开式对满足一定解析条件的函数能够成立．

在基本研究中有这样一个问题(见[34])，其中研究了 Laplace 算子的谱在定义域改变时的扰动．这里在这个算子的谱上变化的集合容量的作用第一次变得明白了．这些方法成功地应用于非自伴算子的研究中．

其基础在[35]中详细说明的正则化方法，现在成功地应用在非自伴算子的理论中．非自伴算子正则化**迹**(trace)的问题就是一个例子．有关迹的理论的第一篇论文是文献[36]，其中计算了一个 Strum-Liouville 算子的正则化迹．在[37]和[38]中得到了算子迹理论中更一般的结果．原来对按一种复杂的方式依赖于谱参数的通常的非自伴微分算子迹公式，可以作为一定类整函数的根的正则化和的公式的推论得到．(在[38]，[39]中考虑了奇异算子和偏微分算子的迹．)

在重要的其中发展了非自伴算子理论新的方法和思想的工作中，也要提到概述性的演讲([40])．

非自伴算子最后的理论的结构还远未完成(1989)．一方面，在这个理论本身有新的研究趋向，像耗散算子理论([41])，压缩算子理论的结构([42])，典型 Маслов 算子的方法([43])，谱算子的理论([44])，以及另外的研究；另一方面，关于应用问题、力学和数学物理的研究，又提出了发展这个理论的新的方法．

参考文献

[1] Келдыш, М.В.,《Докл. АН СССР》, **77** (1951), 1, 11－14.

[2] Келдыш, М.В.,《Успехи матем. наук》, **26** (1971), 4, 15－41.

[3] Келдыш, М.В.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **38** (1951), 77－86.

[4] Аллахвердиев, Дж.Э.,《Докл. АН СССР》, **115** (1957), 2, 207－210.

[5] Лангер, Г.,《Докл. АН СССР》, **134**(1960), 2, 263－266.

[6] Крейн, М. Г.,《Докл. АН СССР》, **154** (1964), 5, 1023－1026.

[7] Крейн М. Г., Лангер Г. К., в кн., Приложения теории функций в механике сплошной среды, М., 1965 (Тр. Международного симпозиума, т. 2).

[8] Понтрягин, Л. С.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **8**(1944), 243－280.

[9] Лидский, В.Б.,《Докл. АН СССР》, **110** (1956), 2, 172－175.

[10] Агранович, М. С., 《Функц. анализ и его приложения》, **10** (1976), 3, 1-12.

[11] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965 (英译本: Gohberg, I.C. and Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1969).

[12] Кацнельсон, В. Э., 《Функц. анализ и его приложения》, **1** (1967), 2, 39-51.

[13] Лидский, В. Б., 《Докл. АН СССР》, **113** (1957), 1, 28-31.

[14] Костюченко, А. Г., 《Докл. АН СССР》, **158** (1964), 1, 41-44.

[15] Пономарев, С. М., 《Дифф. уравнения》, **10** (1974), 12, 2294-2296.

[16] Круковский, Н. М., 《Дифф. уравнения》, **12** (1976), 10, 1832-1851.

[17] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967 (英译本: Gohberg, I. C., [I. Ts. Gokhberg] and Krein, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1970).

[18] Бродский, М. С., Кисилевский, Г. Э., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **30** (1966), 6, 1213-1228.

[19] Никольский, Н. К., 《Докл. АН СССР》, **172** (1967), 2, 287-290.

[20] Наймарк, М. А., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **3** (1954), 181-270.

[21] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969 (中译本: M. A. 纳依玛克, 线性微分算子, 科学出版社, 1964).

[22] Гасымов, М. Г., 《Докл. АН АзССР》, **22** (1966), 10, 9-12.

[23] Марченко, В. А., 《Матем. сб.》, **52** (1960), 739-788.

[24] Садовничий, В. А., 《Тр. Семинара им. И. Г. Петровского》, 1976, 2, 211-221.

[25] Тамаркин, Я. Д., О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений···, Пг., 1917.

[26A] Ward, L. E., An irregular boundary value and expansion problem, *Ann of Math.*, (2), **26** (1925), 21-36.

[26B] Ward, L. E., A third order irregular boundary value problem and the associated series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 417-434.

[27] Хромов, А. П., 《Тр. Второй науч. конференции математич. кафедр педагогич. вузов Поволжья》 (Куйбышев), 1962, 1, 109-113.

[28] Михайлов, В. П., 《Докл. АН СССР》, **144** (1962), 5, 981-984.

[29] Кессельман, Г. М., 《Изв ВУЗов. Математика》, 1964, 2, 82-93.

[30] Ильин, В. А., 《Докл. АН СССР》, **230** (1976), 1, 30-33.

[31] Моисеев. Е. И., 《Докл. АН СССР》, **233** (1977), 6, 1042-1045.

[32] Тихомиров, В. В., 《Матем. сб.》, **102** (1977), 1, 33-55.

[33] Лидский, В. Б., 《Матем. сб.》, **57** (1962), 2, 137-150.

[34] Самарский, А. А., 《Успехи матем. наук》, **5** (1950), 3, 133-134.

[35] Тихонов, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **153** (1963), 1, 49-52; **39** (1943), 5, 195-198.

[36] Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М., 《Докл. АН СССР》, **88** (1953), 4, 593-596.

[37] Лидский, В. Б., Садовничий, В. А., 《Докл. АН СССР》, **176** (1967), 2, 259-262.

[38] Садовничий, В. А., 《Дифф. уравнения》, **10** (1974), 7, 1276-1285.

[39] Садовничий, В. А., Любишкин, В. А., 《Докл. АН СССР》, **261** (1981), 2, 290-293.

[40] Келдыш, М. В., Лидский, В. Б., в кн., Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, Л., **1** (1963), 101-120.

[41] Lax, P. D. and Philipps, R. S., Scattering theory for automorphic functions, Princeton Univ. Press, 1976.

[42] Sz.-Nagy, B. and Foiaş, Ch., Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, 1970.

[43] Маслов, В. П., Оператонрые методы, М., 1973 (英译本: Maslov, V. P., Operational methods, Mir, 1976).

[44] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral operators, 3, Interscience, 1971.

В. А. Садовничий 撰

【补注】 上面的主要文章给出了非自伴算子理论的一个部分的描述．Келдыш 的关于多重完全性的方法作了详细的解释．已由 М. Г. Крейн 和 H. Langer (见 [7]) 发展的第二个重要的方法只是刚刚接触到．Kreĭn-Langer 方法用因式分解作为一个工具．

考虑二次算子多项式 $L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda A_1+A_0$，其中 A_0 和 A_1 是作用在 Hilbert 空间 H_1 上的有界线性算子，并且设 Z 是 $L(\lambda)=0$ 的(右)算子根 (operator root)，即

$$Z^2+A_1Z+A_0=0 .$$

那么对每一个 $x\in H$，$\varphi(t)=e^{tz}x$ 是微分方程 $L(d/dt)\varphi=0$ 的一个解．问题之一是寻找 $L(\lambda)=0$ 的算子根 Z_1 和 Z_2，使得

$$\varphi(t)=e^{tz_1}x_1+e^{tz_2}x_2 ,$$

其中 x_1 和 x_2 取遍 H 中的所有向量，组成 $L(d/dt)\varphi=0$ 的所有解的集合．而且，如果这样的 Z_1 和 Z_2 已经找到，我们要知道什么时候方程

$$\varphi'=Z_1\varphi , \qquad \psi'=Z_2\varphi$$

初等解的线性生成在所有解的空间中稠密(在一个将定

义得更精确的意义下)．如果 Z 是一个算子根，那么 $\lambda I-Z$ 是 $L(\lambda)$ 的一个右因子，即

$$\lambda^2 I+\lambda A_1+A_0=(\lambda I-Y)(\lambda I-Z) . \qquad (A1)$$

Крейн-Langer 的方法用**不定度量空间**(space with an indefinite metric)的理论来得到(A1)型的因子分解，并且分析它们在 A_0 和 A_1 是自伴这种重要情形时的性质．这里自然地出现不定度量，因为友算子(companion operator)

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}$$

相对于不定度量

$$\left[\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right] = \langle A_1 x_1 + x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle$$

是自伴的，其中 A_0 和 A_1 相对于 H 上通常的积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是自伴的．所以 Крейн-Langer 方法是几何性质的，而 Келдыш 方法有解析的特征．

Крейн-Langer 方法导致二个研究方向．一个以 Langer 为主要贡献者之一，继续使用并且进一步发展不定度量空间算子理论的几何方法．另一个方向采用关于算子值函数的 Wiener-Hopf 因子分解方法，并且用这些解析工具来研究多项式和解析算子函数的谱性质．这里主要的贡献者是 A.C.Маркус 和 B. И. Мацаев．Келдыш 方法和 Крейн-Langer 方法在 [A1] 中作了很好的介绍. 平行地，但是更强调有限维情形，因子分解方向在西方文献中也得到了发展．在后者，与数学系统理论的联系起了重要的作用(见，例如 [A2]-[A4])．

非自伴算子理论中的第三个主要方法，可能是这个领域中最老的，是 M.C.Лифшиц 在 20 世纪 40 年代中引进的．这里的主要工具是特征算子函数(characteristic operator function)，他以下面的方式

$$I+2iK^*(\lambda-A)^{-1}KJ$$

联系于一个任意的算子 A，其中 J 是一个符号算子(signature operator) (即 $J=J^*=J^{-1}$)，并且 $2iKJK^*=A-A^*$．这个函数作为算子 A (排除某些平凡自伴部分)的一个酉不变量，并且在一些重要情形下，它比原来的算子容易分析得多．特征算子函数有令人感兴趣的性质，例如，从它的因子可以读出算子 A 的不变子空间．特征算子函数的理论在许多不同的方向上已由 M. C.Бродский, Л. А. Сахнович, И. Ч. Гохберг 和 Крейн 加以延拓(见 [A5],[A6],[11],[17])．与特征算子函数理论有关的一个影响深远的发展涉及 B.Sz-Nagy 和 C. Foiaş 对压缩算子的研究([42])，它已导致对一类广泛的非自伴算子的完全的了解([A7])．

非自伴算子理论中另一个开创性的方法属于 L.de Branges 和他的合作者([A8],[A9])．Branges 的方法建立在对整向量值函数空间的理论深刻分析的基础上．这里映射

$$f \to z^{-1}(f(z)-f(0))$$

提供了主要的模型．最近这个处理通过给出 **Bieberbach 猜想**(Bieberbach conjecture)的一个证明导致巨大的成功([A10])．

参考文献

[A1] Markus, A.S., Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils, Amer. Math. Soc., 1986 (译自俄文).

[A2] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., Matrix polynomials, Acad. Press, 1982.

[A3] Bart, H., Gohberg, I. and kaashoek, M. A., Minimal factorization of matrix and operator functions, Birkhaüser, 1979.

[A4] Rodman, L., Introduction to operator polynomials, Birkhaüser, 1989.

[A5] Livšic, M.S., [M.S. Lifshits], Operators, oscillations, waves, Amer. Math. Soc., 1973 (译自俄文).

[A6] Brodskiĭ, M.S., Triangular and Jordan representations of linear operators, Amer. Math. Soc., 1971 (译自俄文).

[A7] Bercovici, H., Operator theory and arithmetic in H^∞, Amer. Math. Soc., 1988.

[A8] Branges, L. de, Hilbert spaces of entire functions, Prentice-Hall, 1968.

[A9] Branges, L. de and Rovnyak, J., Square summable power series, Rinehart & Winston, 1966.

[A10] Branges, L. de, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154** (1985), 137-152.

[A11] Brodskiĭ, M. S. and Livšic, M. S. [M. S. Lifshits], spectral analysis of non-selfadjoint operators and intermediate systems, *Transl. Amer. Math. Soc.*(2), **13** (1960), 265-346.

[A12] Dowson, H. R., Spectral theory of linear operators, Acad. Press, 1978.

鲁世杰 译 葛显良 校

非奇异边界点 [**non-singular boundary point**; **неособая граничная точка**]，正则边界点(regular boundary point)

复变量 z 的单值解析函数 $f(z)$ 的定义域 D 的**可达边界点**(attainable boundary point) ζ，使得 $f(z)$ 沿 D 内任一到达 ζ 的路径都有一个到达 ζ 的**解析延拓**(analytic continuation)．换言之，非奇异边界点是可达的，但不是奇异的．亦见解析函数的**奇点**(singular point)．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 注意 D 的边界上的同一个点可以引起一些不同的可达边界点，其中某些可能是奇异的，另一些是正则的．例如，考虑区域 $D=\mathbf{C}\setminus(-\infty, 0]$ 以及函

数 $f(z)=(h(z)-\pi i)^{-1}$，其中 h 是 $\log z$ 的主值．这时在 -1 "之上" 有两个可达边界点：一个是奇异的，对应于沿 $z=-1+it(0\leqslant t\leqslant 1)$ 接近 -1；一个是正则的，对应于沿 $z=-1-it(0\leqslant t\leqslant 1)$ 接近 -1．

参考文献

[A1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., М., 1963 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

沈永欢 译

非奇异矩阵 [**non-singular matrix; неособенная матрица**]，非退化矩阵 (non-degenerate matrix)

其行列式不等于零的方阵 (square matrix)．对于一个域上的方阵 A，非奇异性等价于下述条件之一：1) A 是可逆的；2) A 的诸行（列）是线性无关的；3) A 可以通过初等行（列）变换化为单位矩阵．

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kurosh, A. G., Matrix theory, Chelsea, reprint, 1960 (译自俄文).

[A2] McDonald, B. R., Linear algebra over commutative rings, M. Dekker, 1984.

张鸿林 译

不可光滑流形 [**non-smoothable manifold; несглаживаемое многообразие**]

不存在光滑结构的分片线性或拓扑**流形** (manifold)．

分片线性流形 X 的光滑化是分片线性同构 $f:M\to X$，其中 M 是光滑流形．不允许光滑化的流形称为不可光滑的 (non-smoothable) 流形，作一些修改，这也适用于拓扑流形．

不可光滑流形的例子．设 $W^{4k}(k>1)$ 是一个 $4k$ 维的 Milnor 流形（见**无圈流形** (dendritic manifold)，即树状流形)．特别地，W^{4k} 是可平行的，它的**符号差** (signature) 是 8，它的边界 $M=\partial W^{4k}$ 同伦等价于球面 S^{4k-1}．在 ∂W 上，给 W 粘上一个锥 CM 得到空间 P^{4k}．因为 M 是分片线性球面（见一般 **Poincaré 猜想** (Poincaré conjecture))，CM 是分片线性盘，所以 P 是分片线性流形．另一方面，P 是不可光滑的，因为它的符号差是 8，而殆可平行的（即移动一个点后是平行的）4 维流形的符号差是随着 k 指数增长的数 σ_k 的倍数．流形 M 不微分同胚于球面 S^{k-1}，那就是，M 是 **Milnor 球面** (Milnor sphere)．

分片线性流形可光滑的判别准则如下．设 O_n 是正交群，PL_n 是保持原点的 $\mathbf{R}^n$ 的分片线性同胚的群（见**分片线性拓扑** (piecewise-linear topology))．包含映射 $O_n\to \mathrm{PL}_n$ 诱导了纤维化 $BO_n\to B\mathrm{PL}_n$，其中 BG 是群 G 的**分类空间** (classifying space)．当 $n\to\infty$ 时，产生一个纤维化 $p:BO\to B\mathrm{PL}$，它的纤维记作 M/O．分片线性流形 X 有带分类映射 $\nu:X\to B\mathrm{PL}$ 线性稳定法丛 u．如果 X 是可光滑（或光滑）的，则它有带有分类映射 $\overline{\nu}:X\to BO$ 和 $p\circ\overline{\nu}=\nu$ 的稳定法丛 $\overline{u}$．这个条件也是充分的，也就是说，闭分片线性流形 X 是可光滑的，当且仅当它的分片线性稳定法丛允许向量简化，换言之，如果映射 $\nu:X\to B\mathrm{PL}$ 可以"升腾"到 BO 上（存在 $\overline{\nu}:\overline{X}\to BO$ 使 $p\circ\overline{\nu}=\nu$)．

两个光滑化 $f:M\to X$ 和 $g:N\to X$ 称为等价的，如果存在微分同胚 $h:M\to N$，使得 hf^{-1} 是分片可微地同痕于 g^{-1}（见流形上的**结构** (structure))．光滑化的等价类的集合 $\mathrm{ts}(X)$ 是在附有 $\nu:X\to B\mathrm{PL}$ 的升腾 $\overline{\nu}:X\to BO$ 的纤维方式的同伦类的自然一一对应之中，换言之，当 X 可光滑时，$\mathrm{ts}(X)=[X,\mathrm{PL}/O]$．

参考文献

[1] Kervaire, M., A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 257–270.

[2] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

Ю. И. Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hirsh, M. W. and Mazur, B., Smoothings of piecewise linear manifolds, Princeton Univ. Press, 1974.

[A2] Siebenmann, L. C., Topological manifolds, in *Actès Congrès Internat. Mathématiciens Nice*, 1970, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1970, 133–163.

[A3] Smale, S., The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 373–375.

薛春华 译

非标准分析 [**non-standard analysis; нестандартный анализ**]

数理逻辑的一个分支，它用非标准模型理论研究数学分析、函数论、微分方程和概率论等传统数学领域．非标准分析的基本方法可粗略地描述如下．考虑某个数学结构 M 并构作反映其中研究者感兴趣的那些方面的一阶逻辑数学语言，然后用**模型论** (model theory) 方法构造作为 M 的真扩张的 M 理论的非标准模型 (non-standard model)．在适当的构造之下模型中新的非标准的元素可解释为原有结构的极限"理想"元素．例如，如果把实数域取成原有结构，那么自然可把模型的非标准元素取作"无穷量"，即可以无穷地大也可无穷地小但非零的实数．实数间的所有通常关系都可转移到非标准元素上，并使所有可用逻辑数学语言表达的性质保持不变．类似地，一给定集合上的滤子理论中滤子的所有非空元的交决定了一个非标准元

素；在拓扑学上则引出一组与一给定点“无穷接近”的非标准点．对模型中非标准元素的解释常常使得人们可以得到用非标准元素表述通常概念的方便准则．例如，可以证明一个标准的实值函数 f 在标准点 x_0 处连续，当且仅当对所有无穷接近 x_0 的（非标准）点 x，$f(x)$ 都无穷接近 $f(x_0)$．这样获得的准则可成功地用于证明通常的数学结果．

自然，用非标准分析方法得到的结果原则上也可在标准理论中证明，但考虑非标准模型有个显著的优点，即它允许人们实际引入“理想”元素作为自变元，这就使与从有限到无穷的极限转移有关的许多概念能得到清晰简明的表述．G．Leibniz 及其后继者关于无穷小非零量存在的一系列想法后来在数学分析发展中被变量极限的严格概念所取代，非标准分析则把他们的思想置于一个严格的数学基础之上．

通过非标准分析还发现了一些新事实．许多经典的证明经非标准分析得到了实质性的明朗化．非标准分析已成功地用于构造力学和物理学中某些半经验方法的严格理论．

参考文献

[1] Robinson, A., Non-standard analysis, North-Holland, 1966（中译本：A．鲁滨逊，非标准分析，科学出版社，1980）．

[2] Davis, M., Applied nonstandard analysis, Wiley, 1977.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】 最近非标准分析在许多方面特别是在随机分析、动力系统理论和数学物理上取得了进展．有关这方面的书可参看[A1]－[A5]．

参考文献

[A1] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press, 1986.

[A2] Stroyan, K. D. and Bayod, J. M., Foundations of infinitesimal stochastic analysis, North-Holland, 1986.

[A3] Hurd, A. E. and Loeb, P. A., An introduction to nonstandard real analysis, Acad. Press, 1985.

[A4] Cutland, N. (ed.), Nonstandard analysis and its applications, Cambridge Univ. Press, 1988.

[A5] Nelson, E., Radically elementary probability theory, Princeton Univ. Press, 1987.

[A6] Luxemburg, W. and Robinson, A. (eds.), Contributions to non-standard analysis, North-Holland, 1972.

[A7] Luxemburg, W. and Stroyan, K., Introduction to the theory of infinitesimals, Acad. Press, 1976.

孙智伟 译

非游荡点 [non-wandering point; неблуждающая точка]，动力系统的

动力系统的相空间中不是**游荡点**（wandering point）的点．

齐民友 译

范数，范 [norm; норма]

1）从实或复数域上**向量空间**（vector space）到实数中的映射 $x \to \|x\|$，满足条件：

$\|x\| \geqslant 0$，且仅对 $x=0$，$\|x\|=0$；

$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$，对每一标量 λ；

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，对所有 $x, y \in X$（三角公理（triangle axiom））．数 $\|x\|$ 称为元素 x 的范数（norm of an element）．

具有特定范数的向量空间称为**赋范空间**（normed space）．一个范数在 X 上由公式 $\mathrm{dist}(x, y) = \|x-y\|$ 导出一个**度量**（metric），因而也导出一个与此度量相容的拓扑．所以赋范空间赋有**拓扑向量空间**（topological vector space）的自然结构．在此度量下完全的赋范空间称为 **Banach 空间**（Banach space）．每一赋范空间有一 Banach 完全化．

一个拓扑向量空间称为可赋范的（normable），如果它的拓扑与某范数相容．可赋范性等价于存在零点的某一凸有界邻域（Колмогоров 定理（Kolmogorov theorem，1934））．

赋范向量空间 X 的范数由一**内积**（inner product）生成（即 X 是等距同构于一**准 Hilbert 空间**（pre-Hilbert space）），当且仅当对所有的 $x, y \in X$，

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

同一向量空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 称为等价的（equivalent）如果它们导出同样的拓扑．这等同于存在两个常数 C_1 和 C_2 使得

$$\|x\|_1 \leqslant C_1 \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1，对所有的 x \in X.$$

如果 X 按两个范数是完全的，则它们的等价性是相容性的结果．这里相容性是指极限关系式

$$\|x_n - a\|_1 \to 0,\ \|x_n - b\|_2 \to 0$$

蕴涵 $a=b$．

并非每一拓扑向量空间都有连续的范数，即使假定它是局部凸的．例如在带有按坐标收敛的直线的无穷乘积上没有连续的范数．没有连续范数是一个拓扑向量空间到另一个中的连续嵌入的明显障碍．

如果 Y 是赋范空间 X 的闭子空间，则由 Y 的陪集组成的商空间 X/Y 可赋予范数

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x\| : x \in \tilde{x}\},$$

使它成为赋范空间．一个元素 x 在商映射 $X \to X/Y$ 下的象的范数称为 x 关于 Y 的商范数（quotient norm）．

在一赋范空间 X 上连续线性泛函 ψ 的全体 X^* 关于范数

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$$

形成一个 Banach 空间. 所有泛函的范数在原空间单位球的适当点达到，当且仅当此空间是自反的（见**自反空间**（reflexive space)).

从赋范空间 X 到赋范空间 Y 中的连续（有界）线性算子全体 $L(X, Y)$ 引入算子范数（operator norm）:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|: \|x\| \leqslant 1\}$$

后成为赋范空间. 如果 Y 是完全的，在此范数下 $L(X, Y)$ 是完全的. 当 $X=Y$ 是完全的时，空间 $L(X)=L(X, X)$ 具有算子乘法（合成），成为一个 **Banach 代数**（Banach algebra)，因为对算子范数有

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|I\| = 1,$$

这里 I 是恒等算子（此代数中的单位元素）. $L(X)$ 上满足同样条件的其他等价范数也是有趣的. 这样的范数有时称为代数的（algebraic）或戴环的（ringed). 代数范数可由等价地对 X 重新赋范且取相应的算子范数而得到；然而，即使对 $\dim X=2$，并不是 $L(X)$ 上所有的代数范数都能由这样的方式得到.

一个向量空间 X 上的准范数（pre-norm）或半范数（semi-norm）是定义为具有除了非退化性以外的范数性质的映射 p: $p(x)=0$ 不排除 $x \neq 0$. 如果 $\dim X < \infty$，则 $L(X)$ 上满足条件 $p(AB) \leqslant p(A)p(B)$ 的非零半范数确实都是范数（因为这种情况下 $L(X)$ 没有非平凡的双边理想）. 但是对无穷维赋范空间不是如此. 如果 X 是 $\mathbf{C}$ 上 Banach 代数，则谱半径

$$|x| = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

是半范数，当且仅当它在 X 上一致连续，且此条件等价于：关于根基的商代数是交换的.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯尔莫果洛夫，С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，高等教育出版社，1992).

[2] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965（中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概要，第二版，科学出版社，1985).

[3] Шилов, Г. Е., Математический анализ.（Специальный курс), 2 изд., М., 1961（英译本：Shilov, G. E., Mathematical analysis, 1-2, M. I. T., 1974).

[4] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977（中译本：Л. В. Канторович, Г. П. Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982).

[5] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1979（中译本：W. Rudin，泛函分析，湖北教育出版社，1989).

[6] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1973.

[7] Глазман, И. М., Любич, Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969（英译本：Glazman, I. M. and Lyubich, Yu. I., Finite-dimensional linear analysis: a systematic presentation in problem form, M. I. T., 1974).

[8] Aupetit, B., Propriétés spectrales des algèbres de Banach, Springer, 1979.

[9] Кириллов, А. А., Гвишиани, А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1979（中译本：А. А. 克里洛夫，А. Д. 格维沙尼，泛函分析理论·习题·解答，辽宁大学出版社，1987).

Е. А. Горин 撰

【补注】 所有泛函的范数在原空间 X 的单位球的点上达到当且仅当 X 是自反的，这定理称为 James 定理（James theorem).

参考文献

[A1] Beauzamy, B., Introduction to Banach spaces and their geometry, North-Holland, 1982.

[A2] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, 1-2, Springer, 1977 – 1979.

2）代数中的范数见**域上的范数**（norm on a field）或环上的范数（亦见**赋值**（valuation)).

3）群的范（norm of a group）是与所有子群可交换的群元素的集合，即所有子群的正规化子的交（见**子集的正规化子**（normalizer of a subset)). 这个范包含此**群的中心**（centre of a group）且被包含在第二**超中心**（hypercentre）Z_2 中. 对有平凡中心的群，其范是平凡子群 E.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本：库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982).

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized solvable groups, 2, Springer, 1972, p. 45.

葛显良 译 鲁世杰 校

范映射 [norm map; норменное отображение]

域 K 到 k 中的映射 $N_{K/k}$，K 是 k 的有限扩张（见**域的扩张**（extension of a field)). 此映射将 $\alpha \in K$ 映为 $N_{K/k}(\alpha)$，也就是 k 线性映射 $K \to K$，$x \mapsto \alpha x$ 的矩阵的行列式 $N_{K/k}(\alpha)$，称为元素 α 的范数（norm of the element).

我们有 $N_{K/k}(\alpha)=0$，当且仅当 $\alpha=0$. 对任意 $\alpha, \beta \in K$,

$$N_{K/k}(\alpha\beta) = N_{K/k}(\alpha) N_{K/k}(\beta),$$

就是说 $N_{K/k}$ 诱导出乘法群同态 $K^{*}\to k^{*}$，也称为范映射（norm map）．对任意 $\alpha\in k$，

$$N_{K/k}(\alpha)=\alpha^{n},$$

$n=[K:k]$．群 $N_{K/k}(K^{*})$ 称为 k^{*} 的范子群（norm subgroup）或范群（group of norms）（从 K 到 k 的）．如果

$$f(x)=x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}$$

是 $\alpha\in K$ 在 k 上的特征多项式，则

$$N_{K/k}(\alpha)=(-1)^{n}a_{0}.$$

假定 K/k 是可分的（见**可分扩张**（seperable extension）），则对任意 $\alpha\in K$，

$$N_{K/k}(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\sigma_{i}(\alpha),$$

这里 σ_{i} 是 K 到 k 的**代数闭包**（algebraic closure）$\bar{k}$ 的全部同构．

范数映射是传递的．若 L/K, K/k 都是有限扩张，则对任一 $\alpha\in L$，有

$$N_{L/k}(\alpha)=N_{K/k}(N_{L/K}(\alpha)).$$

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

[2] Боревич, З.И., Шафаревич, И.Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972（英译本：Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966）.

Л. В. Кузьмин 撰　冯绪宁 译

域上的范数 [**norm on a field**; **абсолютное значение на теле**]

域 K 到实数集 $\mathbf{R}$ 上的映射 φ，满足下列条件：

1) $\varphi(x)\geqslant 0$, 且 $\varphi(x)=0$，当且仅当 $x=0$；

2) $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$；

3) $\varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)$．

因此 $\varphi(1)=\varphi(-1)=1$, $\varphi(x^{-1})=\varphi^{-1}(x)$．

x 的范数常记为 $|x|$，以代替 $\varphi(x)$．范数也被称为绝对值（absolute value）或乘法赋值（multiplicative valuation）．范数（更一般地）可以在任一环上考虑，取值在一线性序群上，也见**赋值**（valuation）．

范数的例子　如果 $K=\mathbf{R}$，实数域，则 $|x|=\max\{x,-x\}$，即 $x\in\mathbf{R}$ 的通常的**绝对值**（absolute value）或模（modulus），就是范数．类似地，如 K 是复数域 $\mathbf{C}$ 或四元数体 $\mathbf{H}$，则 $|x|=\sqrt{x\cdot\bar{x}}$ 是范数．这个域（或体）中的子域（子体）被赋予了诱导范数．任何一个域有一个平凡范数（trivial norm）：

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 1, & x\neq 0.\end{cases}$$

有限域以及其代数扩张只能有平凡赋值．

另一种类型的范数的例子由域 K 的对数赋值提供：如 v 是 K 在 $\mathbf{R}$ 中的一个赋值，a 是一实数，且 $0<a<1$，则 $\varphi(x)=a^{v(x)}$ 是一个范数．例如，$K=\mathbf{Q}$, v_{p} 是域 $\mathbf{Q}$ 的 p 进赋值，则 $|x|_{p}=(1/p)^{v_{p}(x)}$ 称为 p 进绝对值（p-adic absolute value）或 p 进范数（p-adic norm）．这种绝对值满足下列强于 3) 的条件：

4) $\varphi(x+y)\leqslant\max\{\varphi(x),\varphi(y)\}$．

满足 4) 的范数称为**超度量范数**（ultrametric norms）或**非 Archimedes 范数**（non-Archimedean norms）（与 Archimedes 范数不同的是，后者不满足 4)，（当然满足 3)）．二者是由下列事实区分的，即 $\varphi(n,1)\leqslant 1$，对一切整数 n．在特征 $p>0$ 的域中，所有范数都是超度量的．所有超度量范数均可由赋值通过上面所说的方法得到：$\varphi=a^{v(x)}$（反之，$-\log\varphi$ 总可取作赋值）．

如果定义 $\varphi(x-y)$ 为 x 与 y 之间的距离，则 φ 就在 K 中定了**度量**（metric），这样就在 K 上定义了拓扑．任一局部紧域的拓扑都是由某个范数定义的．两个范数 φ_{1} 和 φ_{2} 是等价的，如果它们定义出相同的拓扑，此时存在 $\lambda>0$，使得对一切 $x\in K$，有 $\varphi_{1}(x)=\varphi_{2}(x)^{\lambda}$．

所有 Archimedes 范数的结构由 Островский 定理（Ostrowski theorem）给出：如 φ 是域 K 上的 Archimedes 范数，则存在一个 K 到 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ 之一的某个稠密子域中的同构，使得 φ 等价于从 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ 的范数诱导出的范数．

有理数域 $\mathbf{Q}$ 的任一非平凡范数或等价于 p 进范数（p 为一素数），或等价于通常范数．对任一有理数 $r\in\mathbf{Q}$，有

$$|r|\prod_{p}|r|_{p}=1.$$

类似的公式在代数数域中也成立（[2],[3]）．

若 φ 是域 K 的范数，则 K 可由经典完全化过程嵌入到 K_{φ} 中，K_{φ} 相对于 φ 的唯一扩充范数是完全的（见**完全拓扑空间**（complete topological space））．研究域的一个主要的现代方法就是将 K 嵌入到 K 相对于一切非平凡范数的完全化的直接积 $\prod_{\varphi}K_{\varphi}$ 中（见 **Adèle**）．如果 K 容许有非平凡赋值，则在 Adèle 拓扑中 K 在 $\prod_{\varphi}K_{\varphi}$ 里是稠密的．事实上，设 $\varphi_{1},\cdots,\varphi_{n}$ 是 K 的不等价的非平凡范数，$a_{1},\cdots,a_{n}$ 是 K 中元素，$\varepsilon>0$，则存在 $a\in K$，使得对一切 i, $\varphi_{i}(a-a_{i})<\varepsilon$（范数的逼近定理（approximation theorem for norms））．

域 K 的范数可以扩张到 K 的代数扩域上（一般不唯一）．如果 K 相对于范数 φ 是完全的，L 是 K 的 n 次扩张，则 φ 到 L 中的扩张是唯一的，并由以下公式给出：对一切 $x\in L$，

$$\varphi'(x)=\{\varphi(N_{L/K}(x))\}^{1/n}.$$

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

[2] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972(英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1986).

[3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

[4] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973(英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963).

[5] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986. В. И. Данилов 撰

【补注】 非 Archimedes 范数满足 $\varphi(n\cdot 1)\leqslant\varphi(1)$，因此不满足 **Archimedes 公理**(Archimedean axiom)，故此得名. 冯绪宁 译

范剩余符号[norm-residue symbol; символ норменного вычета]，范剩余(norm residue)，Hilbert符号(Hilbert symbol)

把**局部域**(local field)K 的乘法群 K^* 中的有序元素对 x,y 映射到元素$(x,y)\in K^*$ 的一个函数，此元素是 n 次单位根. 这个函数可以定义如下: 设 $\zeta_n\in K$ 是一个 n 次本原单位根，将所有 $a\in K^*$ 的根 $a^{1/n}$ 添加到 K上，就得到 K 的指数为 n 的极大 Abel 扩张 L，其 Galois 群为 $G(L/K)$. 另一方面，有一个典范同构(局部**类域论**(class field theory)的基本同构)

$$\theta: K^*/K^{*n}\to \mathrm{Gal}(L/K).$$

一对元素的范剩余 (x, y) 则由

$$\theta(y)(x^{1/n})=(x,y)x^{1/n}$$

定义. D. Hilbert 对于 $n=2$ 时二次域的特殊情形引进了范剩余符号的概念. 在[4]中有仅仅应用局部类域论给出的范剩余符号的精确定义.

符号 (x, y) 的性质:

1)双线性: $(x_1x_2, y)=(x_1,y)(x_2,y),(x,y_1y_2)=(x,y_1)(x,y_2)$;

2)斜对称性: $(x,y)(y,x)=1$;

3)非退化性: 对所有的 $x\in K^*$, $(x, y)=1$ 蕴含着 $y\in K^{*n}$; 对所有的 $y\in K^*$, $(x,y)=1$ 蕴含着 $x\in K^{*n}$;

4)如果 $x+y=1$，则 $(x, y)=1$;

5)如果 σ 是 K 的自同构，则

$$(\sigma x, \sigma y)=\sigma(x, y);$$

6)设 K' 是 K 的有限扩张，$a\in K'^*$, $b\in K^*$，则

$$(a, b)=(N_{K'/K}(a), b),$$

其中左端的范剩余符号看作是关于 K' 的，而右端则是关于 K 的，$N_{K'/K}$ 是由 K' 到 K 的**范映射**(norm map).

7) $(x, y)=1$ 蕴含着 y 是扩张 $K(x^{1/n})$ 中的一个范数(这条性质给出了此符号的名称的解释).

函数 (x, y) 诱导出非退化的双线性配对

$$K^*/K^{*n}\times K^*/K^{*n}\to\mu(n),$$

其中 $\mu(n)$是由 ζ_n 生成的单位根群. 设 $\psi: K^*\times K^*\to A$ 是到 Abel 群 A 的映射，它满足1), 4)以及连续性条件(condition of continuity): 对任一 $y\in K^*$，集合$\{x\in K^*: \psi(x,y)=1\}$在 K^* 中是闭的，则范剩余符号具有下述的泛性质(universal property)([3]): 如果 n 是 K 中单位根的个数，则存在同态 $\varphi:\mu(n)\to A$，使得对任意的 x, $y\in K^*$，都有

$$\psi(x, y)=\varphi((x, y)).$$

这个性质可以作为范剩余符号的基本公理定义.

如果 F 是一个**整体域**(global field)，K 是 F 关于某个位 v 的完备化，则把定义在 $F^*\times F^*$ 上的由(局部)范剩余符号和自然嵌入 $F^*\to K^*$ 复合所得到的函数 $(x, y)_v$ 亦称为范剩余符号.

有时，范剩余符号定义为由局部**类域论**(class field theory)给出的 K 的极大 Abel 扩张的对应于元素 $x\in K^*$ 的自同构 $\theta(x)$.

参考文献

[1] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad Press, 1986.

[2] Koch, H., Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1970.

[3] Milnor, J., Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971.

[4] Шафаревич, И. Р., 《Матем. сб.》, **26** (1950). 1, 113-146. Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Iwasawa, K., Local class field theory, Oxford Univ. Press, 1986.

[A2] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986.

赵春来 译

法线[normal; нормаль]，曲线(或曲面)上一点处的过该点并垂直于曲线(或曲面)在该点处的**切线**(tangent)(或**切平面**(tangent plane))的直线. 光滑平面曲线在其上每个点处有位于曲线所在平面上的唯一的一条法线. 如果平面曲线由直角坐标方程 $y=f(x)$ 给定，则此曲线在点 (x_0, y_0) 处的法线方程的形式为

$$(x-x_0)+(y-y_0)f'(x_0)=0.$$

空间曲线在其上每个点处有无穷多条法线; 它们

构成一个平面(**法平面**(normal plane)). 位于**密切平面**(osculating plane)上的法线称为**主法线**(principal normal); 垂直于密切平面的法线称为**副法线**(binormal).

由方程 $z=f(x, y)$ 给定的曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线由

$$\begin{cases}(x-x_0)+(z-z_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ (y-y_0)+(z-z_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

确定, 其中 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ 取点 (x_0, y_0) 处的偏导数值.

如果曲面方程具有形式 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$, 则其法线的参数表示为

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v].$$

БСЭ-3

【补注】 法线概念显然可推广到 n 维 Euclid 空间 E^n 的 m 维子流形, 即以一个 $n-m$ 维仿射子空间作为所给流形在相应点处的 $n-m$ 维法平面. 对于(伪)Riemann 流形的子流形, 法平面考虑为环绕空间的切空间的子空间, 其中通过(环绕)(伪)Riemann 度量定义正交性. 亦见**法丛**(normal bundle); **法平面**(normal plane); **法空间(曲面的)**(normal space (to a surface)).

参考文献

[A1] Berger, M., Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988(译自法文).

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976.

[A4] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.

[A5] Blaschke, W., Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.

[A6] Chen, B.-Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.

沈永欢 译

正规算法 [normal algorithm; нормальный алгорифм]

某种严格刻画类型的**算法**(algorithm)的名称. 与**递归函数**(recursive function)及 **Turing 机**(Turing machine)一样, 正规算法也已被认为是作为算法直观概念的最佳抽象之一. 1947 年 A. A. Марков 在研究结合系统(见**结合演算**(associative calculus))的恒等问题时提出了正规算法的概念. 其详细定义与一般性理论由 [1] 给出(第一至五章); 亦见 [2](第一至七章).

每个正规算法 $\mathfrak{A}$ 都具有某个**字母表**(alphabet) A, 并伴随一个在**字**(word)上执行的意义明确的过程. 该字母表的描述作为一个不可缺少的组成部分出现在 $\mathfrak{A}$ 的定义里, 且在问题中总认为 $\mathfrak{A}$ 是字母表 A 的一个正规算法. 在固定字母表 A 的每个正规算法都完全由指示它的概形(scheme)即 A 中的一个有限有序的代换公式表来确定. 每个这样的公式本质上是 A 中字的有序对 (U, V). 这里 U 称为公式的左部分, V 称为右部分. 在给定概形的诸公式中, 有一些被特殊标出, 称为终结的(conclusive). 通常, 在正规算法的构型中一个终结的公式写成 $U\to\cdot V$ 形式; 非终结的写成 $U\to V$.

一个字母表 A 中的正规算法 $\mathfrak{A}$ 是一个构造约定, 开始由 A 中的任一字 P 开始, 遵循下述规则来构造一个字序列 P_i. 取字 P 作为序列初项 P_0, 设对于某个 $i\geqslant 0$, 字 P_i 已构造好, 而构造该序列的过程尚未完成. 此时, 如果在 $\mathfrak{A}$ 的概形中没有一个公式的左部出现于 P_i 中, 则令 P_{i+1} 等于 P_i, 序列构造过程完毕. 如果在 $\mathfrak{A}$ 的概形中有一些公式, 其左部出现于 P_i 中, 则取 P_{i+1} 为使用第一个这样的公式, 它的右部去替换其左部在 P_i 中首次出现所得到的结果(见**嵌入字**(imbedded word)), 如果取代公式是终结的, 则认为构造序列的过程完成; 否则过程继续. 如果构造相关序列的过程终止, 则称所考虑的正规算法 $\mathfrak{A}$ 可应用于字 P. 该序列最后一项 Q 是 $\mathfrak{A}$ 应用于 P 的结果, 并用符号 $\mathfrak{A}(P)$ 表示. 称 $\mathfrak{A}$ 将 P 转换为 Q, 并写成 $\mathfrak{A}(P)=Q$. 在 A 的任何扩充中的正规算法都称为这个字母表上的正规算法.

完全有理由假定正规算法的概念是**字母表上的算法**(algorithm in an alphabet). 这个一般概念的充分精确的形式化. 更准确地说, 可以假设对任一字母表 A 中的每一个算法 $\mathfrak{A}$, 人们能够构造一个 A 上的正规算法 $\mathfrak{B}$, 将 A 中任意字转换成与原始算法 $\mathfrak{A}$ 中相同的结果. 这个过程在算法理论中称为正规化原理(normalization principle). 基于正规算法的算法概念的形式化等价于其他已知的形式化(例如, 见 [3]). 因此, 这个正规化原理等价于 **Church 论题**(Church thesis), 后者假定**部分递归函数**(partial recursive function)的概念是对于可计算算术函数(见**可计算函数**(computable function))的非形式直观概念的一个充分形式化.

正规算法最初始于代数问题, 在许多需要算法精确概念的研究中, 正规算法已证明是一种便利的工具, 尤其是当研究的基本对象不具有算术性质, 但允许在某一字母表中以字的形式给出一个适当表示时(例如, 在**构造分析**(constructive analysis)中), 更是如此.

参考文献

[1] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (中译本：A. A. 马尔科夫，算法论，科学出版社，1959 - 1960).

[2] Markov, A. A. and Nagorny, N. M., The theory of algorithms, Kluwer, 1988 (译自俄文).

[3] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

H. M. Нагорный 撰

【补注】 1936 - 1937 年，A. M. Turing 描述了根据 Turing 数来有效计算的直觉概念的形式化恰好与可计算性直觉概念相一致的论题．在论证几种不同的形式化等价以后，A. Church 将 Turing 论题作了推广，所有足够强的形式化都精确地涵盖了 Turing 的概念 (Church 论题 (Church thesis))．

曹为理 译 王继民 校

正规解析空间 [**normal analytic space**; **нормальное аналитическое пространство**]

一个**解析空间** (analytic space), 它的所有点的局部环是正规的 (normal), 亦即都是整闭的整环．解析空间 X 的一点 x 称为正规的 (normal) (亦称 X 在 x 是正规的)，如果局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是正规的．在这样一点的一邻域，这空间有一约化且不可约的模．每一简单 (非奇异) 点是正规的．一正规解析空间的最简单例子是一**解析流形** (analytic manifold)．

以后 (完全非离散赋范的) 基域 k 假定是代数闭的．在这情形下，关于正规解析空间的最完全结果已经得到 (见 [1])，并且一正规化理论已经构造出来 ([2])，它给出任意约化解析空间和正规解析空间之间的自然联系．令 $N(X)$ 为一解析空间 X 的非正规点的集合，并令 $S(X)$ 为 X 的奇异点的集合 (见**奇异点** (singular point))．那么：

1) $N(X)$ 和 $S(X)$ 为 X 的闭解析子空间且 $N(X) \subset S(X)$;

2) 对 $x \in X \setminus N(X)$

$$\dim_x S(X) \leqslant \dim_x X - 2$$

(即一正规解析空间在余维 1 中是光滑的);

3) 如果 X 是在 x 的一完全交且如果上列不等式成立，那么 X 在该点是正规的．

一约化解析空间 X 的正规化 (normalization) 是一对 $(\widetilde{X}, \nu)$，其中 $\widetilde{X}$ 是一正规解析空间，又 $\nu: \widetilde{X} \to X$ 是一有限满解析映射诱导开集

$$\widetilde{X} \setminus \nu^{-1}(N(X)) \to X \setminus N(X)$$

的一同构．除一同构外，正规化是唯一决定的，即如果 $(\widetilde{X}_1, \nu_1)$ 和 $(\widetilde{X}_2, \nu_2)$ 是两个正规化

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{X}_2 \\ & {\scriptstyle \nu_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \nu_2} & \\ & X & \end{array}$$

那么存在唯一的解析同构 $\varphi: \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$，使得图是可交换的．正规化是存在的且有下列性质．对每一点 $x \in X$, X 在 x 的不可约分量的集合 $\nu^{-1}(x)$ 是一一对应的．结构层 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ 的直接映象 $\nu_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$ 在点 $x \in X$ 的纤维，是自然同构于环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 在它的完全分式环中的整闭包．

在 $\mathbf{C}$ 上的正规解析空间可以用全纯函数的解析延拓来引进 ([3])．亦即一约化复空间是正规的，当且仅当 Riemann 关于可去奇点的第一定理 (Riemann first theorem on the removal of singularities) 成立：如果 $U \subset X$ 是一开集，那么任何在 $U \setminus A$ 全纯且在 U 上局部有界的函数，可唯一解析延拓到一在 U 上的全纯函数．对正规复空间 Riemann 关于可去奇点的第二定理 (Riemann second theorem on the removal of singularities) 也成立：如果在每一点 $x \in A$, $\operatorname{codim}_x A \geqslant 2$, 那么所考虑的解析延拓是可能的，不必要求函数是有界的．一约化复空间 X 是正规的，当且仅当对每一开集 $U \subset X$ 全纯函数的限制映射

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U \setminus S(X), \mathcal{O}_X)$$

是一一映射．正规的性质也可用局部上同调的语言来表述——它等价于 $H^1_{S(X)}\mathcal{O}_X = 0$ (见 [5])．对任何约化复空间 X, 我们可以定义弱全纯函数 (weakly holomorphic functions) (即满足 Riemann 第一定理的条件的函数) 芽环的层 $\widetilde{\mathcal{O}}_X$．环 $\widetilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ 作为一 $\mathcal{O}_{X,x}$ 模原来是有限的，并且等于 $\mathcal{O}_{X,x}$ 在它的完全分式环中的整闭包．换言之，$\widetilde{\mathcal{O}}_X = \nu_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})$，其中 $\nu: \widetilde{X} \to X$ 是正规化映射．

正规复空间也可用如下方式刻画：一个复空间是正规的，当且仅当它的每一点都有一邻域允许一个到 $\mathbf{C}^n$ 中的一区域上的解析覆盖 (见 [3], [8])．

一个约化复空间 X 是一 **Stein 空间** (Stein space)，当且仅当它的正规化 $\widetilde{X}$ 具有这个性质 (见 [4])．对正规复空间我们可以拓广 Hodge 度量的概念 (见 **Kähler 度量** (Kähler metric))．小平的射影嵌入定理 ([6]) 可以带入具有这样的度量的紧正规空间．

在代数几何方面我们考虑类似的正规解析空间：正规代数簇 (见**正规概形** (Normal scheme))．对一完全非离散正规域上的代数簇，这两个概念是相同的 (见 [7], [1])．

参考文献

[1] Abhyankar, S. S., Local analytic geometry, Acad. Press, 1964.

[2] Houzel, C., Géometrie analytique locale I, in *Sém. H. Cartan Ann. 13 1960 / 61*, Vol. 2, 1963, Exp. 18-21.

[3] Grauert, H. and Remmert, R., Komplexe Räume, *Math. Ann.*, **136** (1958), 245-318.

[4] Narasimhan, R., A note on Stein spaces and their normalisations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16** (1962), 327-333.

[5] Siu, Y. T. and Trautmann, G., Gap sheaves and extensions of coherent analytic subsheaves, Springer, 1971.
[6] Grauert, H., Ueber Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 331-368.
[7] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2, Springer, 1960.
[8] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических Функций многих комплексных переменных, М., ч. 1, 1962. (英译本: Fuks, B. A., Theory of analytic functions of several complex variables, 1, Amer. Math. Soc., 1963).
Д. Н. Ахиезер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitney, H., Complex analytic varieties, Addison-Wesley, 1972, Chapt. 8.
钟同德 译

法丛 [**normal bundle**; **нормальное расслоение**], 子流形的

由原来流形的与子流形正交的切向量所构成的向量丛. 如果 X 是 **Riemann 流形** (Riemannian manifold), Y 是它的(浸入)子流形, T_X 和 T_Y 是 X 和 Y 上的**切丛** (tangent bundle), 则 Y 的法丛 $N_{Y/X}$ 是 $T_X|_Y$ 的子丛, 它由这样的向量 $u\in T_{X,y}$ 组成: u 与 $T_{Y,y}$ 垂直.

借助于法丛, 可以构造, 比如, 子流形的**管状邻域** (tubular neighbourhood). 在等价的意义下, Y 上的法丛不依赖于 X 上 Riemann 度量的选择, 因为无需求助于度量可以直接将它定义为切丛 T_X 在 Y 上的限制模掉向量丛 T_Y 的商丛 $T_X|_Y/T_Y$. 稍许一般一点可以构造可微流形之间任意浸入(见**流形的侵入** (immersion of a manifold)) $f: Y\to X$ 的法丛:

$$N_{Y/X}=f^*T_X/T_Y.$$

类似地, 可以定义非奇异**代数簇** (algebraic variety) $\bar{X}$ 的非奇异代数子簇 Y 的法丛或者**解析流形** (analytic manifold) X 的解析子流形 Y 的法丛, 它是 Y 上秩为 codim Y 的代数(或解析) 向量丛. 特别地, 若 codim $Y=1$, 则 $N_{Y/X}$ 同构于 X 上决定除子 Y 的丛在 Y 上的限制.

当 Y 是解析空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 的解析子空间时, Y 的法丛有时定义为向量空间的解析簇, 它对偶于余法层 $N^*_{Y/X}$ (见**法层** (normal sheaf)). 至于法丛对子流形的可缩性问题的应用, 见**例外解析集** (exceptional analytic set); **例外子簇** (exceptional subvariety).

参考文献

[1] Итоги науки и техники. Алгебра. Торология. Геометрия, т. 15, М., 1977, 132-156.
[2] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.
[3] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М. 1977 (英译本: Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology: geometric chapters, Springer, 1984).
[4] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.
[5] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).
А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.
潘建中 译 沈信耀 校

正规复形 [**normal complex**; **нормальный комплекс**], 半群 S 的

满足下述条件的非空子集 $N\subseteq S$: 对于任意 $x, y\in S^1$ (这里, 当 S 包含单位元时, $S^1=S$; 当 S 不包含单位元时, S^1 为在 S 中添加一个单位元所得到的半群) 和任意 $a, b\in N$, 由 $xay\in N$ 可推出 $xby\in N$. 子集 N 是半群 S 的正规复形, 当且仅当 N 是 S 上某个同余的一个类 (见**同余(代数学中的)** (congruence (in algebra))).

参考文献

[1] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).
Л. Н. Шеврин 撰 王 杰 译 石生明 校

范数收敛 [**normal convergence**; **нормальная сходимость**]

由集合 X 到赋范空间 Y 中的有界映射 $u_k: X\to Y$ 构成的级数

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{1}$$

的如下的收敛性: 由这些映射的范数

$$\|u_k\|=\sup\{\|u_k(x)\|: x\in X\}$$

构成的正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\|$ 收敛.

级数 (1) 范数收敛蕴涵由 Y 的元素构成的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 绝对并一致收敛, 但反之不然. 例如, 如果 $u_k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是由 $u_k(x)=\sin(\pi x)/k$ (对于 $k\leqslant x\leqslant k+1$) 和 $u_k(x)=0$ (对于 $x\in\mathbf{R}\setminus[k,k+1]$) 定义的实值函数, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 绝对收敛, 然而 $\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k\|=\sum_{k=1}^{\infty}1/k$ 发散.

特别地, 假定每个 $u_k: \mathbf{R}\to Y$ 是非紧区间 $I\subset\mathbf{R}$ 中的分段连续函数且 (1) 范数收敛, 则在 I 上可以逐项积分:

$$\int_I f(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_I u_k(t)dt.$$

设 $f: I\times A\to Y$(这里 $I\subset \mathbf{R}$ 是一个区间)在 I 的每个点处具有左、右极限，则反常积分

$$\int_I f(t;\lambda)dt,\ \lambda\in A$$

称为在集合 A 上是范数收敛的(normally convergent)，如果存在分段连续正函数 $g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得：1) 对任一 $x\in I$ 和任一 $\lambda\in A$，有 $\|f(x;\lambda)\|\leqslant g(x)$；2) 积分 $\int_I g(t)dt$ 收敛．(2) 范数收敛蕴涵它绝对并一致收敛，但反之不然．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966(译自法文).

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Functions of a real variable, Addison-Wesley, 1976(译自法文).

[3] Schwartz, L., Cours d'analyse, 1, Hermann, 1967.

Е. Д. Соломенцев 撰　沈永欢 译

法曲率 [**normal curvature**; **нормальная кривизна**], 正则曲面的

表征曲面在点 P 沿方向 $\mathbf{l}$ 与切平面偏离的量，和对应的**法截线**(normal section)的曲率在绝对值上是相同的．沿方向 $\mathbf{l}$ 的法曲率是

$$k_1=(\mathbf{n},\mathbf{N})k,$$

其中 k 是沿方向 $\mathbf{l}$ 的法截线的曲率，$\mathbf{n}$ 是法截线的单位主法向量，$\mathbf{N}$ 是曲面的单位法向量．曲面沿给定方向的法曲率与**密切抛物面**(osculating paraboloid)沿该方向的法曲率相同．以 u,v 为参数的曲面的法曲率能以曲面用方向 $\mathbf{l}$ 的对应值 (du,dv) 计算的第一、第二基本形式(见**曲面的基本形式**(fundamental forms of a surface))的值来表示，其公式为

$$k_1=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L du^2+2M du dv+N dv^2}{E du^2+2F du dv+G dv^2}.$$

落在曲面上的正则曲线的曲率与曲面沿曲线的单位切向量方向的法曲率和曲线的测地曲率 k_g 的关系是

$$k\mathbf{n}=k_g\mathbf{N}\times\mathbf{l}+k_1\mathbf{N}$$

(也见 **Meusnier 定理**(Meusnier theorem))．用法曲率可以构造曲面的 **Dupin 标形**(Dupin indicatrix)，**Gauss 曲率**(Gaussian curvature)和**平均曲率**(mean curvature)，以及曲面的局部几何的许多其他概念．Д.Д.Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988(译自法文).

[A2] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Printice Hall, 1976(中译本：多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988).

[A3] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differential-geometrie, Springer, 1973.

陈维桓 译

法向导数 [**normal derivative**; **нормальная производная**]

定义在一流形的邻域中(或定义在一带边流形上)的函数在此流形(或在流形边界)的**法线**(normal)方向上的**导数**(derivative)．Л.Д.Кудрявцев 撰　齐民友 译

正态分布 [**normal distribution**; **нормальное распределение**]

最重要的概率分布之一．"正态分布"这一术语始于 K. Pearson(早先的名称是 **Gauss 律**(Gauss law)与 **Gauss-Laplace 分布**(Gauss-Laplace distribution))．这一术语既用于**随机变量**(random variable)的概率分布，也用于多个随机变量的联合概率分布(见**联合分布**(joint distribution))(即有限维随机向量的分布)，还用于**随机元**(random element)与**随机过程**(stochastic process)的分布．正态分布的一般定义可归结为其一维情形．

一个随机变量 X 的概率分布称为正态的(normal)，如果它有概率密度

$$p(x;a,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}. \qquad (*)$$

正态分布(*)的族通常依赖于两个参数 a 与 $\sigma>0$．这里，a 是 X 的数学期望，σ^2 是 X 的方差，相应的特征函数是

$$f(t)=\mathrm{E}e^{itX}=e^{iat-\sigma^2t^2/2}.$$

正态密度曲线 $y=p(x;a,\sigma)$ 关于通过 a 的纵轴为对称，且在此点有唯一的极大值 $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$．当 σ 递减时，正态密度曲线变得越来越尖．当 σ 为常值而 a 变化时不改变曲线的形状，仅引起沿 x 轴的位移．正态密度曲线之下的面积为 1．当 $a=0$ 及 $\sigma=1$ 时，相应的分布函数是

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

一般情形下，(*)的分布函数 $F(x;a,\sigma)$ 可以由公式 $F(x;a,\sigma)=\Phi(t)$ 计算，其中 $t=(x-a)/\sigma$．关于 $\Phi(t)$(以及它的导数)已经编制了大量数表(例如，见[1]，[2]，及**概率积分**(probability integral))．对于一正态分布，$|X-a|>k\sigma$ 的概率为 $1-\Phi(k)+\Phi(-k)$．它随 k 的增大而非常迅速地减小(见下页表)．因此，在许多实际问题中分析正态分布时，人们可以忽略与 a 的偏差超出 3σ 的可能性——三 σ 规则(three-sigma rule)；从表上明显看出，相应的概率小于 0.003．正态分布的四分位偏差为

k	概　率
1	0.31731
2	$0.45500 \cdot 10^{-1}$
3	$0.26998 \cdot 10^{-2}$
4	$0.63342 \cdot 10^{-4}$

0.67449σ.

正态分布在大量的应用问题中出现．解释这一事实的企图自古以来就有．关于正态分布的卓越地位的一个理论根据，是由概率论的**极限定理**(limit theorems)给出的(亦见 **Laplace 定理**(Laplace theorem)；**Ляпунов 定理**(Lyapunov theorem))．这个结果可以用如下方式定性地说明：当所关心的随机变量是大量独立随机因素的总和，且其中最大者与其总和相比也很小时，正态分布是一个良好的逼近(见**中心极限定理**(central limit theorem))．

正态分布又可作为某些问题的精确解答而出现(在现象的一个公认的数学模型框架内)．在随机过程(Brown 运动的基本模型之一)的理论中就是如此．正态分布作为精确解而出现的古典例子则始于 C．F．Gauss(观察误差的分布律)与 J．Maxwell(分子速度的分布律)(亦见**独立性**(independence)；**表征定理**(characterization theorems))．

$\mathbf{R}^n$ 中随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布，或随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布称为正态的(normal)(多元正态的(multivariate normal))，如果对任意固定的 $t\in\mathbf{R}^n$，标量积 (t,X) 或有正态分布或为常数(后者有时也说成有方差零的正态分布)．对于从某向量空间 E 取值的随机元，仍保留这一定义，只需用伴随空间 E^* 中的任意元 l 代替 t 并用线性泛函 $l(X)$ 代替标量积 (t,X)．多个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布有**特征函数**(characteristic function)

$$f(t)=\exp\{i\mathsf{E}(t,X)-\frac{1}{2}Q(t)\},$$

$$t=(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbf{R}^n,$$

其中

$$\mathsf{E}(t,X)=t_1\mathsf{E}X_1+\cdots+t_n\mathsf{E}X_n$$

是线性形，

$$Q(t)=\mathsf{E}(t,X-EX)^2=\sum_{k,l=1}^{n}\sigma_{kl}t_kt_l$$

是非负定二次形，而 $\|\sigma_{kl}\|$ 是 X 的**协方差阵**(covariance matrix)．在正定情形下，相应的正态分布有概率密度

$$p(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=C\exp\{-\frac{1}{2}Q^{-1}(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)\},$$

其中 Q^{-1} 是 Q 的逆二次形，参数 $a_1,\cdots,a_n$ 分别为 $X_1,\cdots,X_n$ 的数学期望，而

$$C=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\|\sigma_{kl}\|}}$$

为常数．确定正态分布的参数总数为

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1,$$

它随 n 而迅速增长($n=1$ 时为 2，$n=5$ 时为 20，$n=10$ 时为 65)．多元正态分布是**多维统计分析**(multi-dimensional statistical analysis)的基本模型，它也用于随机过程理论中(研究无穷维空间中的正态分布；见**随机元**(random element)，亦见 **Wiener 测度**(Wiener measure)；**Wiener 过程**(Wiener process)；**Gauss 过程**(Gaussian process))．

正态分布的下述重要性质是应当特别指出的．两个独立且有正态分布的随机变量 X_1 与 X_2 之和 X 也有正态分布；反之，如果 $X=X_1+X_2$ 有正态分布且 X_1 与 X_2 独立，则 X_1 与 X_2 的分布是正态的(Cramér 定理(Cramér theorem))．这一性质表明某种"稳定性"：如果 X 的分布"接近"于正态，那么 X_1 与 X_2 的分布也同样如此．某些其他的重要分布与正态分布有着紧密联系(见**对数正态分布**(logarithmic normal distribution)；**非中心 χ^2 分布**(non-central 'chi-squared' distribution)；**Student 分布**(Student distribution)；**Wishart 分布**(Wishart distribution)；**Fisher z 分布**(Fisher z-distribution)；**Hotelling T^2 分布**(Hotelling T^2-distribution)；**χ^2 分布**('chi-squared' distribution))．作为逼近于正态的分布的近似表示，**Edgeworth 级数**(Edgeworth series)与 **Gram-Charlier 级数**(Gram-Charlier series)等有着广泛的用途．

有关利用观察结果来估计正态分布参数的问题见**无偏估计量**(unbiased estimator)．与正态性假设检验有关的问题见**统计学中的非参数方法**(non-parametric methods in statistics)．亦见**概率图纸**(probability graph paper)．

参考文献

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

[2] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормированных производных, М., 1960.

[3] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969(中译本：Б．В．格涅坚科，概率论教程，人民教育出版社，1955)．

[4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966)．

[5] Kendall, M. G., Stuart, A., The advanced theory of

statistics, 1. Distribution theory, Griffin, 1977.
[6] Kendall, M. G., Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2. Inference and relationship, Griffin, 1979.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Distributions in statistics, 2. Continuous univariate distributions, Wiley, 1970.
[A2] Johnson, N. L., Kotz, S., Distributions in statistics, 3. Continuous multivariate distributions, Wiley, 1972.
[A3] Pearson, E. S., Hartley, H. O., Biometrika tables for statisticians. 1, Cambridge Univ. Press, 1966.

潘一民 译

正态动力系统 [normal dynamical system; нормальная динамическая система]

1) 与当作动力系统的（狭义）平稳 **Gauss 过程**（Gaussian process）同义．

2) 在 20 世纪 40 与 50 年代，有时用来称呼 **Lebesgue 空间**（Lebesgue space）（那时称为正规测度空间（normal space with a measure））中的动力系统．

Д. В. Аносов 撰 潘一民 译

正规满态射 [normal epimorphism; нормальный эпиморфизм]

一个态射，具有由一个群自然映射到其一商群上，或一个环自然映射到其一商环上，这样的特征性质．设 $\mathfrak{K}$ 为一个有零态射的**范畴**（category）．一个态射 $\nu: A \to V$ 称为一个正规满态射，如果每一个态射 $\varphi: A \to Y$ 总能从 $\alpha\nu = 0$, $\alpha: X \to A$ 与 $\alpha\varphi = 0$ 来唯一地表示成 $\varphi = \nu\varphi'$ 的形式．任何态射的**余核**（cokernel）都是一个正规满态射．逆命题一般是错的；可是，当 $\mathfrak{K}$ 中的态射都有核，则每一个正规满态射都是一个余核．在一个 **Abel 范畴**（Abelian category）中，每一个满态射都是正规的．正规满态射的概念是**正规单态射**（normal monomorphism）的对偶概念．

М. Ш. Цаленко 撰 周伯埙 译

正规方程 [normal equation; нормальное уравнение] 亦称法方程，正规化方程（normalized equation）

平面上直线的具有下列形式的方程:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

其中 x 和 y 是平面上的 Descartes 直角坐标，$\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 是垂直于该直线的单位向量 $\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ 的坐标，$p \geqslant 0$ 是从坐标原点到该直线的距离．形式为

$$Ax + By + C = 0$$

的直线方程乘以正规因子（normalizing factor）λ 以后可以化为正规形式，λ 的绝对值为 $(A^2+B^2)^{-1/2}$，符号与 C 相反（如果 $C=0$，则 λ 的符号任意）．

类似地，平面方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

乘以正规因子 λ 以后可以化为正规形式

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 是垂直于该平面的向量的方向余弦，正规因子 λ 的绝对值为 $(A^2+B^2+C^2)^{-1/2}$，符号与 D 相反．

А. Б. Иванов 撰 张鸿林 译

正规扩张 [normal extension; нормальное расширение]，域 K 的

K 的一个代数扩张（见**域的扩张**（extension of a field））L，满足下列等价条件之一:

1) L 到 K 的**代数闭包**（algebraic closure）$\overline{K}$ 中的任一嵌入都来自 L 的一个自同构;

2) L 是系数在 K 中的一组**多项式的分裂域**（splitting field of a polynomial）;

3) 任一系数在 K 中且在 K 上不可约的多项式 $f(x)$，如果有一个根在 L 中，则在 L 中分裂为线性因子．

对每个代数扩张 F/K，存在一个中间域．它是 F 中在 K 上正规的最大子域 L，这域为 $L = \bigcap_\sigma F^\sigma$，$\sigma$ 遍及所有 F 到 $\overline{K}$ 中的嵌入．还有一个包有 F 的最小的 K 的正规扩张，那就是所有域 F^σ 的合成域，它被称为是 F 相对于 K 的正规闭包（normal closure）.若 L_1 和 L_2 都是 K 上的正规扩张，则其交 $L_1 \cap L_2$ 和合成 $L_1 \cdot L_2$ 亦然．但若 L/K', K'/K 均为正规扩张,则 L/K未必是．

对于特征为 0 的域，每个正规扩张是 Galois 扩张．一般地，一个正规扩张是 **Galois 扩张**（Galois extension），当且仅当它是可分的（见**可分扩张**（seperabel extension））．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1–2, Springer, 1967 – 1971（译自德文）.
[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.
[3] Постников, М. М., Теория Галуа, М., 1963.

Л. В. Кузьмин 撰 冯绪宁 译

正规族 [normal family; нормальное семейство]，区域内的解析函数的

空间 $\mathbf{C}^n$ 中的区域 D 内的复变量 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ 的单值解析函数 $f(z)$ 所组成的这样的函数族 S: 从 S 里的任意一个函数序列，都能抽出一个在 D 的紧子集上一致收敛到一个解析函数或无穷的子序列 $\{f_\nu(z)\}$．

在紧子集上一致收敛到无穷意指，对于任意的紧集 $K \subset D$ 和任意的 $M>0$，都能找到 $N=N(K, M)$，使得对所有的 $\nu>N$，$z \in K$ 有 $|f_\nu(z)|>M$.

如果函数族 S 在某个以 z^0 为中心的球内是正规的，则称 S 为在点 $z^0 \in D$ 的正规族．函数族 S 在 D 内是正规的，当且仅当它在每个点 $z^0 \in D$ 都是正规的．每一个紧的全纯函数族都是正规的，而逆命题则不成立(见**紧性原理**(compactness principle))．如果区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 内的全纯函数族 S 具有这样的性质，即所有函数 $f(z) \in S$ 都不取两个给定的值，那么 S 在 D 内是正规的(Montel 定理(Montel theorem))．这个正规定则大大简化了解析函数在**本性奇点**(essential singular point)的领域内的研究(亦见 **Picard 定理**(Picard theorem))．

类似地定义区域 $D \subset \mathbf{C}=\mathbf{C}^1$ 内的亚纯函数正规族(normal family of meromorphic functions)：D 内的亚纯函数族 S 是正规的，如果从 S 里的每一个函数序列都能抽出一个子序列 $\{f_\nu(z)\}$，它在 D 的紧子集上一致收敛到一个亚纯函数或无穷．接照定义，$\{f_\nu(z)\}$ 在 D 的紧子集上一致收敛到 $f(z)$ (不包括 $f(z) \equiv \infty$ 的情形)，如果对于任意的紧集 $K \subset D$ 和任意的 $\varepsilon>0$，都有 $N=N(\varepsilon, K)$ 和以点 $z^0 \in K$ 为中心，以 $r=r(\varepsilon, K)$ 为半径的圆盘 $B=B(z^0, r)$，使得对于 $\nu>N$，当 $f(z^0) \neq \infty$ 时有

$$|f_\nu(z)-f(z)|<\varepsilon, \ z \in B,$$

而当 $f(z^0)=\infty$ 时则有

$$\left|\frac{1}{f_\nu(z)}-\frac{1}{f(z)}\right|<\varepsilon, \ z \in B.$$

如果区域 $D \subset \mathbf{C}$ 内的亚纯函数族 S 具有这样的性质，即所有函数 $f \in S$ 都不取三个给定的值，那么 S 是正规的(Montel 定理(Montel theorem))．亚纯函数族 S 在区域 $D \subset \mathbf{C}$ 内是正规的，当且仅当在每一个紧集上 $K \subset D$ 有

$$\sup\{\rho(f(z)): f \in S\}<\infty,$$

其中

$$\rho(f(z))=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

就是所谓 $f(z)$ 的球面导数(spherical derivative)．

从 20 世纪 30 年代以来，正规族在**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions)的研究中(亦见**聚集合**(cluster sets)，[3]，[4])具有重大的意义．单连通区域 $D \subset \mathbf{C}$ 内的亚纯函数 $f(z)$ 称为区域 D 内的正规函数，如果函数族 $\{f(\gamma(z))\}$ 在 D 内是正规的，其中 $\gamma(z)$ 取遍 D 的所有共形自同构，函数 $f(z)$ 称为在多连通区域 D 内是正规的．如果它在 D 的**万有覆叠**(universal covering)曲面上是正规的．如果 D 内的亚纯函数 $f(z)$ 不取三个值，那么 $f(z)$ 是正规的．为了使得 $f(z)$ ($f(z) \neq$ 常数) 在单位圆 $G=\{z \in \mathbf{C}: |z|<1\}$ 内是正规的，下述条件是充分而且必要的：

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}<\frac{c}{1-|z|^2}, \ z \in G, \ c=c(f)=\text{常数}.$$

对于单位圆盘 G 内的亚纯正规函数 $f(z)$，在边界点 $\zeta \in \Gamma=\{\zeta \in \mathbf{C}: |\zeta|=1\}$ 的**渐近值**(asymptotic value) α 的存在性蕴含 α 是 $f(z)$ 在 ζ 的一个非切向边界值(见**角边界值**(angular boundary value))．但是，G 内的一个亚纯正规函数可以完全没有渐近值．而另一方面，如果 $f(z)$ 是 G 内的一个全纯正规函数，那么非切向边界值甚至在单位圆周 Γ 的一个在 Γ 内稠密的点集上存在．

参考文献

[1] Montel, P., Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1927.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических Функций, 2 изд., т, 2, М., 1968 (英译本：Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 2, Chelsea, 1977).

[3] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Camgridge Univ. Press, 1966.

[4] Ловатер, А., в кн.: Итоки науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99 – 259.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 设 $D_1 \subseteq \mathbf{C}^m$，$D_2 \subseteq \mathbf{C}^n$ 是两个区域．从 D_1 到 D_2 的解析映射族 F 称为正规的，如果从 F 中任意的一个映射序列，或者能取出一个子序列 $\{f_\nu(z)\}$，它在 D_1 内的紧子集上一致收敛到一个从 D_1 到 D_2 的解析映射，或者能取出一个子序列 $\{f_\nu(z)\}$，它具有这样的性质，即对于任意的紧集 $K_1 \subset D_1$，$K_2 \subset D_2$，存在一个 N，使得对于 $\nu>N$，$f_\nu(K_1) \cap K_2=\phi$ 成立，见[A1].

参考文献

[A1] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982.

[A2] Lehto, O. and Virtanen, K. I., Boundary behaviour and normal meromorphic functions, *Acta Math.*, **97** (1957), 47 – 65.

【译注】 从 C. Miranda 开始，尤其是近 10 多年里，Montel 的正规性定则被大大地发展了．其中，函数不取三个给定的值的假定部分地或全部被函数的导数(或，更一般地，微分多项式)不取给定的值或函数所代替，见[B1]．关于经典的 Marty 定则(函数族的正规性等价于它的球面导数的一致有界性)的改进和推广，见[B2].

参考文献

[B1] 顾永兴，亚纯函数的正规族，四川教育出版社，

1991.

[B2] 陈怀惠和顾永兴，Marty 定则的改进及其应用，中国科学，A辑，23(1993)，2，123－129. 陈怀惠 译

正规形式[normal form；нормальная форма]

1) 矩阵 A 的正规形式(normal form of a matrix) 是由 A 用规定类型的变换而得到的一个事先指定特殊形式的矩阵 N. 区别各种不同的正规形式，有赖于该变换的类型，A 的系数所属的域 K，A 的形式，以及最后有赖于被求解问题的特殊的性质(例如，有赖于从 A 转移到 N 是否想扩张 K，从 A 唯一地或带有某些随意性确定 N 的必要性). 常常应用术语“典范形式”(canonical form) 代替“正规形式”. 下面是些典型的正规形式.(今后 $M_{m\times n}(K)$ 表示系数取在 K 中的所有 m 行与 n 列的矩阵的集合.)

Smith 正规形式(Smith normal form). 令 K 是整数环 $\mathbf{Z}$ 或系数取在域 F 中的关于 λ 的多项式环 $F[\lambda]$. 矩阵 $B\in M_{m\times n}(K)$ 称为等价(equivalent) 于矩阵 $A\in M_{m\times n}(K)$，如果存在可逆矩阵 $C\in M_{m\times m}(K)$ 与 $D\in M_{n\times n}(K)$ 使得 $B=CAD$. 在这里 B 等价于 A，当且仅当 B 可从 A 经过一列初等行与列变换(elementary row- and - column transformation)，即如下三种类型的变换得到：a) 行(或列)的置换；b) 一行(或列)乘以 K 中一个元素加到另一行(或列)；或者 c) 用 K 的可逆元乘某行(或列). 对于这种类型的变换，如下命题成立：每一个矩阵 $A\in M_{m\times n}(K)$ 等价于形如

$$N=\left\|\begin{array}{ccccc} d_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{array}\right\|$$

的矩阵 $N\in M_{m\times n}(K)$，这里，对所有 i，$d_i\neq 0$；对 $i=1,\cdots,r-1$，d_i 整除 d_{i+1}；并且，如果 $K=\mathbf{Z}$，则所有 d_i 均为正的；如果 $K=F[\lambda]$，则所有多项式 d_i 的首项系数为 1. 这个矩阵称为 A 的 Smith 正规形式. 诸 d_i 称为 A 的不变因子(invariant factor)，而数 r 称为它的秩(rank). A 的 Smith 正规形式唯一确定，且可按如下方式找到. A 的秩 r 是 A 的最大非零**子式**(minor)的阶数. 假设 $1\leqslant j\leqslant r$，则阶数为 j 的所有 A 的子式中至少有一个非零. 令 $\Delta_j(j=1,\cdots,r)$ 是阶数为 j 的 A 的所有非零子式的最大公因子(对 $K=\mathbf{Z}$ 通过条件 $\Delta_j>0$ 正规化，对于 $K=F[\lambda]$，让 Δ_j 的首项系数为 1)，并且，令 $\Delta_0=1$. 这时，$d_j=\Delta_j/\Delta_{j-1}$，$j=1,\cdots,r$. 不变因子组成等价矩阵类的不变量的一个完全集：$M_{m\times n}(K)$ 中两个矩阵是等价的，当且仅当它们的秩与有相同指标的它们的不变因子相等.

不变因子 $d_1,\cdots,d_r$ 分裂(不计因子次序按唯一的方式)成 K 的不可约元 $e_1,\cdots,e_s$(当 $K=\mathbf{Z}$ 时，它们是 >1 的正整数，当 $K=F[\lambda]$ 时，它们是首项系数为 1 有正次数的多项式)的方幂的乘积：

$$d_i=e_1^{n_{i1}}e_2^{n_{i2}}\cdots e_s^{n_{is}},\quad i=1,\cdots,r,$$

这里 n_{ij} 均为非负整数. 满足 $n_{ij}>0$ 的每一个因子 $e_j^{n_{ij}}$ 称为(在 K 上)A 的初等因子(elementary divisor). A 的每个初等因子出现在带有重数等于它们分解中有此因子的不变因子的个数的 A 的所有初等因子的集合 $\mathscr{E}_{A,K}$ 内. 与不变因子比较，初等因子有赖于在其上 A 被考虑的环 K：如果 $K=F[\lambda]$，$\widetilde{F}$ 是 F 的扩张，且 $\widetilde{K}=\widetilde{F}[\lambda]$，则矩阵 $A\in M_{m\times n}(K)\subset M_{m\times n}(\widetilde{K})$ 一般有相异的初等因子(但有相同的不变因子)，此有赖于是否将 A 视为 $M_{m\times n}(K)$ 的或者 $M_{m\times n}(\widetilde{K})$ 的元素. 不变因子可从初等因子的整个集合找到，反之亦然.

寻求 Smith 正规形式的实际方法例如可见[1].

关于 Smith 正规形式对 $K=Z$(见[7])与对 $K=F[\lambda]$(见[8])的主要结果已得到. 不用实质上的改变，Smith 正规形式理论能转移到 K 为任意主理想环的情形(见[3],[6]). Smith 正规形式有一些重要应用；例如，主理想环上有限生成模的结构理论以它为基础(见[3],[6])；特殊地，这对于有限生成的 Abel 群理论与 Jordan 正规形式(见后面)理论成立.

自然正规形式(natural normal form). 令 K 是域. 两个方阵 $A,B\in M_{n\times n}(K)$ 称为在 K 上相似的(similar)，如果存在非奇异矩阵 $C\in M_{n\times n}(K)$ 使得 $B=C^{-1}AC$. 相似性与等价性之间有着密切的联系：两个矩阵 $A,B\in M_{n\times n}(K)$ 相似，当且仅当矩阵 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价，这里 E 是单位矩阵. 因此，A 与 B 相似的必要充分条件是 $K[\lambda]$ 上 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的所有不变因子相同，或同样地，初等因子的整体相同. 对于相似矩阵 A 与 B，寻找 C 的实际方法见[1],[4].

矩阵 $\lambda E-A$ 称为 $A\in M_{n\times n}(K)$ 的特征矩阵(characteristic matrix)，而 $\lambda E-A$ 的不变因子称为 A 的相似不变量(similarity invariant)；它们共有 n 个，记为 $d_1,\cdots,d_n$. 多项式 d_n 是 $\lambda E-A$ 的行列式，并称为 A 的特征多项式(characteristic polynomial). 假设 $d_1=\cdots=d_q=1$，且对 $j\geqslant q+1$，d_j 的次数大于 1，这时 A 在 K 上相似于形如

$$N_1=\left\|\begin{array}{ccc} L(d_{q+1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L(d_n) \end{array}\right\|$$

的分块对角矩阵 $N_1\in M_{n\times n}(K)$，式中对于多项式

$$f=\lambda^p+\alpha_1\lambda^{p-1}+\cdots+\alpha_p,$$

$L(f)$ 表示所谓的友矩阵(companion matrix)

$$L(f)=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{matrix}\right\|.$$

矩阵 N_1 由 A 唯一确定，并称为 A 的第一自然正规形式(first natural normal form)(见[1],[2]).

现令 $\mathscr{E}_{A,K[\lambda]}$ 是 $\lambda E-A$ 的所有初等因子的全体，这时 A 在 K 上相似于一个分块对角矩阵 N_2(见**分块对角算子**(block-diagonal operator)):

$$N_2=\left\|\begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & L(e_j^{n_{ij}}) & \\ 0 & & \ddots \end{matrix}\right\|,$$

其块均是 $\lambda E-A$ 的所有初等因子 $e_j^{n_{ij}}\in\mathscr{E}_{A,K[\lambda]}$ 的友矩阵．不计主对角线上诸块的次序，矩阵 N_2 由 A 唯一确定；它称为 A 的第二自然正规形式(second natural normal form)(见[1],[2])，或它的 Frobenius正规形式，有理的或拟自然正规形式(rational or quasi-natural normal form)(见[4])．与第一种对比，一般地说来第二自然正规形式随着 K 转移到其扩张而变化．

Jordan 正规形式(Jordan normal form)．令 K 是域，$A\in M_{n\times n}(K)$，且令 $\mathscr{E}_{A,K[\lambda]}=\{e_i^{n_{ij}}\}$ 是 $K[\lambda]$ 上矩阵 $\lambda E-A$ 的所有初等因子的全体．假设 K 有性质：A 的特征多项式 d_n 在 $K[\lambda]$ 中分裂成线性因子．(例如，如果 K 是复数域，或更一般地，任意代数闭域，那么情况就是这样的.)这时，每个多项式 e_i,对某个 $a_i\in K$，有形式 $\lambda-a_i$，于是，$e_i^{n_{ij}}$ 有形式 $(\lambda-a_i)^{n_{ij}}$．$M_{s\times s}(K)$ 中形如

$$J(f)=\left\|\begin{matrix} a & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{matrix}\right\|$$

的矩阵 $J(f)$(其中 $f=(\lambda-a)^s$，$a\in K$) 称为 f 的超友矩阵(hypercompanion matrix)(见[1])或具有本征值 a 的 s 阶 Jordan 块(Jordan block)．下面的基本命题成立：矩阵 A 在 K 上相似于一个分块对角矩阵 $J\in M_{n\times n}(K)$，其对角块恰为 $\lambda E-A$ 的所有初等因子的超友矩阵：

$$J=\left\|\begin{matrix} \ddots & & 0 \\ & J(e_i^{n_{ij}}) & \\ 0 & & \ddots \end{matrix}\right\|.$$

如不计主对角线上块的次序，矩阵 J 是唯一确定的；它是 **Jordan 矩阵**(Jordan matrix)，且称为 A 的 Jordan 正规形式．如果 K 不具有上述性质，则 A 在 K 上不能导向 Jordan 正规形式(但在 K 的一个有限扩张上可以变到 Jordan 正规形式)．对在任意域 K 上能够约化为所谓的广义 Jordan 正规形式的信息见[4]．

除了对于任意矩阵的各种正规形式外，还有特殊矩阵的特殊正规形式．典型的例子有对称与斜对称矩阵的正规形式．令 K 是域，两个矩阵 $A, B\in M_{n\times n}(K)$ 称为相合的(congruent)(见[1])，如果存在非奇异矩阵 $C\in M_{n\times n}(K)$ 使得 $B=C^TAC$．对于对称与斜对称矩阵类，相合关系下的正规形式的研究已经相当彻底．假设 $\operatorname{Char}K\neq 2$ 且 A 为斜对称的，即 $A^T=-A$；这时，A 相合于具有下面形式的唯一确定的矩阵 H:

$$H=\left\|\begin{matrix} \begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{matrix}\right\|,$$

它可视为在相合关系下 A 的正规形式．如果 A 是对称的，即 $A^T=A$，则它相合于如下形式的矩阵 D:

$$D=\left\|\begin{matrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{matrix}\right\|,$$

其中对所有 i，$\varepsilon_i\neq 0$．数 r 是 A 的秩，且是唯一确定的．诸 ε_i 的更精巧的选择有赖于 K 的性质．因此，如果 K 是代数闭的，可假定 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_r=1$；如果 K 是实数域，可假定对某个 p, $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_p=1$ 与 $\varepsilon_{p+1}=\cdots=\varepsilon_r=-1$．$D$ 由这些性质唯一确定，且可视为在相合关系下的 A 的正规形式．关于许多其他域的对称矩阵正规形式的信息，还有关于这个理论的 Hermite 阵类似结果的信息，见[6],[10] 以及**二次型**(quadratic form)．

如上考虑的正规形式理论中(也在其他正规形式理论中)的一个共同特征是如下事实：在有关矩阵集上的容许变换由一个特定群的作用所确定，使得能通过这些变换彼此转化的矩阵类均为这个群的**轨道**(orbit)，并且，合适的正规形式是在每个轨道中选择特定的典范表示的结果．因此，等价矩阵类是群 $G=\mathrm{GL}_m(K)\times\mathrm{GL}_n(K)$ 的轨道(这里 $\mathrm{GL}_s(K)$ 是系数取在 K 内的 s 阶可逆方阵群)，它通过规则 $A\to C^{-1}AD$ 作用在

$M_{m\times n}(K)$ 上，其中$(C,D)\in G$．相似矩阵类是$GL_n(K)$的轨道，它通过规则 $A\to C^{-1}AC$ 作用在 $M_{n\times n}(K)$ 上，其中 $C\in GL_n(K)$．相合对称或斜对称矩阵的类是群$GL_n(K)$ 的轨道，它通过规则 $A\to C^TAC$ 作用在所有 n 阶对称或斜对称矩阵集合上，这里 $C\in GL_n(K)$．从这个观点出发，每个正规形式是对于一个特定变换群的作用的轨道分解的一般问题部分的解的特例．

参考文献

[1] Marcus, M. and Minc, H., A survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn & Bacon, 1964.

[2] Lancaster, P., Theory of matrices, Acad. Press, 1969.

[3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[4] Мальцев, А.И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975(中译本:А.И. 马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社，1957).

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4; 5; 6(译自法文).

[6] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, p. Chapt. 1; 2(译自法文).

[7] Smith, H.J.S., On systems of linear indeterminate equations and congruences, in Collected Math. Papers, Vol. 1, Chelsea, reprint, 1979, 367－409.

[8] Frobenius, G., Theorie der linearen Formen mit ganzen Coeffizienten, *J. Reine Angew. Math.*, **86** (1879), 146－208.

[9] Гантмахер, Ф.Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966 (中译本: Ф.Р. 甘特马赫尔，矩阵论(上、下册)，高等教育出版社，1955).

[10] Serre, J.-P., A course in arithmetic, Springer, 1973(译自法文).

В.Л. Попов 撰

【补注】Smith典范形式(Smith canonical form)和与第一自然正规形式有关的典范形式在线性控制与系统理论([A1],[A2])中颇具重要性．这里研究方程组$\dot{x}=Ax+Bu$, $x\in\mathbf{R}^n$, $u\in\mathbf{R}^m$, 且相似关系是: $(A,B)\sim(SAS^{-1},SB)$．矩阵对 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbf{R}^{n\times m}$ 称为完全可控制的(completely controllable)，如果分块矩阵

$$(B,AB,\cdots,A^nB)=R(A,B)$$

的秩为 n．注意到 $R(SAS^{-1},SB)=SR(A,B)$，于是典范形式可通过从 $R(A,B)$ 选择 n 个无关列向量而形成．可按许多方法来做这件事．最普通的方法是去检查出现在 $R(A,B)$ 中诸列按顺序的无关性．这产生如下对于完全可控制对(A,B)的所谓的 Бруновский-Luenberger 典范形式(Brunovskiĭ-Luenberger canonical form)或分块友典范形式(block companion canonical form):

$$\overline{A}=S^{-1}AS=\left\|\begin{matrix}\overline{A}_{11} & \cdots & \overline{A}_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{A}_{m1} & \cdots & \overline{A}_{mm}\end{matrix}\right\|,$$

$$\overline{B}=S^{-1}B=(\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_m),$$

其中，$\overline{A}_{ij}$ 是大小为 $d_i\times d_j$ 的矩阵，$d_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $\sum_{i=1}^m d_i=n$，它有形式

$$\overline{A}_{ii}=\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & *\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & *\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & *\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & *\end{matrix}\right\|,$$

$$\overline{A}_{ij}=\left\|\begin{matrix}0 & \cdots & 0 & *\\ 0 & \cdots & 0 & *\\ \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & *\end{matrix}\right\|,\quad i\neq j,$$

对于 $d_j\neq 0$, $\overline{b}_j$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的第$(d_1+\cdots+d_{j-1}+1)$个标准基向量；对于 $d_j=0$, $\overline{b}_j$ 有任意的系数 *．这里诸 * 表示可取任何值的系数．如果 d_j 或 d_i 为零，则块 A_{ij} 是空的(不出现)．可用任意域代替 $\mathbf{R}$．诸 d_j 称为可控性指数(controllability index)或 Kronecker 指数(Kronecker index)．它们是不变量．

典范形式常用于(数值)计算．这要小心处之，因为它们或许不连续地依赖于参数([A3])．例如，Jordan 典范形式不连续；这样的例子有

$$\left\|\begin{matrix}1 & t\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\mapsto\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| \text{ 对 } t\neq 0,$$

$$\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\mapsto\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| .$$

连续典范形式问题几乎都要遇到参模问题(moduli problem)(见模论(moduli theory))．相关的有对象族的典范形式问题，例如，矩阵全纯族在相似意义下的典范形式([A4])．线性控制理论中模类型问题的概述见[A5]．

在 $m=1$ 的可控制对(A,B)，即 B 为向量 $b\in\mathbf{R}^n$ 的情况下，矩阵 A 是循环的，亦见下一节关于算子正规形式的内容．在此特殊情况下，仅有一块$\overline{A}_{11}$(与一个向量$\overline{b}_1$)．对于伴有一个循环向量的循环矩阵，这个典范形式亦称为 Frobenius 典范形式(Frobenius canonical form)或友典范形式(companion canonical form)．

参考文献

[A1] Wolovich, W.A., Linear multivariable systems, Springer, 1974.

[A2] Klamka, J., Controllability of dynamical systems, Kluwer, 1990.

[A3] Golub, S.H. and Wilkinson, J.H., Ill conditioned eigen-systems and the computation of the Jordan canonical form, *SIAM Rev.*, **18** (1976), 578－619.

[A4] Arnol'd, V.I., On matrices depending on parameters, *Russ. Math. Surv.*, **26**(1971), 2, 29–43. (*Uspekhi Mat. Nauk* **26**(1971), 2, 101–114.)
[A5] Hazewinkel, M., (Fine) moduli spaces for linear systems: what are they and what are they good for, in C.I. Byrnes and C.F. Martin (eds.): Geometrical methods for the theory of linear systems, Reidel, 1980, 125–193.
[A6] Turnball, H.W. and Aitken, A.C., An introduction to the theory of canonical matrices, Blackie & Son, 1932.

2）算子的正规形式(normal form of an operator) 是**自伴算子** (self-adjoint operator) A 在不计同构意义下的一个表示，此算子作用在Hilbert空间 $\mathscr{H}$ 上，并作为用自变量相乘的乘法算子的正交和.

首先，假设 A 为循环算子(cyclic operator)，这意味着存在元素 $h_0\in\mathscr{H}$，使得每个元素 $h\in\mathscr{H}$ 有形如 $F(A)h_0$ 的唯一表示，这里 $F(\xi)$ 为满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi)|^2d(E_\xi h_0,h_0)<\infty$$

的函数，式中 $E_\xi(-\infty<\xi<\infty)$ 为 A 的**谱分解**(spectral resolution). 令 $\mathscr{L}_\rho^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上带权 $\rho(\xi)=(E_\xi h_0,h_0)$ 的平方可积函数的空间，且令 $K_\rho F=\xi F(\xi)$ 是带有定义域

$$D_{K_\rho}=\{F(\xi):\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2|F(\xi)|^2d\rho(\xi)<\infty\}$$

的用自变量相乘的乘法算子. 这时，算子 A 与 K_ρ 同构，$A\simeq K_\rho$；也就是说，存在同构且等距的映射 U: $\mathscr{H}\to\mathscr{L}_\rho^2$ 使得 $UD_A=D_{K_\rho}$ 且 $A=U^{-1}K_\rho U$.

接着假设 A 为任意自伴算子. 这时，$\mathscr{H}$ 可分裂为一些子空间 $\mathscr{H}_\alpha$ 的正交和，在每个这样的子空间上 A 诱导出循环算子 A_α，于是，$\mathscr{H}=\sum\oplus\mathscr{H}_\alpha$, $A=\sum\oplus A_\alpha$，且 $A_\alpha\simeq K_{\rho_\alpha}$. 如果算子 $K=\sum\oplus K_{\rho_\alpha}$ 在 $\mathscr{L}^2=\sum\oplus\mathscr{L}^2_{\rho_\alpha}$ 上给定，则 $A\simeq K$.

算子 K 称为 A 的正规形式(normal form)或典范表示(canonical representation). 典范表示定理可推广到任意**正规算子**(normal operator)的情形.

参考文献

[1] Плеснер, А.И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965.
[2] Ахиезер, Н.И., Глазман, И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

В.И. Соболев 撰

3）算子 A 的正规形式 (normal form of an operator) 是作用在 **Фок 空间** (Fock space) 上 A 的表示，此空间建立在某空间 $L_2(M,\sigma)$ 上，这里 (M,σ) 是**测度空间** (measure space)，此表示有和的形式

$$A=\sum_{m,n\geqslant 0}\int K_{n,m}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)\times$$
$$\times a^*(x_1)\cdots a^*(x_n)a(y_1)\cdots a(y_m)\prod_{i=1}^n d\sigma(x_i)\prod_{j=1}^m d\sigma(y_j),\quad(1)$$

式中 $a(x)$, $a^*(x)$ $(x\in M)$ 均为算子值广义函数，分别生成**湮没算子** (annihilation operator) 族 $\{a(f): f\in L_2(M,\sigma)\}$ 与**产生算子** (creation operator) 族 $\{a^*(f): f\in L_2(M,\sigma)\}$:

$$a(f)=\int_M a(x)f(x)d\sigma(x),$$
$$a^*(f)=\int_M a^*(x)\bar{f}(x)d\sigma(x).$$

在表达式(1)的每一项中，所有因子 $a(y_j)$ $(j=1,\cdots,m)$ 位于所有因子 $a^*(x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 的右边，且关于两个变量集 $(x_1,\cdots,x_n)\in M^n$, $(y_1,\cdots,y_m)\in M^m$ $(n,m=0,1,\cdots)$ 的(可能是广义的)函数 $K_{n,m}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)$ 在对称(Boson) Фок 空间的情况下分别关于每个集的变量对称，并且，在反对称(Fermion) Фок 空间的情况下关于这些变量反对称.

对于任意有界算子 A，正规形式存在且唯一.

表示(1)可以改写成直接包含湮没算子与产生算子的形式:

$$A=\sum_{m,n}\sum_{\substack{\{i_1,\cdots,i_n\}\\\{j_1,\cdots,j_m\}}}c_{i_1\cdots i_nj_1\cdots j_m}a^*(f_{i_1})\cdots a^*(f_{i_n})a(f_{j_1})\cdots a(f_{j_m}),\quad(2)$$

式中，$\{f_i: i=1,2,\cdots\}$ 是 $L_2(M,\sigma)$ 中的规范正交基，且(2)中求和遍及此基元素的所有有限集对 $\{f_{i_1},\cdots,f_{i_n}\}$, $\{f_{j_1},\cdots,f_{j_m}\}$.

在任意(可分的) Hilbert 空间 H 情况下，作用于建立在 H 上的 Фок 空间 $\Gamma(H)$ 上的算子 A 的正规形式对 H 中固定基 $\{f_i: i=1,2,\cdots\}$ 用表达式(2)确定，这里，$a(f)$, $a^*(f)$, $f\in H$, 是作用在 $\Gamma(H)$ 上湮没算子与产生算子族.

参考文献

[1] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965 (英译本: Berezin, F. A., The method of second quantization, Acad. Press, 1966).

Р. А. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bogolubov, N. N., Logunov, A. A. and Todorov, I. T., Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975 (译自俄文).
[A2] Källen, G., Quantum electrodynamics, Springer, 1972.
[A3] Glimm, J. and Jaffee, A., Quantum physics, Springer, 1981.

4）递归函数的正规形式 (normal form of a recur-

sive function) 是按形式

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = g(\mu z(f(x_1, \cdots, x_n, z) = 0)), \quad (*)$$

确定一个 n 位**递归函数** (recursive function) φ 的方法，这里 f 是 $(n+1)$ 位**原始递归函数** (primitive recursive function)，g 是 1 位原始递归函数，且 $\mu z(f(x_1, \cdots, x_n, z) = 0)$ 是将**最小数算子** (least-number operator) 用于 f 的结果. Kleene 正规形式定理 (Kleene normal form theorem) 断言，存在原始递归函数 g 使得每个递归函数 φ 可以表示为带有依赖于 φ 的某合适函数 f 的形式 $(*)$；也就是说，

$$(\exists g)(\forall \varphi)(\exists f)(\forall x_1, \cdots, x_n):$$
$$[\varphi(x_1, \cdots, x_n) = g(\mu z(f(x_1, \cdots, x_n, z) = 0))].$$

正规形式定理是递归函数论中最重要结果之一.

A. A. Марков ([2]) 得到能用于表示 $(*)$ 的正规形式定理中的那些函数 g 的特征. 一个函数 g 能被用作其存在性已由正规形式定理认定的函数，当且仅当方程 $g(x) = n$ 对每个 n 有无穷多解. 这种函数称为大值域函数 (function of great range).

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970).

[2] Марков, А. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **13** (1949), 5, 417 – 424.

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951, p. 288 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1985).

5) 在不变流形 M 附近的如下微分方程组的正规形式 (normal form of a system of differential equations):

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n), \ i = 1, \cdots, n \quad (1)$$

是一个形式的方程组

$$\dot{y}_i = \psi_i(y_1, \cdots, y_n), \ i = 1, \cdots, n, \quad (2)$$

它从 (1) 经过可逆的形式的坐标变换

$$x_i = \xi_i(y_1, \cdots, y_n), \ i = 1, \cdots, n \quad (3)$$

得到，其中，Taylor-Fourier 级数 ψ_i 仅包含**共振项** (resonance term). 在一种特殊情况下，正规形式首先出现在 H. Poincaré 的学位论文中 (见 [1]). 用正规形式 (2) 某些微分方程组 (1) 可被求积，且许多可研究稳定性以及近似求积；对方程组 (1)，寻求其周期解与条件周期解族的工作业已成功，而它们的**分歧** (bifurcation) 也已被研究.

不动点邻域内的正规形式. 假设 M 包含方程组 (1) 的一个不动点 $X \equiv (x_1, \cdots, x_n) = 0$ (即 $\varphi_i(0) = 0$), 又设 φ_i 在此点解析，且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是对 $X = 0$ 矩阵 $\| \partial \varphi_i / \partial x_j \|$ 的本征值. 令 $\Lambda \equiv (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq 0$. 这时在 $X = 0$ 的一个全邻域内方程组 (1) 有如下的正规形式 (2)：对 $Y \equiv (y_1, \cdots, y_n) = 0$ 矩阵 $\| \partial \psi_i / \partial y_j \|$ 有正规形式 (例如，Jordan 正规形式)，且 Taylor 级数

$$\psi_i = y_i \sum_{Q \in N_i} g_{iQ} Y^Q, \ i = 1, \cdots, n, \quad (4)$$

仅包含满足

$$(Q, \Lambda) \equiv q_1 \lambda_1 + \cdots + q_n \lambda_n = 0 \quad (5)$$

的共鸣项. 这里 $Q \equiv (q_1, \cdots, q_n)$，$Y^Q \equiv y_1^{q_1} \cdots y_n^{q_n}$，$N_i = \{Q: \text{整数 } q_j \geqslant 0, \ q_i \geqslant -1, \ q_1 + \cdots + q_n \geqslant 0\}$. 如果方程 (5) 在 $N = N_1 \cup \cdots \cup N_n$ 内无解 $Q \neq 0$，则正规形式 (2) 是线性的：

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \ i = 1, \cdots, n.$$

带有 $\Lambda \neq 0$ 的每个方程组 (1) 在不动点的一个邻域内通过某个形式变换 (3) 可简化到正规形式 (2)，这里 ξ_i 是 (可能为发散的) 幂级数，$\xi_i(0) = 0$ 且对 $Y = 0$ $\det \| \partial \xi_i / \partial y_j \| \neq 0$.

一般说来，正规化变换 (3) 与正规形式 (2) (也就是 (4) 中系数 g_{iQ}) 不是由原方程组 (1) 唯一确定的. 正规形式 (2) 保持方程组 (1) 的许多性质，诸如是实的，对称的，Hamilton 的，等等 (见 [2], [3]). 如果原方程组包含小参数，则可把它们包括在诸坐标 x_j 中，这时 $\dot{x}_j = 0$. 这样的坐标在正规化变换下不变化 (见 [3]).

如果 k 是方程 (5) 的线性无关解 $Q \in N$ 的个数，则用变换

$$y_i = z_1^{\alpha_{i1}} \cdots z_n^{\alpha_{in}}, \ i = 1, \cdots, n,$$

这里 α_{ij} 均为整数，且 $\det \| \alpha_{ij} \| = \pm 1$，正规形式 (2) 变到一个方程组

$$\dot{z}_i = z_i f_i(z_1, \cdots, z_k), \ i = 1, \cdots, n$$

(见 [2], [3]). 此方程组的解归结到头 k 个方程的子方程组的解与 $n-k$ 次求积分. 必须在多重奇异点 $z_1 = \cdots = z_k = 0$ 的邻域内研究此子方程组，因为 $f_1, \cdots, f_k$ 不含线性项. 这可用局部方法来做 (见 [3]).

如下问题已被考虑 (见 [2])：在正规形式 (2) 怎样条件下，解析方程组 (1) 的正规化变换收敛 (是解析的)? 令

$$\omega_k = \min |(Q, \Lambda)|,$$

这里，$Q \in N$ 满足

$$(Q, \Lambda) \neq 0, q_1 + \cdots + q_n < 2^k.$$

条件 ω: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log \omega_k^{-1} < \infty$.

条件 $\bar{\omega}$: $\limsup 2^{-k} \log \omega_k^{-1} < \infty$, $k \to \infty$.

条件 $\bar{\omega}$ 比条件 ω 弱．对几乎所有的 Λ（相对于 Lebesque 测度）两者均满足，且是关于 Λ 的很弱的算术限制．

在 $\mathrm{Re}\,\Lambda = 0$ 情况下，还存在条件 A（对一般情形，见[2]）：存在幂级数 $a(Y)$，使得在(4)中 $\psi_i = \lambda_i y_i a$, $i = 1, \cdots, n$.

如果对解析方程组(1)，Λ 满足条件 ω，且正规形式(2)满足条件 A，则存在一个(1)到某正规形式的解析变换．如果(2)由某解析方程组得到，且既不满足条件 $\bar{\omega}$ 也不满足条件 A，则存在解析方程组(1)，它以(2)作为其正规形式，且每个到正规形式的变换发散（不是解析的）．

因此，上面所提的问题除了 Λ 满足条件 ω 但不满足 $\bar{\omega}$，而正规形式的余下系数满足条件 A 的那些正规形式以外，对于其他所有的正规形式都解决了．这些例外情形对正规形式的诸系数是有非常严格的限制，且对于大的 n 一般说来只在退化情况下成立．这就是说，变换到正规形式的发散性的基本原因不在于**小分母**（small denominators），而在于正规形式的退化．

但即使在对于(2)的正规化变换(3)发散的情况下，仍可研究方程组(1)解的性质．例如，一个实方程组(1)即使它不是解析的，也有到正规形式(2)的光滑变换．关于光滑正规化的多数结果在所有 $\mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0$ 条件下业已得到．在此条件下借助于有限光滑性类的变换 $X \to V$，方程组(1)可变到截尾正规形式（truncated normal form）

$$\dot{v}_i = \tilde{\psi}_i(V), \ i = 1, \cdots, n, \qquad (6)$$

其中诸 $\tilde{\psi}_i$ 是次数为 m 的多项式（见[4]－[6]）．如果在正规化变换(3)中舍弃次数高于 m 的所有项，那么其结果是变换

$$x_i = \tilde{\xi}_i(U), \ i = 1, \cdots, n \qquad (7)$$

（诸 $\tilde{\xi}_i$ 是多项式），它将(1)引到形式

$$\dot{u}_i = \tilde{\psi}_i(U) + \tilde{\varphi}_i(U), \ i = 1, \cdots, n \qquad (8)$$

这里诸 $\tilde{\psi}_i$ 是仅含共鸣项的多项式，而诸 $\tilde{\varphi}_i$ 是仅含次数高于 m 的项的收敛幂级数．截尾正规形式(6)的解是(8)的解的近似，且经变换(7)后，给出原方程组(1)的近似解．在许多情况下，能成功地构造出(6)的 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function）（或 **Четаев 函数**（Chetaev function））$f(V)$ 使得

$$|f(V)| \leqslant c_1 |V|^{\gamma} \text{ 与 } \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_j} \tilde{\varphi}_j \right| > c_2 |V|^{\gamma+m},$$

其中 c_1 与 c_2 为正常数．这时 $f(U)$ 是方程组(8)的 Ляпунов（Четаев）函数；也就是说，点 $X = 0$ 是稳定的（不稳定的）．例如，如果所有的 $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$，则可取 $m = 1$, $f = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$，并得到在线性近似下的 Ляпунов 稳定性定理（见[7]；关于其他例子见概述[8]）．

从正规形式(2)可寻求方程组(1)的不变解析集．今后为阐述简单起见，假定 $\mathrm{Re}\,\Lambda = 0$．从正规形式(2)引出形式的集合

$$\mathscr{A} = \{Y: \psi_i = \lambda_i y_i a, \ i = 1, \cdots, n\},$$

式中 a 为自由参数．条件 A 在集合 $\mathscr{A}$ 上被满足．令 X 是使得相应本征值 λ_j, $j \neq i_1, \cdots, i_l$, $1 \leqslant j \leqslant n$，两两可公度的形如 $\{Y: y_i = 0, \ i = i_1, \cdots, i_l\}$ 的子空间之并．形式的集合 $\tilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \cap K$ 在方程组(1)内解析．从 $\mathscr{A}$ 选取子集 $\mathscr{B}$，使得如果条件 ω 成立，$\mathscr{B}$ 在(1)内解析（见[3]）．(1)的周期解与条件周期解族出现在集合 $\tilde{\mathscr{A}}$ 与 $\mathscr{B}$ 上．通过考虑带有小参数方程组中的集合 $\tilde{\mathscr{A}}$ 与 $\mathscr{B}$，可研究这样解的所有解析扰动与分歧（见[9]）．

推广．如果方程组(1)不能变到正规形式(2)但能变到右边包括某些非共鸣项的方程组，则最终的简化虽没有多大实际意义，但可改善变换的性质．因此，在削弱的条件 A 下，到"半正规形式"的简化是解析的（见[2]）．另一变种是仅在某些子流形上（例如，在某些坐标子空间上；见[2]）使方程组(1)正规化的变换．这些方法的组合使得证明(1)的不变子流形与专门形式解的存在性成为可能（见[9]）．

假设方程组(1)在 $k + l$ 维不变流形 M 的一个邻域内有定义且解析，这里 M 纤维化到 l 维不变环面中．这时在 M 附近可引进局部坐标

$$S = (s_1, \cdots, s_k), \ Y = (y_1, \cdots, y_l), \ Z = (z_1, \cdots, z_m),$$
$$k + l + m = n,$$

使得在 M 上 $Z = 0$，y_j 有周期 2π，S 取遍某个区域 H，且(1)变为形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{S} &= \Phi^{(1)}(S, Y, Z), \\ \dot{Y} &= \Omega(S, Y) + \Phi^{(2)}(S, Y, Z), \\ \dot{Z} &= A(S, Y)Z + \Phi^{(3)}(S, Y, Z), \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

其中 $\Phi^{(j)} = O(|Z|)$, $j = 1, 2$, $\Phi^{(3)} = O(|Z|^2)$，且 A 为矩阵．如果 $\Omega =$ 常数且 A 为三角阵，其主对角为常数 $\Lambda(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，则（在对小分母的一个弱限制下）存在局部坐标的形式变换 $S, Y, Z \to U, V, W$，它将方程组(9)变到正规形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}&=\sum \Psi_{PQ}^{(1)}(U) W^{Q} \exp i(P, V),\\ \dot{V}&=\sum \Psi_{PQ}^{(2)}(U) W^{Q} \exp i(P, V),\\ \dot{w}_j&=w_j \sum g_{jPQ}(U) W^{Q} \exp(P, V), j=1, \cdots, m,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中，$P \in \mathbf{Z}^l$，$Q \in \mathbf{N}^m$，$U \in H$ 与 $i(P, \Omega)+(Q, \Lambda)=0$.

如果在坐标 Z 中有一个小参数，则 (9) 可用 **Крылов - Боголюбов 平均法** (Krylov - Bogolyubov method of averaging) (见 [10]) 来平均，且平均后的方程组是正规形式. 更一般地，扰动理论可视为正规形式理论的特殊情形，这时有一个坐标是小参数 (见 [11]).

正规化变化的收敛性定理，解析不变集的存在性定理等等，可移转到方程组 (9) 与 (10) 上. 在这里研究得最好的情形是当 M 是周期解时的结果，即 $k=0$, $l=1$. 在此情况下，正规形式理论在许多方面与 M 为不动点的情形一样. Poincaré 曾建议应该考虑穿过周期的正规截口的点态映射. 点态映射的正规形式理论产生于这些内容之中，它平行于方程组 (1) 的相应理论. 关于正规形式的其他推广见 [3], [6], [12] - [14].

参考文献

[1] Poincaré, H., Thèse, 1928, in Oeuvres, Vol. 1, Gauthier - Villars, 1951, pp. IL - CXXXII.

[2A] Брюно, А. Д., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, **25** (1971), 119 - 262.

[2B] Брюно, А. Д., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, **26** (1972), 199 - 239.

[3] Брюно, А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979 (英译本: Bryuno, A. D., Local methods in nonlinear differential equations, 1, Springer, 1989).

[4] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[5A] Самовол, В. С., 《Докл. АН СССР》, **206** (1972), 3, 545 - 548.

[5B] Самовол, В. С., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, **44** (1982), 213 - 234.

[6A] Белицкий, Г. Р., Нормальные формы, инварианты и локальные отображения, К., 1979.

[6B] Белицкий, Г. Р., 《Тр. Моск. матем. об - ва》, **40** (1979), 3 - 46.

[6C] Белицкий, Г. Р., 《Функц. Анал. и Приложен.》 **20** (1986), 4, 1 - 8.

[7] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, 2 изд., М. - Л., 1935.

[8] Куницын, А. Л., Маркеев, А. П., Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4, М. 1979, 58 - 139.

[9] Bibikov, J. N., Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations, Springer, 1979.

[10] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974.

[11] Брюно, А. Д., 《Proc. VIII Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations》, Prague, 1979, Vol. 1, 177 - 182.

[12] Костін, В. В., Ле Дінь Тхюі, 《Доповіді АН УРСР. Сер. А》, **11** (1975), 982 - 985.

[13] Zehnder, E. J., C. L. Siegel's linearization theorem in infinite dimensions, *Manuscr. Math.*, **23** (1978), 363 - 371.

[14] Николенко, Н. В., 《Успех матем. наук》, **41** (1986), 5, 109 - 152.

А. Д. Брюно 撰

【补注】 关于常微分方程组的各种线性化定理，常微分方程组的典范形式定理，以及对幂零 Lie 代数非线性表示情形的推广的更多信息，亦见 **Poincaré - Dulac 定理** (Poincaré - Dulac theorem) 与**微分方程组解析理论** (analytic theory of differential equations)，以及 [A1].

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Springer, 1983 (译自俄文).

陈公宁 译

正规基本解组 [**normal fundamental system of solutions; нормальная фундаментальная система решений**], 线性齐次常微分方程组的

基本解组 (fundamental system of solutions) $x_1(t)$, $\cdots$, $x_n(t)$，使得任何其他基本解组 $\hat{x}_1(t)$, $\cdots$, $\hat{x}_n(t)$ 都满足不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i(t)};$$

这里

$$\lambda_{y(t)}=\varlimsup_{t \rightarrow+\infty} \frac{1}{t} \log |y(t)|$$

是解 $y(t)$ 的 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent). 正规基本解组是由 А. М. Ляпунов 提出的 ([1])，他证明了对于每个线性方程组

$$\dot{x}=A(t) x$$

都存在正规基本解组，这里 $A(\cdot)$ 是映射

$\mathbf{R}^{+} \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbf{R}^{n}, \mathbf{R}^{n})$ (或 $\mathbf{R}^{+} \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^{n}, \mathbf{C}^{n})$)，它逐段可和并且满足附加条件

$$\varlimsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{t}\|A(\tau)\| d t<+\infty .$$

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956.

В. М. Миллионщиков 撰 唐 云 译

正规矩阵 [**normal matrix**; **нормальная матрица**]

一个方阵 A，它与它的伴随矩阵是可交换的（即 $AA^* = A^*A$）.

【补注】 亦见**正规算子**（normal operator）. 张鸿林 译

正规单态射 [**normal monomorphism**; **нормальный мономорфизм**]

一个态射，它具有将一个群（环）作为正规子群（理想）嵌入到一个群（环）中这样的特征性质. 设 $\mathfrak{K}$ 是一个有零态射的**范畴**（category）. 一个态射 $\mu: U \to A$ 称为一个正规单态射，如果每一个态射 $\varphi: X \to A$ 总能从 $\mu\alpha = 0$，$\alpha: A \to Y$，与 $\varphi\alpha = 0$ 来唯一地表成 $\varphi = \varphi'\mu$ 这样的形式. 任何态射的核（见**范畴中态射的核**（kernel of a morphism in a category））是一个正规单态射. 其逆一般不真；可是，如果在 $\mathfrak{K}$ 中态射的**余核**（cokernel）存在，则每一个正规单态射就是其余核之核. 在一个 **Abel 范畴**（Abelian category）中，每一个单态射都是正规的. 正规单态射的概念是**正规满态射**（normal epimorphism）的对偶概念.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 上述的定义并不是完全标准的；许多作者们都定义一个正规单态射为一个态射，它恰好是一个核.（正规子对象（nomal subobject）这个名词也在使用，用于表示正规单态射的一个同构类.）在没有零态射的范畴内，代替正规单态射的是正则单态射（regular monomorphisms），这是那些恰好为等化子（equalizer）的态射（见**范畴中态射的核**（kernel of a morphism in a category））. 每一个正规单态射都是正则的，但反之不真：在所有的群的范畴中，每一个单同态都是一个正则单态射，但一个正规单态射 $G \to H$ 是 G 到 H 的一个正规子群上的同构. 可是，在加性范畴中正规单态射与正则单态射这两个概念重合.

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965, Sect. 1.14

周伯埙 译

正规数 [**normal number**; **нормальное число**]

具有下列性质的实数 $\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$：对每个自然数 s，任意给定的由符号 $0, \cdots, g-1$ 组成的 s 数组 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_s)$ 以渐近频率 $1/g^s$ 出现在由 α 的以 g 为底的无限小数表达式

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{g} + \cdots + \frac{\alpha_n}{g^n} + \cdots$$

得到的序列

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots \tag{1}$$

之中.

详而言之，设 $g > 1$ 是自然数，并设

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s), (\alpha_2, \cdots, \alpha_{s+1}), (\alpha_3, \cdots, \alpha_{s+2}), \cdots \tag{2}$$

是对应于 (1) 的 s 元数组的无穷序列. 用 $N(n, \delta)$ 表示 (2) 的最初 n 个数组中数组 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_s)$ 出现的次数. 如果对任何自然数 s 及任意给定的由符号 $0, \cdots, g-1$ 组成的 s 数组 δ 有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n, \delta)}{n} = \frac{1}{g^s},$$

那么称数

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{g} + \frac{\alpha_2}{g^2} + \cdots$$

是正规的（nomal）.

当 $g = 10$ 时正规数的概念是 E. Borel 引进的（见 [1], [2], p. 197）. 他称实数 α 是对于底 g 弱正规的（weakly normal），如果

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n, \delta)}{n} = \frac{1}{g},$$

其中 $N(n, \delta)$ 是 $\delta (0 \leqslant \delta \leqslant g-1)$ 在序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 的最初 n 项中出现的次数；称 α 是正规的，如果 $\alpha, g\alpha, g^2\alpha, \cdots$ 是对于底 $g, g^2, \cdots$ 弱正规的. 他还证明了对于正规数，对任何 s 及任何给定的 s 数组 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_s)$ 有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n, \delta)}{n} = \frac{1}{g^s}.$$

后来人们证明了上面最后一个关系式等价于 Borel 的正规数定义（见 [3], [4] 及 [8]）.

如果数 α 对于每个底 $g > 0$ 都是正规的，那么称它是绝对正规的（absolutely normal）. 正规数和绝对正规数的存在性是 Borel 基于测度论建立的. 用明显的形式构造正规数是在 [5] 中首先做到的. 更早些（见 [6], [7]），正规数的一个有效构造过程被指出. 关于其他构造正规数的方法及正规数与随机性两概念间的联系，可见 [8].

分数部分序列 $\{\alpha g^x\} (x = 1, 2, \cdots)$ 在区间 $[0, 1]$ 上**一致分布**（uniform distribution）等价于 α 是正规数.

参考文献

[1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **27** (1909), 247 – 271.

[2] Borel, E., Leçons sur la théoric des fonctions, Gauthier-Villars, 1928.

[3] Pillai, S., On normal numbers, *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A*, **12** (1940), 179 – 184.

[4] Niven, I. and Zuckerman, H., On the definition of normal numbers, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 103 – 109.

[5] Champernowne, D. G., The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. London Math. Soc.*, **8** (1933), 254 – 260.

[6] Sierpiński, W., Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et déter-

mination effective d'un tel nombre, *Bull. Soc. Math. France*, **45** (1917), 127 − 132.

[7] Lebesgue, H., Sur certaines démonstrations d'existence, *Bull. Soc. Mach. France*, **45** (1917), 132 − 144.

[8] Постников, А. Г., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **57** (1960), 1 − 84.

С. А. Степанов 撰

【补注】几乎所有的数对于每个底 g 都是正规数（例如，见[A1]的定理 8−11）．但还不知道一些熟悉的数如 $\sqrt{2}$，e，π 是否是正规数．正规数对于随机数的生成有重大意义．对于底 g 的正规数一定是无理数．而对于底 10 的弱正规数

$$0.01234567890123456789\cdots$$

自然是有理数．在 $x = 0.a_1a_2\cdots$ 中，令 a_i 用 i 在 10 进制下的表达式的数字组来代替，这样得到的数

$$x = 0.1234567891011121314\cdots$$

是对于底 10 的正规数（[5]）．用同样的方法可得到对于任何给定的底的正规数．

参考文献

[A1] Nieven, I., Irrational numbers, Math. Assoc. Amer., 1956.

朱尧辰 译

正规算子 [**normal operator**; **нормальный оператор**]

一个闭**线性算子**（linear operator）A，它定义在 Hilbert 空间 H 的一个稠密线性子空间 D_A 上，使得 $A^*A = AA^*$，这里 A^* 是 A 的伴随算子．如果 A 是正规的，那么 $D_{A^*} = D_A$，并且对每一个 x 有 $\|A^*x\| = \|Ax\|$．反过来，这些条件保证了 A 是正规的．如果 A 是正规的，那么 A^* 亦然；对任何 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$，$\alpha A + \beta I$；$A^{-1}$ 当它存在时都是正规的；并且如果 $AB = BA$，这里 B 是一个有界线性算子，那么也有 $A^*B = BA^*$．

一个正规算子有：

1）乘法分解（multiplicative decomposition）

$$A = U\sqrt{A^*A} = \sqrt{A^*A}\,U,$$

$$A^* = U^{-1}\sqrt{A^*A} = \sqrt{A^*A}\,U^{-1},$$

其中 U 是一个酉算子，在 A 和 A^* 的零空间的正交补上唯一决定；

2）加法分解（additive decomposition）

$$A = A_1 + iA_2,\ A^* = A_1 - iA_2,$$

其中 A_1 和 A_2 是唯一决定的自伴交换算子．

加法分解蕴涵对一个有序对 (A, A^*) 存在一个唯一的 2 维**谱函数**（spectral function）$E(\Delta_\zeta)$，这里 Δ_ζ 是一个 2 维区间，$\Delta_\zeta = \Delta_\xi \times \Delta_\eta$，$\zeta = \xi + i\eta$，使得

$$A = \int_{\Delta\infty} \zeta\, dE(\Delta_\zeta),\ A^* = \int_{\Delta\infty} \bar{\zeta}\, dE(\Delta_\zeta).$$

这同一分解也蕴涵一个正规算子 A 是一定的自伴算子 C 的函数，$A = F(C)$．反过来，一个自伴算子的每一个函数是正规的．

正规算子的一个重要性质是 $\|A^n\| = \|A\|^n$，它蕴涵正规算子 A 的**谱半径**（spectral radius）是它的范数 $\|A\|$．一个正规算子的对应于不同本征值的本征元是正交的．

参考文献

[1] Плеснер, А. И. Спектральная теория линейных операторов, М., 1965 (英译本: Plesner, A. I., spectral theory of linear operators, F. Ungar, 1965).

[2] Rudin, W., Functional analysis McGraw-Hill, 1973 (中译本: W. Rudin, 泛函分析, 湖北教育出版社, 1989).

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Conway, J. B., Subnormal operators, Pitman, 1981.

鲁世杰 译 葛显良 校

正规 p 补 [**normal p-complement**; **нормальное p-дополнение**]，有限群 G 的

正规子群 A，满足 $G = AS$ 且 $A \cap S = 1$，其中 S 是 G 的一个 Sylow p 子群（见 **Sylow 子群**（Sylow subgroup））．如果 G 的某个 Sylow p 子群 S 包含在其**正规化子**（normalizer）的中心里，则 G 有正规 p 补（Burnside 定理（Burnside theorem））．Frobenius 定理（Frobenius theorem）给出了群 G 中存在正规 p 补的充分必要条件：群 G 有正规 p 补，当且仅当或者对于 G 的每个非平凡 p 子群 H，商群 $N_G(H)/C_G(H)$ 是一个 p 群（这里 $N_G(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子，$C_G(H)$ 是 H 在 G 中的**中心化子**（centralizer）），或者对于 G 的任意非平凡 p 子群 H，子群 $N_G(H)$ 有正规 p 补．

参考文献

[1] Gorenstein, D., Finite groups, Harper & Row, 1968.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】令 G 为 n 阶群，p^e 为能够整除 n 的素数 p 的最高方幂．G 的指数为 p^e（从而阶为 $p^{-e}n$）的子群称为 G 中一个 p 补（p-complement）．一个正规 p 补就是一个正规的 p 补．一个有限群可解，当且仅当对于每个整除其阶的素数 p，它都有 p 补．详见[A1]，[A2]；亦见 **Hall 子群**（Hall subgroup）．

参考文献

[A1] Hall, M. Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959, Sect. 9.3 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1982).

[A2] Huppert, B., Endliche Gruppen, I, Springer, 1967, Sect. VI.1 (中译本: B. 胡佩特, 有限群论, 福建人民出版社, 1993).

【译注】

参考文献

[B1] 徐明曜，有限群导引，上册，科学出版社，1987.

王 杰 译 石生明 校

法平面 [**normal plane**; **нормальная плоскость**], 空间曲线在点 M 处的

通过点 M 且垂直于 M 处的**切线** (tangent) 的平面. 法平面包含曲线的过点 M 的一切**法线** (normal). 如果在直角坐标中曲线由方程

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

给出，则在对应于参数 t 的值 t_0 的点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面的方程可以写成下列形式:

$$(x - x_0)\frac{df(t_0)}{dt} + (y - y_0)\frac{dg(t_0)}{dt} + \\ + (z - z_0)\frac{dh(t_0)}{dt} = 0.$$

如果曲线的方程具有形式 $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$, 则法平面的方程是

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.$$

БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Printice Hall, 1976.

张鸿林 译

正规环 [**normal ring**; **нормальное кольцо**]

【补注】 设 R 为有幺元的交换环, S 为有同一幺元且包含 R 的交换环. 一个元素 $s \in S$ 在 R 上是整的 (integral), 若存在 $c_i \in R$, 使 $s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_n = 0$. 在 R 上整的所有的 $s \in S$ 组成的集合是 R 在 S 中的整闭包. 它是 S 中包含 R 的一个子环 $\overline{R}$. 若 $\overline{R} = R$, 则称 R 在 S 中整闭 (亦见**整环** (integral domain)).

具有幺元的交换环 R 称为正规的, 若它是既约的 (reduced) (即没有非零的幂零元), 且在它的完全分式环内是整闭的 (见**交换代数的局部化** (localization in a commutative algebra)). 因而, 若对每个素理想 $\mathfrak{p}$, 其局部化 $R_{\mathfrak{p}}$ 是一个**整环** (integral domain) 且在它的分式域中是整闭的, 则 R 是正规的. 在有些文献中, 也要求正规环是一个整环.

一个 **Noether 环** (Noetherian ring) A 是正规的, 当且仅当它适合两个条件: i) 对每个高度为 1 的素理想 $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ 是正则的 (因而是一个离散赋值环), 及 ii) 对每个高度 $\geqslant 2$ 的素理想 $\mathfrak{p}$, 深度 (亦见**模的深度** (depth of a module)) 也 $\geqslant 2$ (见 [A3], 125 页).

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

[A2] Nagata, M., Local rings, Interscience, 1962.

[A3] Matsumura, H., Commutative algebra, Benjamin, 1970.

裴定一 译 赵春来 校

正规概形 [**normal scheme**; **нормальная схема**]

所有**局部环** (local ring) 都是正规的 (normal) (即约化的且在分式环里整闭的) **概形** (scheme). 一个正规概形是局部不可约的, 对于这样的概形, 连通分支和不可约分支的概念是一样的. Noether 正规概形的奇点集的余维数大于 1. 以下的正规性准则 (normality criterion) 成立 ([1]): **Noether 概形** (Noetherian scheme) X 是正规的当且仅当以下两个条件被满足: 1) 对于余维数 $\leqslant 1$ 的点 $x \in X$, 局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是正则的 (见**正则环 (交换代数中的)** (regular ring (in commutative algebra))); 2) 对于余维数 >1 的点 $x \in X$, 环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的深度 (见**模的深度** (depth of a module)) 大于 1. 任何**约化概形** (reduced scheme) X 有一个典范地与之相关联的正规概形 X^ν (正规化 (normalization)). X 概形 X^ν 是整的, 但在 X 上不总是有限的. 不过如果 X 是优的 (见**优环** (excellent ring)), 譬如说如果 X 是域上有限型概形, 则 X^ν 在 X 上是有限的.

参考文献

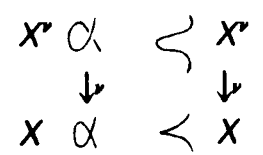
[1] Serre, J. P., Algèbre locale. Multiplicités, Lecture notes in math., 11, Springer, 1975.

В. И. Данилов 撰

【补注】 不可约代数簇 X 的正规化是不可约正规簇 X^ν 再加上一个正则映射 $\nu: X^\nu \to X$, 它是有限的, 也是一个双有理同构.

对于一个仿射不可约代数簇, X^ν 是正则函数环 $A(X)$ 在其分式域里的整闭包. 正规化有以下的普遍性质. 设 X 是整概形 (integral scheme) (即 X 是约化且不可约的, 或等价地, 对于 X 里的任何开子集 U, $\mathcal{O}_X(U)$ 是一个整环). 对于每个正规整概形 Z 以及支配态射 (dominant morphism) $f: Z \to X$ (即 $f(Z)$ 在 X 内稠密), f 唯一地通过正规化 $X^\nu \to X$ 分解. **正规解析空间** (normal analytic space) 也有同样性质.

设 X 是一条曲线, x 是 X 上的点 (可能是奇异的). 设 $X^\nu \to X$ 是 X 的正规化, $\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n$ 是 x 在 X^ν 里的逆象. 这些点称为 X 通过 x 的分支 (branches). 这一术语来源于以下的事实: $\overline{x}_i$ 可被等同于过 x 的 X 的"分支" (在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的簇的情形). 更精确地说, 如果 U_i 是 x_i 的充分小的复或实邻域, 则 x 的某个邻域是分支 $\nu(U_i)$ 的并. 设 T_i 是 X^ν 在 $\overline{x}_i$ 处的切空间, 则 $(d\nu)(\overline{x}_i)(T_i)$ 是 X 在 x 处的切空间的某个线性子空间. 它是一条线或一个点. 在第一种情形, 分支 $\overline{x}_i$ 称为线性的. $y^2 = x^3 + x^2$ 上的点 $(0,0)$ 是带有两个线性分支的点的例子 (切线为 $y = x$ 以及 $y = -x$), $y^2 = x^3$ 上的点 $(0,0)$ 则是两重非线性分支的例子.



参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977, 91.

[A2] Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1974, Sect. II. 5.

[A3] Matsumura, H., Commutative algebra, Benjamin, 1970.

陈志杰 译

法截线 [**normal section**; **нормальное сечение**], 光滑曲面 Φ 在点 P 沿方向 l 的

通过该曲面在点 P 的法线(见**法空间(曲面的)** (normal space (to a surface))) 和 Φ 在点 P 的**切平面** (tangent plane) 中的方向 l 的平面与 Φ 的截线. 研究曲面的局部结构的工作能归结为研究曲面在已知点沿各个方向的法截线构成的曲线族(见**曲率** (curvature); **法曲率** (normal curvature)). 借助于法截线来研究局部结构的方法能够推广到任意维数和任意余维数的曲面.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978 (译自德文).

[A2] Chen, B.-Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.

陈维桓 译

正规列 [**normal series**; **нормальный ряд**], 群 G 的

群 G 的正规子群构成的一个序列

$$G = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_{n+1} = \{1\}$$

(见**子群列** (subgroup series)). 如果序列中每一项只在前一项里正规而不是在整个群中正规, 则称该序列为次正规的 (subnormal). 除了有限序列, 也可以考虑无限递降或递升的正规和次正规列, 其中的项以超限序数为指标. 还可以考虑更一般的正规和次正规序列, 其中的项以某个有序集中的元素为指标.

正规列的因子 (factor of the series) 是序列中某一项与其后一项(如果序列中的项是升序的, 则为前一项)作成的商群. 正规列的长度 (length) 是其非平凡因子的个数. 不能被进一步加细的正规列称为主列 (chief series) (见**主列** (principal series)), 而这样的次正规列称为合成列 (composition series) (见**合成序列** (composition sequence)). 这种序列的因子分别称为主因子 (chief factor) 和合成因子 (composition factor). 两个正规(次正规)列称为同构的 (isomorphic), 如果能够建立起它们的因子之间的一个一一对应, 使得相应的因子是同构的. 同一个群的任意两个正规(次正规)列有同构的加细 (Schreier 定理 (Schreier theorem)). 特别地, 任意两个主(合成)列是同构的 (**Jordan-Hölder 定理** (Jordan-Hölder theorem)).

还有另一种(较老的)术语, 将上述次正规列称为正规列 (normal series), 而对于这里的 "正规列" 概念使用 "不变列" (invariant series) 这一术语.

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hall, M. Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959, Sect. 8.4 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1982).

[A2] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967, §16 (中译本: A. Γ. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

【译注】

参考文献

[B1] 徐明曜, 有限群导引, 上册, 科学出版社, 1987.

王 杰 译 石生明 校

法层 [**normal sheaf**; **нормальный пучок**]

在层论 (sheaf theory) 里与法丛 (normal bundle) 类似的对象. 设

$$(f, f^{\#}): (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

是环空间的态射, 使得同态 $f^{\#}: f^{*}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ 是满的, 且设 $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} f^{\#}$, 则 $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ 是 $f^{*}\mathcal{O}_X/\mathcal{J} \cong \mathcal{O}_Y$ 里的理想层, 从而是一个 $\mathcal{O}_Y$ 模. 这里 $\mathcal{N}_{Y/X}^{*} = (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ 被称为态射 f 的余法层 (conormal sheaf of the morphism), 它的对偶 $\mathcal{O}_Y$ 模 $\mathcal{N}_{Y/X} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}_{Y/X}^{*}, \mathcal{O}_Y)$ 称为态射 f 的法层 (normal sheaf of the morphism). 这些层通常在下述特殊情形被考察:

1) X 和 Y 是微分流形(例如, C^{∞} 类的), $f: Y \to X$ 是一个浸入. 存在 $\mathcal{O}_Y$ 模的正合列

$$0 \to \mathcal{N}_{Y/X}^{*} \xrightarrow{\delta} f^{*}\Omega_X^1 \to \Omega_Y^1 \to 0,$$

其中 Ω_X^1 和 Ω_Y^1 是 X 和 Y 上的光滑 1 形式的层, δ 被定义为函数的微分. 对偶正合列

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to f^{*}\mathcal{T}_X \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

其中 $\mathcal{T}_X$ 和 $\mathcal{T}_Y$ 是 X 和 Y 的切层, 表明 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 同构于浸入 f 的**法丛**的光滑截面的芽层. 如果 Y 是被浸入的子流形, 则 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 和 $\mathcal{N}_{Y/X}^{*}$ 被称为子流形 Y 的法层和余法层 (normal and conormal sheaves of the submanifold).

2) $(X, \mathcal{O}_X)$ 是代数闭域 k 上有限型的不可约可分概形, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 是它的闭子概形, $f: Y \to X$ 是嵌入, 则 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 和 $\mathcal{N}_{Y/X}^{*}$ 被称为子概形 Y 的法层与余法层 (normal

and conormal sheaves of the subscheme). 这里也有 $\mathcal{O}_Y$ 模的正合列

$$\mathcal{N}^{\bullet}_{Y/X} \xrightarrow{\delta} \Omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0, \qquad (*)$$

其中 Ω_X 和 Ω_Y 是 X 和 Y 上的微分层. 层 $\mathcal{N}^{\bullet}_{Y/X}$ 和 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 是拟凝聚的, 且若 X 是 Noether 概形, 则它们是凝聚层. 如果 X 是 k 上非异簇, Y 是非异簇, 则 $\mathcal{N}^{\bullet}_{Y/X}$ 是局部自由的而且 $(*)$ 里的同态 δ 是单射. 在这种情形里, 可得到对偶正合列

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

所以法层 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 是秩 $r = \operatorname{codim} Y$ 的局部自由层, 对应于 Y 上法层. 特别当 $r=1$ 时, $\mathcal{N}_{Y/X}$ 是对应于除子 Y 的可逆层.

非异子簇 $Y \subset X$ 的自相交 $Y \cdot Y$ 可以用法层的语言来表达, 也就是说 $Y \cdot Y = f_* c_r(\mathcal{N}_{Y/X})$, 其中 c_r 是第 r 个**陈(省身)类** (Chern class), $f_*: A(Y) \to A(X)$ 是**周(炜良)环** (Chow ring) 的同态, 对应于嵌入 $f: Y \to X$.

3) $(X, \mathcal{O}_X)$ 是复空间, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ 是它的闭解析子空间, f 是嵌入, 则 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 和 $\mathcal{N}^{\bullet}_{Y/X}$ 被称为子空间 Y 的法层与余法层 (normal and conormal sheaves of the subspace), 它们是凝聚层. 如果 X 是解析流形, Y 是它的解析子流形, 则 $\mathcal{N}_{Y/X}$ 是 Y 上法丛的全纯截面的芽层.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

[2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

А. Л. Онищик 撰

【补注】如果 X 是 k 上非异簇, Y 是 X 的子概形, 且是局部完全交, 则 $\mathcal{N}^{\bullet}_{Y/X}$ 是局部自由的. 陈志杰 译

正规可解性 [normal solvability; нормальная разрешимость], 积分方程的

下述性质: **线性积分方程** (linear integral equation) 是可解的, 当且仅当其右端同对应的齐次伴随方程的一切解都正交. 在适当的条件下, **Fredholm 方程** (Fredholm equation)、**奇异积分方程** (singular integral equation) 和**卷积型积分方程** (integral equation of convolution type) 都是正规可解的. Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Goldberg, S., Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[A2] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, 1980.

[A3] Zabreyko, P. P., et al., Integral equations — a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).

张鸿林 译

正规空间 [normal space; нормальное пространство]

满足公理 T_4 (见**分离公理** (separation axiom)) 的**拓扑空间** (topological space), 在此空间中单点集是闭集, 并且任何两个互不相交的闭集均可用邻域分离 (即含于互不相交的开集中). 正规空间是**完全正则空间** (**completely-regular space**) (Тихонов 空间) 的特款, 在**维数论** (dimension theory) 中特别重要. 正规空间的任何闭子空间是正规空间 (正规性对闭集有遗传性). 一个空间的所有子空间如果都是正规空间, 则称为遗传正规的 (hereditarily normal). 一个空间是遗传正规空间的充分条件是: 它所有的开子空间都是正规空间; 充要条件是: 任何两个集合, 如果其中任何一个均不含另一个的接触点, 则可用邻域分离. 一个正规空间的每个闭集如果都是可数多个开集之交, 则称为完满正规的 (perfectly normal). 任何完满正规空间都是遗传正规空间.

两个正规空间的乘积不必是正规空间, 甚至正规空间与线段之积也可以是非正规空间.

就一般性而言, 在正规空间与完全正则空间之间, 还有几类重要的空间. 与正规空间接近的这些空间中, 首先出现的是所谓拟正规 (quasi-normal) 空间, 或 π 正规 (π-normal) 空间 ([2]). 这些是 Тихонов 空间, 其中任何两个互不相交的 π 集 (π-sets) 均可用邻域分离. π 集是有限多个闭的**典范集** (canonical set) 之交. 一个 Тихонов 空间, 如果其中任何两个互不相交的闭的典范集均可用邻域分离, 则称为 κ 正规 (κ-normal) 空间 ([3]). 一个 κ 正规空间, 如果其中任何闭的典范集都是可数多个开的典范集之交, 则称为完满 κ 正规 (perfectly κ-normal) 空间. Тихонов κ 正规空间类、拟正规空间类、完满 κ 正规空间类依次下降, 依次包含, 并且其中任何两类不相等.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[2] Зайцев, В. И., 《Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.》, 3 (1967), 48 – 57.

[3] Щепин, Е. В., 《Сиб. матем. ж.》, 13 (1972), 5, 1182 – 1196.

П. С. Александров 撰

【补注】 正规空间的特性也可以用下述两个陈述来刻画:

1) Урысон 引理 (Urysohn lemma): 若 $A, B \subseteq X$ 是互不相交的闭集, 则存在连续函数 $f: X \to [0, 1]$, 使得 $f|_A \equiv 0, f|_B \equiv 1$. 换言之, 任何两个互不相交的闭集均可由连续函数分离.

2) Tietze-Урысон 扩张定理 (Tietze-Urysohn extension theorem): 若 $A \subseteq X$ 是闭集, 而 $f: A \to [0, 1]$ 连续, 则 f 可以扩张为一个连续函数 $\bar{f}: X \to [0, 1]$.

M. E. Rudin ([A3]) 曾经构造出一个正规空间 X, 使得 $X\times[0,1]$ 不是正规空间, 即所谓的 Dowker 空间 (Dowker space).

空间 X 称为集体正规 (collection-wise normal) 空间, 如果对 X 中任何离散的子集族 $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$, 都存在一个离散的开集族 $\{U_\alpha:\alpha\in A\}$, 使得对所有的 $\alpha\in A$ 有 $F_\alpha\subset U_\alpha$. 这里子集族 $\{Y_\alpha:\alpha\in A\}$ 称为离散的 (discrete), 如果对任何 $x\in X$ 都有一个开邻域 U_x, 至多与一个 Y_α 相交.

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).

[A2] Engelking, R., General topology, PWN, 1977.

[A3] Rudin, M. E., A normal space X for which X × I is not normal, *Fund. Math.*, 73 (1971), 179 – 186.

[A4] Alò, R. A. and Shapiro, H. L., Normal topological spaces, Cambridge Univ. Press, 1974.

胡师度、白苏华 译

法空间 (曲面的) [normal space (to a surface); нормальное пространство], 在点 P 的

空间 V^n 中的曲面 F^m 在点 P 的切空间 T_pF (见**切平面** (tangent plane)) 的正交补 N_pF. 法空间的维数是 $n-m$ (F 的余维). 它的每一个一维子空间称为 F 在点 P 的**法线** (normal). 如果 F 是光滑超曲面, 则它在每一点有唯一的一条法线.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自法文).

[A2] Chen, B.-Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.

陈维桓 译

正规子半群 [normal sub-semi-group; нормальная подполугруппа], 半群 S 的

满足下述条件的子半群 H: 对任意满足 $xy\in S$ 的 $x,y\in S^1$ (记号 S^1 见**正规复形** (normal complex)) 和任意 $h\in H$, 关系 $xhy\in H$ 与 $xy\in H$ 等价. S 的一个子集是正规子半群, 当且仅当在 S 到某个带单位元的**半群** (semi-group) 的满同态下, 它是单位元的完全反象.

参考文献

[1] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

Л. Н. Шеврин 撰 王 杰 译 石生明 校

正规子群 [normal subgroup; нормальный делитель], 正规除子 (normal divisor), 不变子群 (invariant subgroup)

群 G 的子群 H, 使得 G 模 H 的左分解与右分解相同. 换言之, 对于任意元素 $a\in G$, 陪集 aH 和 Ha (作为集合) 相等. 这时亦称 H 在 G 中正规, 记作 $H\trianglelefteq G$: 如果还有 $H\neq G$, 则记作 $H\triangleleft G$. 子群 H 在 G 中正规当且仅当它包含其任意元素的所有 G 共轭 (见**共轭元** (conjugate elements)), 即 $H^G\subseteq H$. 正规子群还可以定义为与其所有的共轭都相等的子群, 因而也被称为自共轭子群 (self-conjugate subgroup).

对于任意同态 (homomorphism) $\varphi:G\to G^*$, G 中被映成 G^* 的单位元的全体元素组成的集合 K (即同态 φ 的核 (kernel of the homomorphism)) 是 G 的一个正规子群. 反之, G 的任一正规子群都是某个同态的核. 特别地, K 是映到**商群** (quotient group) G/K 的自然同态的核.

对于任意正规子群的集合, 它们的交仍是正规的, 由 G 的任意一族正规子群生成的子群仍在 G 中正规.

О. А. Иванова 撰

【补注】 群 G 的子群 H 是正规的, 如果对所有的 $g\in G$ 有 $g^{-1}Hg=H$, 或者等价地, 其正规化子 $N_G(H)=G$, 见**子集的正规化子** (normalizer of a subset). 正规子群亦称为不变子群 (invariant subgroup), 因为它在 G 的内自同构 (inner automorphism) $x\mapsto x^g=g^{-1}xg$ ($g\in G$) 下是不变的. 在全体自同构下不变的子群称为全不变子群 (fully-invariant subgroup), 或者**特征子群** (characteristic subgroup). 在全体自同态下不变的子群称为**全特征子群** (fully-characteristic subgroup).

参考文献

[A1] Hall, M. Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959, p. 26 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1982).

[A2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962, p. 5.

[A3] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: A. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

【译注】 有的书将全体自同态下不变的子群称为 (完) 全不变子群, 而在全体自同构下不变的子群称为特征子群, 如见 [A1], [B1].

参考文献

[B1] 徐明曜, 有限群导引, 上册, 科学出版社, 1987.

王 杰 译 石生明 校

正规零维闭链 [normal zero-dimensional cycle; нормальный нульмерный цикл], 指数为零的闭链 (cycle of index zero)

适合条件 $\sum_{i=1}^n a_i=0$ 的**闭链** (cycle) $z=\sum_{i=1}^n a_it_i^0$. 同调於零的闭链一定是正规的. 正规闭链群被同调於零的闭链子群除, 所得的商群称为约化零

维同调群 (reduced zero-dimensional homology group). 对于连通复形来讲，约化群为零，它在各种零调性的定义中，使用起来都很方便. 一个**真闭链** (proper cycle) $z^0 = \{z_1^0, \cdots, z_k^0, \cdots\}$ 称为正规的，如果它的每个闭链 z_k^0 为正规的.

A. A. Мальцев 撰 沈信耀 译 余建明 校

正规化原理 [normalization principle; нормирования принцип]

见**正规算法** (normal algorithm).

正规化元素系 [normalized system of elements; нормированная система элементов]

Banach 空间 (Banach space) B 中的元素系 $\{x_t\}$, 其范数都等于一, $\|x_t\|_B = 1$. 特别地，空间 $L_2[a, b]$ 中函数系称为正规化的，如果

$$\int_a^b |f_t(x)|^2 dx = 1.$$

Banach 空间 B 的非零元素系 $\{x_t\}$ 的正规化是指构造形如 $\{\lambda_t x_t\}$ 的正规化系，这里 λ_t 是不为 0 的数，称为正规化因子 (normalized factor). 可取 $\lambda_t = 1/\|x_t\|_B$ 作为正规化因子序列.

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[3] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本: Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析, 上、下册, 高等教育出版社, 1982).

A. A. Талалян 撰 葛显良 译

正规化子条件 [normalizer condition; нормализаторное условие], 关于子群的

关于**群** (group) 的条件: 每个真子群都严格包含于其正规化子之中 (见**子集的正规化子** (normalizer of a subset)). 满足正规化子条件的群都是**局部幂零群** (locally nilpotent group). 另一方面，所有的幂零群，甚至具有递升中心列的群 (ZA 群 (ZA-group)), 都满足正规化子条件. 然而，存在满足正规化子条件而中心平凡的群. 因此，满足正规化子条件的群类严格居于 ZA 群类与局部幂零群类之间.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: A. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

A. Л. Шмелькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1980.

王 杰 译 石生明 校

正规化子 [normalizer; нормализатор], 群 G 的子集 M 在 G 的一个子群 H 中的

集合

$$N_H(M) = \{h : h \in H, h^{-1}Mh = M\},$$

即: H 中所有这样的元素 h 构成的集合，使得对任意 $m \in M$, m 被 h 的共轭 $h^{-1}mh$ 仍属于 M. 对任意的 M 和 H, 正规化子 $N_H(M)$ 是 H 的子群. 一个重要的特例是群 G 的一个子群在 G 中的正规化子. 群 G 的一个子群 A 在 G 中是正规的 (或者不变的，见**不变子群** (invariant subgroup)), 当且仅当 $N_G(A) = G$. 由单个元素构成的集合的正规化子与其**中心化子** (centralizer) 相等. 对任意 H 和 M, 通过 H 的元素与 M 共轭的子集 (即形如 $h^{-1}Mh (h \in H)$ 的子集) 的个数等于指数 $|H : N_H(M)|$.

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

H. H. Вильямс 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1980.

【译注】

参考文献

[B1] 徐明曜, 有限群导引, 上册, 科学出版社, 1987.

王 杰 译 石生明 校

正规嵌入的子空间 [normally-imbedded subspace; нормально расположенное подпространство]

空间 X 的子空间 A, 它在 X 中的每个邻域 U, 都存在一个集合 H, 是 X 中可数多个闭集之并，并且 $A \subset H \subset U$. 若 A 正规嵌入 X, 而 X 正规嵌入 Y, 则 A 正规嵌入 Y. **正规空间** (normal space) 的正规嵌入子空间，就其诱导拓扑而言，本身是正规空间. 这就说明了名称的缘由. 空间的最终紧性等价于它可正规嵌入该空间的某个 (因而任何) **紧化** (compactification). 一般而言，最终紧空间的正规嵌入子空间本身是最终紧空间.

参考文献

[1] Смирнов, Ю. М., 《Мат. сб.》, **29** (1951), 173 – 176.

A. B. Архангельский 撰

【补注】 终紧空间 (finally-compact space) 就是 **Lindelöf 空间** (Lindelöf space). 胡师度、白苏华 译

正规可解算子 [**normally-solvable operator; нормально разрешимый оператор**]

具有闭值域的**线性算子** (linear operator). 设 A 是在 Banach 空间 X 中有稠定义域并且值域 $R(A)$ 在 Banach空间 Y 中的一个线性算子. 那么 A 是正规可解的, 如果 $\overline{R(A)} = R(A)$, 即如果 $R(A)$ 是 Y 的一个闭子空间. 设 A^* 是 A 的伴随. 为了 A 是正规可解的, $R(A) = {}^{\perp}N(A^*)$ 是必要和充分的, 即 A 的值域是 A^* 的零空间的正交补.

假设

$$Ax = y \qquad (*)$$

是一个带正规可解算子的方程(正规可解方程(normally-solvable equation)). 如果 $N(A^*) = \{0\}$, 即如果齐次伴随方程 $A^*\psi = 0$ 只有平凡解, 那么 $R(A) = Y$. 但是, 如果 $N(A^*) \neq \{0\}$, 那么为了 (*)是可解的, 必要和充分条件是对方程 $A^*\psi = 0$ 的所有解 $\langle y, \psi \rangle = 0$.

往后假设 A 是闭的. 一个正规可解算子称为 n 正规的 (n-normal), 如果它的零空间 $N(A)$ 是有限维的 ($n(A) = \dim N(A) < +\infty$). 一个正规可解算子 A 称为 d 正规的 (d-normal), 如果它的**亏子空间** (deficiency subspace) 是有限维的 ($d(A) = \dim^{\perp} R(A) < +\infty$). 那些是 n 正规或 d 正规的算子有时称为半 Fredholm 算子 (semi-Fredholm operators). 为了算子 A 是 n 正规的, 必要和充分条件是 $R(A)$ 中每一紧集的原象是局部紧的.

假设 X 紧嵌入 Banach 空间 X_0. 为了 A 是 n 正规的, 必要和充分条件是存在一个先验估计

$$\|x\|_X \leqslant a\|x\|_{X_0} + b\|Ax\|_Y, \; x \in D(A).$$

原来算子 A 是 n 正规的, 当且仅当 A^* 是 d 正规的. 因而, 如果 X^* 紧嵌入 Banach 空间 Z, 那么 A 是 d 正规的, 当且仅当有一个先验估计

$$\|f\|_{Y^*} \leqslant a\|f\|_Z + b\|A^*f\|_{X^*}, \; f \in D(A^*).$$

$(n(A), d(A))$ 这对数称为 A 的 d 特征 (d-characteristic). 如果正规可解算子 A 是 n 正规或 d 正规的, 数

$$\chi(a) = n(A) - d(A)$$

称为算子 A 的指标 (index of the operator). n 正规和 d 正规性质是稳定的: 如果 A 是 n 正规(或者 d 正规), 并且 B 是一个小范数或完全连续的线性算子, 那么 $A+B$ 也是 n 正规(分别地, d 正规的).

参考文献

[1] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[2] Аткинсон, Ф., 《Матем. сб.》, **28** (1951), 1, 3–14.

[3] крейн, С.Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971 (英译本: Krein, S. G., Linear differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1971).

В. А. Треногин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I. C. [I. Ts. Gokhberg] and Krein, M. G., The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **13** (1960), 185–264 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **12** (1957), 43–118).

[A2] Goldberg, S., Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[A3] Kato, T., Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. d'Anal. Math.*, **6** (1958), 261–322.

[A4] Krein, S. G., Linear equations in Banach spaces, Birkhäuser, 1982 (译自俄文).

鲁世杰 译 葛显良 校

赋范代数 [**normed algebra; нормированная алгебра**]

实或复数域上**代数** (algebra) 且同时是**赋范空间** (normed space), 其中的乘法满足某种连续性条件. 最简单的这种条件是分离连续性. 一般而言, 分离连续性弱于因子的联合连续性. 例如, 如在所有的有限序列 $x = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, 0, \cdots)$ 的集合上按坐标定义代数运算, 并且定义范数 $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k| k^{-2}$, 则得到一个代数, 其中的乘法是分离连续而非联合连续的. 在赋范代数中, 乘法的联合连续性等价于存在常数 c 使得 $\|xy\| \leqslant c\|x\|\|y\|$. 在此情况且仅在此情况下, 其完全化有赋范代数的结构, 是原赋范代数的扩张, 且是一个 **Banach 代数** (Banach algebra).

Е. А. Горин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Naĭmark, M. A., Normed rings, Noordhoff, 1964 (译自俄文).

葛显良 译

赋范域 [**normed field; нормированное поле**]

给定了**赋值** (valuation) 的域 (field) (亦见**域上的范** (norm on a field)).

赵春来 译

赋范环 [**normed ring; нормированное кольцо**]

1) 与赋范代数或 **Banach 代数** (Banach algebra) 相同.

2) 在其上有**赋值** (valuation) 的环.

葛显良 译

赋范空间 [**normed space; нормированное пространство**]

实或复数域上具有一个特定范数的**向量空间** (vector space).

Е. А. Горин 撰 葛显良 译

疏集[**nowhere-dense set**; **нигде не плотное множество**], 亦称无处稠密集，拓扑空间 X 的

由下述性质定义的集合 A：任何非空开集 $\Gamma \subset X$ 均包含一个非空开集 $\Gamma_0 \subset X$，使得 $A \cap \Gamma_0 = \phi$. 换言之，若 A 在任何非空开集中都不是稠密集，则 A 是疏集．　　　　М. И. Войцеховский 撰

【补注】 另一个特征是：疏集的闭包的内部是空集．如果在拓扑乘积 $X = \Pi X_\alpha$ 中有无限多个空间 X_α 是非紧空间，则 X 的任何紧子集都是疏集．边缘集(boundary set) A 是稠密集的补集，即 A 满足 $\overline{X \setminus A} = X$. 如果一个集合的闭包是边缘集，则该集合是疏集．非空的完全度量空间是第二范畴(second category)集，即在该空间中疏集的可数并是疏集(Baire 范畴定理(Baire category theorem)，见 **Baire 定理**(Baire theorem))．

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984(译自俄文).

[A2] Kelley. J. L., General topology, v. Nostrand 1955, p. 145(中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).

胡师度、白苏华 译

核型双线性型[**nuclear bilinear form**; **ядерная билинейная форма**]

两个局部凸空间 F 和 G 的 Descartes 乘积 $F \times G$ 上的一个双线性型 $B(f,g)$，它可以表示为

$$B(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < f, f_i' > < g, g_i' >,$$

这里 $\{\lambda_i\}$ 是一个可和序列，$\{f_i'\}$ 和 $\{g_i'\}$ 分别是 F 和 G 的对偶空间 F' 和 G' 中的等度连续序列(见**等度连续性**(equicontinuity))，并且 $\langle a, a' \rangle$ 表示线性泛函 a' 在向量 a 的值．所有的核型双线性型是连续的．如果 F 是**核型空间**(nuclear space)，那么对任一局部凸空间 G，$F \times G$ 上的所有连续双线性型是核型的(核定理(kernel theorem))．这个结果属于 A. Grothendieck([1])；上面的陈述在[2]中给出；其他的陈述见[3]．逆命题成立：如果一个空间 F 满足核定理，那么它是核型空间．

对紧支集光滑函数空间，核定理由 L. Schwartz 第一个得到([4])．设 D 是实直线上所有带紧支集无穷次可微函数赋予标准的局部凸 Schwartz 拓扑的核型空间，则对偶空间 D' 由直线上所有广义函数组成．在 $F = G = D$ 的特殊情形下，核定理等价于下面的论断：$D \times D$ 上的每一个连续双线性泛函具有形式

$$B(f,g) = \langle f(t_1) g(t_2), F \rangle = = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_1,t_2) f(t_1) g(t_2) dt_1 dt_2,$$

这里 $f(t), g(t) \in D$，并且 $F = F(t_1, t_2)$ 是一个两个变元的广义函数．对具紧支集的多变元光滑函数空间，急减函数空间，以及其他特定的核型空间有核定理的类似陈述．类似的结果对多重线性型成立．

$D \times D$ 上的一个连续双线性型 $B(f,g)$ 可以用等式

$$B(f,g) = \langle g, Af \rangle$$

等同于一个连续线性算子 $A: D \to D'$，这导致 Schwartz 核定理(Schwartz kernel theorem)：对任一连续线性映射 $A: D \to D'$，存在一个唯一的广义函数 $F(t_1, t_2)$，使得对所有的 $f \in D$，

$$A: f(t_1) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1,t_2) f(t_2) dt_2.$$

换句话说，A 是带核 F 的积分算子．

参考文献

[1] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer. Math. Soc., 1955.

[2] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972(译自德文).

[3] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961(中译本：И. М. 盖尔芳特，Н. Я. 维列金，广义函数Ⅳ，调和分析的某些应用，装备希尔伯特空间，科学出版社，1965).

[4] Schwartz, L., Théorie des noyaux, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Cambridge, 1950, Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1952, 220-230.

[5] Schwartz, L., Espaces de fonctions différentielles à valeurs vectorielles, *J. d'Anal. Math.*, **4** (1954-1955), 88-148.

Г. Л. Литвинов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Trèves, F., Topological vectorspaces, distributions and kernels, Acad. Press, 1967.

[A2] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966.

鲁世杰 译　葛显良 校

核型 C^* 代数[**nuclear C^*-algebra**; **ядерная C^*-алгебра**]

具有以下性质的 C^* **代数**(C^*-algebra) A：对任一 C^* 代数 B，在代数张量积 $A \otimes B$ 上存在唯一的范数使得 $A \otimes B$ 对于此范数的完全化是 C^* 代数．因而，相对于张量积，核型 C^* 代数类似于**核型空间**(nuclear space)(虽然无穷维核型 C^* 代数不是核型空间)．核型 C^* 代数类包括所有 Ⅰ 型 C^* 代数．此类关于归纳极限是封闭的．如果 I 是 C^* 代数 A 中一个闭双边理想，则 A 是核型的当且仅当 I 和 A/I 是核型的．核型 C^* 代数的子代数不必是核型 C^* 代数．两个 C^* 代数 A 和 B 的张

量积是核型的，当且仅当 A 和 B 两者都是核型的．如果 G 是顺从的局部紧群，则群代数 $L_1(G)$ 的包络 C^* 代数是核型的（其逆命题不成立）．每一核型 C^* 代数的**因子表示**（factor representation）是超有限的（hyperfinite），即由此表示生成的 **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）可由有限维因子（矩阵代数）的递增序列得到．C^* 代数的核型 C^* 子代数上的任一因子态能扩张到整个代数上的一个因子态．

设 $L(H)$ 是 Hilbert 空间 H 上所有有界线性算子的 C^* 代数，且设 A 是 H 上算子的一个 C^* 代数．如果 A 是核型的，则它的弱闭包 $\bar{A}$ 是单射 von Neumann 代数（injective von Neumann algebra），即存在一个范数为一的投射 $L(H) \to \bar{A}$；在这种情况下 A 的交换子 A' 也是单射的．任一 C^* 代数 A 是核型的，当且仅当其包络 von Neumann 代数是单射的．

一个 C^* 代数 A 是核型的，当且仅当它有完全正逼近性质；即 A 中的单位算子能用范数不超过 1 且有附加性质"完全正"的有限秩线性算子按强算子拓扑逼近（[1]）．

每一个核型 C^* 代数有这种逼近和有界逼近性质（见**核型算子**（nuclear operator））．然而，存在具有有界逼近性质的非核型 C^* 代数．无穷维 Hilbert 空间上所有有界算子的 C^* 代数 $L(H)$ 不具有完全正逼近性质，甚至也无逼近性质，故 $L(H)$ 不是核型的．

参考文献

[1] Lance, E. C., Tensor products and nuclear C^*-algebras, in R. V. Kadison (ed.), Operator algebras and applications, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 38, Amer. Math. Soc., 1982, 379 – 399.

[2] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1, Springer, 1979.

Г. Л. Литвинов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R., Fundamentals of the theory of operator algebras, 1-2, Acad. Press, 1983.

[A2] Pedersen, G. K., C^*-algebras and their automorphism groups, Acad. Press, 1979, Sect. 8. 15. 15.

葛显良 译　鲁世杰 校

核型范数 [nuclear norm; ядерная норма]，迹范数（trace norm）

把 **Banach 空间**（Banach space）X 映射到 Banach 空间 Y 中的**核型算子**（nuclear operator）的空间 $N(X, Y)$ 上的一个范数．

设 X 和 Y 是实或复数域上的 Banach 空间，设 $L(X, Y)$ 是把 X 映射到 Y 中的所有连续线性算子的空间，并且设 $F(X, Y)$ 是有限秩（即有有限维值域）算子组成的线性子空间．X 的 Banach 对偶用 X' 表示，并且泛函 $x' \in X'$ 在向量 $x \in X$ 的值用 $\langle x, x' \rangle$ 表示．

每一个核型算子 $A \in N(X, Y)$ 可以表为以下形式：

$$x \mapsto Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle y_i, \tag{1}$$

其中 $\{x_i'\}$ 和 $\{y_i\}$ 分别是 X' 和 Y 中的序列，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i' \| \| y_i \| < \infty;$$

这样的表示称为核型的（nuclear）．量

$$\| A \|_1 = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i' \| \| y_i \| \tag{2}$$

称为 A 的核型范数（nuclear norm），其中的下确界取遍形（1）的所有可能的核型表示．带这个范数的空间 $N(X, Y)$ 是包含 $F(X, Y)$ 作为一个稠密线性子空间的 Banach 空间．如果 $A \in N(X, Y)$，那么伴随算子 A' 属于 $N(Y', X')$，并且 $\|A'\|_1 \leq \|A\|_1$．设 $\|\cdot\|$ 表示 $L(X, Y)$ 中通常的算子范数，那么对所有的 $A \in N(X, Y)$，$\|A\| \leq \|A\|_1$．如果 $A \in L(Y, Z)$，并且 $B \in N(X, Y)$，那么 $AB \in N(X, Z)$，并且 $\|AB\|_1 \leq \|A\| \|B\|_1$；如果 $A \in N(Y, Z)$，并且 $B \in L(X, Y)$，那么 $AB \in N(X, Z)$，并且 $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|$．任一算子 $F \in F(X, Y)$ 可以表示为以下形式

$$x \mapsto Fx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i. \tag{3}$$

量

$$\| F \|_1^0 = \inf \sum_{i=1}^{n} \| x_i' \| \| y_i \| \tag{4}$$

称为 F 的有限核型范数（finite nuclear norm）．空间 $F(X, Y)$ 可以等同于张量积 $X' \otimes Y$．这里元

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \in X' \otimes Y \tag{5}$$

对应于形（3）的一个算子 F，并且有限核范数（4）等于范数

$$\| u \| = \inf \sum_{i=1}^{n} \| x_i' \| \| y_i \|, \tag{6}$$

这里的下确界取遍 u 的形（5）的所有有限表示．这个范数称为 Y 和 X' 中的范数的张量（tensor）（或交叉（cross））积（product）．$X' \otimes Y$ 关于范数（6）的完全化用 $X' \hat{\otimes} Y$ 表示．映射 $X' \otimes Y \to L(X, Y)$，在这个映射下元（5）映成算子（3），可以延拓为一个连续线性算子 $\Gamma: X' \hat{\otimes} Y \to L(X, Y)$．$\Gamma$ 的值域是 $N(X, Y)$．如果 Γ 确立了 $X' \hat{\otimes} Y$ 和 $N(X, Y)$ 间的一个一一对应，那么 $N(X, Y)$ 与 $F(X, Y)$ 关于范数（4）的闭包一致；在这种情形下，核范数在 $F(X, Y)$ 上的限制与有限核范数一样．但是，一般地，Γ 可能有一个非平凡核，因此核范数是 $X' \hat{\otimes} Y$ 中范数的一个商（见**核型算子**

(nuclear operator)).

设 $X=Y=H$,其中 H 是一个可分 Hilbert 空间,设 $L(H)=L(H,H)$ 是 H 上有界算子的代数,并且设 $L_1(H)=N(H,H)$ 是 $L(H)$ 中核型算子的理想. 在这种情形下,Γ是一对一的,对有限秩算子核范数与有限核范数一致,并且每一个 $A\in L_1(H)$ 有一个迹 $\operatorname{tr}A$(见**核型算子**(nuclear operator)).算子 $A\in L_1(H)$ 的核范数与 $\operatorname{tr}[(A^*A)^{1/2}]$ 一致,这里 A^* 是 A 在 H 中的伴随. 核范数以 $\|A\|_2\leqslant\|A\|_1$ 与 **Hilbert-Schmidt 范数**(Hilbert-Schmidt norm)$\|\cdot\|_2$ 相联系. Banach 空间 $L_1(H)$ 上的连续线性泛函的一般形式由

$$A\mapsto \operatorname{tr}AB \qquad (7)$$

给出,其中 B 是 $L(H)$ 中一个任意的算子,并且泛函(7)的范数与 $\|B\|$ 一致. 因而,$L(H)$ 与 $L_1(H)$ 的对偶等距. 公式(7)也给出了 $L(H)$ 的由所有完全连续(紧)算子组成的闭子空间 $L_\infty(H)$ 上线性泛函的一般形式;这里 $A\in L_\infty(H)$,并且 B 取遍 $L_1(H)$. 在这种情形下,泛函(7)的范数与 $\|B\|_1$ 一致、即带核范数的核算子的空间 $L_1(H)$ 与 $L_\infty(H)$ 按通常算子范数的对偶等距. 这些结果在 Banach 空间算子的情形有非平凡的推广.

例. 设 $X=Y=l_1$ 是可和序列的空间. 一个算子 $A\in L(l_1,l_1)$ 含在 $N(l_1,l_1)$ 中,当且仅当有一个无穷矩阵 (σ_{ik}),使得 A 映 $\{\xi_k\}\in l_1$ 到 $\{\eta_i\}=\{\sum_{k=1}^\infty\sigma_{ik}\xi_k\}\in l_1$,并且 $\sum_{i=1}^\infty\sup_k|\sigma_{ik}|<\infty$. 在这种情形下,$\|A\|_1=\sum_{i=1}^\infty\sup_k|\sigma_{ik}|$.

参考文献

[1] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer. Math. Soc., 1955.

[2] Pietsch, A., Operator ideals, North-Holland, 1980.

[3] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972(译自德文).

[4] Гохберг, И.Ц., Крейн. М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965(英译本: Gohberg, I.C. [I.Ts. Gokhberg] and Krein, M.G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1969).

[5] Гельфанд, И.М., Виленкин, Н.Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства; М., 1961(中译本: И.М. 盖尔芳特, Н.Я. 维列金, 广义函数Ⅳ, 调和分析的某些应用, 装备希尔伯特空间, 科学出版社, 1965).

[6] Maurin, K., Methods of Hilbert spaces, PWN, 1967.

[7] Day, M.M., Normed linear spaces, Springer, 1958.

Г.Л.Литвинов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pietsch, A., Eigenvalues and s-numbers, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A2] Grothendieck. A., Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques *Bol. Soc. Mat. São. Paulo*, **8**(1956), 1-79.

[A3] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

鲁世杰 译 葛显良 校

核型算子[**nuclear operator**; **ядерный оператор**],核型映射(nuclear mapping)

把一个**局部凸空间**(locally convex space)映射到另一个中的、具有特殊形式的有限秩算子(operators of finite rank)(即具有有限维值域的连续线性算子)逼近的**线性算子**(linear operator). 核型算子具有某些从有限维算子那里继承来的性质. 特别地,把一个带基的空间映到其自身的核型算子具有有限迹(见下文),它与这个算子相对于任意基的矩阵的对角元组成的级数之和一致. 核型算子最早出现在数学量子力学中并且称为"带迹的算子"(见[1],[2]). 在 Hilbert 空间上带迹的算子一对一地对应于双叶张量积,并且算子的迹与对应的张量积的缩并一致. 利用这个对应. A.F. Ruston([3])把核型算子的概念推广到 Banach 空间. 独立地,联系于**核型空间**(nuclear space)的理论,A. Grothendieck 把这个概念推广到局部凸空间(见[4],[5]). 设 E 和 F 是实或复数域上的局部凸空间,设 E' 和 F' 是它们的赋予强拓扑的对偶,设 $L(E,F)$ 是从 E 到 F 的所有连续线性映射的向量空间,并且设 $S(E,F)$ 是从 E 到 F 的所有弱连续映射的空间. 设 $L(E,E)=L(E)$ 和 $S(E,E)=S(E)$.

线性算子 $A:E\to F$ 称为核型的(nuclear),如果它可以表示为这种形式

$$x\mapsto Ax=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x,x_i'\rangle y_i, \qquad (1)$$

其中 $\{\lambda_i\}$ 是一个可和的数值序列,$\{x_i'\}$ 是 E' 中一个等度连续序列,$\{y_i\}$ 是取自 F 中一定的完全有界凸圆形集的元素的序列(见**拓扑向量空间**(topological vector space)),并且 $\langle x,x'\rangle$ 表示线性泛函 x' 在向量 x 处的值. 表示式(1)可以看成这个算子作为一秩算子(即带一维值域)和的展开式,并且对应的级数在 $L(E,F)$ 中按有界集上的一致收敛拓扑是绝对收敛的. 这样,按这个拓扑,这个核型算子 A 是一个有限秩算子序列的极限. 如果 E 和 F 是 Banach 空间,那么一个核型算子 A 可以按**核型范数**(nuclear norm)用有限秩算子逼近.

展开式(1)称为 A 的一个核型表示(nuclear representation). 每一个核型算子有一个核型表示(1),使得 $x_i'\to0$, $y_i\to0$. 如果 E 是一个**桶型空间**(barrelled space)并且是完全的,或者至少是拟完全的(quasi-complete)(即 E 中闭有界集是完全的),那么展开式(1)是核型的,当且仅当 $\{x_i'\}$ 和 $\{y_i\}$ 是有界的.

通过改变加在$\{\lambda_i\}$，$\{x_i'\}$和$\{y_i\}$上的条件可以得到核型算子概念不同的修改(见[4],[5],[7])．如果代替$\{x_i'\}$的等度连续性，要求它的元素属于E'中一个完全有界凸圆形集，那么展开式(1)定义一个**Fredholm算子**(Fredholm operator)；这些算子组成Fredholm理论应用的自然领域(见[4],[5])．每一个核型算子是一个Fredholm算子，并且当E赋予**Mackey拓扑**(Mackey topology)时，任一Fredholm算子$A:E\to F$是核型的．核型算子A称为强核型的(strongly nuclear)(或零阶核型算子(nuclear operator of order 0))，如果它有一个核型表示(1)，其中$\{\lambda_i\}$是一个速减序列，即对所有$p>0, \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^p<\infty$．

积分算子(特别地、Fredholm积分算子)提供了核型算子和它们的修改的许多例子(见[4],[5],[7],[8])．

核型算子的性质．每一个核型算子$A\in L(E,F)$是紧的，即它把E中零的一个邻域映到在F中有紧闭包的一个集合中．这样、每一个核型算子是连续的，并且每一个Fredholm算子是弱连续的．一个核型算子和一个连续线性算子的积(按任何顺序)是一个核型算子．特别地，所有核型算子的集合是代数$L(E)$中的一个理想；相应地；Fredholm算子组成$S(E)$中的一个理想．强核型算子也组成$L(E)$中的一个理想．每一个核型算子$A\in L(E,F)$有一个唯一的延拓$\hat{A}\in L(\hat{E},F)$，其中$\hat{E}$是E的完全化并且$\hat{A}$是核型的．如果$A\in L(E,F)$是一个Fredholm算子，那么对偶映射$F'\to E'$是一个核型算子．对任一核型算子$A\in L(E,F)$可以找到Banach空间E_1和F_1，紧算子$K_1\in L(E,E_1)$和$K_2\in L(F_1,F)$、以及核型算子$B\in L(E_1,F_1)$，使得$A=K_2BK_1$．如果$A\in L(E)$是强核型算子，那么它的本征值(一般来说，复的)的序列，按绝对值递减排列，是速减的．

设E是一个核型空间，并且设F是一个完全的或者拟完全的空间，那么对$A\in L(E,F)$下面的断言是等价的：1) A是一个核型算子；2) A是一个**紧算子**(compact operator)；3) A是一个**有界算子**(bounded operator)，即A把E中零的一个邻域映到F中一个有界集中；以及4) A是强核型算子．

设E,F和G是Hilbert空间，并且设$K_1\in L(E,F)$和$K_2\in L(F,G)$是**Hilbert-Schmidt算子**(Hilbert-Schmidt operator)，那么$K_2K_1\in L(E,G)$是核型的．反过来，每个核型算子都是两个Hilbert-Schmidt型算子的积．一个任意的完全连续(紧)算子$A\in L(E,F)$是核型的，当且仅当它的**极分解**(polar decomposition)$A=UT$中的正定算子$T\in L(E)$的本征值的级数收敛，其中U是映T的值域到F中的等距算子(见[9])．

带迹的算子．设E是一个任意的局部凸空间，并且设A是映E到其自身的核型(分别地，Fredholm)算子并且有一个形(1)的表示．级数$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle y_i,x_i'\rangle$绝对收敛；如果它的和不依赖于表示(1)，那么这个和称为核型(Fredholm)算子A的迹(trace of the nuclear (Fredholm) operator A)，并且用$\operatorname{tr}A$表示．在这种情形下，迹是唯一确定的(well defined)(见[4],[5])．这个算子称为一个有限迹算子(operator of finite trace)或者一个迹类算子(trace class operator)．如果(1)只含有限项，那么A是一个有限秩算子，并且$\operatorname{tr}A$与在A的值域中诱导的有限维算子的迹一样．

设$E'\bar{\otimes}E$是E'和E的归纳张量积(inductive tensor product)，即(代数)张量积$E'\otimes E$按使典范双线性映射$E'\times E\to E'\otimes E((x',x)$映到$x'\otimes x)$分别对每个变元连续的最强**局部凸拓扑**(locally convex topology)的完全化．这个映射与$E'\bar{\otimes}E$上的任何连续线性型的复合，给出$E'\times E$上分别对每个变元连续的的双线性型，并且这种类型的型之间的对应是一对一的．特别地，双线性型$(x',x)\mapsto\langle x,x'\rangle$对应于$E'\bar{\otimes}E$上的一个连续线性型．这个型在$u\in E'\bar{\otimes}E$上的值用$\operatorname{tr}u$表示．元素$u\in E'\bar{\otimes}E$称为一个Fredholm核(Fredholm kernel)，如果它有这种形式的展开式

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i'\otimes y_i, \tag{2}$$

其中$\{\lambda_i\}$，$\{x_i'\}$和$\{y_i\}$与关于一个Fredholm算子的展开式(1)一样．Fredholm核在$E'\bar{\otimes}E$中组成一个子空间，记为$E'\tilde{\otimes}E$．

假设E上弱连续算子的代数$S(E)$赋予由半范数$A\mapsto|\langle Ay,x'\rangle|$定义的弱**算子拓扑**(operator topology)，其中$A\in S(E)$，并且x'和y分别取遍E'和E．把形(2)的元素u映到形(1)的算子A的映射$\Gamma:E'\tilde{\otimes}E\to S(E)$是一意的，线性的和连续的；而且$\operatorname{tr}u=\operatorname{tr}\Gamma(u)$，如果算子$A=\Gamma(u)$的迹是唯一确定的．如果$E$和$E'$是完全的(例如，如果$E$是一个**Fréchet空间**(Fréchet space))，那么Γ可以连续地延拓到$E'\bar{\otimes}E$上．在这个映射下，$E'\bar{\otimes}E$的元素的象称为带迹的算子(operators with a trace)(见[4],[5])．如果E是一个Banach空间，那么每一个带积的算子是核型的，原来在这种情形下核型算子、Fredholm算子和带迹算子的类重合．存在不是Fredholm算子的带迹算子(例如，在核型Fréchet空间)．这些算子的非紧性使得对它们的研究变得困难了．

单值性问题．(双射性问题(problème de biunivocite))．如果Γ是一对一的，或者至少如果$\Gamma(u)=0$蕴涵$\operatorname{tr}u=0$，那么由$\operatorname{tr}\Gamma(u)=\operatorname{tr}u$，$\Gamma(u)$的迹是唯一确定的．

这种可能性与$L(E)$含有一个在所有准紧集上按一致收敛拓扑收敛到恒等算子的有限秩算子网(见**网(有向集)**(net (directed set)))的逼近性质(approxima-

tion property)密切相关．如果 E 是一个 Banach 空间，那么任一核型算子的迹是一意的，当且仅当逼近性质成立([4])．已经构造出一个没有逼近性质(并且没有 Schauder 基，这样就解决了 S．Banach 的一个众所周知的问题)的自反可分空间 X([11])．这解决了单值性问题：存在一个 $u\in X'\hat{\otimes}X$，使得 $\Gamma(u)=0$，但是 $\mathrm{tr}\,u=1$．如果局部凸空间 E 有逼近性质，那么每一个核型算子有一个唯一确定的迹；如果 $\{B_v\}$ 是一个在所有准紧(或者，至少，在凸平衡紧)集上一致收敛到一个任意的算子 $B\in L(E)$ 的有限秩算子网，那么

$$\mathrm{tr}\,AB=\lim_v \mathrm{tr}\,AB_v \tag{3}$$

对任意核型算子 A 成立(见[12])．然而，存在带逼近性质的局部凸空间，其中不可能对所有的 Fredholm 算子适当地定义迹．局部凸空间 E 上的任何 Fredholm 算子有一个一意的迹，如果 E 有有界逼近性质(bounded approximation property)，亦即如果存在一个按弱算子拓扑收敛到恒等算子的有限秩算子网，并且按这个拓扑是有界的；任何带 Schauder 基的空间有这个性质．如果 $\{B_v\}$ 是一个在 $S(E)$ 中收敛到一个任意的算子 B 的有界网(例如，如果 $\{B_v\}$ 是 $S(E)$ 中一个任意的可数收敛序列)，那么(3)对任何 Fredholm 算子 A 成立，只要 AB_v 有一个一意确定的迹(例如，如果 B_v 是有限秩算子，或者 E 有有界逼近性质)．如果 E 有逼近(分别地，有界逼近)性质，那么对任何核型(分别地，Fredholm)算子 A 和任何 $B\in L(E)$(分别地，$B\in S(E)$)有 $\mathrm{tr}\,AB=\mathrm{tr}\,BA$(见[12])．

矩阵迹．假设局部凸空间 E 有一个 Schauder **基**(basis)$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得任何 $x\in E$ 可以展为 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e'_i\rangle e_i$，其中 $e'_i\in E'$．那么如果这个级数收敛，$\sum_{i=1}^{\infty}\langle Ae_i,e'_i\rangle$ 称为算子 A 的矩阵迹(matrix trace)，如果这个基是无条件的，这个级数绝对收敛．带 Schauder 基的空间上的任何 Fredholm 算子有一个与它的矩阵迹一致的一意确定的迹，在这种情形下，它不依赖于基的选择([13])．

Hilbert 空间上的一个任意的连续算子是核型的，当且仅当它对任何正交标准基有一个有限矩阵迹(见[2]，[8]，[9])．

核型迹．设 T 是一个带 Borel 测度 μ 的紧空间，设 $C(T)$ 是 T 上连续函数赋予一致收敛拓扑的 Banach 空间、并且设 $K(t,s)$ 是 $T\times T$ 上的连续函数．那么 $C(T)$ 上的线性积分算子

$$K:\varphi(t)\mapsto\int_T K(t,s)\varphi(s)\,d\mu(s)$$

(一个经典的 Fredholm 积分算子)是核型的并且有唯一确定的迹；而且

$$\mathrm{tr}\,K=\int_T K(t,t)\,d\mu(t). \tag{4}$$

如果 K 是带核 $K(t,s)$，作用在带测度 μ 的空间 T 上的一个函数空间上的积分算子，并且如果(4)的右边可以给予一个适当的意义，那么这个量称为 K 的核型迹(nuclear trace)．对不同类的积分算子，可以得到保证这些算子核性和使我们能给(4)一个意义的条件(见[4]，[5]，[8][14])．

谱迹．设 E 是复数域上的一个局部凸空间，并且设 A 是 E 上的一个核型算子．A 的谱，如同任何紧算子的谱(见**算子的谱**(spectrum of an operator))，或者是有限集，或者是一个收敛于零的序列，并且任何非零值有有限谱重数．如果由 A 的非零本征值(每一个本征值在(5)中出现的次数等于它的谱重数)组成的级数

$$\sum_j \sigma_j(A) \tag{5}$$

绝对收敛，那么它的和称为 A 的谱迹(spectral trace)，并且用 $\mathrm{tr}_\sigma A$ 表示．Hilbert 空间上的每一个核型算子有一个与其矩阵迹一致的谱迹([15])．设 E 是一个多重 Hilbert 空间(multi-Hilbert space)(可 Hilbert 化的空间(Hilbertiable space))，即 E 中的拓扑可以由一族用 $E\times E$ 上非负定 Hermite 型得到的半范数生成；任何**核型空间**(nuclear space)是多重 Hilbert 空间的一个例子．于是 E 上任一核型算子有一个一意的迹和一个谱迹，并且 $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}\,A$(见[13])．核型算子不必有矩阵迹．Banach 空间上的核型算子甚至当这个空间有一个基并且 $\mathrm{tr}\,A$ 是一意的时候也不必有谱迹．并且，等式 $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}\,A$ 可以不成立．例如，在收敛于零的序列的 Banach 空间 c_0 中有这样的核型算子 A，$\mathrm{tr}\,A=1$，并且 $A^2=0$，结果 A 没有非零本征值，并且 $\mathrm{tr}_\sigma A=0$．对作用在一个任意的 Banach 或局部凸空间(可能没有任何逼近性质)上的核型算子 A，有可能给出加在 A 上的条件，在这个条件下、$\mathrm{tr}_\sigma A$ 和 $\mathrm{tr}\,A$ 存在并且相等(见[4]，[14]，[16]，[17])．

例　设 E 是一个复 Banach 空间，并且设 $L(E)$ 是 E 上连续线性算子赋予通常算子范数的代数．对任一 $A\in L(E)$，设 $\alpha_r(A)$ 是 $\|A-F\|$ 当 F 取遍 $L(E)$ 中秩(rank)不超过 $r=0,1,\cdots$ 的所有算子的集合的下确界．所有使 $\sum\alpha_r(A)<\infty$ 的 $A\in L(E)$ 的集合用 $l_1(E)$ 表示．每一个 $A\in l_1(E)$ 是核型的；如果 E 是一个 Hilbert 空间，那么 $l_1(E)$ 与 E 上所有核型算子的集合一致．对任意的 Banach 空间 E，每一个算子 $A\in l_1(E)$ 有一个迹，$\mathrm{tr}\,A$ 和一个谱迹，并且 $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}\,A$(见[16]，[17])．

参考文献

[1] Neumann, J. von, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, 1932.

[2] Schatten, R. and Neumann, J. von, The cross-space of linear transformations Ⅱ, *Ann. of Math.*, **47**(1946), 608–630.

[3] Ruston, A. F., On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.* (2), **53**(1951), 2, 109–124.

[4] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer. Math. Soc., 1955.

[5] Grothendieck, A., La théorie de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France*, **84**(1956), 319–384.

[6] Schaefer, H., Topological vector spaces, Springer, 1971.

[7] Pietsch, A., Operator ideals, North-Holland, 1980.

[8] Гохберг, И.Ц., Крейн, М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965(英译本: Gohberg, I.C. [I. Ts. Gokhberg] and Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1969).

[9] Гельфанд, И.М., Виленкин, Н.Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961(中译本: И.М.盖尔芳特, Н.Я.维列金, 广义函数IV, 调和分析的某些应用, 装备希尔伯特空间, 科学出版社, 1965).

[10] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972(译自德文).

[11] Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Math.*, **130**(1973), 309–317.

[12] Литвинов, Г.Л.,《Теория функций, функциональный анализ и их приложения》, 1983, 39, 73–87.

[13] Литвинов, Г.Л.,《Тр. семинара по вект. и тенз. анализу》, 1979, 19, 263–272.

[14] Pietsch, A., Operator ideals with a trace, *Math. Nachr.*, **100**(1981), 61–91.

[15] Лидский, В.Б.,《Докл. АН СССР》, **125**(1959), 3, 485–487.

[16] Маркус, А.С., Мацаев, В.И.,《Матем. сб.》, **86**(1971), 2, 299–313.

[17] König, H., s-numbers, eigenvalues and the trace theorem in Banach spaces, *Studia Math.*, **67**(1980), 2, 157–172.

Г. Л. Литвинов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Résumé de la théorie métriques des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, **8**(1956), 1–79.

[A2] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

[A3] Simon, B., Trace ideals and their applications, Cambridge Univ. Press, 1979.

[A4] Pietsch, A., Eigenvalues and s-numbers, Cambridge Univ. Press, 1987.

鲁世杰 译 葛显良 校

核型空间[nuclear space; ядерное пространство]

一种**局部凸空间**(locally convex space), 从它到任一 Banach 空间中的所有连续线性映射都是**核型算子**(nuclear operator). 核型空间的概念在探讨以下问题时在[1]中出现: 对什么样的空间与 Schwartz 核定理类似的定理成立(见**核型双线性型**(nuclear bilinear form))? 核型空间理论中基本结果应归于 A. Grothendieck([1]). 分析中用的函数空间通常是 Banach 空间或核型空间. 核型空间在 Hilbert 空间算子的谱分析中起重要作用(赋予的 Hilbert 空间的结构, 按广义本征向量展开)(见[2]). 核型空间与局部凸空间上测度论紧密相关(见[3]). 核型空间能用维数型不变量(逼近维数、直径维数等等)来刻画其特征(见[2], [4], [5]). 这些不变量之一是泛函维数, 对很多由整解析函数组成的空间, 它与这些函数所依赖的变量的个数相同(见[2]).

核型空间在其性质方面与有限维空间接近. 核型空间中每一有界集是准紧的. 如果一核型空间是完全的(或至少拟完全, 即每一闭有界集是完全的), 则它是半自反的(semi-reflexive)(即, 这空间作为元素的集合与其第二对偶重合), 且其中每一闭有界集是紧的. 如果一拟完全的核型空间是**桶型空间**(barrelled space), 则它也是 **Montel 空间**(Montel space)(特别是**自反空间**(reflexive space); 这空间中任一弱收敛的可数序列也按原拓扑收敛. 一个赋范空间是核型的, 当且仅当它是有限维的. 任一核型空间具有逼近性质(approximation property): 这样的空间中的每一连续线性算子能按准紧收敛的算子拓扑用有限秩算子(即有有限维值域的连续线性算子)逼近. 然而, 存在核型 **Fréchet 空间**(Fréchet space)没有有界逼近性质(bounded approximation property); 在这样的空间中, 恒等算子不是有限秩算子可数序列在强或弱算子拓扑中的极限([6]). 无 Schauder **基**(basis)的核型 Fréchet 空间已经构造出来, 且它们能有任意小的直径维数, 即它们能任意接近(在一定意义下)有限维空间([7]). 对核型空间, 不变子空间问题的一个反例已经构造出来: 在一确定的核型 Fréchet空间中, 能找到一个连续线性算子没有非平凡的不变闭子空间([8]).

核型空间的例. 1) 设$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$是$\mathbf{R}^n$上所有(实的或复的)无穷可微函数空间, 赋予在$\mathbf{R}^n$的紧子集上所有导数一致收敛的拓扑. 对偶于$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$的空间$\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$由所有有紧支集的**广义函数**(generalized function)组成. 设$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$和$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$是$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$的线性子空间. 前者由有紧支集的函数组成, 后者由连同其所有导数当$|x|\to\infty$时下降快于$|x|^{-1}$的任意幂的函数组成. $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$和$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$关于标准拓扑的对偶$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$和$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$分别由所有广义函数和所有缓增广义函数组成. 空间$\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{D}'$和

$\mathscr{S}'$，赋予强拓扑，就是完全的自反核型空间.

2) 设$\{a_{np}\}$是一个无穷矩阵，这里$0 \leqslant a_{np} < \infty$且$a_{np} \leqslant a_{n(p+1)}$，$n, p = 1, 2, \cdots$ 对所有 p 满足 $|\xi|_p = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| a_{np} < \infty$ 的序列 $\xi = \{\xi_n\}$ 的空间，带有由**半范数**(semi-norm)族 $\xi \to |\xi|_p$ 定义的拓扑，称为 Köthe 空间(Köthe space)，且用$\mathscr{K}(a_{np})$表示. 这空间是核型的，当且仅当对所有的 p 能找到一个 q，使得$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{np}/a_{nq}) < \infty$.

继承性质. 局部凸空间是核型的，当且仅当它的完全化是核型的. 核型空间的每一子空间(Hausdorff 的商空间)是核型的. 核型空间的直和，核型空间可数族的归纳极限，以及核型空间任意族的投射极限仍是核型的.

设 E 是任意的局部凸空间，且令 E' 表示它的赋予强拓扑的对偶. 如果 E' 是核型的，则 E 称为共核型的(conuclear). 如果 E 是任意的且 F 是核型空间，则从 E 到 F 中的连续线性算子的空间 $L(E, F)$ 按强**算子拓扑**(operator topology)(简单收敛)是核型的；如果 E 是半自反和共核型的，则 $L(E, F)$ 按有界收敛拓扑也是核型的.

度量(metric)**和对偶度量**(dually-metric)**核型空间**. 一个局部凸空间 E 称为对偶度量的或($\mathscr{DF}$)型空间，如它有有界集的可数基本系又如 E' 中每一等度连续子集的(强)有界可数并是等度连续的(见**等度连续性**(equicontinuity)). 任一可度量化局部凸空间的强对偶是对偶度量的，其逆定理不成立. 如果 E 是($\mathscr{DF}$)型空间，则 E' 是($\mathscr{F}$)型的(Fréchet 空间，即是完全和可度量化的). ($\mathscr{F}$)型核型空间的例子有 Köthe 空间以及 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{S}$；因而，$\mathscr{E}'$和$\mathscr{S}'$是($\mathscr{DF}$)型核型空间. 空间 $\mathscr{D}$ 和$\mathscr{D}'$既不是度量的也不是对偶度量的.

度量和对偶度量核型空间是可分的，且如果是完全的，则是自反的. 到对偶空间的转移 $E \to E'$ 建立了($\mathscr{F}$)型核型空间和($\mathscr{DF}$)型完全核型空间之间的一一对应. 如果 E 是($\mathscr{DF}$)型完全核型空间且如果 F 是($\mathscr{F}$)型核型空间，则 $L(E, F)$ 赋予有界收敛拓扑，就是核型和共核型的.

任一($\mathscr{F}$)型核型空间同构于实直线上无穷可微函数空间$\mathscr{E}(\mathbf{R})$的一个子空间，即$\mathscr{E}(\mathbf{R})$是对($\mathscr{F}$)型核型空间的万有空间(见[10]). 一个 Fréchet 空间是核型的，当且仅当 E 中每一无条件收敛级数(见**无条件收敛**(unconditional convergence)是绝对收敛的(即对任一连续半范数). ($\mathscr{F}$)型和($\mathscr{DF}$)型核型空间上全纯函数的空间已得到深入细致的研究(见[11]).

核型空间的张量积，和向量函数空间. 两个局部凸空间 E 和 F 的代数张量积 $E \otimes F$ 能赋予投射和内射拓扑，则 $E \otimes F$ 成为拓扑张量积. 投射拓扑(projective topology)是使典范双线性映射 $E \times F \to E \otimes F$ 连续的 $E \otimes F$ 中最强局部凸拓扑. 内射拓扑(injective topology)(或(双)等度连续收敛)是由自然嵌入 $E \otimes F \to L_e(E'_\tau, F')$ 诱导出来的，这里 E'_τ 是 E 的赋予 **Mackey 拓扑**(Mackey topology) $\tau(E', E)$ 的对偶，且 $L_e(E'_\tau, F)$ 是连续线性映射 $E'_\tau \to F$ 的空间，赋予 E' 中等度连续集上**一致收敛**(uniform convergence)拓扑. 在这嵌入下，$x \otimes y \in E \otimes F$ 映到算子 $x' \mapsto \langle x, x' \rangle y$，这里$\langle x, x' \rangle$表示泛函 $x' \in E'$ 在 $x \in E$ 的值. $E \otimes F$ 在投射(分别地，内射)拓扑下的完全化表成 $E \hat{\otimes} F$(分别地，$E \check{\otimes} F$).

为了 E 是核型空间，充分必要条件是对任一局部凸空间 F, $E \otimes F$ 中投射和内射拓扑重合，即

$$E \hat{\otimes} F = E \check{\otimes} F. \tag{1}$$

实际上，只需(1)对 $F = l_1$(可和序列空间)成立，或对 F 等于有无条件基的固定空间时成立(见[12]). 然而，存在一个(非核型)无穷维可分 Banach 空间，使得 $X \hat{\otimes} X = X \check{\otimes} X$(见[13]). 如果 E 和 F 是完全空间且 F 是核型的，则嵌入 $E \otimes F \to L_e(E'_\tau, F)$ 能延拓成 $E \hat{\otimes} F$ 和 $L_e(E'_\tau, F)$ 之间的同构.

如果 E 是非零核型空间，则 $E \hat{\otimes} F$ 是核型的，当且仅当 F 是核型的. 如果 E 和 F 两者都是($\mathscr{F}$)(或($\mathscr{DF}$))型空间且如果 E 是核型的，则 $(E \hat{\otimes} F)' = E' \hat{\otimes} F'$.

设 E 是某一集合 T 上某些标量函数(不是全体)组成的完全核型空间；又设 E 是($\mathscr{F}$)型空间的可数序列的归纳极限(局部凸包)，且设 E 上拓扑不弱于 T 上函数的逐点收敛拓扑. 则对任一完全空间 F，可以认为 $E \hat{\otimes} F$ 等同于所有满足以下条件的映射(向量函数) $f: T \to F$ 的空间：对所有的 $y' \in F'$，标量函数 $t \mapsto \langle f(t), y' \rangle$ 属于 E. 特别地，$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} F$ 重合于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上取值于 F 的所有无穷可微向量函数的空间，且

$$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} \mathscr{E}(\mathbf{R}^m) = \mathscr{E}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m) = \mathscr{E}(\mathbf{R}^{n+m}).$$

核型空间的结构. 设 U 是局部凸空间 E 中零的凸均衡(即凸平衡)邻域，且设 p 是对应于 U 的 Minkowski 泛函(连续半范数)，且设 E_U 是具有由 p 诱导的范数的商空间 $E/p^{-1}(0)$，又设 $\hat{E}_U$ 是赋范空间 E_U 的完全化. 连续典范线性映射 $E \to \hat{E}_U$ 已有定义；如果 U 包括邻域 V，则可典范地定义连续线性映射 $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$.

对一局部凸空间 E，以下诸条件等价：1) E 是核型的；2) E 有一个零的凸均衡邻域基 $\mathfrak{B}$，使得对任一 $U \in \mathfrak{B}$，典范映射 $E \to \hat{E}_U$ 是核型算子；3) 对

E 中零的任一凸均衡邻域 U，映射 $E \to \hat{E}_U$ 是核型的；4）E 中零的每一凸均衡邻域包含另一个这样的零的邻域，使得典范映射是核型的．

设 E 是核型空间．对 E 中零的任一邻域 U 和对任一个满足 $1 \leq q \leq \infty$ 的 q，存在一凸均衡邻域 $V \subset U$，使得 E_V（范数）同构于 q 次幂可和序列的空间 l_q 的一个子空间．这样 E 与一族同构于 l_q 的空间的投射极限的一个子空间相重合．特别地（$q=2$的情形），任一核型空间中有一个零的邻域基 $\{U_\alpha\}$，使得所有的空间 $\hat{E}_{U_\alpha}$ 是 Hilbert 空间；这样，E 是多重 Hilbert 的（Hilbertian），即 E 中拓扑能由一族半范数生成，其中每一半范数由 $E \times E$ 上某一非负定 Hermite 型得到．任一完全核型空间同构于一族 Hilbert 空间的投射极限．一个（$\mathscr{F}$）型空间是核型的，当且仅当它能表示成 Hilbert 空间 H_n 的可数族的这样的投射极限 $E = \lim_{\leftarrow} g_{mn} H_n$，使得对 $m < n$，g_{mn} 是核型算子（或至少是 **Hilbert-Schmidt 算子**（Hilbert-Schmidt operator））．

核型空间中的基．在一个核型空间中每一等度连续基是绝对的．（$\mathscr{F}$）型空间中，任一可数基（即使是弱的）是等度连续 Schauder 基（见**基**（basis）），所以（$\mathscr{F}$）型核型空间中任一基是绝对的（特别是无条件的）．对（$\mathscr{D}\mathscr{F}$）型完全核型空间，以及对所有使**闭图象定理**（closed-graph theorem）成立的核型空间，类似的结论成立．具有基的（$\mathscr{F}$）型核型空间的商空间不必有基（见[4]，[5]，[6]）．

设 E 是（$\mathscr{F}$）型核型空间．E 中能用半范数的可数系 $x \mapsto \|x\|_q$，$q=1, 2, \cdots$，定义一个拓扑，这里对所有的 $x \in E$，$\|x\|_q \leq \|x\|_{q+1}$．如果 E 有一个基或一个连续范数，则这些半范数 $\|\cdot\|$ 能取作范数．设 $\{e_n\}$ 是 E 中的一个基；则任一 $x \in E$ 能表成（绝对地和无条件地）收敛级数

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n,$$

这里坐标 ξ_n 具有形式 $\xi_n = \langle x, x_n' \rangle$，而泛函 x_n' 构成 E' 中双正交基．E 同构于 Köthe 空间 $\mathscr{K}(a_{nq})$，这里 $a_{nq} = \|e_n\|_q$；在此同构下，$x \in E$ 映到它的坐标序列 $\{\xi_n\}$．E 中的一个基 $\{f_n\}$ 等价于基 $\{e_n\}$（即它能用一个同构由 $\{e_n\}$ 得出），当且仅当 $\mathscr{K}(\|e_n\|_q)$ 和 $\mathscr{K}(\|f_n\|_q)$ 作为集合是重合的（[4]）．一个基 $\{f_n\}$ 称为正则的（regular）（或正常的（proper）），如果存在范数系 $\|\cdot\|_q$ 和指标置换 σ 使得 $\|f_{\sigma(n)}\|_q / \|f_{\sigma(n)}\|_r$ 对所有的 $r \geq q$ 是单调递增的．如果一个（$\mathscr{F}$）型核型空间 E 有正则基，则 E 中任意两个基是拟等价的（quasi-equivalent）（即能用其中的一个基的元素的置换和规范化使它们成为等价的）．有其他的充分条件使 E 中所有基拟等价（见[4]，[14]）．有此性质的核型空间类的完全描述还不知道（1984）．

例 连同其所有导数速减的实直线上光滑函数的完全度量核型空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ 中，Hermite 函数 $\varphi_n(t) = e^{t^2/2}\left(\frac{d^n}{dt^n}\right)(e^{-t^2})$ 构成一个基．$\mathscr{S}(\mathbf{R})$ 同构于 $\mathscr{K}(n^p)$．

参考文献

[1] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer Math. Soc., 1955.

[2] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Обобщенные функции, 4, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961（中译本：И. М. 盖尔芳特，Н. Я. 维连金，广义函数 Ⅳ，科学出版社，1965）.

[3] Минлос, Р. А., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **8** (1959), 497－518.

[4] Митягин, Б. С., 《Успехи матем. наук》, **16** (1961), 4, 63－132.

[5] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972（译自德文）.

[6] Dubinsky, E., Structure of nuclear Fréchet spaces, Springer, 1979.

[7] Зобин, Н. М., Митягин, Б. С., 《Функц. анализ и его прилож.》, **8** (1974), 4, 35－47.

[8] Atzmon, A., An operator without invariant subspaces on a nuclear Fréchet space, *Ann. of Math.*, **117** (1983), 3, 669－694.

[9] Schaefer, H. H., Topological vector space, Springer, 1971.

[10] Komura, T. and Komura, Y., Ueber die Einbettung der nuklearen Räume in $(S)^A$, *Math. Ann.*, **162** (1965－1966), 284－288.

[11] Dineen, S., Complex analysis in locally convex spaces, North-Holland, 1981.

[12] John, K. and Zizler, V., On a tensor product characterization of nuclearity, *Math. Ann.*, **244** (1979), 1, 83－87.

[13] Pisier, G., Contre-example à une conjecture de Grothendieck, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **293** (1981), 681－683. English abstract.

[14] Драгилев, М. М., Базисы в пространствах Кёте, Ростов Н/Д., 1983.

Г. Л. Литвинов 撰

【补注】 广义函数也称分布（distribution），缓增广义函数（generalized function of slow growth）也称缓增分布（tempered distribution）．

设 F 是拓扑线性空间，U 是 F 中零的邻域，A 是 F 中集合，ε 是（小）正数．A 关于零的邻域 U 的 ε 集是一集合 B，使得对每一 $a \in A$ 存在 $b \in B$ 满足 $a \in b + \varepsilon U$．设 $N(\varepsilon, A, U)$ 是 A 关于 U 的 ε 集中元素的最小个数．则 F 的泛函维数（functional dimension）定义为

$$df(F)=\sup_U\inf_V\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\ln N(\varepsilon,V,U)}{\ln\ln\varepsilon^{-1}},$$

这里 U, V 取遍 F 中零的邻域. 详情见[2], 1.3.8.

设 F 是局部凸空间且考虑零的两个邻域 U, V, 且 U 吸收 V, 即对某正数 ρ, $V\subset\rho U$. 设

$$\delta_r(U,V)=\inf\{\delta: \exists \text{ 维数 } \leqslant r \text{ 的子空间 } G \text{ 使 } V\subset\delta U+G\}.$$

这个数称为 V 对于 U 的 r 次直径. 一个局部凸空间的直径维数(diametral dimension)是有以下性质的非负数的所有序列 $(d_r)_{r\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ 的集合: 对零的任一邻域 U, 存在被 U 吸收的零的邻域 V, 且 $\delta_r(U,V)\leqslant d_r$, $r\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

一个局部凸空间 E 是核型的, 当且仅当对某(分别地, 每一)正数 λ, 序列 $((r+1)^{-\lambda})_{r\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ 属于 E 的直径维数. 详情见[5], 第9章.

再设 U, V 是一个局部凸空间 F 的零的邻域且 U 吸收 V. V 关于 U 的 ε 容度是所有满足以下条件的自然数 m 的上确界 $M_\varepsilon(U,V)$: 存在 $x_1,\cdots,x_m\in V$ 使得对所有 $i\neq k$, $x_i-x_k\notin\varepsilon U$. 局部凸空间的逼近维数(approximation dimension)是满足下述条件的所有 $(0,\infty)$ 上正函数 φ 的集合: 对零的每一邻域 U 存在被 U 吸收的零的邻域 V, 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon)^{-1}M_\varepsilon(U,V)=0.$$

数 $\rho(U,V)$ 由 $M_\varepsilon(U,V)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时的指数增长率定义. 更确切地,

$$\rho(U,V)=\lim_{r\to 0}\sup\frac{\ln\ln M_r(U,V)}{\ln\varepsilon^{-1}}.$$

局部凸空间 E 是核型的, 当且仅当对某(相应地, 每一)正数 ρ 以下条件满足: 对零的每一个邻域 U 存在零的被 U 吸收的邻域 V 使得 $\rho(U,V)\leqslant\rho$. 详情见[5]第9章.

设 U 是一拓扑向量空间 F 的有界均衡邻域. 与 U 相伴的 Minkowski 泛函(Minkowski functional)定义为

$$q(x)=\inf_{x\in\alpha U}\alpha,\ \alpha\geqslant 0.$$

这是有确切定义的, 由于 U 是吸收的(absorbent)(即对每一 $x\in F$, 存在 α 使得 $x\in\alpha U$). 见[A7], 15.14, 16.4 节.

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. Sao-Paulo*, **8** (1956), 1 – 79.

[A2] Grothendieck, Topological vector spaces, Gordon & Breach, 1973(译自法文).

[A3] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.

[A4] Pisier, G., Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces, Amer. Math. Soc., 1986.

[A5] Pisier, G., Counterexamples to a conjecture of Grothendieck, *Acta. Math.*, 151 (1983), 181 – 208.

[A6] Colombeau, J. F., Differential calculus and holomorphy, North-Holland, 1982.

[A7] Köthe, G., Topological vector spaces, 1, Springer, 1969.

葛显良 译 鲁世杰 校

对策的核子 [nucleolus of a game; *n*-ядро игры]

见**对策论中的核心**(core in the theory of games).

多余参数 [nuisance parameter; мешающий параметр]

与研究给定分布的某些参数有关的统计问题中, 该**概率分布**(probability distribution)的其余任何未知参数. 确切地说, 设随机变量 X 取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathsf{P}_\theta)(\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k,\theta_{k+1},\cdots,\theta_n)\in\mathbf{R}^n)$, 需要根据 X 的实现对参数 $\theta_1,\cdots,\theta_k(k<n)$ 作出统计推断, 那么 $\theta_{k+1},\cdots,\theta_n$ 就是该问题中的多余参数. 例如, 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是服从正态律 $\Phi((x-\xi)/\sigma)$ 的独立随机变量, 其参数 ξ 和 σ^2 未知; 又设要检验假设 $H_0:\xi=\xi_0$, 其中 ξ_0 是某个常数. 在假设 H_0 的检验问题中, 未知方差 σ^2 就是多余参数. 多余参数问题的另一重要例是 **Behrens-Fisher 问题**(Behrens-Fisher problem). 自然, 在解有多余参数的统计问题时, 希望能作出不依赖于这些参数的统计推断. 在统计假设检验理论中, 通常的作法是: 通过将用于在有多余参数时检验某假设 H_0 的一切检验类, 收缩到相似检验类(见**统计检验**(statistical test)).

参考文献

[1] Линник, Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

М.С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

[A2] Lehmann, E. L., Theory of point estimation, Wiley, 1983.

周概容 译

范畴的零对象 [null object of a category; нулевой объект категории]

一个对象(通常表以 0), 使对范畴中的每一个对象 X, 集合 $H(X,0)$ 与 $H(0,X)$ 都是单元集合. 零对象, 如果在给定的范畴中是存在的, 则就同构而言是唯一确定的. 在具有特异点的集合的范畴内, 零对象是一个单元集合, 在群的范畴内是其中的平凡群, 在模范畴内是零模, 等等. 并非每一个范畴都含有一个零对象, 但对任何给定的范畴, 总可以形式地添加

进一个零对象．有零对象的范畴有零态射．

М．Ш．Цаленко 撰

【补注】 一个范畴中的一个对象 I 称为始对象（initial object）如果对任何 X，恰有一个态射 $I \to X$；称为终对象（terminal object 或 final object）如果对任何 X，恰有一个态射 $X \to I$．因此，一个零对象既是一个始对象又是一个终对象．如果在一个给定的范畴中存在始对象，那么就同构而言，它是唯一的．终对象也是这样，但一个范畴可能有不同构的始对象与终对象．例如在集合的范畴中，空集是一个始对象，而任何单元集合都是终对象．一个范畴的终对象可以被看成该范畴中空图的一个极限（limit）（见**极限**（limit）一条目后为了范畴中一个图的极限的概念所作的补注）．反之，任意一个图的一个极限可在适当的锥范畴中定义为一个终对象．

周伯埙 译

数［number；число］

数学中的一个基本概念，它是在漫长的历史发展过程中形成的．这个概念的起源和表述与数学的诞生和发展同时发生．一方面是人类的实践活动，另一方面是数学的内在要求，决定了数的概念的发展．

对象计数的需要导致**自然数**（natural number）概念的起源．所有具有文字的民族都已掌握了自然数概念而且已发展了某些计数系统．在其早期，一个数的概念的起源和发展只能够从由语言学和人种史提供的间接资料来判断．原始人显然不需要确定一个给定集体是否完全的计数技巧．

以后，为了确定人们经常遇到的对象或现象的数量而给出一些特别的名称．这样，在某些民族的语言中有表示像“三个人”或“三只船”这样的概念的一些词，但是没有抽象概念“三”．也许，按这种方式，出现了比较短的数系列，用以辨识个别的一些人，个别的一些船，个别的一些椰子等等．在这些阶段，没有抽象的数这样的东西，而且，数字只是一些名称．

在某些原始文化中，传送关于这个或那个集体的数目大小的信息的需要，导致要求区分出一定的标准集体，它们通常由人体的一些部分组成．在这样的计数系统中，身体的每一部分有一定的次序和名称．当身体的部分不够用时，就用一束枝条．同样，还有卵石，贝壳，树上或岩石上的刻痕，地上的线条，打结的细绳等等．

数的概念发展的下一阶段是与过渡到按组计数有联系的，如按对，按十，按打（十二）计数．由此出现了所谓结点数，且同时出现了一种算术运算的概念，它反映在数的名称中．确定的计数方法形成了，采用特别的手段来计数，而且数字记号出现了．数从被计数的对象中分离出来，而且成为抽象的．数的表示系统开始出现（见**数的表示**（numbers，representations of））．

现代数的表示系统的形成过程是异常复杂的．只有这个过程的最后部分能够作出可靠性的判断．有很多已知的表示系统．在古埃及有几种系统．在其中一种中，有表示 1，10，100，1000 的特别符号．其他的数借助于这些符号的组合来表示．在古埃及，基本算术运算是加法．早在公元前 2000 年以前巴比伦人用一种有位值原理的 60 进制的表示系统来书写数字．他们只使用两个符号．古希腊人用一种字母表表示系统，它也为斯拉夫人所使用（亦见**斯拉夫数字**（Slavic numerals））．在印度于公元纪元（A．D．）开始时，存在一种广为传播的口头的十进制位值表示系统，对零（和其他十进制数码）有几种同义词．后来在那里出现了一种十进制位值表示系统．在公元 8 世纪传播远及中东．在 12 世纪它被介绍到欧洲．

作为人类实践活动的结果而产生的计数对象的领域的扩大，以及最后作为人类特性的求知欲，逐渐地推进了计数的范围．自然数序列的无限延伸性的概念出现了，也许可归因于希腊人．Euclid 的一个定理说：“存在多于任何给定数的素数”．还有，Archimedes 试图使他的同时代人相信可能描述一个大于“世界中沙粒的数目”的数．

对于量的测量，分数是必需的．古埃及人和巴比伦人研究了分数．埃及人的分数通常用单分数，即分子等于 1 的分数来表示．巴比伦人用 60 进制分数．中国人和印度人在公元初的最早的几个世纪中已使用普通分数，而且能够对分数施行所有的算术运算．中亚的学者们，不晚于 10 世纪，用一种 60 进制位值计数系统．这个系统特别广泛地用于天文学计算和表格．它的痕迹已经以时间和角度测量中所用单位的形式留传下来．十进制分数在 15 世纪初引入，而且为撒马尔罕数学家 Kashi（al'-Kashi）广泛地使用．在欧洲，十进制分数随着 S．Stevin 所写的书《论十进》（de Thiende）（1585）的出版而广泛传播．在十进制分数引进之前，欧洲人已经在实践中用十进制计算数的整数部分，但是对分数部分他们用 60 进制分数或普通分数．

数的概念的进一步发展主要与数学本身的要求相联系地进行．负数首先出现于古代中国．印度数学家当试图表述所有情况的二次方程的解法时，发现了负数．Diophantus（3 世纪）自由地进行负数运算．在他的《算术》（Aritmetika）一书中的很多问题的中间计算中常常出现负数．然而，在 16 和 17 世纪，很多欧洲数学家不懂得负数，而且如果这种数出现于他们的计算中，则被认为是错误的或不可能的．在 17 世纪，当正数和负数作为相反方向线段的一种几何解

释被发现时，这种情况改变了．

巴比伦人有一种计算一个数的平方根到任何精确度的算法．在公元前 5 世纪，希腊数学家们发现了正方形的边和对角线没有公度．更一般地，原来两个任意的精确地给定的线段一般是不可公度的．希腊数学家没有由此出发引入新数．他们创造一种不依赖于数的概念的线段比理论用来避免上面的困难．

代数学和近似计算技术的发展，与天文学的要求相联系，引导阿拉伯数学家去扩充数的概念．他们开始考虑任意量的比，不管作为数是否可公度．如 Nasireddin (1201 － 1278) 写道："这些比中的每一个都可以称为一个数，当这个比的一项与另一项相同时，它精确地等于数一"．欧洲数学家曾在同一方向发展．虽然 G. Cardano 在《实用算术总论》(Practica Arithmeticae Generalis, 1539) 一书中关于无理数仍然写成"无道理的"(来自拉丁文"surdus"(听不见的)，"deaf"(聋的))，并作为"不可能理解或想象的"，可是 Stevin 在他的《算术》(l'Arithmétique, 1585) 一书中称"一个数是被一个任意的量所决定的"而且"没有数是荒谬的、无理的、不合规则的、表达不出的，或无道理的"．而最后 I. Newton 在他的《广义算术》(Arithmeticae Universalis, 1707) 一书中给出下面的定义："我们与其把一个数理解为一个单位的倍数，不如理解为一个抽象的量，它按一种有系统的方式与另一个取作为单位的同类量相联系．数以三种形式出现：整数、分数和无理数．一个整数是那些能够用单位来度量的；一个分数是单位的等分部分的倍数；一个无理数是与单位不可公度的．"与这个事实有关，对于 Newton 来说，一个量既可为正也可为负，在他的算术中，数也可以是正的，换言之，"大于没有"，或者是负的，换言之，"小于没有"．

虚数首先出现于 Cardano《大衍术》(Ars Magma, 1545) 一书中．在解方程组 $x+y=10$, $xy=40$ 时，他找到了解 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$．Cardano 称这些解为"纯负的"，而后来称为"矫揉造作地负的"．第一个看出引入虚数的"真正"用处的是 R. Bombelli．在《代数》(Algebra, 1572) 一书中，他证明方程 $x^3=px+q$, $p>0$, $q>0$, 在 $(p/3)^3>(q/2)^2$ 情形下的实根能用虚数的根式来表示．Bombelli 定义了这种量的算术运算，而且按这方式继续进行到创建**复数** (complex number) 理论．在 17 和 18 世纪，许多数学家投身于研究虚数的性质及其应用．这样，例如，L. Euler 把对数概念扩充到任意复数 (1738)，而且得到一种利用复变数的积分新方法 (1776)，而较早时 (1736)，A. de Moivre 解决了任意复数的求自然数次方根的开方问题．复数理论的一个成功应用是代数基本定理："每一个次数大于零且有实系数的多项式可因式分解为具有实系数的一次和二次多项式的积"(Euler, J. d'Alembert, C. F. Gauss)．不过，直到给出复数作为平面上的点的几何解释 (在 18 世纪末和 19 世纪初)，很多数学家对虚数仍保持怀疑．

在 19 世纪早期，由于数学分析的巨大成功，许多学者理解到需要奠定分析的基础——极限理论．数学家们不再满足于根据直觉或根据几何表示的证明．也还遗留下构造数的统一理论的问题．自然数曾被考虑为单位的集合，分数考虑为量的比，实数考虑为直线段的长度，而复数考虑为平面上的点．至于应该如何引入数的算术运算还没有完全一致．最后，自然产生了数的概念的进一步发展的问题．特别地，是否可能引入与空间的点相联系的新的数?

19 世纪在上述各方面进行了深入研究．一个一般原则被阐明了，数的概念的任何推广应按这个原则进行——这就是所谓形式计算定律不变性原则．按照这个原则，当构造新的数系以扩充给定数系时，运算应该按这样的方式推广使得原有的定律仍然有效 (G. Peacock, 1834; H. Hankel, 1867)．在 19 世纪下半叶，**实数** (real number) 理论几乎同时被 G. Cantor (1879), Ch. Meray (1869), R. Dedekind (1872), 和 K. Weierstrass (1872) 构造出来．这里，Cantor 和 Meray 用有理数的基本序列，Dedekind 用有理数域中的分割，而 Weierstrass 用无限十进制小数展开式．

作为 G. Peano (1891), Weierstrass (1878) 和 H. Grassmann (1861) 的工作的一个结果，建立了一种自然数的公理化理论．W. Hamilton (1837) 由实数对构造了一种复数理论，Weierstrass 由自然数对构造了一种整数理论，而 J. Tannery (1894) 由整数对构造了一种有理数理论．

企图找到复数概念的推广导致**超复数** (hypercomplex number) 理论．历史上，第一个这样的数系是由 Hamilton 发现的**四元数** (quarternion)．经过很多研究之后，使以下事实变得清楚 (Weierstrass, G. Frobenius, B. Pierce)：超出复数系本身的复数概念的任何扩张只有损失某些数的通常性质才有可能．

贯穿 19 世纪，以及进入 20 世纪初期，在数学中正发生着深刻的变化．关于数学的对象和目标的总概念正在变化．在集合论基础上构造数学的公理方法正逐渐形成．在这方面，每一个数学理论是研究某个代数系统．换句话说，它是研究一个带有特定关系的集合，特别是带有满足某些预先确定的条件或公理的代数运算的集合．

从这个观点看每一个数系都是一个代数系统．为了定义具体数系，利用"代数系统扩张"的概念是方便的．这个概念以自然方式使得上述形式计算定律不

变性原则明确化．代数系统 A' 称为代数系统 A 的**扩张**（extension of an algebraic system），如果 A 的基础集是 A' 的基础集的子集，又如果存在一个从系统 A' 的关系集到 A 的关系集的一一对应，而且如果对系统 A 中的使得该系统的某种关系成立的任何元素组，系统 A' 的对应关系也成立．

例如，关于自然数系，通常理解为具有两种代数运算：加法（+）和乘法（·），和一个特定元素（1）（单位），且满足以下公理的代数系统 $\mathbf{N}=\langle N, +, \cdot, 1\rangle$：

1）对每一元素 $a\in N$，$a+1\neq a$；

2）加法的结合性：对 N 中任何元素 a, b, c，

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

3）加法的交换性：对 N 中任何元素 a, b, c，

$$a+b=b+a;$$

4）加法的消去性：对 N 中任何元素 a，b，c，由等式 $a+c=b+c$ 可推出等式 $a=b$；

5）1 是对乘法的零元素；即对任何 $a\in N$ 有 $a\cdot 1=a$；

6）乘法的结合性：对 N 中任何元素 a, b, c，

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

7）乘法对加法的分配性：对 N 中任何元素 a，b, c，

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c;$$

8）归纳公理：如果 M 是 N 的一个子集，它包含 1 而且当它包含元素 a 时也包含 $a+1$，则 $M=N$．

由 2, 3, 4, 6 和 7 推出自然数系在运算（+）和（·）下是一个**半环**（semi-ring）．所以自然数系统可以定义为具有对乘法的零元素而无对加法的零元素的极小半环．

整数系 $\mathbf{Z}=\langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$ 定义为构成自然数半环 $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ 的扩张的一个极小**环**（ring）．有理数系 $\mathbf{Q}=\langle Q, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ 定义为构成环 $\mathbf{Z}$ 的扩张的一个极小**域**（field）．复数系 $\mathbf{C}=\langle C, +, \cdot, 0, 1\rangle$ 定义为构成实数域 $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ 的包含满足 $i^2+1=0$ 的元素 i 的扩张的极小域（亦见**域的扩张**（extension of a field））．

实数系 $\mathbf{R}=\langle R, +, \cdot, 0, 1, >\rangle$ 是指具有两个二元运算（+）和（·），两个特定元素（0）和（1）和一个二元序关系（>）的**代数系统**（algebraic system）．$\mathbf{R}$ 的公理分成下面几组：

1）域公理（field axiom）：系统 $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ 是一个域；

2）序公理（ordered axiom）：系统 $\langle R, +, \cdot, 0, 1, >\rangle$ 是一个全序的严格的**序域**（ordered field）；

3）Archimedes 公理（Archimedean axiom）：对 R 中任何元素 $a>0$，$b>0$，存在一个自然数 n，使得

$$n\cdot a=a+\cdots+a>b(n \text{ 项 } a);$$

4）完全性公理（completeness axiom）：每一个实数的**基本序列**（fundamental sequence）$\{r_n\}_n$ 均收敛，即如果对任何 $\varepsilon>0$，存在数 n_ε 使得对任何 $n>n_\varepsilon$ 和 $m>n_\varepsilon$，不等式 $|r_n-r_m|<\varepsilon$ 成立，则序列 $\{r_n\}_n$ 收敛于 R 的某元素．

简单地说，实数系是一个完全的、全序的、严格地 Archimedes 的序域．实数系也可以以等价方式定义成一个连续的全序域．在这情况下 Archimedes 公理和完全性公理用以下的连续性公理代替：

如果 A 和 B 是 R 的非空子集，使得对任何元素 $a\in A$, $b\in B$，不等式 $a<b$ 成立，则存在元素 $c\in R$，使得对所有的 $a\in A$, $b\in B$ 有 $a\leqslant c\leqslant b$．

由 Cantor 和 Meray 提出的实数构造可以用来解释实数系的第一个公理系统，而 Dedekind 的构造可以用来解释第二个公理系统．类似地，Hamilton, Weierstrass 和 Tannery 的构造是对复数、整数和有理数的公理系统的解释．

可以用 Peano 发展的自然数的序数理论和 Cantor 的自然数的基数理论作为自然数系的解释．

数的概念的基础问题，或更广地，数学的基础问题是在 19 世纪明确地提出的．这个问题成为数理逻辑的一个主题，其深入的发展延续到 20 世纪．

亦见**形式算术**（arithemetric, formal）；**构造分析**（constructive analysis）；p **进数**（p-adic number）；**代数数**（algebraic number）；**超越数**（transcendental number）；**基数**（cardinal number）；**序数**（ordinal number）；**算术**（arithmetic）．

参考文献

[1] Березкина, Э. И., Математика древнего Китая, М., 1980.

[2] Bourbaki, N., Eléments d,histoire des mathématiques, Hermann, 1960.

[3] Вайман, А. А., Шумеро-Вавилонская математика, М., 1961.

[4] Waerden, B. L. van der, Ontwakende wetenschap, Noordhoff, 1957.

[5] Wieleitner, G., Geschichte der Mathematik, 2, de Gruyter, 1923.

[6] Володарский, А. И., Очерки истории средневековой индийской математики, М., 1977.

[7] Выгодский, М. Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, 2 изд., М., 1967.

[8] Депман, И. Я., История арифметики, М., 1959.

[9] Кольман, Э., История математики в древности, М., 1961.

[10] Cajori, F., A history of elementary mathematics, Macmillan, 1896.

[11] Нечаев, В. И., Числовые системы, М., 1975.

[12] Рыбников, К. А., История математики, 2 изд., М., 1974.

[13] Struik, D. J., A concise history of mathematics, 1-2, Dover, reprint, 1948(译自荷兰文)(中译本: D. J. 斯特洛伊克, 数学简史, 科学出版社, 1958).

[14] Feferman, S., The number system, Addison-Wesley, 1964.

[15] Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik in XVI und XVII Jahrhundert, Teubner, 1903.

[16] Юшкевич, А. П., История математики в средние века, М., 1961.

[17] История математики, т. 1-3, М., 1970-1972.

[18] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

В. П. Нечаев 撰

【补注】 Newton 在他的《广义算术》中关于数的定义的一种译文, 可在该书 1761 年阿姆斯特丹版的第三章开头处找到.

参考文献

[A1] Gericke, H., Geschichte des Zahlbegriffs, B. I. Mannheim, 1968.

[A2] Scriba, C. J., The concept of number, a chapter in the history of mathematics, B. I. Mannheim, 1968.

【译注】 中国至迟在商代(公元前 17 世纪至 11 世纪)即已出现用十进制数字表示大数的方法. 至迟在秦汉之际(公元前 3 世纪), 已出现完满的十进位值制. 不迟于 1 世纪, 已有分数和负数概念. 不迟于 3 世纪已有十进小数. 唐(7 世纪至 10 世纪)宋(10 世纪至 13 世纪)时期十进小数已获通用.

参考文献

[B1] 钱宝琮主编, 中国数学史, 科学出版社, 1964.

[B2] 李俨, 中国数学大纲, 上、下册, 科学出版社, 1958.

[B3] 李俨, 中算史论丛, 1-5 卷, 科学出版社, 1954-1955.

葛显良 译

数域[number field; числовое поле]

由复(例如, 实)数组成的**域**(field). 复数的一个集合构成数域, 当且仅当它含有多于一个元素, 并且含有它的任意两个元素 α 和 β 的差 $\alpha-\beta$ 及商 $\alpha/\beta(\beta\neq 0)$. 每个数域含有无穷多个元素. 有理数域含于任一数域之中. 有理数域、实数域、复数域以及 Gauss 数域(见 **Gauss 数**(Gauss number))都是数域的例子. 所有形如 $H(\alpha)/F(\alpha)(F(\alpha)\neq 0)$ 的数的集合构成一个数域, 这里 α 是一个固定的复数, $H(x)$ 和 $F(x)$ 取遍有理系数多项式.

А. Б. Шидловский 撰

【补注】 n 次代数数域(algebraic number field) K 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的 n 次扩张. 换句话说, 如果每个 $\alpha\in K$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的(次数最多为 n 的)多项式的根, 则数域 K 是(n 次)代数数域. 不是代数数域的数域称作超越的(transcendental)(亦见**代数数论**(algebraic number theory); **域扩张**(extension of a field); **超越扩张**(transcendental extension)).

参考文献

[A1] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.

赵春来 译

除数的个数[number of divisors; делителей число]

以自然数 n 为自变量的函数, 等于数 n 的自然数除数的个数. 此算术函数记作 $\tau(n)$ 或 $d(n)$. 下述公式成立:

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1),$$

其中

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

是 n 分解为素因数的标准展式. 对于素数 p, $\tau(p)=2$; 但存在 n 的无穷序列, 使得

$$\tau(n)>2^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}},\ \varepsilon>0.$$

另一方面, 对所有 $\varepsilon>0$,

$$\tau(n)=O(n^{\varepsilon}).$$

$\tau(n)$ 是**乘性算术函数**(multiplicative arithmetic function)并等于双曲线 $xy=n$ 上坐标为自然数的点的个数. $\tau(n)$ 的平均值由 Dirichlet 渐近公式给出(见**除数问题**(divisor problems)). 函数 $\tau(n)$ 的推广是函数 $\tau_k(n)$, 它是方程 $n=x_1\cdots x_k$ 的自然数解 $x_1,\cdots,x_k$ 的个数.

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972(中译本: И. М. 维诺格拉多夫, 数论基础, 商务印书馆, 1952).

[2] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

Н. И. Климов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H., Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979, Chapt. XVI.

【译注】 $\tau(n)$ 或 $d(n)$ 的更通用的名称是除数函数(divisor function).

参考文献

[B1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1957.
[B2] 闵嗣鹤、严士健，初等数论，第二版，高等教育出版社，1982.
[B3] 潘承洞、潘承彪，初等数论，北京大学出版社，1992.

沈永欢 译

数论函数[number-theoretic functions; теоретико-числовая функция]

同**算术函数**(arithmetic function).

数论[number theory; чисел теория]

关于**整数**(integer)的科学. 整数和最简单的几何图形是最重要最古老的数学概念. 数论起源于**算术**(arithmetic)中有关于整数乘法和除法的问题.

在古希腊(公元前6世纪)就研究了关于整数的可除性，区别不同类的整数(例如**素数**(prime number)，合数，平方数)；研究了**完满数**(perfect number)的构造；以及给出了方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解，即描述了一个构造边长为整数的直角三角形的算法. Euclid(公元前3世纪)在其《几何原本》(Elements)一书中，基于所谓的 **Euclid 算法**(Euclidean algorithm)(求两个整数的**最大公因数**(greatest common divisor)的一种方法)，系统地发展了整除理论，证明了素数理论中的第一个定理：素数有无穷多个. 稍后 Eratosthenes 发现了一个获得素数的方法，它现在仍称为 **Eratosthenes 筛法**(Eratosthenes, sieve of).

Diophantus(公元3世纪)在其《算术》(Aritmetika)一书中，系统地总结了数论中的问题和它们的解法，特别是他在书中给出了许多一次和二次的多变数代数方程的有理数解.

在中国从公元2世纪起，由于历法计算的需要，提出了如下的问题：求最小的正整数使其被一些给定的整数除后有给定的余数. 这问题被孙子(见《孙子算经》，2-6世纪)和秦九绍(13世纪)解决(见**剩余定理**(Chinese remainder theorem)).

在印度，Bramagupta(公元7世纪)和 Bhaskara(公元12世纪)给出了求二元一次不定方程整数解的一般方法，及形如 $ax^2+b=cy^2$ 和 $xy=ax+by+c$ 的方程整数解的一般方法.

欧洲数论的黄金年代起始于 P.Fermat(公元17世纪)的工作. 他研究了许多方程的整数解，特别是他猜测方程 $x^n+y^n=z^n(n>2)$ 无正整数解(**Fermat 大定理**(Fermat great theorem))；他证明了形如 $4n+1$ 的素数是两个平方数之和，并断言同余理论的基本结论之一成立：若 p 是素数，则 p 整除 a^p-a(**Fermat 小定理**(Fermat little theorem)).

L.Euler 对数论作出了特别重要的贡献. 他证明了当 $n=3$ 时 Fermat 大定理成立，证明了 Fermat 小定理和它的一个推广，以及关于用**二元二次型**(binary quadratic form)表数的完整的一组定理. Euler 是第一个提出用数学分析方法去解数论问题，这导致**解析数论**(analytic number theory)的创立. 近代加性数论的基本方法——Hardy-Littlewood-Ramanujan 的**圆法**(circle method)和 И.М.Виноградов 的**三角和方法**(trigonometric sums, method of)均源于 Euler 的**生成函数**(generating function)，而 Euler 引进的函数 $\zeta(s)$ 及其推广是用于研究**素数分布**(distribution of prime numbers)问题的现代解析方法的基础.

在 Ch.Goldbach 和 Euler 的通信中提出了三个著名问题：是否每个奇数 $N\geqslant5$ 是三个素数之和；是否每个偶数 $N\geqslant4$ 是两个素数之和；以及是否每个奇数 N 可表为 $N=p+2n^2$，其中 p 是素数，n 是整数. Виноградов(1937)解决了第一个问题，而其他两个问题仍未解决(1996).

C.F.Gauss 创造并完全建立了同余理论(见**同余式**(congruence)，证明了 Euler 所提出的**二次互反律**(quadratic reciprocity law)(也见 **Gauss 二次互反律**(Gauss reciprocity law)、**互反律**(reciprocity laws))，这为二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 及多变数高次型表示数的理论奠定了基础，他还引进了最重要的一类三角和，即所谓的 **Gauss 和**(Gauss sum)

$$S=\sum_{n=0}^{m-1}\exp\{2\pi i\frac{an^2}{m}\},$$

他指出了它们在解决数论问题中是有用的. 在 Gauss 以前，数论仅仅是各色各样结果和思想的汇集，而自他的工作之后，数论开始在几个方向发展成为统一的理论.

在19-20世纪，许多学者对数论作出了重要的贡献. 数论的特点与魅力之一是它的大多数问题简明和易于接近，但难以解决. 例如、Euclid 提出的问题：是否存在无穷多个**孪生素数**(twins)，仍未解决(1996). 数论的某些特殊问题已成为数学的一些独立的重要分支发展的源泉. 它们中有：素数理论(见**素数**(prime number))及相关的 **ζ 函数**(zeta-function)和 **Dirichlet 级数**(Dirichlet series)理论，**Diophantus 方程**(Diophantine equations)理论，**加性数论**(additive number theory)，**数的度量理论**(metric theory of numbers)，代数和超越数的理论，**代数数论**(algebraic number theory)，**Diophantus 逼近**(Diophantine approximations)理论，概率数论(见**数论中的概率方法**(number theory, probabilistic methods in))，以及**数的几何**(geometry of numbers). 例如，解析数论起源于自然数列中的素数分布问题和自然数表为特殊形式的项的和的问题. 求方程的整数解、特别是 Fermat 大定理，是代数数论发

展的源泉．用直尺和圆规作面积为1的圆的问题（见**化圆为方问题**（quadrature of the circle））就导致关于数 π 的算术性质的研究，进而创立了代数数和超越数的理论．

所有以上的数论各分支是互相联系，互相补充，互相丰富的．

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел 9 изд., М., 1981（中译本：维诺格拉陀夫，数论基础，商务印书馆，1952）.

[2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2 изд., М., 1980.（英译本：Vinogradov, I.M., The method of trigonometric sums in number theory, SELECTED WORKS, Springer-Verlag, 1985）.

[3] Виноградов, И.М., Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976（英译本：Vinogradov, I.M., Special variants of the method of trigonometric sums, SELECTED WORKS, Springer-Verlag, 1985）.

[4] Карацуба, А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983（中译本：卡拉楚巴，A.A.，解析数论基础，科学出版社，1984）.

[5] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972（英译本：Borevich, Z. I., Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966）.

[6] Davenport, H., Multiplicative number theory, 2nd ed., Springer-Verlag, 1980.

[7] Chandrasekharan, K., Introduction to analytic number theory, Springer, 1968.

[8] Hasse, H., Zahlentheorie, Akademie-Verlag, 1963.

[9] Dirichlet, P. G. L., Vorlesungen über Zahlentheorie, Vieweg, 1894.

[10] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, 2nd, Clarendon, 1986.

[11] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М.-Л, 1937（英译本：Venkov, B. A., Elementary number theory, Wolters-Noodhoff, 1970）.

A. A. Карацуба 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H., Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, 5th ed. Oxford Univ. Press, 1979.

[A2] Leveque, W. J., Topics in number theory, 1, Addison-Wesley, 1965.

[A3] Shanks, D., Solved and unsolved problems in number theory, Chelsea, reprint, 1978.

[A4] Weil, A., Number theory, an approach through history, Birkhäuser, 1984.

【译注】

参考文献

[B1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1995.

[B2] 潘承洞，潘承彪，初等数论，北京大学出版社，1992.

[B3] 潘承洞，潘承彪，初等代数数论，山东大学出版社，1991.

[B4] 潘承洞，潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1991.

[B5] Guy, R. K., Unsolved problems in number theory, Springer-Verlag, 1981.

[B6] Scharlau, W., Opolka, H., From Fermat to Minkowski, Springer-Verlag, 1984.

潘承彪 译　戚鸣皋 校

数论中的概率方法 [number theory, probabilistic methods in; чисел теория, вероятностная]，概率数论 [probabilistic number theory]

广义地说，是**数论**（number theory）中利用**概率论**（probability theory）的思想和方法的那一部分．狭义地说，概率数论是指**算术函数**（arithmetic function）值分布的统计理论．

数论中研究的算术函数绝大多数是加性的或乘性的（见**加性算术函数**（additive arithmetic function）；**乘性算术函数**（multiplicative arithmetic function)．它们的值通常是以十分复杂的方式分布的．如果描绘出这种函数当变数取值于自然数列时的变化，我们就会得到一个高度混乱的图形，正如我们同时考虑整数的加性与乘性性质时所经常看到的一样．在关于实算术函数 $f(m)$ 的值分布的经典研究中，通常讨论的是 $f(m)$ 本身或它的均值的渐近性质．在第一种情形下，是要去找两个简单的函数 $\psi_1(m), \psi_2(m)$，使得 $\psi_1(m) \leqslant f(m) \leqslant \psi_2(m)$ 对所有的 m 成立，或者至少对充分大的 m 成立．例如，假设 $\omega(m)$ 表示 m 的不同的素因数个数，则 $\omega(m) \geqslant 1$ 对所有的 $m>1$ 成立，且对 $m \geqslant m_0$，有 $\omega(m) \leqslant 2(\ln\ln m)^{-1}\ln m$；

$$\lim_{m\to\infty} \inf \omega(m) = 1,$$

$$\lim_{m\to\infty} \sup \omega(m)(\ln m)^{-1}\ln\ln m = 1.$$

在第二种情形下，是考虑均值

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m) \tag{1}$$

的性质．对 $\omega(m)$，均值（1）等于 $(1+o(1)\ln\ln n)$．在一般情形下，关于函数 $f(m)$ 的值或它的值的跳动，从第一个问题和第二个问题的解，只能得到很少的信息．一个函数可以本质上不同于它的均值．但是，在这点上出现大的偏差是很稀少的．这就提出了这样一个问题：确定范围使对占压倒多数的变数值函数 $f(m)$ 的值在其中变动．设 $f(m)$ 是实算术函数，及

$$A_n = \sum_{p\leqslant n}\frac{f(p)}{p}, \quad B_n^2 = \sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}, \tag{2}$$

这里的求和号分别是对所有的素数 $p\leqslant n$ 及所有的素数幂 $P^\alpha\leqslant n$ 求和，则

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(f(m)-A_n)^2 \leqslant B_n^2\left(\frac{3}{2}+\frac{c}{\ln n}\right),$$

其中 c 是一个绝对常数. 这样, 对任意的 $t>0$, 除了可能有少于 $(3/2+c/\ln n)nt^{-2}$ 个例外值外, 对所有的 $m\leqslant n$ 有不等式

$$|f(m)-A_n|<tB_n$$

成立(这类似于概率论中的**大数定律**(law of large numbers)). 对函数 $\omega(m)$ 这个不等式能写为

$$|\omega(m)-\ln\ln n|<t\sqrt{\ln\ln n}\ .$$

以 $N_n(\cdots)$ 表示满足括号中所述的条件(以 $\cdots$ 代表)的自然数 $m\leqslant n$ 的个数. 如果要更精确地刻画实算术函数 $f(m)$ 的值分布, 那么就迫使我们去考虑频率

$$n^{-1}N_n(f(m)\in E) \tag{3}$$

当 $n\to\infty$ 时的渐近性质, 其中 E 是任意的 Borel 集. 在关于(3)的渐近定律中, 最有趣的是具有局部或整体形式的那些结果.

整体定律. 对给定的 C_n, D_n, 研究分布函数

$$F_n(C_n+D_nx)=\frac{1}{n}N_n(f(m)<C_n+D_nx)$$

当 $n\to\infty$ 时的渐近性质.

在加性算术函数的情形, 我们要寻求在怎样的条件下, 有某个分布函数 $F(x)$, 使得在其所有的连续点上, $F_n(C_n+D_nx)$ 收敛于它. 这时, 若 $F(x)$ 是非退化的, 则 D_n 必须收敛于一个有限(不等于0)或无穷的极限.

在有限极限的情形下, 只要考虑 $F_n(C_n+x)$ 就足够了. 对某个 C_n 函数 $F_n(C_n+x)$ 当 $n\to\infty$ 时有非退化的极限分布的充要条件是 $f(m)=a\ln m+g(m)$, 其中 a 是一个常数, $g(m)$ 满足条件

$$\sum_{|g(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p}<\infty,\quad \sum_{|g(p)|<1}\frac{g^2(p)}{p}<\infty.$$

这时必有

$$C_n=a\ln n+\sum_{\substack{p\leqslant n\\ |g(p)|<1}}\frac{g(p)}{p}+C+o(1),$$

其中 C 是一个常数. C_n 的选取唯一确定到加上一项 $C+o(1)$. 当 $\sum_{f(p)\neq 0}1/p<\infty$ 时, 极限分布是离散的, 不然, 则是连续的.

特别的, $F_n(x)$ (C_n 等于 0 的情形)有极限分布的充要条件是级数

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p},\ \sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{p},\ \sum_{|f(p)|<1}\frac{f^2(p)}{p}$$

收敛(这类似于概率论中的三级数定理).

对 $D_n\to\infty$ 的情形研究得尚不完全. 下面是当 $C_n=A_n$ 和 $D_n=B_n$ (由式(2)给出)时的一些简单结果.

若对任意固定的 $\varepsilon<0$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$B_n^{-2}\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ |f(p^\alpha)|>\varepsilon B_n}}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\to 0, \tag{4}$$

(类似于 Lindeberg 条件, 见 **Lindeberg-Feller 定理**(Lindeberg-Feller theorem)), 则

$$F_n(A_n+B_nx)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du=$$
$$=\Phi(x) \tag{5}$$

(正态定律). 若条件(4)满足, 则在 Karamata 意义下 B_n 是 $\ln n$ 的慢变化函数. 此外, 若 B_n 是这样的函数, 则(4)是式(5)成立的必要条件.

设 B_n 是 $\ln n$ 的慢变化函数, 那么 $F_n(A_n+B_nx)$ 收敛于一个方差为 1 的极限分布的充要条件是存在一个不减函数 $V(u)(-\infty<u<\infty)$, 满足 $V(-\infty)=0, V(\infty)=1$, 以及当 $n\to\infty$ 时使得对所有的 u (可能 $u=0$ 除外)有

$$B_n^{-2}\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ |f(p^\alpha)|<uB_n}}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\to V(u).$$

极限定律的特征函数 $\varphi(t)$, 当它存在时, 由以下公式给出:

$$\varphi(t)=\exp\left[\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-1-itu)u^{-2}dV(u)\right].$$

关于极限定律的收敛速度也作了研究. 例如, 若 $f(m)$ 是强加性函数, 及当 $n\to\infty$ 时

$$\mu_n=B_n^{-1}\max_{p\leqslant n}|f(p)|\to 0,$$

则对 x 一致地有

$$F_n(A_n+B_nx)=\Phi(x)+O(\mu_n).$$

对乘性算术函数有类似的结果.

局部定律. 这是对固定的 c 研究频率 $N_n(f(m)=c)/n$ 当 $n\to\infty$ 时的性质. 在实加性算术函数情形下, 这个频率总有极限, 且这个极限仅对可数个值 c 不等于 0. 设

$$\lambda_l(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N_n(f(m)=c_l), l=1,2,\cdots,$$

是所有的非零极限(假定至少有一个这样的极限存在). 那么,

$$\sum_l\lambda_l(f)=1$$

及

$$\sum_l\lambda_l(f)e^{itc_l}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}p^{-\alpha}e^{itf(p^\alpha)}.$$

若$f(m)$仅取整值，及

$$\mu_k(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ N_n(f(m)=k),$$

则当且仅当

$$\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}<\infty$$

时有

$$\sum_k \mu_k(f)=1.$$

关于 $\mu_k(f)$ 的收敛速度也作了研究．存在绝对常数 C，使对所有的整数 k，及所有的整值加性算术函数 $f(m)$（满足 $f(p)=0$ 对全体素数 p），有

$$\left|\frac{1}{n}\ N_n(f(m)=k)-\mu_k(f)\right|\leqslant Cn^{-1/2}.$$

此外，还研究了当 k_n 随 n 递增时频率 $N_n(f(m)=k_n)/n$ 的渐近性质．

参考文献

[1] Kac, M., Statistical independence in probability, analysis and number theory, Math. Assoc. Amer., 1963.

[2] Кубилюс, И. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962（英译本：Kubilius, I. P., Probabilistic methods in the theory of numbers, Amer. Math. Soc., 1978).

[3] Кубилюс. И. П., Актуальные проблемы аналитичекой теории чисел, Минск, 1974.

[4] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961（英译本：Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963).

[5] Линник, Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967（英译本：Linnik, Yu. V., Ergodic properties of algebraic fields, Springer, 1968).

[6] Постников, А. Г., Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений, М., 1966（英译本：Postnikov, A. G., Ergodic problems in the theory of congruences and of Diophantine approximations, Amer. Math. Soc., 1967.

[7] Elliot, P. D. T. A., Probabilistic number theory, 1-2, Springer, 1979 - 1980.

И. П. Кубилюс 撰

【补注】Erdös-Kac 定理给出了 $\omega(n)$ 的某些更精确的信息．以 $N(x,a,b)$ 表示区间 $[3,x]$ 中满足不等式

$$a\leqslant\frac{\omega(n)-\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}\leqslant b$$

的整数的个数，那么，当 $x->\infty$ 时有

$$N(x,a,b)=(x+o(x))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}dt.$$

见[A1]．

参考文献

[A1] Najkiewicz, W., Number theory, World Scientific, 1983, 251 - 259（译自波兰文）.

潘承彪 译　戚鸣皋 校

数的表示[numbers, representations of; счисление 或 нумерация]

表示自然数的方法的总体．在任何数系（number system）中都用一些符号（词或记号）表示一些特定的数，它们称为结数（nodal numbers），而其他的数是用某些运从结数（用算法表示）得到的．数系按其结数的选择和用算法表示数的方法而不同；随着数字符号的书面记号的出现，数系按数字符号的特征及其书写原则而有差异．

例如，古代巴比伦人用 1，10 和 60 作为结数；毛利人（新西兰最初的居民）用 1，11，11^2，11^3．在罗马数系中，结数是 1，5，10，50，100，500，1000，分别用记号 I，V，X，L，C，D，M 表示（见**罗马数字**（Roman numerals））．

在一个数系中，如果算法派生的数字是把结数放在一起而构成的，则这个数系称为加性数系（additive number systems）．例如，在古埃及的（象形文字的）记号系统中，数 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，19，40 分别用以下符号表示：

同样这些数字在罗马数字中写成 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，Ⅸ，Ⅹ，XIX，XL．在这个数系中，由算法派生的数是通过结数的加减得出的．英语中表示数字的方法是用加-乘方法构成算法派生数的一个明显的例子，例如：三百五十七（3 × 100 + 50 + 7）．

在某些称为字母表数系（alphabetical number systems）的数系中，数用与字母相同的符号，再加另外的记号，例如短划来表示．例如，古希腊人用字母表的字母序列，与短划联合起来表示数 1 到 9，以及所有的几十和几百．例如，数 803，833 和 83 写成

$$\overline{\omega}\overline{\gamma},\ \overline{\omega}\overline{\lambda}\overline{\gamma},\ \overline{\pi}\overline{\gamma}.$$

数的字母表表示法为斯拉夫人和很多其他民族所使用（见**斯拉夫数字**（Slavic numerals））．

一个数系称为非位值的（non-positional），如果所用的每个数字记号（数码）在任何数的标记中只有一个值．如果每个数码的值依赖于它在标记内部的位置，则这个数系称为位值的（positional）．罗马数系是非位置的．在巴比伦数系中任何数可以写成两个记号的组合：一个垂直楔和一个宽角楔（见下面的例

子）. 这些记号在垂直楔情况构成从一到九的几组，在宽角楔的情况构成从一到五的几组. 垂直楔可代表60和60的任意次幂，而宽角楔可代表10和10与60的任意次幂之积. 数位的顺序同现在所采用的是一样的. 这样

$$\text{[cuneiform]} = 1\cdot 60^2 + 2\cdot 600 + 1\cdot 60 + 1\cdot 10 + 6 = 4876.$$

由于巴比伦数系没有记号对应于空位（我们的零），不能保证一个数的标记只能用一种方法读出. 这标记的确切意义可以由上下文按惯例确定. 这种类型的数系因此称为非绝对位值系统. 古巴比伦人后来引入一个对应于我们的零的特殊记号. 现代十进制数系是位值的.

所有已知的位值数系是加 - 乘数系. 在这些数系中数的标记的位值原理由下面的初等**数论**（number theory）的定理作了解释.

令 $q_0 = 1$ 且 $q_1, q_2, \cdots$，是大于一的自然数的一个序列. 这时，对任何自然数 a，存在一个而且只有一个自然数 n，使得方程

$$a_0 + a_1 q_1 + a_2 q_1 q_2 + \cdots + a_{n-1} q_1 \cdots q_{n-1} = a \tag{1}$$

具有一组整数解 $a_0, \cdots, a_{n-1}$，满足

$$0 \leqslant a_0 < q_1, \cdots, 0 \leqslant a_{n-1} < q_{n-1}, \tag{2}$$
$$0 < a_{n-1} < q_n.$$

这时，只有一个满足条件（1）和条件（2）的有序整数集（多维偶）

$$\langle a_{n-1}, \cdots, a_0 \rangle. \tag{3}$$

在巴比伦数系中，$q_1 = 10, q_2 = 6, q_3 = 10, q_4 = 6, \cdots$，等等. 在马雅印第安人的数系中，$q_1 = 5, q_2 = 4, q_3 = 18, q_4 = q_5 = \cdots = 20$.

如果一个数系中序列 $q_1, \cdots, q_n$ 的所有的项等于同一个数 q，而且从 0 到 $q-1$ 的每一个数用一个特定符号来表示，则称为 q 进数系（q-ic number system）或以 q 为基的位值数系. 在 q 进制中，每一自然数表成一个表示符号的序列. 为了对 q 进制的数相加和相乘，只要对从 0 到 $q-1$ 的所有的数有加法表和乘法表就够了.

参考文献

[1] Башмакова, И. Г., Юшкевич, А. П., Происхождение систем счисления, в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 1, М-Л., 1951, 11 - 74.

[2] Waerden, B. L. van der, Ontwakende wetenschap, Noordhoff, 1957.

[3] Юшкевич, А. П., История математики в ср. века, М., 1961.

[4] Вайман, А. А., Шумеро-вавилонская математика, М., 1961.

[5] История математики, т. 1., М., 1970.

В. И. Нечаев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Burton, D. M., The history of mathematics, Allyn & Bacon, 1985.

[A2] Cajori, F., A history of mathematical notations, 1-2, Open Court, 1952 - 1974.

[A3] Dantzig, T., Number, the language of science, Allyn & Unwin, 1930.

[A4] Menninger, K., Number words and number symbols, M. I. T., 1969(译自德文).

[A5] Cuitel, G., Histoire comparée des numerations écrits, Paris, 1975.

葛显良 译

分子 [numerator; числитель]，算术分数 a/b 的整数 a，表示这个分数由部分 $1/b$ 的多少倍组成. 代数分式 A/B 的分子是表达式 A（见**分式**（fraction））.

С. А. Степанов 撰 张鸿林 译

Nusselt 数 [Nusselt number; Нуссельта число]

表征物体表面同气（液）流之间对流热交换强度的无量纲参数: $\mathrm{Nu} = \alpha l / \lambda$，其中 $\alpha = Q / S\Delta T$ 是热交换系数，Q 是物体表面在单位时间内辐射（或吸收）的热量，$\Delta T > 0$ 是物体表面的温度与边界层外气体（液体）的温度之差，S 是表面面积，l 是特征长度，λ 是气体（液体）的热传导系数.

因 W. Nusselt 而得名. БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Condon, E. U., Heat transfer, in E. U. Condon and H. Odishaw (eds.): Handbook of Physics, McGraw-Hill, 1967.

[A2] Eckert, E. R. G., Introduction to the transfer of heat and mass, McGraw-Hill, 1950.

张鸿林 译

Nyquist 准则 [Nyquist criterion; Найквиста критерий]

线性闭环系统稳定性的一种充分必要条件，该条件是通过开环系统的性质表达的.

考虑具有下列传递函数的线性单输入 - 单输出系统:

$$W(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

这里假定多项式 $M(z)$ 的次数不超过多项式 $N(z)$ 的次数，即 $W(p)$ 是真有理函数（proper rational function）. 最初的 Nyquist 准则对于具有单位反馈 $u = y$ 的闭环系统给出稳定性的充分必要条件. 这是利用实变量 $\omega \in$

$[0, \infty)$ 的复值函数 $z = W(i\omega)$（开环系统的振幅-相位特征（amplitude-phase characteristic））得到的，$W(i\omega)$ 在复平面上画出一条曲线，叫做 Nyquist 图形（Nyquist diagram）. 假定开环系统的特征多项式 $N(z)$ 有 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 个根具有正实部，并且有 $n-k$ 个根具有负实部. Nyquist 准则陈述如下：闭环系统稳定，当且仅当其 Nyquist 图形绕点 $z = -1$ 顺时针方向转 $k/2$ 圈.（一种等价的表述为：从 -1 到点 $W(i\omega)$ 的向量当 ω 从 0 到 ∞ 变化时按正方向描出角度 πk.）

这一准则首先是由 H. Nyquist（[1]）针对反馈放大器提出来的；它是一种线性系统稳定性的频率准则，类似于 Михайлов 准则（Mikhaĭlov criterion），见[2]，[3]. 指出下面这一点是重要的，即若系统的某些元件的方程是未知时，则通过实验办法，把不同频率的谐波信号输入到开环系统，也可以建立起 Nyquist 图形（[4]）.

这一准则已被推广到多变量系统，无穷维系统和采样数据系统，例如见[5]，[6]，[7]，[9].

参考文献

[1] Nyquist, H., Regeneration theory, *Bell System Techn. J.*, **11** (1932), 1, 126 − 147.

[2] Булгаков, Б. В., Колебания, М., 1954.

[3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973.

[4] Ройтенберг, Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978.

[5] Гноенский, Л. С., Каменский, Г. А., Элесгольц, Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, М., 1969.

Н. Х. Розов 撰

【补注】 关于 Nyquist 准则在各种方向的推广，见[A1].

参考文献

[A1] Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., Feedback systems: input-output properties, Acad. Press, 1975.

[A2] Desoer, C. A., A general formulation of the Nyquist stability criterion, *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-12** (1965), 230−234.

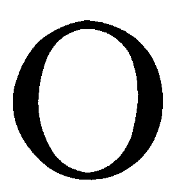
[A3] Desoer, C. A. and Wang, Y. T., On the generalized Nyquist stability criterion, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-25** (1980), 187 − 196.

[A4] Callier, F. M. and Desoer, C. A., On simplifying a graphical stability criterion for linear distributed feedback systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-21** (1976), 128 − 129.

[A5] Valenca, J. M. E. and Harris, C. J., Nyquist criterion for input-output stability of multivariable systems, *Int. J. Control*, **31** (1980), 917 − 935.

[A6] Faurre, P. and Depeyrot, M., Elements of system theory, North-Holland, 1977.

冯德兴 译



O 直并 [**O-direct union; O-прямое объединение**], 带零元的半群的

由给定带零元且两两相交于该零元的半群族 $\{S_\alpha\}$ 得到的**半群** (semi-group) $\bigcup_\alpha S_\alpha$, 它的乘法运算定义如下: 在每个半群 S_α 上它与原来的运算一致, 而对于不同的 α, β, 定义 $S_\alpha S_\beta = 0$. O 直并亦称为正交和 (orthogonal sum). 若干类型的半群可以通过将其分解为已知半群的 O 直并来加以刻画 (例如见**极大理想** (maximal ideal); **极小理想** (minimal ideal); **正则半群** (regular semi-group)).

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 2, Amer. Math. Soc., 1967.

Л. Н. Шеврин 撰 王 杰 译 石生明 校

几何对象 [**object, geometric; объект, геометрический**]

见**几何对象理论** (geometric objects, theory of).

范畴中的对象 [**object in a category; объект категории**]

一个术语, 用来表示任意一个**范畴** (category) 的元素, 它们起着集合、群、拓扑空间等等在其各个范畴中的作用. 范畴中的一个对象是一个不定义的概念. 每一个范畴都是由两类元素所组成, 对象类 (class of objects) 与态射类 (class of morphisms). 范畴 $\mathfrak{K}$ 中的对象的类通常表以 Ob $\mathfrak{K}$. 随着 $\mathfrak{K}$ 的任一对象 A 有唯一的一个恒等态射 1_A 与之对应, 所以不同的恒等态射对应着不同的对象. 因此, 范畴的概念可以形式地仅由态射来定义. 可是, "范畴中的对象" 这个术语有一种语言学上的便利, 因此实际上总是被用着的. 将范畴中的元素分成对象与态射仅仅在一个固定的范畴中才有意义, 因为一个范畴中的对象可以是另一范畴中的态射. 感谢态射的出现, 使得可以定义范畴的对象之间的相互关系和将范畴中的对象区分成各种特殊的类型. (见**范畴的整对象** (integral object of a category); **范畴的零对象** (null object of a category); **小对象** (small object); **范畴的投射对象** (projective object of a category); **内射对象** (injective object); 等等.)

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 也见**范畴的生成元** (generator of a category).

周伯埙 译

对象语言 [**object language; предметный язык**]

作为研究对象的语言. 对一种有意义的理论形式化时要区分两种语言. 一种是使理论得以形式化的语言, 即对象语言. 它由表示式的构成法则和语义法则给出, 语义法则规定表示式的含义以及表示式怎样说明推理. 另一种是用来说明上述这些语义和语法所用的语言. 这个语言称为元语言. 通常元语言不是形式化的语言. 然而它也能被形式化, 随之变成对象语言, 要对它进行研究就需要一种新的元语言.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984).

沈复兴 译

目标函数 [**objective function 或 target function; целевая функция**]

数学规划 (mathematical programming) 问题中被最优化的判别函数.

斜导数 [**oblique derivative; косая производная**], 方向导数 (directional derivative)

定义在某个曲面 S 上点的邻域的函数 f 关于与 S

上某一椭圆算子的**余法线**(conormal)方向不同的方向 l 的导数. 斜导数可以出现在关于二阶椭圆方程的边值问题的边界条件中. 此问题从而可称为具有斜导数的问题. 见**偏微分方程, 斜导数问题**(differential equation, partial, oblique derivatives).

若 S 上方向场 l 取 $l=(l_1, \cdots, l_n)$ 的形式, 这里 l_i 是满足 $\sum_{i=1}^{n}(l_i)^2=1$ 的点的函数, 则函数 f 关于 l 的斜导数为

$$\frac{df}{dl}=\sum_{i=1}^{n} l_i(P)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \ P=(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的 Descartes 坐标.

参考文献

[1] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文).

А. И. Янушаускас 撰 郑维行 译 沈祖和 校

障碍[**obstruction**; **препятствие**]

同伦论中的一个概念: 它是这样一个不变量, 对应问题(中的一步)有解, 当且仅当它是零.

设 (X, A) 是**胞腔空间**(cellular space)偶, 又设 Y 为单连通(更一般些, 同伦简单的)拓扑空间. 给定的连续映射 $g: A \to Y$ 能扩充为连续映射 $f: X \to Y$ 吗? 这个扩充可以按 X 的骨架 X^n 逐步进行. 假定已经构作出映射 $f: X^n \cup A \to Y$ 使 $f|_A=g$. 对任一定向 $(n+1)$ 维胞腔 $e^{n+1} \to Y$, 映射 $f|_{\partial e^{n+1}}$ 给出映射 $S^n \to Y$(这里 S^n 为 n 维单位球)和元素 $\alpha_e \in \pi_n(Y)$(Y 是同伦简单的假定用在这里, 因为它保证不必去考虑基点). 这样, 得到上链

$$c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X; \pi_n(Y)), \ c_f^{n+1}(e^{n+1})=\alpha_e.$$

由于 $e^{n+1} \subset A$ 时, 显然有 $c_f^{n+1}(e^{n+1})=0$. 因此

$$c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)).$$

显然, $c_f^{n+1}=0$ 的充要条件是 f 可以扩充到 X^{n+1} 上. 即 c_f^{n+1} 是 f 扩充到 X^{n+1} 上的障碍.

上链 $c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ 是一个上闭链. 一般而言, 由 $c_f^{n+1} \neq 0$ 推不出 g 不能扩充到 X: 有可能 f 扩充不到 X^{n+1}, 这是由于选了 g 到 X^n 的一个不合适的扩充. 例如, 映射 $f|_{X^{n-1} \cup A}$ 可以扩充到 X^{n+1}, 即退回去一步再扩充是可能的. 可以证明, 上同调类

$$[c_f^{n+1}] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

是这种扩充的障碍, 即 $[c_f^{n+1}]=0$ 的充要条件是存在映射 $\widetilde{f}: X^{n+1} \cup A \to Y$ 使 $\widetilde{f}|_{X^{n-1} \cup A}=f|_{X^{n-1} \cup A}$(特别, $\widetilde{f}|_A=g$). 这个断言的证明, 要用到**差异上链**(difference cochain)的构造.

由于映射 $X \to Y$ 的同伦分类问题可以解释为扩充问题, 因此障碍理论也可用于描述由 X 到 Y 的映射同伦类的集合 $[X, Y]$. 设 $I=[0, 1]$, 并设 $A=X \times \{0, 1\}$ 为 $X \times I$ 的子空间, 则一对映射 $f_0, f_1: X \to Y$ 可解释为映射 $G: A \to X$, $G(x, i)=f_i(x)$, $i=0, 1$. 而 f_0 和 f_1 间存在同伦, 表示存在 G 的扩充 $F: X \times I \to Y$. 如果同伦 F 在 X 的 n 维骨架上已经作出, 那么它扩充到 X 的障碍是差异上链

$$d^n(f_0, f_1) \in C^n(X; \pi_n(Y)).$$

作为应用, 可以考虑集合 $[X, Y]=[X, K(\pi, n)]$ $(n>1)$ 的表达. 这里 $K(\pi, n)$ 是 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space); 当 $n \neq i$ 时, $\pi_i(K(\pi, n))=0$. $\pi_n(K(\pi, n))=\pi$. 设 $f_0: X \to K(\pi, n)$ 为常值映射, 而 $f: X \to K(\pi, n)$ 是任一连续映射. 由于 $i<n$ 时, $H^i(X; \pi_i(Y))=0$, 映射 f_0 和 f_1 在 X^{n-1} 上是同伦的. 取定连接它们的一个同伦以后, 可以定义差异上链

$$d^n(f, f_0) \in C^n(X; \pi_n(Y))=C^n(X; \pi).$$

上同调类 $[d^n(f, f_0)] \in H^n(X; \pi)$ 是唯一决定的, 即它和连接 f_0 和 f 的同伦无关(因为当 $i<n$ 时, $\pi_i(Y)=0$). 进一步, 如果映射 $f, g: X \to Y$ 使 $[d^n(f, f_0)]=[d^n(g, f_0)]$, 则 $[d^n(f, g)]=0$, 因此 f 和 g 在 X^n 上是同伦的. 扩充这个同伦到 X 去, 其障碍属于群 $H^i(X; \pi_i(Y))=0$(因为 $i>n$), 因此 f 和 g 同伦. 这样, f 的同伦类就完全由元素 $[d^n(f, f_0)] \in H^n(X; \pi)$ 所确定. 最后, 对任意的 $x \in H^n(X; \pi)$, 存在映射 f 使 $[d^n(f, f_0)]=x$. 因此 $[X, K(\pi, n)]=H^n(X; \pi)$. 类似地, 若当 $i<n$ 时, $\pi_i(Y)=0$, 又 $\dim X \leqslant n$, 则 $[X, Y]=H^n(X; \pi_n(Y))$.

在研究扩充问题时, 还考虑过"退回去一步"再予以扩充的问题. 这个问题的圆满解决, 需要分析退回去任意步这个问题. **上同调运算**(cohomology operation)和 **Постников 系统**(Postnikov system)可用于此处. 例如, 为了描述集合 $[X, Y]$, 这里当 $i<n$ 时, $\pi_i(Y)=0$, $\pi_n(Y) \neq 0$, $\dim X=n+r$. 一般讲, 需要研究退回去 $r+1$ 步的情形. 这时, 有必要研究 Y 的 Постников 系统中的开头 $n+r$ 层, 即要用阶数 $\leqslant r$ 的上同调运算(在**上同调运算**条中, 叙述了 $r=1$ 的情形).

障碍理论还用于截面的扩充这种情形(见**映射的截面**(section of a mapping)). 设 $p: E \to B$ 是以 F 为纤维的纤维化(这里 $\pi_1(F)=0$, 又 $\pi_1(B)$ 平凡地作用于 $\pi_i(F)$). 又设 $A \subset B$ 和 $s: A \to E$ 为截面(即使得 $ps(a)=a$ 成立的连续映射.) s 可以扩充到 B 上吗? 这时相应的障碍在群 $H^{n+1}(B; \pi_n(F))$ 中. 如果让 $B=X$, $E=X \times Y$, $p(x, y)=x$, $s(a)=(a, g(a))$ 就

得到扩充问题．同样可以用障碍理论来研究截面的分类问题．

最后，在扩充问题(还有截面问题)中，可以不假定空间 Y 的同伦简单性；不过，这时要用局部系数的上同调论．

障碍理论始自 Eilenberg([2])．但 Л. С. Понтрягин 也知道．虽然他没有明确说出，但在具体问题中用过．见[1]．

文献[3]和[4]中，对此有很好的讨论．

参考文献

[1] Pontryagin, L. S., Classification of continuous transformations of a complex into a sphere, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **19** (1938), 361 - 363 (俄文).

[2] Eilenberg, S., Cohomology and continuous mappings, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 231 - 251.

[3] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959.

[4] Thomas, E., Seminar on fibre spaces, Springer, 1966.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 在同伦群 $\pi_n(X, x_0)$ ($n \geq 1$) 上的作用，见**同伦群** (homotopy group)．空间 X 称为 n 简单的(n-simple)，如果这个作用(对此 n)为平凡的；X 称为简单的(simple)或同伦简单的(homotopy simple)，如果它是道路连通的，而且对所有的 $n \geq 1$，它是 n 简单的．这时 $\pi_1(X, x_0)$ 为可换群，并且在所有的 $\pi_n(X, x_0)$ 上，其作用为简单的．道路连通的 H 空间是简单的．

参考文献

[A1] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press. 1951.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

[A3] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.

[A4] Baues, H. J., Obstruction theory, Springer, 1977.

沈信耀 译 余建明 校

海洋学中的数学问题 [oceanology, mathematical problems in; океанологий математические задачи]

海洋的物理学、化学、地质学和生物学领域中的数学问题．海洋物理学中，问题主要涉及地球物理流体动力学(定义为旋转斜压分层液体的自然流流体动力学)．地球的自转，本质上影响(全球和综观尺度的)大尺度流及其分层，即介质在重力(竖直)方向密度的变化，这在海洋中产生个别流体动力学场或其统计特性的特定各向异性，因而，例如，当通过关于这些场的经验数据的客观分析(内插，外推，修匀)用 **Галёркин 法** (Galerkin method) 选择基函数来描述这些场时和当选择湍流和**内波** (internal waves) 的竖向不均匀随机场的统计模型时(亦见**湍流中的数学问题** (turbulence, mathematical problems in))，必须考虑这种影响．

由于海洋边界(海底和海岸)的不规则形状，应用流体动力学的线性化方程对海洋的本征振荡的解析描述变得复杂化，使得应用分离变量法求解成为不可能．因此，在潮汐理论中，其中海洋可具有对引潮力的共振响应，仅对规则形状的(例如由子午圈和纬度圈的截段所界限的)模型海洋才有解析计算．在真实几何位形情况下，接连(不断增加)的本征频率应定义为极值曲线上与能量相关的二次积分泛函的极值，关于极值曲线可由 Галёркин 法选取；这种处理方法尚未完全实现．在潮汐理论中，海洋对引潮力的线性和非线性响应都注意到了，它可以通过将潮汐高度表示为引潮力的泛函幂级数而予以描述；这个级数的泛函系数描述作为共振系统的海洋性质．

对于流体动力学方程的以下这几类波解：声波，表面(张力和引力)波，内引力波，惯性波(包括正压和斜压 Rossby-Blinova 波，由于地球自转角速度的竖向投影随纬度变化而形成)，以及最后(由于地磁场中导电流体(咸海水)运动引起的)磁流体波，它们之间有着特殊的差别．各类波解(以及关于它们的动力学方程)通过应用与 van der Pol 方法相似的非线性力学的渐近方法在多时标分析中予以构造．这类问题的一个例子是所谓准地转近似，把快波从流体动力学方程组的解中滤除掉，并将 Rossby-Blinova 波这类波分离出来．

海洋中的波通常是非线性的．对于长非线性波，包括表面波和内波两者，**Korteweg-de Vries 方程** (Korteweg-de Vries equation) 很好地适用，它的周期(极浅水波)解和孤子解可以应用．对于短波，尚未构造出寻求孤子解和周期解的一般方法，而仅存在个别例子(Slezkin-Crapper 表面张力波，Gerstner 和 Stokes 引力波，正压和斜压 Rossby 孤子)．非线性波场的统计理论也是未充分发展的，特别是与表面引力波和内引力波(竖向微结构层中内波产生湍动斑和使该斑变模糊)以及 Rossby 波(带有非线性波场中准二维湍流演化的)的描述有关的那些理论．

海洋流体动力学的最重要问题之一，是海洋环流(最一般表述中，在海洋与大气通过所谓海洋的上混层和大气的边界层的相互作用下)的数学模型建立问题，同时由于空间不均匀性尺度的宽广谱(从几 mm 到几万 km)，这里要模拟的系统具有巨大数量的自由度(对毫米级元体积为 10^{28} 量级)，它们总是需要例如通过小尺度过程的参数化法一起予以考虑．

当用差分方程来近似连续的流体动力学方程时，出现有关差分格式的近似程度以及收敛性和稳定性问题．在海洋环流的当代所谓涡流分辨模型中，应用具

有水平步长为几十 km 量级的空间网格. 应用流体动力学空间场的谱（包括 Галёркин）表示的格式可以是具有竞争性的.

海洋流体动力学中测量数据的数学处理，其基本问题分成声测的（深度的函数，它们的模展开和谱展开），拖引的（带 Doppler 效应的水平谱和时空谱）以及导线测量的问题（波场的: 三维网格点上的时间序列及其谱和互谱，客观分析，同步空间图和四维分析）.

在海洋声学中，考察了分层介质中波分布的典型问题; 在许多情况下，对波场竖向结构的解析描述，应用了 WKB 近似（见 **WKB 方法**（WKB method））. 在海洋光学中，多次光散射是一特定过程，对于它的描述，应用辐射转移方程的（由 Monte-Carlo 方法获得的）数值解以及其渐近解析解（亦见**辐射转移理论**（radiative transfer theory））. 在海洋化学中，主要数学问题是带特定源和汇的非保守混合物的运流扩散的计算.

在海洋地质学中，出现的问题与板块构造学（plate tectonics）（岩石圈板块的构造运动学）的发展有关，涉及地表硬板块运动的运动学计算及其起源演化的解释，这里应用了地幔中（起因于重物质从地幔向地核传递的）密度运流过程的数学模型. 地质学的重要特定问题之一是生物地层学，即借助于自学程序根据其微量古生物集合含量来鉴定沉积岩层的年龄（而到目前为止，在大多数工作中这个问题是近似解决的，没有应用计算机）.

在信号、噪声滤除和形式识别的统计特性的估计中，很大量的计算问题出现在海洋多道连续深地震剖面探测的和海床振动射线检验的数据的记录和处理方面，同时在许多情况下，在测量网络（信号发射器和接收器的空间分布）的表述上和在它们的记录上这两方面，应用 Fourier 变换全息术是有前途的.

在海洋生物学中，海洋生物生产率控制问题的巨大重要性，反映在生态系统的结构和功能作用的数学模型建立上，以及特别是涉及群体动力学. 一个例子是生态系统子量 q_i（包括多种形式浮游植物和浮游动物，氧，二氧化碳，磷酸盐和硝酸盐等的浓度，海水的温度和含盐度，以及受光合活性辐射的照度等）的竖向分布 $q_i(z, t)$ 随时间 t 演化的问题，由下列形式的方程

$$\dot{q}_i = A_{i\alpha} q_\alpha + B_{i\alpha\beta} q_\alpha q_\beta + \frac{\partial}{\partial z} K(z) \frac{\partial q_i}{\partial z}$$

描述，其中 $A_{i\alpha}$, $B_{i\alpha\beta}$ 是生物学和生物物理学参数. 这里感兴趣的是带特定初始数据的 Cauchy 问题的数值解，以及微分方程定性理论关于整体解行为和关于它们对方程中所含参数的依存性的结论.

参考文献

[1] Биология океана, т. 1-2, М., 1977.
[2] Физика океана, т. 1, М., 1978.
[3] Геофизика океана, т. 1-2, М., 1979.
[4] Химия океана, т. 1-2, М., 1979.
[5] Геология океана, т. 1, М., 1979.

А. С. Монин 撰

【补注】 [A1]-[A4] 中给出海洋学中流体动力学问题的一般引论. [A5]-[A7] 中介绍了海洋中波的模型建立和数值分析.

在海洋物理过程和生物过程的研究中，某些论题近来获得工作在各个不同领域的科学家的特殊注意. 首先，海洋和大气之间的相互作用看来在气候现象中起重要作用. 一个著名的例子是"厄尔尼诺"（"El Niño"）现象，见 [A8]. 其次，海洋的碳酸贮存（或缓冲）也是这个相互作用的一部分. 在空气中 CO_2 的平衡中，必须考虑到这个因素. 而且，海洋生物体可能在海底沉积物中沉积一部分碳酸.

关于近海滨和港湾中的沉积物（泥沙）输运，在与这些场所人类活动有关的方面进行了研究（[A9]-[A11]）. 关于河流排放处污染的研究，在相同方面予以分析. 海洋学丛书中的 [A8] 这一卷，论述海洋的下述许多方面: 它的物理学，化学，生物学和地质学.

参考文献

[A1] Pedlosky, J., Geophysical fluid dynamics, Springer, 1987.
[A2] Gill, A. E., Atmosphere-Ocean dynamics, Acad. Press, 1982.
[A3] Marchuk, G. I. and Sarkisyan, A. S., Mathematical modelling of ocean circulation, Springer, 1986 (译自俄文).
[A4] Tritton, D. J., Physical fluid dynamics, v. Nostrand Reinhold, 1988.
[A5] Le Bond, P. H. and Mysak, L. A., Waves in the ocean, Oceanography Series, Elsevier, 1978.
[A6] Pugh, D. T., Tides, surges and mean sea-level, Wiley, 1987.
[A7] Mader, C. L., Numerical modelling of water waves, Univ. California Press, 1988.
[A8] Nihoul, J. C. J. (ed.), Coupled ocean-atmosphere models, Oceanography Series, Elsevier, 1985.
[A9] Dronkers, J. and Leussen, W. van (eds.), Physical processes in estuaries, Springer, 1988.
[A10] Massel, S. R., Hydrodynamics of coastal zones, Elsevier, 1989.
[A11] Noye, J. (ed.), Numerical modelling: Applications to marine systems, North-Holland, 1987.
[A12] Monin, A. S. and Ozmidov, R. V., Turbulence in the ocean, Reidel, 1985.
[A13] Csanady, G. T., Circulation in the coastal ocean, Reidel, 1982.

[A14] McLellan, H. J., Elements of Physical oceanography, Pergamon.
徐锡申 译

八面体空间 [**octahedral space**; **октаэдра пространство**]

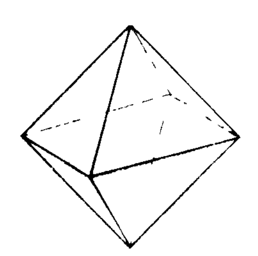
由**八面体**(octahedron)通过叠合彼此处于 $\pi/3$ 角的相对三角形面所得的一个空间. 八面体空间是一个**三维流形**(three-dimensional manifold)且是二元八面体群在三维球面上的作用的轨道空间. 它可以与用类似方法得到的立方体空间(cube space)相等同. 八面体空间的一维 Betti 群是三阶的群.

М. И. Войцеховский 撰 徐森林 译

八面体 [**octahedron**; **октаэдр**]

一种立体图形, 具有 8 个三角形面, 12 条棱, 6 个顶点, 在每个顶点处有 4 个面相交. 如果所有的棱长度相同, 它就是五种正多面体(regular polyhedra)(Platon 立体(Platon solids))之一; 如果边长是 a, 则八面体的体积是

$$v = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714\,a^3.$$



БСЭ-3

【补注】 八面体的 Schläfli 符号是 $\{3, 4\}$. 如果所有的棱相同, 则得到正八面体(regular octahedron); 可把它看作三角形反棱柱, 或者看作方双棱锥. 在古希腊, 作为五种 **Platon 立体**(Platon solids)(亦见**正多面体**(regular polyhedra))之一的正八面体代表元素空气. 它作为铬明矾的晶体存在于自然界中. 若把它的外接圆半径取作测量单位, 则它的 6 个顶点的 Descartes 坐标为

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1);$$

从而, 它的边长为 $\sqrt{2}$, 内径为 $\sqrt{\frac{1}{3}}$, 体积为 $\frac{4}{3}$. 它的 4 对相对的面(或 4 个直径)由阶为 $4! = 24$ 的八面体群(octahedral grou) $\mathfrak{S}_4$ 自由置换.

参考文献

[A1] Bennett, G. T., Deformable octahedra, *Proc. London Math. Soc.* (2), **10** (1912), 309 – 343.

[A2] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Methuen, 1948, p. 5.
杜小杨 译

卦限 [**octant**; **октант**]

三维空间被三个相互垂直的坐标平面划分成的八个区域中的任何一个.

张鸿林 译

奇函数 [**odd function**; **нечетная функция**]

一个函数 $f(x)$, 当自变量 x 变号时这个函数也变号, 即对于 $f(x)$ 的定义域中的一切值, 有 $f(-x) = -f(x)$. 奇函数的图形关于坐标原点是对称的.

【补注】 亦见**偶函数**(even function).

张鸿林 译

奇数 [**odd number**; **нечетное число**]

不能被 2 整除的整数.

【补注】 一个整数, 如果不是奇数, 则称为**偶数**(even number).

张鸿林 译

冈洁定理 [**Oka theorem**; **Ока теоремы**]

由冈洁在 1930 年和 1950 年之间首先证明的在多复变数函数论中有关经典问题的定理(见[1]).

1) 关于 **Cousin 问题**(Cousin problems)的 Oka 定理: 第一, Cousin 问题在 $\mathbf{C}^n$ 中任何**全纯域**(domain of holomorphy)中都是可解的; 第二, Cousin 问题在任何同胚于 $D_1 \times \cdots \times D_n$ 的全纯域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 都是可解的, 其中所有区域 $D_\nu \subset \mathbf{C}$, 可能除掉一个外, 都是单连通的.

2) 冈洁关于 **Levi 问题**(Levi problem)的定理: 任何拟凸 Riemann 域(见**拟凸和拟凹**(pseudo-convex and pseudo-concave))都是全纯域.

原来冈洁在维数 $n = 2$ 时证明这些定理; 在任意维数时, 定理也已被其他数学家证明.

3) 冈洁-Weil 定理(Oka-Weil theorem): 令 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的一区域, 又令紧集 $K \subset D$ 和它关于所有在 D 全纯的函数的代数 $\mathcal{O}(D)$ 的包(见**全纯包络**(holomorphic envelope))相同; 那么对任何在 K 的一邻域中全纯的函数 f 和任何 $\varepsilon > 0$, 都可以找到一函数 $F \in \mathcal{O}(D)$, 使得

$$\max_k |f - F| < \varepsilon.$$

这个全纯逼近论中的基本定理广泛用于复分析和泛函分析中.

4) 冈洁凝聚定理(Oka coherence theorem): 令 $\mathcal{O}$ 为在复流形 X 上的全纯函数的层; 那么对任何自然数 p, 任何层 $\mathcal{O}^p = \mathcal{O} \times \cdots \times \mathcal{O}$ (p 次) 的局部有限生成子层是一凝聚**解析层**(analytic sheaf)(见**凝聚层**(coherent sheaf)).

这是所谓冈洁-Cartan 理论的一个基本定理, 它基本上用来证明 Cartan 定理 A 和 B(见 **Cartan 定理**(Cartan theorem)).

参考文献

[1] Oka K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I. Shoten, 1961.

[2] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.
[3] Gunning, R. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

Е. М. Чирка 撰

【补注】 参考文献 [A2] 是 Oka 的基本论文的有注解的英译本.

参考文献

[A1] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982.
[A2] Oka, K., Collected papers, Springer, 1984.
[A3] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

钟同德 译

ω 完全性 [**omega-completeness** 或 ω-completeness; **омега-полнота**]

算术形式系统的一种性质，对任意一个公式 $A(x)$，由 $A(\overline{0}), \cdots, A(\overline{n}), \cdots$，可推出公式 $\forall x A(x)$，这里 $\overline{n}$ 是一个常数，指称自然数 n. 如果这一性质不成立，系统就称为 ω 不完全的（ω-incomplete）. 所谓 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem）指的就是形式算术的 ω 不完全性. 把算术标准模型中取值为真的所有公式都当做公理，就得到 ω 完全的公理系统. 另一方面，在 Peano 算术的任何一个 ω 完全的扩充中，在标准模型中取值为真的每个公式都可以被推导出来.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984）.

В. Н. Грушин 撰 沈复兴 译

ω 相容性 [**omega-consistency** 或 ω-consistency; **омега-непротиворечивость**]

算术形式系统的一种性质，表明不能得到 ω 不相容性. ω 不相容性是形式系统的一种状况，指对某个公式 $A(x)$，无穷系列 $A(\overline{0}), \cdots, A(\overline{n}), \cdots$ 中每个公式，以及公式 $\neg\forall x A(x)$ 都是可证明的，其中 $\overline{0}$ 是形式系统中一个常量代表数字 0，而常量 $\overline{n}$ 是由 $(x)'$ 递归定义的，表示 x 的后继数: $\overline{n+1} = (\overline{n})'$.

ω 相容性这一概念是与算术的 **Gödel 不完全性定理**（Gödel incompleteness theorem）一起出现的. 假设一个形式算术系统有 ω 相容性，K. Gödel 证明了这个系统的不完全性. ω 相容性这一性质比单纯的**相容性**（consistency）要强，只要公式 $A(x)$ 中的 x 不出现就得到单纯的相容性. 由 Gödel 不完全性定理就知道存在一个系统，它是相容的，但又是 ω 不相容的.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 1984）.

В. Н. Грушин 撰 沈复兴 译

ω^2 分布 [**'omega-squared' distribution** 或 ω^2-distribution; **《омега-квадрат》 распределение**]，随机变量

$$\omega^2 = \int_0^1 Z^2(t)\,dt$$

的**概率分布**（probability distribution），其中 $Z(t)$ 是条件 **Wiener 过程**（Wiener process）（在 $Z(1)=0$ 的条件下）. ω^2 分布的特征函数由公式

$$\mathrm{E}\,e^{it\omega^2} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \frac{2it}{\pi^2 k^2}\right]^{-1/2}$$

表示. 在数理统计中，ω^2 分布常常出现在下述情形下: 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立随机变量，在 $[0,1]$ 上均匀分布，由它们构造一个经验分布函数 $F_n(\cdot)$. 在这种情形下，过程

$$Z_n(t) = \sqrt{n}\;(F_n(t) - t),\; 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

弱收敛到条件 Wiener 过程，由此可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\int_0^1 Z_n^2(t)\,dt < \lambda\right\} = \mathrm{P}\{\omega^2 < \lambda\} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{e^{-t^2\lambda/2}}{\sqrt{-t\sin t}}\,dt,\; \lambda > 0.$$

亦见 **Cramér-von Mises 检验**（Cramér-von Mises test）.

参考文献

[1] Смирнов, Н. В., 《Матем. сб.》, 2 (1937), 2, 973 – 993.
[2] Anderson, T. W. and Darling, D. A., Asymptotic theory of certain 'goodness of fit' criteria based on stochastic processes, *Ann. Math. Stat.*, 23 (1952), 193 – 212.

М. С. Никулин 撰

【补注】 在西方文献中，"条件 Wiener 过程" 通常称为系紧 Brown 运动（tied-down Brownian motion），受约束 Brown 运动（pinned Brownian motion）或 Brown 桥（Brownian bridge）.

其首创文章是 [A1].

参考文献

[A1] Darling, D. A., The Cramér-Smirnov test in the parametric case, *Ann. Math. Stat.*, 26 (1955), 1–20.
[A2] Durbin, J., Distribution theory for tests based on the sample distribution function, SIAM, 1973.

刘秀芳 译

一维流形 [**one-dimensional manifold**; **одномерное многообразие**]

一个拓扑空间 X，其中任何一点都有一个邻域同胚于直线（内点（interior point））或半直线（边界点（boundary point））. 连通、仿紧且无边界点的 Hau-

sdorff 一维流形，如果是紧的，则同胚于圆周，如果不是紧的，则同胚于直线；如果存在一个或两个边界点，则 X 分别同胚于半开有界区间或闭有界区间．任何这样的一维流形都可以成为光滑流形，所以上述断言中同胚可以换为微分同胚．

一个度量连续统（连通的紧度量空间）K，如果除两点外，每个点都把 K 分离，则 K 同胚于闭区间．若任何两点都把 K 分离，则 K 同胚于圆周．子集 $A\subset K$ 把 K 分离，如果 $K\setminus A$ 可以表为两个互不相交的开集之并．

参考文献

[1] Milnor, J., Topology from the differential viewpoint, Univ. of Virginia Press, 1965（中译本：J. W. 米尔诺，从微分观点看拓扑，上海科学技术出版社，1983）.

[2] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977.

[3] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 与上一条最后一段有关的一个事实是 Wallace 定理（Wallace theorem）（见 [A1]）：任何非退化的紧连通空间至少含有不把该空间分离的两个点．

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Guillemin, V. and Pollace, A., Differential topology, Prentice-Hall, 1974.

[A3] Gale, D., The classification of 1-manifolds: a take-home exam, *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987), 170 – 175.

胡师度、白苏华 译

单参数半群 [one-parameter semi-group; однопараметрическая полугруппа]

作用在 Banach 或拓扑向量空间 X 上，具有性质

$$T(t+\tau)x = T(t)[T(\tau)x],\ t,\tau>0,\ x\in X$$

的一个算子族 $T(t)\ (t>0)$．如果算子 $T(t)$ 是线性，有界并且作用在一个 Banach 空间 X 上，那么所有函数 $T(t)x\ (x\in X)$ 的可测性蕴涵它们的连续性．函数 $\| T(t)\|$ 在无穷远增加不快于指数函数．单参数半群的分类基于当 $t\to 0$ 时它们的表现．在最简单的情形下，当 $t\to 0$ 时，$T(t)$ 强收敛于恒等算子(见**算子半群** (semi-group of operators))．

单参数半群的一个重要特征是**半群的生成算子**（generating operator of a semi-group）．单参数半群理论中的基本问题是确立半群和他们的生成算子性质之间的关系．局部凸空间上连续线性算子的单参数半群已经研究得相当完全了．

Banach 空间上非线性算子的单参数半群在算子 $T(t)$ 是压缩的情形已经作了研究．这里与耗散算子理论有深刻的联系．

参考文献

[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）.

[2] Крейн, С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967(英译本：Kreĭn, S. G., Linear differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1971).

[3] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957(中译本：E. 希尔，R. S. 菲列浦斯，泛函分析与半群，上海科学技术出版社，1964).

[4] Butzer, P. and Berens, H., Semigroups of operators and approximation, Springer, 1967.

[5] Barbu, V., Non-linear semi-groups and differential equations in Banach spaces, Ed. Academici, 1976（译自罗马尼亚文）.

[6] Davies, E. B., One-parameter semigroups, Acad. Press, 1980.

[7] Goldstein, J. A., Semigroups of linear operators and applications, Oxford Univ. Press, 1985.

С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.

[A2] Clément, Ph. and Heijmans, H. J. A. M., et al., One-parameter semigroups, CWI & North-Holland, 1987.

[A3] Brezis, H., Operateurs maximaux monotone et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, 1973.

[A4] Casteren, J. van., Generators of strongly continuous semigroups, Pitman, 1985.

[A5] Nagel, R. (ed.), One-parameter semigroups of positive operators, Springer, 1986.

鲁世杰 译 葛显良 校

单参数子群 [one-parameter subgroup; однопараметрическая подгруппа]，赋范域 K 上 Lie 群 G 的

域 K 的加法群到 G 的解析同态，即解析映射 $\alpha: K\to G$，满足

$$\alpha(s+t)=\alpha(s)\alpha(t),\ s,\ t\in K.$$

这个同态的象是 G 的子群，也称为单参数子群．如果 $K=\mathbf{R}$，则由同态 $\alpha: K\to G$ 的连续性可推出它是解析的．如果 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，则对于任意 G 在点 e 处的切向量 $X\in T_eG$，存在唯一的单参数子群 $\alpha: K\to G$ 以 X 作为其在点 $t=0$ 处的切向量．这里 $\alpha(t)=\exp tX$，$t\in K$，$\exp: T_eG\to G$ 是**指数映射**（exponential mapping）．特别地，**一般线性群**（general linear group）$G=\mathrm{GL}(n,\ K)$ 的任一单参数子群形如

$$\alpha(t)=\exp tX=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\ t^nX^n.$$

如果 G 是一个具有双边不变的伪 Riemann 度量或仿射联络的实 Lie 群，则 G 的单参数子群是通过单位元 e 的测地线.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С.邦德列雅金，连续群，上、下，科学出版社，1957，1958）.

[2] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965（译自法文）.

[3] Helgason, S., Differential geometry. Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975（译自法文）.

[A2] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1972, Chapts. 2－3.

[A3] Hochschild, G., Structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

王 杰 译 石生明 校

单参数变换群 [one-parameter transformation group; однопараметрическая группа преобразований]，流 (flow)

实数加法群 $\mathbf{R}$ 在流形 M 上的作用.

因此，流形 M 的变换的单参数族 $\{\varphi_t : t\in\mathbf{R}\}$ 是单参数变换群，如果下列条件被满足：

$$\varphi_{t+s}x=\varphi_t(\varphi_s x),\varphi_{-t}x=\varphi_t^{-1}x,t,s\in\mathbf{R},x\in M. \quad (*)$$

如果流形 M 是光滑的，那么通常假定群也是光滑的，就是，相应的映射

$$\varphi:\mathbf{R}\times M\to M,(t,x)\to\varphi_t x$$

是微分流形的可微映射.

更一般的概念是流形 M 的局部单参数变换群 (local one-parameter transformation group) 的概念. 它定义为形如 $U=\bigcup_{x\in M}(]\varepsilon_-(x),\varepsilon_+(x)[,x)$ 的某个开子流形 $U\subset\mathbf{R}\times M$ 的映射 $\varphi:U\to M$，其中，对 $x\in M,\varepsilon_+(x)>0,\varepsilon_-(x)<0$，对此 φ，等式两边有定义的所有 $t,s\in\mathbf{R},x\in M$，满足条件 $(*)$.

由 M 的每个局部光滑单参数变换群 $\{\varphi_t\}$，都可联系起向量场

$$M\ni x\to X_x=\frac{d}{dt}\varphi_t x\Big|_{t=0},$$

它称为群 $\{\varphi_t\}$ 的速度场 (velocity field) 或无穷小生成元 (infinitesimal generator). 反过来，任何一个光滑向量场 X 生成一个具有速度场 X 的局部单参数变换群 φ_t. 在 M 上的局部坐标 x^i 中，这个单参数变换群作为具有初值条件 $\varphi^i(0,x^j)=x^i$ 的常微分方程组

$$\frac{d\varphi^i(t,x^j)}{dt}=X^i(\varphi^j(t,x^k))$$

的解给出，其中 $X=\sum_i X^i\partial/\partial x^i$.

如果由向量场 X 产生的局部单参数变换群能扩张到整体的单参数变换群，则该向量场 X 称作完全的 (complete). 紧流形上的任何向量场是完全的，因此，在单参数变换群和向量场之间存在一一对应. 对于非紧流形，就不是这种情形. 甚至完全向量场的集合在加法下不是封闭的.

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971（英译本：Arnol'd, V. I., Ordinary differential equations, M. I. T., 1973）.

[2] Palais, R., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Amer. Math. Soc., 1957.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Sell, G. R., Topological dynamics and ordinary differential equations, v. Nostrand Reinhold, 1971.

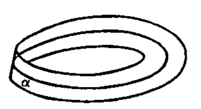
薛春华 译

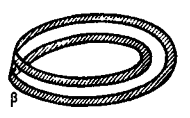
单叶双曲面 [one-sheet hyperboloid; однополостный гиперболоид]

见**双曲面** (hyperboloid).

单侧曲面与双侧曲面 (one-sided and two-sided surfaces; односторонние и двусторонние поверхности)

以不同的方式放置于外围空间中的两类曲面（单侧放置 (one-sides position) 和双侧放置 (two-sided position)）. 例如，柱面是双侧曲面，而 **Möbius 带** (Möbius strip) 是单侧曲面. 这两类曲面之间的特征区别是，柱面的边界由两条曲线组成，而 Möbius 带的边界是单独的一条曲线. 在封闭曲面中，**球面** (sphere) 和**环面** (torus) 是双侧的，而 **Klein 曲面** (Klein surface) 是单侧的. 作为双侧放置和单侧放置的例子，可以引用圆周在 Möbius 带中的嵌入. 这样，圆周 α（见图）是单侧曲线，而圆周 β 是双侧曲线（一般说来，任何无定向道路 (desorienting path) 单侧地落在曲面中）.





更确切地说，单侧曲面和双侧曲面是以不同的方式嵌入在（维数高过 1 的）外围空间中的两类流形. 双侧性和单侧性与可定向性和不可定向性（见**定向** (orientation)）有关，但是它们不是曲面的内在性质，而依赖于外围空间. 例如，存在可定向的双侧曲面：$S^2\subset S^3,T^2\subset\mathbf{R}^3$；不可定向的双侧曲面：$\mathbf{R}P^2\times 0\subset$

$\mathbf{R}P^2 \times S^1$; 可定向的单侧曲面: $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbf{R}P^2 \times S^1$; 不可定向的单侧曲面: $\mathbf{R}P^2 \subset \mathbf{R}P^3$(这里, S^2 是球面, T^2 是环面, $\mathbf{R}P^2$ 是射影平面, $\mathbf{R}P^3$ 是射影空间, S^1 是 $\mathbf{R}P^2$ 上迷失方向的路径).

在可定向空间(例如, $\mathbf{R}^n$)中一个超曲面是可定向的, 当且仅当它是双侧的.

假定一个法向量沿着浸入在某个空间中的光滑曲面上一条闭曲线移动, 并保持它是曲面的法向量. 如果不管如何选择闭曲线, 当回到出发点时法向量的指向与它原来的指向总是一致的, 则称该曲面是双侧的(two-sided); 反之, 则称它为单侧的(one-sided). 更一般地, 曲面 Π 是双侧放置的当且仅当它的**法丛**(normal bundle)是平凡的(在这个丛里存在一个非零截面). 反之, 单侧曲面的法丛是非平凡的: 在 Π 上存在一条曲线使得法丛在它上面的限制是一条 Möbius 带.

空间 N^n 中每一个(超)曲面 M^{n-1} 在局部上都把 N^n 分成两部分, 即任意一点 $x \in M^{n-1} \subset N^n$ 有一个邻域 $U \subset N$, 使得 U 由两个分支 U' 和 U'' 组成, 而 $U \cap M^{n-1}$ 属于它们的公共边界. 在另一方面, M^{n-1} 在 N^n 中的充分小邻域(如果 M 在 N 中是封闭的)或者是一个分支, 或者有两个分支, 其边界包含 M 在内. 在第一种情形, (超)曲面 M^{n-1} 也称为单侧的(one-sided), 在第二种情形, 称为双侧的(two-sided). 因而, 虽然曲面在局部上是双侧的, 但是在大范围上它可能是单侧的. 反过来, 双侧曲面未必分隔它在空间中的邻域.

对于落在 N^{n+1} 中的双侧曲面 M^n, 任意一条封闭曲线 α 与 M^n 在 N^{n+1} 中的**相交指数(同调论中的)**(intersection index (in homology)) 满足方程 $(\alpha, M^n) \equiv 0 \bmod 2$. 但是, 如果 M^n 是单侧的, 则对某条曲线 $\alpha \in N^{n+1}(\alpha, M^n) \neq 0$. 这个事实(与法向量的移动及邻域的分隔一起)也能取作单侧性和双侧性的定义.

参考文献

[1] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. E., Geometry and the imagination, Chelsea, 1952 (译自德文, 中译本: D. 希尔伯特, S. 康福森, 直观几何, 人民教育出版社, 上册, 1959; 下册, 1964).

[2] Seifert, H. and Threlfall, W., A textbook of topology, Acad. Press, 1980 (译自德文, 中译本: H. 沙爱福, W. 施雷发, 拓扑学, 人民教育出版社, 1959).

[3] Фукс, Д. Б., Фоменко, А. Т., Гутенмахер, В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969.

М. И. Войцеховский 撰　陈维桓 译

单侧导数 [one-sided derivative; односторонняя производная]

导数(derivative)概念的推广, 其中通常的极限由**单侧极限**(one-sided limit)代替. 如果对于实变量 x 的函数 f, 极限

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left[\text{或} \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

存在, 则此极限称为 f 在点 x_0 处的右(或左)导数(right (或 left) derivative). 如果两个单侧导数相等, 则函数在点 x_0 上具有通常的导数. 亦见**微分学**(differential calculus).　Г. П. Толстов 撰　张鸿林 译

单侧极限 [one-sided limit; односторонний предел]

函数在一点处的左侧或右侧**极限**(limit). 设 f 是从有序集 X(例如位于实直线上的集合)到拓扑空间 Y 中的一个映射, X 看作具有给定的序关系生成的拓扑的拓扑空间, 并设 $x_0 \in X$. f 关于任一区间 $(a, x_0) = \{x: x \in X, a < x < x_0\}$ 的极限称为 f 的左极限(limit on the left), 记作

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

(它不依赖于 $a < x_0$ 的选取); f 关于任一区间 $(x_0, b) = \{x: x \in X, x_0 < x < b\}$ 的极限称为 f 的右极限(limit on the right), 记作

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(它不依赖于 $b > x_0$ 的选取). 如果点 x_0 同时是函数 f 定义域的左极限点和右极限点, 则关于 x_0 的去心邻域的通常极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

(此时为与单侧极限相对, 也称此极限为双侧极限)存在当且仅当点 x_0 处左侧和右侧极限都存在且两者相等.　Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 也用符号 $\lim_{x \to x_0+}$, $\lim_{x \downarrow x_0}$(对应地, $\lim_{x \to x_0-}$, $\lim_{x \uparrow x_0}$)代替 $\lim_{x \to x_0+0}$(对应地, $\lim_{x \to x_0-0}$).

沈永欢 译

一一对应 [one-to-one correspondence; взаимно однозначное соответствие]

两个集合之间的一种对应关系, 满足: 1) 第一个集合中的每一个元素对应第二个集合中的唯一的一个元素; 2) 第一个集合中不同的元素对应第二个集合中不同的元素; 3) 第二个集合中的每一个元素都被第一个集合中的某一个元素所对应. 一一对应关系是对称的(即逆映射也是一个一一对应关系), 同时又是传递的(即一一对应关系的积亦是一个一一对应关系). 给定一条有向直线及其一固定点 O, 设该有向直线上的每一点 x 对应于 x 与 O 之间的距离(如果 x 在 O 的正方向上, 距离为正的; 如果 x 在 O 的反方

向上，距离为负），这样建立起来的对应即是该有向直线上的点的全体与实数全体之间的一个一一对应.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见**一一映射**(bijection).

参考文献

[A1] Enderton, H. B., Elements of set theory, Acad. Press, 1977.

王 驹 译

开闭集 [**open-closed set**; **открыто-замкнутое множество**]

拓扑空间(topological space)的子集，在该空间中既是**开集**(open set)又是**闭集**(closed set). 拓扑空间 X 不连通的充要条件是：空间含有一个开闭集，既不是 X 也不是 ϕ. 若拓扑空间所有开闭集组成的族是其拓扑结构的一个基，则该空间称为归纳零维的(inductively zero-dimensional). 任何 **Boole 代数**(**Boolean algebra**)均同构于某个适当的归纳零维 Hausdorff 紧统中所有开闭集构成的 Boole 代数. 所谓的极端不连通 Hausdorff 紧统(extremally-disconnected Hausdorff compacta)是一类特殊的零维紧统，其特征是，其中任何开集的闭包也是开(且闭)集. 任何完全的 Boole 代数均同构于某个适当的极端不连通 Hausdorff 紧统中所有开闭集组成的 Boole 代数.

В. И. Пономарев 撰

【补注】 开闭集也称为闭开集(closed-open set 或 clopen set).

Boole 代数与归纳零维 Hausdorff 紧空间之间的对应关系称为 Stone 对偶性(Stone duality)或 Stone 拓扑对偶性(Stone topological duality). 文献中有时也简单地用"零维"来代替"归纳零维".

零维 Hausdorff 紧空间称为 Boole 空间(Boolean space).

参考文献

[A1] Koppelberg, S., General theory of Boolean algebras, 1, North-Holland, 1989, Sect. 3.7.

胡师度、白苏华 译

开流形 [**open manifold**; **открытое многообразие**]

无紧分支的流形，即不是**闭流形**(closed manifold)的流形.

М. И. Войцеховский 撰 薛春华 译

开映射 [**open mapping**; **открытое отображение**]

把一个拓扑空间映入另一个拓扑空间的一种映射，使得任何开集的象也是开集.

把拓扑乘积映成其因子的投影映射是开映射. 映射的开性可以解释为其多值逆映射的一种连续性. 一一连续开映射是**同胚**(homeomorphism). 在一般拓扑学中，开映射用于空间的分类问题. 在连续开映射下拓扑不变量的性态是一个重要问题. 所有满足**第一可数公理**(first axiom of countability)的空间，并且只有这些空间，才是度量空间在连续开映射下的象. 一个**可度量化空间**(metrizable space)如果是一个完全度量空间在连续开映射下的象，则可以由完全度量来度量化. 一个**仿紧空间**(paracompact space)如果是**完全度量空间**(complete metric space)在连续开映射下的象，则该空间是可度量化的. 紧统之间的可数对一的连续开映射不使维数增大. 但是一个三维方体可以由连续开映射映成任何更高维的方体. 任何紧统都是某个一维紧统在具有零维纤维(即点的逆象)的连续开映射下的象.

一个连续开映射如果使得所有点的逆象都是紧集，则称为紧开映射(compact open mappings)，这类映射本身有其独立的意义. 具有一致基的空间，并且只有这些空间，才是度量空间在紧开映射下的逆象. 闭的连续开映射也很重要. 把紧统映入 **Hausdorff 空间**(Hausdorff space)中的所有连续开映射就属于这一范畴. 闭的连续开映射保持可度量化性质. 具有离散纤维的开映射在单复变函数论中起着重要作用，在一个区域内全纯的函数就是这样的映射. 关于全纯函数是开映射的定理对证明极大模原理以及证明关于复数域上任意非常值多项式的根的存在性的基本定理都极为重要.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 1-2, Acad. Press, 1966-1968.
[2] Келдыш, Л. В., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, 368-372.
[3] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, т. 1, М., 1962 (译自罗马尼亚文).

А. В. Архангельский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.
[A2] Whyburn, G. T., Topological analysis, Princeton Univ. Press, 1964.

白苏华、胡师度 译

开映射定理 [**open-mapping theorem**; **открытое отображение**]

将 **Banach 空间**(Banach space) X 映射成整个 Banach 空间 Y 的连续**线性算子**(linear operator) A 是**开映射**(open mapping)，即对 X 中任一开集 G，$A(G)$ 是 Y 中开集，这是 S. Banach 证明的. 此外，一个连续线性算子 A 如果表示从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上一一变换，则是**同胚**(homeomorphism)，即 A^{-1} 也是连续线性算子(Banach 同胚定理(Banach homeomorphism theorem)).

例如，定义在实(复)Banach 空间 X 而在 $\mathbf{R}(\mathbf{C})$ 中取值每一非零连续线性泛函满足开映射定理的条

件.

开映射定理可推广如下：将满完全(fully-complete、或 B 完全)**拓扑向量空间**(topological vector space) X 映射到**桶型空间**(barrelled space) Y 上的连续线性算子是开映射. **闭图象定理**(closed-graph theorem)可以认为与开映射定理是紧密相连的.

参考文献

[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980(中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981).

[2] Robertson, A. P. and Robertson, W., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

В. И. Соболев 撰

【补注】 闭图象定理的一个最近的综合的研究可在[A1]中找到.

参考文献

[A1] de Wilde, M., Closed graph theorems and webbed spaces, Pitman, 1978.

[A2] Schaeffer, H. H., Topological vector spaces, Springer, 1971.

[A3] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981(译自德文).

葛显良 译

开集[open set; открытое множество]，拓扑空间中的

该空间的拓扑(见**拓扑结构(拓扑)**(topological structure (topology)))的一个元素. 更明确地说，设拓扑空间 (X, τ) 的拓扑 τ 定义为集 X 的子集系 τ，使得 1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$; 2) 如果 $O_i \in \tau$, $i = 1, 2$, 则 $O_1 \cap O_2 \in \tau$; 3) 如果 $O_\alpha \in \tau$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, 则 $\bigcup \{O_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\} \in \tau$. 于是，空间 (X, τ) 中的开集(open set)就是拓扑 τ 的元素，并且只是这些元素.

Б. А. Пасынков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

胡师度、白苏华 译

运算对象[operand; операнд]，亦称操作数，程序设计语言中的

运算的变量；一个描述表达式的程序构造，这个表达式给出运算的变量的值. 有时，把一个运算变量所占据的位置称为运算对象. 从而，有了运算的秩(arity of an operation)，即运算的变量的个数的概念.

根据运算对象相对于运算符号的位置，可分为前缀(prefix)(例如 $\sin x$)，中缀(infix)(例如 $a+b$)和后缀(postfix)(例如 x^2)运算. 根据运算对象的个数，有一元的(one-placed, unary 或 monadic)，二元的(two-placed, binary 或 dyadic)和多元的(many-placed 或 polyadic)运算.

为区分运算对象的位置和作为实际变量的运算对象，出现了将运算对象变换或强制(coercing)为运算所需形式的概念. 例如，如果一个实变量置于整数运算对象的位置上，那么语言的规则可能蕴含某种将该实数舍入到一个适当的自然数的方法. 另一强制的例子是对象的表示形式的变更，例如一个标量转化成一个由单分量构成的向量.

А. П. Ершов 撰 曹为理 译 王继民 校

算子演算[operational calculus; операционное исчисление]

数学分析的一种方法，在很多情况下，该法有可能把对**微分算子**(differential operator)、**伪微分算子**(pseudo-differential operator)和一定类型的**积分算子**(integral operator)的研究以及包含它们的方程的解的研究化为对较简单的代数问题的探讨. 算子演算的发展和系统的应用始于 O. Heaviside 的工作(1892)，他提出了处理微分算子 d/dt 的形式规则，并且解决了许多应用问题. 然而，他没有给出算子演算的数学依据；这是借助于 **Laplace 变换**(Laplace transform)才做到的；J. Mikusiński (1953)利用函数环的概念把算子演算置于代数形式之中. 一种算子演算的最一般概念是利用**广义函数**(generalized function)得到的.

算子演算最简单的变形如下. 设 K 是给定在定义域 $0 \leqslant t < \infty$ 中且在任何有限区间绝对可积的(有实值或复值的)函数的集合. 积分

$$h = f * g = \int_0^t f(x-\tau) g(\tau) d\tau$$

称为函数 $f, g \in K$ 的卷积(convolution). 带有通常的加法运算和卷积运算，K 成为无零因子的环(Titchmarsh 定理(Titchmarsh theorem)，1924). 这环的分式域(quotient field) P 的元素称为算子(operators)且写成 a/b；在 K 中除法不一定可能这一事实恰恰是一种新概念——算子的来源，它推广了函数的概念. 在算子演算中，为了表明一个函数和它在一点上的值这两个概念之间的必要的差别，使用以下的记号：

$\{f(t)\}$ 表示一个变量 t 的函数 f;

$f(t)$ 表示 $\{f(t)\}$ 在一点 t 的值.

算子的例. 1) $e = \{1\}$ 是积分算子(integration operator):

$$\{1\}\{f\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}.$$

此外，

$$e^p = \left\{ \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} \right\},$$

而且，特别地

$$e^n \{f\} = \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt \ (n \text{ 重}) =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau.$$

这是 Cauchy 公式，它到任意（非整数）指数的推广用来定义分数次积分.

2) $[\alpha]=\{\alpha\}/\{1\}$（这里 α 是常函数）是一个数值算子（numerical operator）；就 $[\alpha][\beta]=[\alpha\beta]$, $[\alpha+\beta]=[\alpha]+[\beta]$, $[\alpha]\{f\}=\{\alpha f\}$, 而 $\{\alpha\}\{\beta\}=\{\alpha\beta t\}$ 而言，数值算子表现犹如常数. 这样，这个算子不仅是函数的推广，而且是数的推广；[1] 是环 K 中的单位元.

3) $s=[1]/e$ 是微分算子（differentiation operator），积分算子的逆，所以如果一个函数 $a(t)=\{a(t)\}$ 有导数 $a'(t)$，则

$$s\{a\}=\{a'\}+[a(0)],$$

且

$$\{a^{(n)}\}=s^n\{a\}-s^{n-1}[a(0)]-\cdots-[a^{n-1}(0)].$$

因此，例如

$$\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}.$$

当然，一个不可微函数能用微分算子 s 去乘；然而，其结果一般会是一个算子.

4) $D\{f\}=\{-tf(t)\}$ 是代数导数（algebraic derivative）. 它按通常的方法延拓到任意算子. 这表明这个算子在微分算子 s 的函数上的作用与对 s 的微分一致.

算子演算为解线性微分方程，包括常和偏两者，提供了合适的方法. 例如，解满足初始条件 $x(0)=\gamma_0, \cdots, x^{(n-1)}(0)=\gamma_{n-1}$ 的方程

$$\alpha_n x^{(n)}+\cdots+\alpha_0 x=f,\ \alpha_i=\text{常数},\ i=0,\cdots,n,$$

自动地化成一个代数方程. 它用公式符号地表示为

$$x=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_0+f}{\alpha_n s^n+\cdots+\alpha_0},$$

$$\beta_v=\alpha_{v+1}\gamma_0+\cdots+\alpha_n\gamma_{n-v-1}.$$

这个解按其通常形式是对变量 s 分解成初等分式，然后参照适当的函数表用接着产生的逆变换得到.

在算子演算对偏微分方程（也对更一般的伪微分方程）的应用中，要用到算子函数（operator functions），即具有算子值的函数的微分和积分演算. 对这些函数，必须建立连续性、导数、级数收敛性、积分等概念.

设 $f(\lambda, t)$ 是对 $t\geqslant 0$ 和 $\lambda\in[a, b]$ 定义的一个函数. 参数算子函数（parametric operator function）$f(\lambda)$ 由公式 $f(\lambda)=\{f(\lambda, t)\}$ 定义；它把一定类型的算子——t 的函数——与所考虑的 λ 的值相对应. 一个算子函数称为对 $\lambda\in[a, b]$ 连续，如果它能表示成一个算子 q 和一个参数函数 $f_1(\lambda)=\{f_1(\lambda, t)\}$ 的积，使得 $f_1(\lambda, t)$ 在通常意义下连续.

例 1) 用参数函数 $h(\lambda)=\{h(\lambda, t)\}$:

$$h(\lambda, t)=\begin{cases}0, & 对\ 0\leqslant t<\lambda,\\ t-\lambda, & 对\ 0\leqslant\lambda\leqslant t,\end{cases}$$

Heaviside 函数（Heaviside function）被定义为：

$$H(\lambda)=s\{h(\lambda, t)\}.$$

双曲指数函数（hyperbolic exponential function）的值

$$e^{-\lambda s}\equiv sH(\lambda)=s^2\{h(\lambda, t)\}$$

称为移位算子（shift operators），因为给定函数用 $e^{-\lambda s}$ 相乘需要它的图象沿 t 轴正方向位移 λ.

2) 热传导方程

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}$$

的解能用抛物指数函数（parabolic exponential function）（它也是参数算子函数）表示：

$$e^{-\lambda\sqrt{s}}=\left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left[-\frac{\lambda^2}{4t}\right]\right\}.$$

3) 周期 $2\lambda_0$ 的周期函数 $f(t)$ 有表示：

$$\{f\}=\frac{\int_0^{2\lambda_0} e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda}{1-e^{-2\lambda_0 s}}.$$

4) 如果 $f(\lambda)$ 在区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 中取数值，则

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda=\begin{cases}f(\lambda), & \lambda_1<t<\lambda_2,\\ 0, & 0\leqslant t<\lambda_1,\ t>\lambda_2,\end{cases}$$

即用 $e^{-\lambda s}$ 乘给定函数 $\{f\}$ 随后再积分使它的图象产生一个截断（truncation）. 特别地，

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda=\{f(t)\}.$$

这样，对每一个所考虑的积分是收敛的函数 $f(t)$，有一个对应的解析函数：

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,$$

即它的 Laplace 变换. 结果，一个相当广泛的算子类可用单参数 s 的函数来描述；此外，这个形式的相似性借助建立一个确定的同构可用数学术语定义得更精

确.

有各种各样的算子演算的推广；例如，除 $s=d/dt$ 以外的微分算子的算子演算，譬如 $b=d/dt(t(d/dt))$，它是建立在带有一个适当定义的积的其他函数环的基础上的.

参考文献

[1] Диткин, В. А., Прудников, А. П., Справочник по операционному исчислению, М., 1965(中译本：В. А. 季特金等著，运算微积手册，科学出版社，1958).

[2] Mikusiński, J., Operational calculus, Pergamon, 1959.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 [2] 的第二版最近已问世 ([A1], [A2]). 在以上参数算子函数 $f(\lambda)$ 的例子中，其用途是用来构造对算子的微分和积分演算. 关于算子函数 $f(\lambda)$ 截断的更多详情见 [A2]，第 V 部分第 1 章 § 5. 对 $f \in K$，形式为 $e^{-\lambda s}f$ 的一个算子等同于具有下有界支集的 Schwartz 广义函数.

Schwartz 广义函数和 Mikusiński 算子的概念互不包含，但是两者都推广了函数及其导数的概念.

术语"算子演算"也在**函数演算** (functional calculus) 意义下使用，即某个函数代数到一个算子代数中的同态. 最后，名词"算子演算" (operator calculus) 出现在本世纪 50 年代为研究量子电动力学而发展起来的时序算子演算 (time-ordered operator calculus) (Feynman-Dyson 时序算子演算 (Feynman-Dyson time-ordered operator calculus)) 的上下文中 ([A4], [A5])，且与**积积分** (product integral) 有关 ([A6]).

参考文献

[A1] Mikusiński, J., Operational calculus, I, PWN & Pergamon, 1987.

[A2] Mikusiński, J. and Boehme, Th. K., Operational calculus, II, PWN & Pergamon, 1987.

[A3] Pol, B. van der and Bremmer, H., Operational calculus based on the two-sided Laplace transform, Cambridge Univ. Press, 1959.

[A4] Feynman, R. P., An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 108 – 128.

[A5] Gill, T. L. and Zachary, W. W., Time-ordered operators and Feynman-Dyson algebras, *J. Math. Phys.*, **28** (1987), 1459 – 1470.

[A6] Dollard, J. D. and Friedman, Ch. N., Product integration, Addison-Wesley, 1979.

葛显良 译 鲁世杰 校

运筹学 [operations research; исследование операций]

构造、研制和应用为作出最优决策的数学模型. 运筹学的理论方面的内容是这样的数学问题的分析与求解：在给定的可行决策 (feasible decisions) 集 X 中，选取满足某些最优性准则的元素；它被称为这一问题的最优决策 (optimal decision). 有时选取的是 X 的"广义"元 —— X 的子集或在 X 中取值的函数 (包括在 X 中取值的随机变量). 这类问题称为最优化问题 (optimization problems). 运筹学的应用方面则由最优化问题的形成及其解的实现来组成.

在陈述一个运筹学问题时，首先要把握可行决策集 X 的形式描述与最优性准则. 这必须反映一种有关在给定条件下可能的和可期望的有丰富内容的观念. 不过，有丰富内容的观念本身对于客观现实的合理性的验证则已超出运筹学的范围. 所有决策 (包括最优决策) 都是在作决策的主体 (们) 所接受的信息的基础上作出的. 因此，运筹学中的每一个问题都必须在它的形成过程中反映作决策的主体 (们) 的有关可行决策集与最优性准则的知识. 这样，如果决策是在单个事先给定的不变化的信息状态下作出的，那么问题就称为是静态的 (static). 在这一情形下，整个决策过程可以归结为单个瞬时行动. 在另外的情形下，如果决策是在多个不同的信息状态中作出的，那么决策将是通过建立每个信息状态和在其中可行的每个决策之间的对应 (也就是选择一个表达这种对应的函数) 来作出的. 如果信息状态在作决策过程中是一个个变化的，那么问题就称为是动态的 (dynamic). 在一个动态问题中，适宜于一步一步地、"多步方式"地作出决策，甚至适宜于用随时间连续的过程来建立决策模型.

决策主体的信息状态可能用各种不同的方式来刻画它的真实 ("物理") 状态. 有可能发生的是，主体的一个信息状态包含它的物理状态的整个集合. 在这一情形下，决策问题就称为是不定的 (indefinite). 这样的运筹学问题在**对策论** (game, theory of) 中考虑. 如果一个信息状态包含几个物理状态，并且除了它们的集合外，主体还知道这些物理状态中的每一个的 (先验) 概率，那么问题就称为随机的 (stochastic). 最后，如果信息状态由单个物理状态所组成，那么问题就称为确定的 (deterministic). 有时有兴趣的是同时考虑一族依赖于在某个参数集上变化的数值或向量值的问题，并把它们统一为单个带参数 (parametric) 问题. 带参数问题不同于不定问题之处在于前者在求解时，是把所有对应具体参数值的问题都解出来，而后者在求解时，不管不定性以什么方式实际实现，它只管求出在某种适当的意义下的可行解. 此外，在求解随机问题时，所求出的最优决策是在整个个别问题集上的"平均"意义下最优的.

具有任意可行解集 X 和非常随意的最优性准则的运筹学问题在理论上是可设想的. 这些准则可以由某

个在 X 上的数值或向量函数 f 的极大化或极小化来构成．这一函数通常称为**目标函数**(objective function)．前一情形的问题称为**数学规划**(mathematical programming)(最优规划(optimal programming)，不要把它与计算机的程序(也是 programming)混淆)问题，而后一情形的问题称为向量最优化问题(problem of vector optimization)，或**多准则问题**(multi-criterion problem)．用 X 上的二项偏好关系 $\succ$ 来表达的准则也已经考虑．这一关系不一定是完全线性序的、甚至不一定是偏序的关系．

在数学规划中最经常考虑的问题是其中 X 为有限维 Euclid 空间 E^n 的子集．尤其是，如果 X 是具有有限个顶点的凸多面体，并且目标函数 f 是线性的，那么它就是**线性规划**(linear programming)问题．如果 X 是任意凸集，而 f 是凸函数，那么它就是**凸规划**(convex programming)问题．按段线性规划、**二次规划**(quadratic programming)等等问题也可自然地定义．可行决策集 X 也可以是函数空间的子集；因此，在形式上，变分学，以至有关 Понтрягин 最大值原理的一系列问题，也可以看作数学规划的一部分．在另一些情形中，X 可以是有限集；这样的问题属于**离散规划**(discrete programming)．其中的可行决策可以是 E^n 中的整数格点(整数规划(integer programming))，或其分量只取两个值的向量(Boole 规划(Boolean programming))．在个别情形中，X 的元素还可以是有限个符号间的置换，在给定的图上的路径等等．数学规划问题的特殊情形是求极大化极小(maximin)值，即，求由二变量函数关于一个变量的极小化所得到的单变量函数的最大值(类似的还有极小化极大(minimax)值)．

解随机线性规划问题的理论是**随机规划**(stochastic programming)的主题．多准则问题，以至具有偏好关系的问题按其实质与对策论有关；它们是按照其对策论性质来分类的．

运筹学中的现代(20世纪 70 年代以来)趋向之一是由考虑个别问题，向研究这类问题的系统、空间与计算转移，以及研究各种问题间的联系或一些问题向另一些有较简单的结构的问题的归结．面向与发展以解决运筹学问题为目标的数学工具通常称为运筹学数学方法．按其本性，运筹学数学方法原则上与任何其他有丰富应用的或至少有解释的数学分支的数学方法并无不同．对于各种运筹学问题及其类别的数学方法的研究深度有所不同．线性规划与凸规划理论是研究得最充分的．

运筹学的某些具有特殊的丰富内容的解释、课题与术语的带参数问题被赋以运筹学模型(models of operations research)的名称．通常，每种运筹学模型有其求解的固有方法．运筹学模型所囊括的范围是非常广阔的：由仅由它们的参数数值来区别的具体问题(属于这种情况的有指派问题、运输问题以及某些更复杂的下料问题，资源配置问题以及网络理论)，直到诸如库存控制理论，调度(有时称为计划日程表)理论或可靠性理论那样的学科分支．对策论提供了大量的运筹学模型(定时对策，Blotto 型对策，扑克型对策，微分追踪对策等等)．在排队论中的某些高级问题也被考虑为运筹学模型，虽然排队论中的大多数问题并没有最优化特征．

运筹学的每个问题的解是从最优性原理的选择开始的．如果涉及的是一个数学规划问题，那么这点是平凡的：最优性原理就由目标函数的极大化(相应的极小化)所构成．这样，在这种情形下，问题的最优性原理形式上重合于它的最优性准则．在另一些情形下，最优性原理的发现是问题求解中的本质阶段，并且可能以不同的方式来实现．把一个向量准则或偏好关系归结为数值准则的方法已经被利用．例如，在多准则问题情形下，最优性原理可以通过对向量的各个分量赋以这样那样的权重，并把加权和看作目标函数来构成；在这种问题中的另外的最优性原理，可以由向量准则的最小分量的极大化来构成(极大化极小原理)，如此等等．具有偏好关系的问题中的最优性原理可以极为不同(见例如，**对策论**(games, theory of))．用数值准则来代替偏好关系的可能性与方式构成了**效用论**(utility theory)中的基本问题之一．这样，运筹学问题的准则是它的条件的一部分，而最优性原理是它的解答的一部分．在大多数运筹学模型中，最优性原理是固定的．

经过最优性原理的选择以后，运筹学问题求解的下一步骤是证明它的可实现性(即在这一原理的意义下的问题的解的存在性)．在由问题的条件所给定的可行决策类中、最优性原理的不可实现性有时可通过引进某种意义下的广义决策来解决；这种广义决策是可行决策集的子集或在这个集中取值的函数．

因为对于运筹学问题的最优决策的存在性经常是非构造性的(例如基于某些不动点定理)，有时虽然是构造性的，但是保障它存在的真正求法仅仅是潜在的(和不实际的)，研究运筹学问题的第三步骤是求得它的最优解．

运筹学问题具有许多特点，它们是因受到形成和求解问题的方法的制约所引起的．首先，甚至对于最简单的带参数的问题类，通常也不可能把解答表达为对应参数的独特的解析表示式．因此，在大多数情形下，运筹学问题不可能解析求解，而只能数值求解．其次，大多数有实际意义的运筹学问题在它们的陈述中包含极大量的不能归结为解析表示式的数值材料；

这样，这些问题的数值解只能通过计算机来解决. 再次，在求解许多运筹学问题的过程中，都包含在极大量的数据中执行简单的单个类型的运算. 因此，运筹学问题就会提出对既有大内存、又有高运算速度的大容量计算机的需求. 运筹学的实际需求已经显示对计算机及其内存的发展的巨大影响.

运筹学的应用范围是非常广泛的. 运筹学既用在技术(并且不仅是制造，也涉及工艺)、技术经济、社会经济问题中，也用在各种环境、各种层次的控制问题中，从而正在逐渐排挤传统的“直观”决策方法.

运筹学成果的实际运用会遇到各种不同的困难. 第一层困难相对来说比较容易克服，它有关建立现实的决策问题模型的观念结构(或者选择已经有结构的模型). 这就确立了通过某类运筹学问题来对包括所考虑的问题在内的一类现实问题建模的原理上的可能性. 下一个困难是在这类运筹学问题中作选择时造成的，而正是这类问题把具体问题模型化为有意义的研究. 对于这种选择，特别是，必须测量确定所解问题的参数的值. 但是既然这些参数不一定有物理的或技术的特征，并且通常只有经济的、甚至社会经济的特征，它们的要求有一定精度的测量可以提成一个独立的问题. 这一为了建立具体模型的信息选择困难可以看作是制订最优决策的道路上的基本障碍. 再下一步，经过建模以后，经常发生的就是对它的分析与求解的包括计算在内的纯数学困难. 本质上来说，运筹学的内容也就在于克服这些困难. 最后，求得解答以后，最终的困难通常带有组织与心理特性: 所求得的解往往本质上不同于传统的解，从而被看作不可信. 所有这些限制了运筹学的实际应用. 为了更成功地克服这些困难，在运筹学领域中工作的队伍通常由交叉学科的小组所组成；除了数学家以外，通常还有工程师、经济学家、具体学科领域的专家，有时甚至还有心理学家、管理人员等等.

参考文献

[1] Morse, P. M. and Kimball, G. E., Methods of operations research, M. I. T., 1952.

[2] Saaty, T. L., Mathematical methods of operations research, McGraw-Hill, 1959.

[3] Kaufmann, A. and Faure, R., Invitation à la récherche opérationelle, Dunod, 1963.

[4] Kaufmann, A., Methods and models of operations research, Prentice-Hall, 1963(译自法文).

[5] Churchmen, W., Ackoff, R. L. and Arnoff, E. L., Introduction to operations research, Wiley, 1957.

[6] Чуев, Ю. В., Исследование операций в военном деле, М., 1970.

[7] Гермейер, Ю. Б., Введение в теорию исследования операций. М., 1971.

[8] Ackoff, R. and Sasieni, M., Fundamentals of operations research, Wiley, 1968.

[9] Вентцель, Е. С., Исследование операций, М., 1972.

[10] Wagner, H., Principles of operations research, Printice-Hall, 1975.

[11] Исследование операций, Методологические аспекты, М., 1972.

[12] Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung, Berlin, 1971.

[13] Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle, 1–3, Berlin, 1971–1973.

Н. Н. Воробьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beall, E. M. L., Introduction to optimization, Wiley, 1987.

[A2] Hillier, F. S. and Lieberman, G. J., Introduction to operations research, Holden-Day, 1967.

【译注】

参考文献

[B1] 李德、钱颂迪主编，运筹学，清华大学出版社，1982.

[B2] Moder, J. J. and Elmaghraby, S. E. ed., Handbook of Operations Research, —— Foundations and Fundamentals, van Nostrand Reinhold, 1978(中译本: J. J. 摩特、S. E. 爱尔玛拉巴主编，运筹学手册(基础和基本原理)，上海科学技术出版社，1987).

史树中 译

算子[operator; оператор]

从一个集合到另一个中的一个映射，每一个都有(用代数运算，一个拓扑，或者一个序关系定义的)一定的结构. 算子的一般定义与**映射**(mapping)或**函数**(function)的定义一致. 设 X 和 Y 是两个集合. 对一个子集 $D\subset X$ 中的每一个元素 x，指定一个唯一确定的元素 $A(x)\in Y$ 的规则或对应，称为从 X 到 Y 中的一个算子(operator). D 称为算子 A 的定义域(domain of definition)，并且用 $D(A)$ 表示；集合 $\{A(x): x\in D\}$ 称为算子 A 的值域(domain of values 或 range)，并且用 $R(A)$ 表示. 表达式 $A(x)$ 常常写成 Ax. 算子这个术语主要用在 X 和 Y 是向量空间的情形. 如果 A 是一个从 X 到 Y 中的算子，这里 $Y=X$，那么 A 称为 X 上的一个算子. 如果 $D(A)=X$，那么 A 称为一个处处定义的算子(everywhere-defined operator). 如果 A_1，A_2 分别是从 X_1 到 Y_1 中和从 X_2 到 Y_2 中以 $D(A_1)$ 和 $D(A_2)$ 为定义域的算子，使得 $D(A_1)\subset D(A_2)$ 并且 $A_1x=A_2x$(对所有的 $x\in D(A_1)$)，那么如果 $X_1=X_2$，$Y_1=Y_2$，算子 A_1 称为算子 A_2 的一个压缩(compression)或限制(restriction)，而

A_2 称为 A_1 的一个扩张（extension）；如果 $X_1 \subset X_2$，A_2 称为 A_1 超越 X_1 的一个扩张．

函数空间或抽象空间中的许多方程可以表示成这种形式 $Ax=y$，这里 $y\in Y$，$x\in X$；y 是给定的，x 是未知的，并且 A 是一个从 X 到 Y 中的算子．对任何右边 $y\in Y$，这个方程存在一个解的论断等价于算子 A 的值域是整个空间 Y 的论断；对任何 $y\in R(A)$，方程 $Ax=y$ 有唯一解的论断，意味着 A 是一个从 $D(A)$ 到 $R(A)$ 上的一对一映射．

如果 X 和 Y 是向量空间，那么在从 X 到 Y 中的所有算子的集合里可以选出**线性算子**（linear operator）类；剩下来的从 X 到 Y 的算子称为非线性算子（non-linear operators）．如果 X 和 Y 是拓扑向量空间，那么在从 X 到 Y 中的算子的集合里可以自然地选出连续算子类（见**连续算子**（continuous operator）），同样地有界线性算子（bounded linear operators）A（算子 A 使得 X 中任意有界集的象在 Y 中有界）的类和紧线性算子（亦即算子使得 X 中任一有界集的象在 Y 中是准紧的，见**紧算子**（compact operator））的类．如果 X 和 Y 是局部凸空间，那么自然要考察 X 和 Y 上不同的拓扑；一个算子称为半连续的（semi-continuous），如果它定义一个从空间 X（赋予初始拓扑）到赋予弱拓扑的空间 Y 中的连续映射（半连续性的概念主要用于非线性算子理论）；一个算子称为强连续的（strongly continuous），如果它作为从赋予有界弱拓扑的 X 到空间 Y 中的映射是连续的；一个算子称为弱连续的（weakly continuous），如果它定义一个从 X 到 Y 中的连续映射，这里 X 和 Y 有弱拓扑．紧算子常常称为完全连续算子（completely-continuous operators）．有时候"完全连续算子"这个术语用来代替"强连续算子"，或者表示一个算子它把任一弱收敛序列映成一个强收敛序列；如果 X 和 Y 是自反 Banach 空间，那么这些条件等价于算子的紧性．如果一个算子是强连续的，那么它是弱连续的．

由关系

$$\Gamma(A)=\{\{x,Ax\}:x\in D(A)\}$$

定义的集合 $\Gamma(A)\subset X\times Y$ 称为算子 A 的图象（graph of the operator）．

设 X 和 Y 是拓扑向量空间；从 X 到 Y 中的一个算子称为**闭算子**（closed operator），如果它的图象是闭的．闭算子的概念在有稠密定义域的线性算子的情形特别有用．

图象的概念使我们得以推广算子的概念：$X\times Y$ 中的任一子集 A 称为从 X 到 Y 中的一个多值算子（multi-valued operator）；如果 X 和 Y 是向量空间，那么 $X\times Y$ 中的一个线性子空间称为一个多值线性算子；集合

$$D(A)=\{x\in X:\ \text{存在一个}\ y\in Y,\text{使得}\ \{x,y\}\in A\}$$

称为这个多值算子的定义域．

如果 X 是一个域 k 上的向量空间并且 $Y=k$，那么一个处处定义的从 X 到 k 中的算子称为 X 上的一个**泛函**（functional）．

如果 X 和 Y 是局部凸空间，那么一个从 X 到 Y 中在 X 中具有稠密定义域的算子 A，有在 Y^*（赋予弱拓扑）中具有稠密定义域的**伴随算子**（adjoint operator）A^*，当且仅当 A 是一个闭算子．

算子的例子：1）对任一元素 $x\in X$ 指定元素 $0\in Y$ 的算子（零算子（zero operator））．

2）把每一个元素 $x\in X$ 映成同一个元素 $x\in X$ 的算子（X 上的恒等算子（identity operator），写成 id_X 或 1_X）．

3）设 X 是一个集合 M 上的函数的空间，并且设 f 是 M 上的一个函数；X 上以

$$D(A)=\{\varphi\in X:f\varphi\in X\}$$

为定义域，并且按照规则

$$A\varphi=f\varphi,$$

（如果 $\varphi\in D(A)$）作用的算子称为乘以一个函数的乘法算子（operator of multiplication）；A 是线性算子．

4）设 X 是集合 M 上的函数的向量空间，并设 F 是从集合 M 到其自身中的一个映射；X 上以

$$D(A)=\{\varphi\in X:\ \varphi\circ F\in X\}$$

为定义域，并且按照规则

$$A\varphi=\varphi\circ F$$

（如果 $\varphi\in D(A)$）作用的算子是一个线性算子．

5）设 X,Y 分别是两个测度空间 (M,Σ_M,μ) 和 (N,Σ_N,ν) 上的实可测函数的向量空间，并且设 K 是 $M\times N\times\mathbf{R}$ 上的一个函数，关于乘积测度 $\mu\times\nu\times\mu_0$ 可测，其中 μ_0 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度，并且对任意固定的 $m\in M$，$n\in N$ 关于 $t\in\mathbf{R}$ 连续．从 X 到 Y 中以 $D(A)=\{\varphi\in X:f(x)=\int_M K(x,y,\varphi(y))\,dy\}$ 为定义域，这里积分对几乎所有的 $x\in N$ 存在并且 $f\in Y$，按照规则 $A\varphi=f$，如果 $\varphi\in D(A)$ 作用的算子，称为积分算子（integral operator）；如果

$$K(x,y,z)=K(x,y)z,\ x\in M,\ y\in N,\ z\in\mathbf{R},$$

那么 A 是一个线性算子．

6）设 X 是微分流形 M 上的函数的一个向量空间，设 ξ 是 M 上的一个向量场；X 上以

$$D(A)=\{f\in X:\text{函数}\ f\ \text{沿场}\ \xi\ \text{的导数}\ D_\xi f\ \text{处处有定义并且}\ D_\xi f\in X\}$$

为定义域，并且按照规则 $Af=D_\xi f$（如果 $f\in D(A)$）作用的算子 A 称为微分算子(differentiation operator)；A 是一个线性算子.

7）设 X 是集合 M 上的函数的一个向量空间；对一个函数 $\varphi\in X$ 指定这个函数在一点 $a\in M$ 的值的处处定义的算子是 X 上的一个线性泛函；它称为在点 a 的 δ 函数(δ-function)并且写成 δ_a.

8）设 G 是一个交换局部紧群，$\hat{G}$ 是群 G 的特征标群，dg，$d\hat{g}$ 分别是 G 和 $\hat{G}$ 上的 Haar 测度，并且设

$$X=L_2(G,dg),\ Y=L_2(\hat{G},d\hat{g}).$$

对一个函数 $f\in X$ 指定由公式

$$\hat{f}(\hat{g})=\int f(g)\hat{g}(g)\,dg$$

定义的函数 $\hat{f}\in Y$ 的从 X 到 Y 中的线性算子是处处定义的，如果这个积分的收敛理解为均方收敛.

如果 X 和 Y 是拓扑向量空间，那么例 1) 和 2) 中的算子是连续的；如果在例 3) 中空间 X 是 $L_2(M,\Sigma_M\ \mu)$，其中 μ 是 X 上的测度，那么乘以一个有界可测函数的乘法算子是闭的并且有一个稠密定义域；如果在例 5) 中空间 $X=Y$ 是 Hilbert 空间 $L_2(M,\Sigma_M,\mu)$，并且 $K(x,y,z)=K(x,y)z$，其中 $K(x,y)$ 属于 $L_2(M\times M,\Sigma_M\times\Sigma_M,\mu\times\mu)$，那么 A 是紧的；如果在例 8) 中空间 X 和 Y 看作 Hilbert 空间，那么 A 是连续的.

如果 A 是从 X 到 Y 中的一个算子，使得当 $x\neq y$，$x,y\in D(A)$ 时 $Ax\neq Ay$，那么可以定义 A 的逆算子 A^{-1}；逆算子的存在性和它的性质的问题与方程 $Ax=f$ 的解的存在和唯一性的定理有关；如果 A^{-1} 存在，那么当 $f\in R(A)$ 时 $x=A^{-1}f$.

对向量空间上的算子可以定义和、数乘和算子乘积.如果 A,B 是分别以 $D(A)$ 和 $D(B)$ 为定义域从 X 到 Y 中的算子，那么写成 $A+B$，以

$$D(A+B)=D(A)\cap D(B)$$

为定义域，并且按照规则

$$(A+B)x=Ax+Bx$$

（如果 $x\in D(A+B)$）作用的算子称为算子 A 与 B 的和(sum of operators).

写成 λA，以

$$D(\lambda A)=D(A)$$

为定义域，并且按照规则

$$(\lambda A)x=\lambda(Ax)$$

（如果 $x\in D(\lambda A)$）作用的算子称为算子 A 与数 λ 的积(product).算子积(operator product)按映射的复合定义：如果 A 是从 X 到 Y 中的算子并且 B 是从 Y 到 Z 中的算子，那么算子 BA，以

$$D(BA)=\{x\in X:\ x\in D(A)\text{并且 }Ax\in D(B)\}$$

为定义域，并且按照规则

$$(BA)x=B(Ax)$$

（如果 $x\in D(BA)$）作用，称为 B 和 A 的乘积.

如果 P 是 X 上一个处处定义的算子使得 $PP=P$，那么 P 称为 X 中的投影算子(projection operator)或投射(projector)；如果 I 是一个 X 上处处定义的算子使得 $I\circ I=\mathrm{id}_X$，那么 I 称为 X 中的一个对合(involution).

作为特别是动力系统理论、群和代数的表示的一个基本工具，以及数学物理和量子力学中的最重要的数学工具，算子的理论组成了线性和非线性泛函分析最重要的部分.

参考文献

[1] Люстерник，Л.А.，Соболев，В.И.，Элементы функционального анализа，2 изд.，М.，1965（中译本：Л.А.列斯铁尔尼克，В.И.索伯列夫，泛函分析概要，科学出版社，1985）.

[2] Колмогоров，А.Н.，Фомин，С.В.，Элементы теории функций и функционального анализа，5 изд.，М.，1981（中译本：А.Н.柯尔莫果洛夫，С.В.佛明，函数论与泛函分析初步，上、下册，高等教育出版社，1992）.

[3] Канторович，Л.В.，Акилов，Г.И.，функциональный анализ，2 изд.，М.，1977（中译本：Л.В.Канторович，Г.П.Акилов，泛函分析，高等教育出版社，1982）.

[4] Dunford，N. and Schwartz，J.T.，Linear operators，1－3，Interscience，1958.

[5] Edwards，R.E.，Functional analysis，Holt，Rinehart & Winston，1965.

[6] Yoshida，K.，Functional analysis，Springer，1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）.

М.А. Наймарк，А.И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kato，T.，Perturbation theory for linear operators，Springer，1976.

[A2] Taylor，A.E.，and Lay，D.C.，Introduction to functional analysis，Wiley，1980.

[A3] Riesz，F. and Szökefalvi-Nagy，B.，Functional analysis，F. Ungar，1955（译自法文）（中译本：F.黎茨，B.塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963；第二卷，1980）.

[A4] Rudin，W.，Functional analysis，McGraw-Hill，1973（中译本：W.Rudin，泛函分析，湖北教育出版社，1989）.

[A5] Gohberg，I. and Goldberg，S.，Basic operator theory，Birkhäuser，1981）.

鲁世杰 译 葛显良 校

算子遍历定理 [**operator ergodic theorem**; **операторная эргодическая теорема**]

关于作用在 Banach 空间(或者甚至是拓扑向量空间，见[5])E上的**线性算子**(linear operator) A 的幂 $\{A^n\}$、或者作用在 E 上的线性算子的**单参数半群**(one-parameter semi-group) $\{A_t\}$ 在无限延长的"时间区间" $n=0,\cdots,N$，或者 $0\leqslant t\leqslant T$ 上平均的极限的定理的一般名称(也见**遍历定理**(ergodic theorem)．在后一种情形下也可以考虑在无限缩短的时间区间上平均的极限(局部遍历定理(local ergodic theorems)，见[5],[6]；也可说"在零的遍历性"，见[1])．平均可以在各种意义下理解，就像在级数的求和理论中一样．最常用的平均是 Cesàro 平均值(Cesàro means)

$$\overline{A_N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}A^n$$

或

$$\overline{A_T}=\frac{1}{T}\int_0^T A_t\,dt$$

以及 Abel 平均值(Abel means)([1])，

$$\overline{A_\theta}=(1-\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n A^n,\ |\theta|<1,$$

或

$$\overline{A_\lambda}=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}A_t\,dt.$$

遍历定理的条件自动地保证这些无穷级数或积分的收敛；在这些条件下，虽然 Abel 平均是用所有的 A^n 或 A_t 作出的，但是 A^n 或 A_t 在一个当 $\theta\to 1$(或 $\lambda\to 0$)时无限增长的有限时间周期中的值起主要作用．平均的极限($\lim_{N\to\infty}\overline{A_N}$，等等)可以按各种意义理解：按强或弱**算子拓扑**(operator topology)(统计遍历定理(statistical ergodic theorems)，即 **von Neumann 遍历定理**(von Neumann ergodic theorem)——历史上第一个算子遍历定理——和它的推广)，按一致算子拓扑(一致遍历定理(uniform ergodic theorems，见[1],[2],[3])，而如果 E 是一个测度空间上的函数空间，那么也在平均 $\overline{A_N}\varphi$ 几乎处处收敛的意义下，等等，其中 $\varphi\in E$(个别遍历定理(individual ergodic theorems)，即 **Birkhoff 遍历定理**(Birkhoff ergodic theorem)和它的推广；例如，见 **Ornstein-Chacon 遍历定理**(Ornstein-Chacon ergodic theorem)；然而这些并不总称为算子遍历定理)．比较上面提到的各种各样的算子遍历定理的效力，就能从一种意义下极限的存在性得到另一种意义下的极限存在([1])．有些定理不讲平均的极限，而是两个平均比的极限(即 Ornstein-Chacon 定理)．

也有关于 n 参数和更一般半群的算子遍历定理．

参考文献

[1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957(中译本：E．希尔，R．S．菲列普斯，泛函分析和半群，上海科技出版社，1964)．

[2] Dunford, N. and Schwartz, J.T., Linear operatos, 1. General theory, Wiley, 1958.

[3] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probabilities, Holden-Day, 1965(译自法文)．

[4] Вершик, А. М., Юзвинский, С. А., в кн., Итоги наука, в. 15–Математический анализ, 1967. М., 1969, 133–187.

[5] Каток, А. Б., Синай, Я. Г., Степин, А. М., в кн., Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, М., **13**(1975), 129–262.

[6] Krengel, U., Recent progress in ergodic theorems, *Astérisque*, **50**(1977), 151–192.

[7] Krengel, U., Ergodic theorems, de Gruyter, 1985.

Д. В. Аносов 撰 鲁世杰 译 葛显良 校

算子群 [**operator group**; **операторная группа**]

1)由算子构成的群，**Banach 空间**(Banach space) E 上**算子**(operator)的一个单参数群，即一族有界线性算子 U_t，$-\infty<t<\infty$，满足 $U_0=I$，$U_{s+t}=U_s\cdot U_t$ 且 U_t(在一致强或弱拓扑下)连续地依赖于 t．如果 E 是 **Hilbert 空间**(Hilbert space)而 $\|U_t\|$ 一致有界，则群 $\{U_t\}$ 相似于一个酉算子的群(Sz.-Nagy 定理(Sz.-Nagy theorem)，亦见**酉算子**(unitary operator))．

参考文献

[1] Szökevalfi-Nagy, B., On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **11** (1947), 152 – 157.

[2] Hille, E. and Philips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1948.

В. И. Ломоносов 撰

2)带算子的群(group with operators)，带算子域 Σ 的群(group with a domain of operators)，这里 Σ 是一个符号集合，是一个群 G，满足对于每个元素 $a\in G$ 和 $\sigma\in\Sigma$，存在一个相应的元素 $a\sigma\in G$，使得对任意 $a,b\in G$ 有 $(ab)\sigma=a\sigma\cdot b\sigma$．设 G 和 G' 是具有同一算子域 Σ 的群，G 到 G' 上的同构(同态)映射 φ 称为一个算子同构(operator isomorphism)(算子同态(operator homomorphism))，如果对于任意 $a\in G$，$\sigma\in\Sigma$ 有 $(a\sigma)\varphi=(a\varphi)\sigma$．带算子域 Σ 的群 G 的子群(正规子群) H 称为容许子群(admissible subgroup)(容许正规子群(admissible normal subgroup))，如果对于任意 $\sigma\in\Sigma$ 有 $H\sigma\subseteq H$．包含 G 的子集 M 的所有容许子群之交称为由集合 M 生成的容许子群．除去本身和平凡子群之外没有容许正规子群的群称为(关于给定的算子域的)单群(simple group)．算子群模掉一个容许正规子群所得到的商群是一个带相同算子域的群．

群 G 称为带算子半群 Σ 的群(group with a semi-

group of operators)、如果 G 是一个带算子域 Σ 的群，Σ 为半群而对于任意 $a \in G$，σ，$\tau \in \Sigma$ 有 $a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau$. 如果 Σ 是一个带单位元 ε 的半群，则假定对任意 $a \in G$ 有 $a\varepsilon = a$. 每个带任意算子域 Σ_0 的群都是带算子半群 Σ 的群，其中 Σ 是由集合 Σ_0 生成的自由半群. 设算子半群 Σ 具有单位元，F 为带算子半群 Σ 的群. 如果 F 可由一族元素 X 生成，且形如 $x\alpha$, $x \in X$, $\alpha \in \Sigma$ 的元素构成 F(作为不带算子的群)的一组自由生成元，那么就称 F 是 Σ 自由的(Σ-free). 设 F 为一 Γ 自由群(Γ 是一个算子群)，Δ 为 Γ 的一个子群; 设 $f \in F$，$A_{f,\Delta}$ 为 F 中由所有形如 $f^{-1}(f\alpha)$, $\alpha \in \Delta$ 的元素生成的容许子群. 那么，F 的每个容许子群都是形如 $A_{f,\Delta}$ 的群与一个 Γ 自由群的算子自由积(见[2]). 如果 Σ 是一个算子的自由半群，则当 $a \neq 1$ 时，Σ 自由群 F 中由元素 a 生成的容许子群本身是一个 Σ 自由群，并以 a 为自由生成元(亦见[3]).

带算子结合环 K 的 Abel 群就是一个 K **模**(module).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967, §16 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 上、下, 高等教育出版社, 1987, 1982).

[2] Завало, С. Т., 《Матем. сб.》, **33** (1953), 399–432.

[3] Завало, С. Т., 《Укр. матем. ж.》, **16** (1964), 5, 593–602; 6, 730–751.

А. П. Мишина 撰

【译注】

参考文献

[B1] 徐明曜, 有限群导引, 上册, 科学出版社, 1987.

王 杰 译 石生明 校

算子同态 [operator homomorphism; операторный гомоморфизм]

代数系统(algebraic system)的一种**同态**(homomorphism)，它与作用在这些系统上某给定算子集合的每个算子可交换，亦即算子群的同态，算子环的同态，等等.

陈公宁 译

算子不可约表示 [operator-irreducible representation; операторно неприводимое представление]

群(代数，环，半群) X 在(拓扑)向量空间 E 上的一个表示 π，使得 E 上任意一个与每个算子 $\pi(x)$，$(x \in X)$ 变换的(连续)线性算子都是 E 上恒等算子的标量倍. 若 π 是一个完全不可约表示(特别地，若 π 是一有限维不可约表示)，则 π 是一算子不可约表示; 其逆不总为真. 若 π 是一群的一**酉表示**(unitary representation)或一对称代数的对称表示，那么 π 是一个算子不可约表示，当且仅当 π 是一个**不可约表示**(irreducible representation).

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 5. Integral geometry and representation theory, Acad. Press., 1966, p.149 ff (译自俄文).

[A2] Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976, 114 (译自俄文).

郭元春 译 牛凤文 校

算子环 [operator ring; оператора кольцо]

【补注】 1) 某向量空间上线性算子组成的环. "算子环"在某些情况下也表示 **von Neumann 代数**(von Neumann algebra)或 **W^* 代数**(W^*-algebra).

2) **算子环**(ring with operators).

郭元春 译 牛凤文 校

算子拓扑 [operator topology; операторная топология]

从一个**拓扑向量空间**(topological vector space) E 到另一拓扑向量空间 F 中的连续线性映射的空间 $L(E, F)$ 上的拓扑，使空间 $L(E, F)$ 成为拓扑向量空间. 设 F 是**局部凸空间**(locally convex space)且设 $\mathfrak{S}$ 是 E 的一个有界子集族，使得这族中集合之并的线性包在 E 中是稠的. 设 $\mathfrak{V}$ 是 F 中零点的邻域基. 当 S 遍及 $\mathfrak{S}$ 而 V 遍及 $\mathfrak{V}$ 时，集族

$$M(S, V) = \{f: f \in L(E, F), f(s) \subset V\}$$

是关于平移不变的唯一的拓扑的零点的邻域基，它是一个算子拓扑，使空间 $L(E, F)$ 成为局部凸空间、这个拓扑称为 $L(E, F)$ 上的 $\mathfrak{S}$ 拓扑.

例. Ⅰ) 设 E, F 是局部凸空间. 1) 设 $\mathfrak{S}$ 是 E 中所有有限子集的集族，则相应的 $\mathfrak{S}$ 拓扑($L(E, F)$ 上)称为简单(或逐点)收敛拓扑(topology of simple (pointwise) convergence). 2) 设 $\mathfrak{S}$ 是 E 中所有凸、平衡、紧子集的集族，则相应的拓扑称为凸平衡紧收敛拓扑(topology of convex balanced compact convergence). 3) 设 $\mathfrak{S}$ 是 E 中所有准紧子集的集族; 则相应的 $\mathfrak{S}$ 拓扑称为准紧收敛拓扑(topology of precompact convergence). 4) 设 $\mathfrak{S}$ 是所有有界子集的集族，则相应的拓扑称为有界收敛拓扑(topology of bounded convergence).

Ⅱ) 如果 E, F 是 Banach 空间，同时在弱或强(范数)拓扑下考虑，则相应的空间 $L(E, F)$ 代数上是重合的; 相对应的简单收敛拓扑称为 $L(E, F)$ 上的弱或强算子拓扑(weak or strong operator topologies). 强算子拓扑强于弱算子拓扑; 两者都是与 $L(E, F)$ 和 $L(E, F)$ 上形如 $f(A) = \sum \varphi_i(A\xi_i)$ $(\xi_i \in E, \varphi_i \in F^*, A \in L(E, F))$ 的泛函的空间之间的对偶性相容的.

Ⅲ) 设 E, F 是 Hilbert 空间，且 $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ 分别是 Hilbert 空间 E_n, F_n 的可数直和，这里 $E_n = E$, $F_n =$

F、对所有整数 n；设 ψ 是空间 $L(E, F)$ 到 $L(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ 中的嵌入，由以下条件定义：对任一算子 $A \in L(E, F)$，算子 $\psi(A)$ 限制到子空间 E_n 上把 E_n 映入 F_n 中且在 E_n 上与算子 A 重合．这时 $L(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ 上弱（强）算子拓扑在 $L(E, F)$ 中的完全原象称为 $L(E, F)$ 上超弱（相应地，超强）算子拓扑（ultra-weak（ultra-strong）operator topology）．超弱（超强）拓扑强于弱（强）算子拓扑．Hilbert 空间 E 上所有有界线性算子的代数 $L(E)$ 中包含单位算子的对称子代数 $\mathfrak{A}$ 与 $L(E)$ 中满足条件：凡与 $\mathfrak{A}$ 中所有算子可交换则必与 $L(E)$ 中所有算子可交换的所有算子的集合重合，当且仅当 $\mathfrak{A}$ 在弱（或强，或超弱，或超强）算子拓扑中是闭的，即 $\mathfrak{A}$ 是 **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）．

参考文献

[1] Schaefer, H. H., Topological vector space, Springer, 1971.

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, Wiley, 1988.

[3] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968（英译本：Naĭmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984）.

[4] Sakai, S., C^*-algebras and W^*-algebras, Springer, 1971.

А. И. Штерн 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

最优控制 [optimal control; оптимальное управление]

非经典变分的最优控制问题（problem of optimal control）的一个解（见**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of）．在典型情况下，一个最优控制给出关于给定泛函沿着一个依赖于参数（控制，输入）的常微分方程的轨道的极值问题的解（在用此问题的提法所规定的补充约束存在的条件下）．这里依赖于所考虑的控制的类，一个最优控制能够取这系统的时间函数（function of time）（在**最优规划控制**（optimal programming control）问题中）或系统的时间和现状（位置）的函数（function of time and current state）（在**最优综合控制**（optimal synthesis control）问题中）的形式．

在更复杂或更专门的问题中，一个最优控制可以取广义控制（generalized control）的形式：取值在测度集合中的时间的函数，轨道线段的泛函或相空间中某集合的泛函，偏微分方程的边界条件，多值映射，数学规划的非稳定问题的极值元素的序列，等等．

А. Б. Куржанский 撰

【补注】 关于其他术语和参考文献见**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of）．

葛显良 译 鲁世杰 校

最优控制的数学理论 [optimal control, mathematical theory of; оптимального управления математическая теория]

数学的一部分，研究在预先指定的意义下如何选择最佳方式去实现受控动态过程的问题，包括问题的形成和解决两个方面．这样的动态过程（dynamical process）通常可以用依赖于称为控制（control）的输入函数或参量的微分方程、泛函方程和有限差分方程（或其他可能涉及到随机方面的形式化的演化关系）来描述，并且常常受到约束条件的支配．一般说来，所求的控制以及过程本身的实现必须根据问题提法中所指定的某些约束去选择．

在较特定的意义下，术语"最优控制的数学理论"往往是指研究最优控制的非经典的变分问题（通常带有微分约束）求解的数学理论，它允许考虑非光滑泛函以及对控制参量或其他相关变量的任意约束（通常所研究的约束由非严格不等式给出）．术语"最优控制的数学理论"有时赋予一种更广的含义，包括研究如下问题的数学方法的理论：它们的解含有任意统计的和动态的优化过程，而且允许把相应的模型解释为用于寻求最优解的某种应用程序．基于这样的解释，最优控制的数学理论包括**运筹学**（operations research）；**数学规划**（mathematical programming）和**对策论**（games, theory of）．

最优控制的数学理论中研究的问题出自实际需要，尤其是在空间飞行动力学和**自动控制理论**（automatic control theory）（亦见**变分学**（variational calculus））方面．这些问题的形成和解决，例如，在常微分方程理论中，无论在解的概念的推广还是在基于适当存在性条件的结论的推广方面，都提出了如同在研究受控微分系统轨线的动态性质和极值性质中那样新的问题．特别地，最优控制的数学理论刺激了**微分包含**（differential inclusion）性质的研究．因此，最优控制的数学理论中相应的研究方向常常被看成常微分方程理论的一部分．最优控制的数学理论包括受控运动的数学基础，这是在一般力学中研究如何建立能控的机械运动的规律和有关数学问题的一个新的领域．最优控制的数学理论在方法上和应用上都与分析力学，尤其是与**经典力学的变分原理**（variational principles of classical mechanics）有关的领域密切相关．

尽管最优控制的具体问题和非经典的变分问题早就出现过，但直到 1956－1961 期间才奠定最优控制的一般的数学理论基础．这一理论的关键是由 Л. С. Понтрягин 在 1956 年建立的 **Понтрягин 最大值原理**（Pontryagin maximum principle），见 [1]．创立最优控制的数学理论的主要的激励因素是：**动态规划**（dynamic programming）方法的发现，泛函分析在最优系统理论中作用的阐明，最优控制问题的解和 **Ляпунов 稳定性**（Lya-

punov stability)结果之间关系的发现，以及有关动态系统的可控性和可观测性概念的著作的出现等(见[2]-[5])．在随后的几年中，建立了动态系统的随机控制和随机滤波理论，产生了求解非经典变分问题的一般方法，最优控制的数学理论的基本命题被推广到更复杂的动态系统类，并且研究了与经典变分法之间的关系(见[6]-[11])．尤其是在动力学中的对策问题(见**微分对策**(differential games))，带有不完全或不确切信息的系统，带分布参数的系统，流形上方程等等的研究中，最优控制的数学理论正在迅猛发展．

在解决有关现代技术各领域的控制过程的建立，经济动力学的研究，以及生物学、医学、生态学、人口学等等许多问题中，最优控制的数学理论结果找到了广泛的应用．

最优控制问题(problem of optimal control)可以用一般的术语描述如下：

1) 给定一个能控制的系统 S，其在 t 时刻的位置用 x 值表示(例如，一个力学系统的广义坐标和冲量组成的向量；一个分布系统的空间坐标的函数；刻画一个随机系统现时状态特性的概率分布，或者经济动态模型中产量输出的向量，等等)．假定可以有许多控制 u 作用到系统 S 上影响系统的动力学．控制的形式可以是机械力，热或电位势，投资规划等．

2) 给定一个把描述系统动力学的变量 x，u，t 联系起来的方程．指定一个考虑方程的时刻．在典型情形下，人们考虑如下形式的常微分方程：

$$\dot{x}=f(t,x,u),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^p,\quad (1)$$

这里函数 f 具有预定的性质(通常要求按 t，x，u 连续，而按 x 连续可微)．

3) 能够得到用以构造控制的信息(例如，在任何时刻或者在预先指定的时刻，能够量测到系统(1)的相位坐标或者这些坐标的函数的值)．指定一类可以考虑描述控制的函数类：形式为 $u(t)$ 的分段连续的函数集，形式为 $u=u(t,x)=P'(t)x$ 具有连续系数且按 x 线性的函数集，等等．

4) 对要实现的过程加上约束条件．这方面特别要考虑到确定控制目的的条件(例如，对于系统(1)，命中相空间 $\mathbf{R}^n$ 中一给定点或一给定集合，要求解稳定在一给定运动附近，等等)．此外，约束也可加在控制 u 的值或位置 x 的坐标上，加在这些变量的函数上、加在它们的实现的泛函上，等等．例如，在系统(1)中，可以对控制参量加约束：

$$u\in U\subseteq\mathbf{R}^p \text{或者} \varphi(u)\leqslant 0,\ \varphi:\ \mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^k,\quad (2)$$

而对坐标加约束：

$$x\in X\subseteq\mathbf{R}^n \text{或者} \psi(x)\leqslant 0,\ \psi:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^l,\quad (3)$$

这里 U，X 为闭集，而 φ、ψ 为可微函数．还可以研究更复杂的情形：集合 U 依赖于 t、x、或者给定形式为 $g(t,x,u)\leqslant 0$ 的不等式(混合约束情形)，等等．

5) 对所研究的过程的品质给出一个指标(判据)．指标可以取所考察的时间区间上变量 x，u 的泛函形式 $J(x(\cdot),u(\cdot))$．条件 1)-4)现在又附加上过程优化的要求：使指标 $J(x(\cdot),u(\cdot))$ 达到极小，极大，极小极大，等等．

这样，对于给定的系统，必须在给定的控制类中选出一个控制使得指标 $J(x(\cdot),u(\cdot))$ 达到最优(在达到控制目的并且满足所加约束的条件下)．作为这一最优控制问题解的函数(例如，形式 $u=u(t)$ 或者 $u=u(t,x)$，等等)称为最优控制(optimal control)．(关于最优控制问题的典型叙述的一个例子，见 **Понтрягин 最大值原理**(Pontryagin maximum principle)．)

在由最优控制的数学理论问题所研究的动力学对象中，通常区分无穷维对象和有穷维对象，这取决于描述对象的相应微分方程系统的相空间的维数，或者加于相变量的约束形式．

最优程序控制(optimal programming control)和**最优综合控制**(optimal synthesis control)之间的区别在于，前者的控制 u 取时间函数的形式；而后者的控制则根据反馈原理作为过程当前参量的允许值的函数取控制策略的形式．最优随机控制问题属于第二种类型．

最优控制的数学理论涉及解的存在性，极值(控制的最优性)必要条件的推导，充分条件的研究，以及数值方法的建立．还要研究程序控制和综合控制类中所得到的最优控制的数学理论问题的解之间的关系．

上面叙述的最优控制问题的各种提法都假定过程存在一个正确的数学模型，并且可用基于相应系统的完全的先验信息，甚至是完全的当前信息算出．然而，在实际应用中，有关系统的可得到的信息(例如，关于初始和终端条件的信息，关于相应方程中的系数，关于允许量测坐标的附加参量的取值，等等)往往都是不充分的，以致无法直接应用上面的理论．这就导致去研究由其他信息术语表达的问题的最优控制．最优控制的数学理论的一大部分内容就是致力于研究不充分量的描述有统计特性时的问题，即所谓随机最优控制(stochastic optimal control)理论．如果这种不充分量没有任何统计信息，而仅仅给出可能变化的范围，则相应的问题是在具不确定性条件下的最优控制(optimal control under conditions of uncertainty)理论的框架范围内进行研究．然后使用极小极大和对策论的方法来解决这样的问题．最优随机控制和不确定性条件下的最优控制问题在最优综合控制领域尤其有意义．

尽管可控系统的形式化叙述可以采取非常抽象的形式（见[11]），然而最简单的分类办法仍然可以把它们分成连续时间系统(continuous-time systems)（例如，由常或偏微分方程，带漂移变量的方程，Banach空间中的方程，以及微分包含，积分和微分方程等等描述的系统)和由递归差分方程描述的多级（离散）系统(multi-stage (discrete) systems)，后者仅在一些孤立（离散）时刻对系统进行研究．

离散控制系统，除了其自身的兴趣外，作为连续系统的有限差分模型也有重要意义．在求解最优控制问题中，这对于建立数值方法是很重要的（见[12]，[13]），尤其是在初值问题（从其自身的状态出发）容易受到离散化的影响的情形．前面所叙述的一些基本的提法也适用于离散系统．尽管这种研究在泛函理论方面的证明在这里较简单明了，但关于连续系统的最优控制理论的基本事实及其紧凑的表达形式，在移植到离散系统时会遇到特有的困难，并且不一定总是可行的（见[14]，[15]）．

对于具有凸函数约束的最优线性离散控制系统的理论已经用一种相当圆满的方式做了讨论（见[15]）．它与线性规划和凸规划方法（尤其是相应的“动态”或“非定常”的规划方法，见[16]）紧密相关．在这一理论中，重要的是把离散动态系统的优化归结为实现一个适当的数值离散算法．

连续系统最优控制问题的解用离散解逼近的问题，以及与病态问题的正则化密切相关的问题，则形成最优控制的数学理论中的另一类问题（见[17]）．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976(英译本: Pontryagin, L. S., Boltyanskiĭ, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mischchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1967).

[2] Bellman, R., Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957.

[3] Красовский, Н. Н., Теория управления движением, М., 1968.

[4] Красовский, Н. Н., Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, 179 – 244.

[5] Калман, Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, 521 – 547.

[6] Fleming, W. H. and Rishel, R., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[7] Алексеев, В. М., Тихомиров, В. М., Фомин, С. В., Оптимальное управление, М., 1979 (英译本: Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M. and Fomin, S. V., Optimal control, Consultants Bureau, 1987).

[8] Varga, J., Optimal control of differential and functional equations, Acad. Press, 1972.

[9] Hestenes, M., Calculus of variations and optimal control theory, Wiley, 1966.

[10] Young, L., Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Saunders, 1969.

[11] Kalman, R., Falb, P. and Arbib, M., Topics in mathematical systems theory, McGraw-Hill, 1969.

[12] Моисеев, Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.

[13] Черноусько, Ф. Л., Колмановский, В. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 14, М., 1977, 101 – 166.

[14] Болтянский, В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973 (英译本: Boltyanskiĭ, V. G., Optimal control of discrete systems, Wiley, 1978).

[15] Canon, M. D., Cullum, C. D. and Polak, E., Theory of optimal control and mathematical programming, McGraw-Hill, 1970.

[16] Пропой, А. И., Элементы теории оптимальных дискретных процессов, М., 1973.

[17] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979 (英译本: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya., Solutions of ill-posed problems, Winston, 1977).

А. Б. Куржанский 撰

【补注】 在西方文献中，(最优)程序控制通常称为(最优)开环控制，而(最优)综合控制通常称为(最优)反馈或闭环控制．

有关本条目的早期的著作都基于变分法和动态规划．在教科书[A3]，[A7]中，对动态规划做了介绍．在[A4]，[A11]中处理了该方法的测度理论方面的困难．[A10]中研究了连续状态空间下最优随机控制问题通过离散状态空间下相应问题来逼近的方法．[A1]，[A2]是法兰西学派的研究人员用变分法和泛函分析方法写的最优随机控制的著作．[A6]中导出了随机最大值原理．

参考文献

[A1] Bensoussan, A., Stochastic control by functional analysis methods, North-Holland, 1982.

[A2] Bensoussan, A. and Lions, J. L., Applications of variational inequalities in stochastic control, North-Holland, 1982.

[A3] Bertsekas, D. P., Dynamic programming: Deterministic and stochastic models, Prentice-Hall, 1987.

[A4] Bertsekas, D. P. and Shreve, S. E., Stochastic optimal control: The discrete time case, Acad. Press, 1978.

[A5] Fleming, W. H and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[A6] Hausmann, U. G., A stochastic maximum principle

for optimal control of diffusion, Longman, 1986.
[A7] Kumar, P. R. and Varaiya, P., Stochastic systems: Estimation, identification, and adaptive control, Prentice-Hall, 1986.
[A8] Kushner, H. J., Stochastic stability and control, Acad. Press, 1967.
[A9] Kushner, H. J., Introduction to stochastic control, Holt, Rinehart & Winston, 1971.
[A10] Kushner, H. J., Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations, Acad. Press, 1977.
[A11] Striebel, C., Optimal control of discrete time stochastic systems, Lecture notes in economic and mathematical systems, 110, Springer, 1975.
[A12] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Ginn, 1969.
[A13] Luenberger, D. G., Optimization by vector space methods, Wiley, 1969.
[A14] Bertsekas, D., Dynamic programming and stochastic control, Acad. Press, 1976.
[A15] Davis, M. H. A., Martingale methods in stochastic control, in stochastic control and stochastic differential systems, Lecture notes in control and inform. sci., Vol. 16, Springer, 1979, 85 − 117.
[A16] Cesari, L., Optimization-theory and applications, Springer, 1983.
[A17] Neustadt, L. W., Optimization, a theory of necessary conditions, Princeton Univ. Press, 1976.
[A18] Barbu, V. and Da Prato, G., Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces, Pitman, 1983.
[A19] Ljung, L., System identification theory for the user, Prentice-Hall, 1987.
冯德兴 译

最优译码 [optimal decoding; оптимальное декодирование]

给定信息源、通信信道和编码方法，使得**信息复制精确度** (information, exactness of reproducibility of) 达到最大的译码方法. 如果信息复制精确度通过平均**译码错误概率** (erroneous decoding, probability of) 来刻画，则最优译码使这个概率达到最小. 例如，我们要传送 M 个信息元，分别用数 1, 2, …, M 来表示，出现的概率分别为 $p_1, \cdots, p_M$. 一个离散信道具有有限个输入和输出信号，转移函数由下列矩阵定义:

$$q(y, \widetilde{y}) = \mathrm{P}\{\widetilde{\eta} = \widetilde{y} \mid \eta = y\},\ y \in Y,\ \widetilde{y} \in \widetilde{Y},$$

这里 Y, $\widetilde{Y}$ 分别为输入信号 η 和输出信号 $\widetilde{\eta}$ 的取值集合. 编码通过函数 $f(\cdot)$ 来定义，$f(m) = y_m$ ($m = 1, \cdots, M$)，这里 $y_m \in Y$ ($m = 1, \cdots, M$) 是一个码 (code)，即选择 M 个可能的输入值，则最优译码由一个函数 $g(\cdot)$ 来定义，对任意 $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, $g(\widetilde{y}) = m'$，这里 m' 满足不等式,

$$p_{m'} q(y_{m'}, \widetilde{y}) \geqslant p_m q(y_m, \widetilde{y}),\ \text{对所有}\ m \neq m'.$$

特别当所有的信息元有相同的概率时，即 $p_1 = \cdots = p_M = \dfrac{1}{M}$，则上述最优译码为“极大似然”译码（一般来说，不是最优的）. 输出信号 $\widetilde{y}$ 译码成 m'，如果

$$q(y_{m'}, \widetilde{y}) \geqslant q(y_m, \widetilde{y}),\ \text{对所有}\ m \neq m'.$$

参考文献

[1] Gallager, R., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.
[2] Wozencraft, J. M. and Jacobs, I. M., Principles of communication engineering, Wiley, 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】 参见**编码和译码** (coding and decoding); **信息论** (information theory). 符方伟 沈世镒 译

最优保证策略 [optimal guarantee strategy; оптимальная гарантирующая стратегия]

在给定形势下，其效益等于最好的有保证的结果的策略（见**最大保证结果原理** (principle of the largest sure result)）. 例如，在有效益判别 $f(x, y)$ 的形势下，如果待定因素 y 在集合 Y 中取值，那么最优保证策略 $\widetilde{x}^*$ 满足等式

$$\sup_{\widetilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\widetilde{x}, y) = \inf_{y \in Y} f(\widetilde{x}^*, y).$$

如果左边的对 $\widetilde{x}$ 的上界不能达到，那么就可提出 ε **最优保证策略** $\widetilde{x}^*_\varepsilon$，它满足

$$\inf_{y \in Y} f(\widetilde{x}^*_\varepsilon, y) \geqslant \sup_{\widetilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\widetilde{x}, y) - \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon > 0$. 凭借策略集 $\widetilde{x} = x(y)$ 和有关待定因素（进行运算的条件）的信息，最优保证策略是可具体确定的（见[1]）. 从而，如果策略 $\widetilde{x}$ 的集合包含所有函数 $x(y)$，且运算包含有关 y 的完全信息，那么最优保证策略 $\widetilde{x}^*(y)$ 称为**绝对最优策略** (absolutely optimal strategy)，且由条件

$$\sup_x f(x, y) = f(x^*(y), y),\ \text{对于所有}\ y \in Y\ \text{成立}$$

来确定.

对应其他最优性原理的最优策略也已得到研究（参看例如[2]和[4]）.

参考文献

[1] Гермейер, Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971.
[2] Гермейер, Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976.
[3] Aubin, J.-P., L'analyse non-linéaire et ses motiva-

tions économiques, Masson, 1984.

[4] Воробьев, Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов - кибернетиков, Л., 1974(英译本: Vorob'ev, N. N., Game theory. Lectures for economists and system scientists, Springer, 1977).

Е. И. Ерешко, В. В. Федоров 撰

【补注】"最优保证策略"也称"最坏情形策略". 它对效益判别的结局提供一个安全水平. 最坏情形设计自然显示在二人零和对策中, 其中未知量的不确定性(y 变量)被代替为最坏可能. 这个观念在工程和军事分析中是古老的和普遍的.

参考文献

[A1] Ho, Y. C. and Olsder, G. I., Differential games: concepts and applications, in M. Shubik (ed.): Mathematics of Conflict, Elsevier & North-Holland, 1983, 127 - 186.

史树中 译

最优程序控制[optimal programming control; оптимальное управление программное]

最优控制的数学理论(optimal control, mathematical theory of)中一个问题的解, 这时控制 $u=u(t)$ 是作为时间的函数构成的(从而也假定在过程中间, 除了一开始给的信息外, 得不到任何别的信息). 这样, 最优程序控制不同于**最优综合控制**(optimal synthesis control), 它是通过系统的先验信息构造出来的, 并且不可能进行修正.

最优程序控制问题解的存在性包括两个方面: 阐明给定约束下实现控制目的的可能性(实现控制目的的容许控制(admissible control)的存在性), 以及建立极值问题在上述容许控制类中的可解性——极值(通常为相对极值)的可达性(最优控制(optimal control)的存在性).

关于第一个问题, 特别重要的是研究系统的可控性(controllability of a system)性质. 对于系统

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u),$$

这意味着在给定的容许控制函数类 $U=\{u(\cdot)\}$ 中, 存在控制 $u(t)$, 使得将相点从任意给定的初始位置 $x(t_0)=x_0\in\mathbf{R}^n$ 能转移到任意给定的终点位置 $x(t_1)=x_1\in\mathbf{R}^n$(至于时间 $T=t_1-t_0$ 是固定还是自由, 取决于问题的提法), 见 **Понтрягин 最大值原理**(Pontryagin maximum principle). 对具有解析或周期系数的线性系统

$$\dot{x}=A(t)x(t)+B(t)u,\ x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^p \quad (1)$$

(当 $A\equiv$ 常值, $B\equiv$ 常值时是最简单的情形), 可控性或完全可控性(complete controllability)的充分必要条件已知可表示成可计算的形式. 对于一般的线性系统, 从一个凸集转移到另一个(关于 u, x 具凸约束的)凸集的可解性问题也已完全解决. 在非线性系统中, 仅仅知道局部的可控性条件(在给定轨线的一小领域内), 或特殊类型的系统的可控性条件(见[2], [4], [5]). 可控性性质的研究也已做了许多推广, 特别是与特殊类 U(例如, 所有有界分段连续函数 $u(t)$ 的集合 U)有关的大量的推广工作, 对于某些坐标的可控性, 以及对于包括无穷维系统在内的更一般类系统的可控性也做了研究.

一般说来, 最优控制的存在性问题与某种拓扑下极小化控制或轨线序列的紧性性质有关, 也与极小化泛函对相应变量的半连续性性质有关. 对于系统

$$\dot{x}=f(t,x,u),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ x\in\mathbf{R}^n,\ u\in\mathbf{R}^p,\ (2)$$

在约束条件

$$u\in U\subseteq\mathbf{R}^p \quad (3)$$

之下, 上述第一个性质与集合

$$f(t,x,U)=\{f(t,x,u):u\in U\}$$

的凸性有关, 而第二个性质(对于积分泛函)则与 $J(x(\cdot),u(\cdot))$ 的相应值的凸性有关. 在缺少这些性质的情况下, 可以通过拓宽原来的变分问题的办法得到补偿. 于是 $f(t,x,u)$ 的非凸性可以通过引入滑动系统(sliding system)——由 U 上给出的并产生凸化效应的控制-度量所得到的常微分方程的广义解——来补偿, 见[6], [7]; 亦见**最优滑动模态**(optimal sliding regime). 在积分泛函 $J(x(\cdot),u(\cdot))$ 中缺乏凸性的补偿办法是用一个新的泛函(它是原泛函的凸弱函数)把原问题嵌入到更一般的问题中, 并且把新的问题的解嵌入到更广的一类控制中(见[9]). 在所述情况下, 最优控制的存在性常常可以从容许控制的存在性推出.

极值必要条件的理论在最优程序控制问题中研究得最为深入. Понтрягин 最大值原理已经成为这一情况下的基本结果, 因为它包括了最优控制问题中强极值的必要条件.

对于具有更复杂约束(诸如相位的、泛函的、极小极大的、混合的约束等等)的最优程序控制问题, 已经得到了求解极值问题必要条件的行之有效的一般方法. 这些方法或多或少依赖于凸锥分离定理(见[9], [10]). 例如, 设 E 为一向量空间, 设 $f(x)$ $(x\in E)$ 为一给定的泛函, 设 Q_i 为 E 中的集合, 设

$$Q=\bigcap_{i=1}^{n}Q_i,$$

设 $x_0\in Q$ 是使得 $f(x)$ 在 Q 上达到其最小值的点, 并设

$$Q_0=\{x: f(x)<f(x_0)\}.$$

一种广为流传的一般方法的实质在于, 每一个集合 Q_i $(i=0,\cdots,n)$ 在点 x^0 的领域中都用顶点在 x^0 的某

个凸锥 K_i来近似(Q_0的"减小方向锥"；不等式型约束的"容许方向锥"；包括微分环节在内的等式型约束的"切方向锥"，等等)．这样，极小的一个必要条件是：x^0 为所有 $K_i(i=0,\cdots,n)$的唯一的公共点，从而这些锥是"可分离的"(见[18])．上述"几何"条件还要加上一种解析形式的条件，并且可能的话，比如说，这种解析形式的条件是用 Hamilton 函数表达的．必要条件既可以取类似于 Понтрягин 最大值原理的形式，也可以取局部(线性化)极大值原理的形式(相对 u 的弱极值的条件)，这取决于初始约束以及所用的变分类型．这种方法的实现有赖于解析地描述诸锥 K_i的可能性．当集合 Q_i由所研究点处满足某些附加的正则性条件的光滑函数所定义，或者由凸函数所定义，则已经得到了这些锥的有效的描述(见[9]，[10])．原则上，这一方法也允许推广到包括微分约束在内的非光滑约束．例如，当没有凸性时，可以使用凸函数的次微分及其推广的概念(见[11]，[12])．

对于可以用带有扰动变元的微分方程、偏微分方程、Banach 空间中的发展方程、流形上的微分方程、递归差分方程等等描述的可控系统，在广义函数-测度类中求解时，已知有类似于 Понтрягин最大值原理的一阶条件，即所谓积分最大值原理(integral maximum principle)，见[1]，[6]，[7]，[13]－[16]．

从最优控制问题中给出的极值的必要条件可以得到经典变分法中熟知的一阶必要条件．特别地，当 U 为开集，而 $J(x(\cdot),u(\cdot))$为标准的积分泛函时，对于系统(2)和(3)的两点边值问题，Понтрягин 原理蕴涵经典变分法中极值的 Weierstrass 必要条件．

在最优控制理论中，人们一直在寻找获得非经典变分问题的高阶(尤其是二阶)必要条件(见[19])．对高阶条件的兴趣主要与最优控制的退化问题有关，这一问题的研究导致所谓特殊控制(special control)，这在经典理论中还没有相对应的东西．例如，在 Понтрягин原理中，函数$H(t,\psi,x,u)$可能引起一族控制，其中每个控制满足最大值原理，也可能根本不依赖于 u(这时 u 的任意一个容许值都满足 Понтрягин原理)．这种情形相当程度上表现出许多应用控制问题中的特征．在所述情形下，最优控制的分离已经要求掌握一阶极值(所谓 Понтрягин 极值(Pontryagin extremals))并使用最优性二阶必要条件(或更一般地，高阶必要条件)．这里各种形式的必要条件是通过使用特殊类的"非经典"变分(例如针形变分"丛"，等等)得到的．特殊控制的实现也常常与滑动系统的使用有关(见[17]，[18])．

最优性的充分条件的理论还没有进行很仔细的研究．已经知道的结果与局部最优性条件有关，并且在别的一些简单的必要条件中间，包含变分系统的非退化条件，以及对于沿着相应常微分方程的容许轨线计算的右端 Hessian 矩阵性质的约束条件．另一组充分条件是基于动态规划方法及其与最大值原理的关系(见[8])．还有一些形式体系基于扩充变分问题的思想，导致绝对极小的充分条件．它们的实际应用范围包括特殊类型的带凸性判据的问题和退化的最优控制问题(见[18])．

对于线性系统(1)，当泛函和约束关于 u，x 都是凸的时候(在许多情形下，要满足某些附加条件)，最优程序控制问题的完整的解(最优性的必要充分条件)是已知的．在凸分析中使用的对偶性概念证明了 Понтрягин 最大值原理中由共轭变量(conjugate variables)描述的系统的轨线的特定的极值性质．这样就能够把在应用一般类型的必要条件中所产生的边值问题化成求解一个较简单的对偶极值问题．按这一方法的框架，提出了具有脉冲控制(impulse control)的线性系统理论，它模拟瞬时作用(撞击、爆炸、脉冲)下的对象，并由带有相应阶数奇性的广义函数的微分方程描述．可达区域(attainability domain)方法已经被有效使用，尤其是在对策系统理论中，见[2]，[3]．

在缺乏系统完整的先验信息的情况下(包括不充分量的统计描述)，最优程序控制问题在不确定性条件(conditions of uncertainty)下进行研究．在系统($t_0\leqslant t\leqslant t_1$)

$$\dot{x}=f(t,x,u,w),\ x(t_0)=x^0\in X^0,\ w\in W \quad (4)$$

中，设参数 $w\in\mathbf{R}^q$ 以时间函数 $w=w(t)$ 的形式出现，而向量 x^0 是未知的，仅仅假定给定集合 $X^0\subseteq\mathbf{R}^n$，$W\subseteq\mathbf{R}^q$．于是，假定方程(4)(对于给定 x^0，$u(\tau)$，$w(\tau)$，$t_0\leqslant\tau\leqslant t_1$)的解

$$x(t|x^0,u(\cdot),w(\cdot)),\ x(t_0|x^0,u(\cdot),w(\cdot))=x^0,$$

存在并且能延拓到 $[t_0,t_1]$上，则可以构造出一轨线丛(集合)：

$$X(t|u(\cdot))=\bigcup\{x(t|x^0,u(\cdot),w(\cdot)):$$
$$x^0\in X^0,\ w(\tau)\in W,\ t_0\leqslant\tau\leqslant t_1\}.$$

通过选择程序控制 $u(t)$(对于这一轨线丛中的所有轨线都是相同的)，可以控制相空间中的位置$X(t|u(\cdot))$．不确定性条件下典型的最优程序控制问题是沿着极大型泛函 Φ 优化 $u(t)$：

$$\Phi(X(t|u(\cdot)))=\max\{\varphi(t):\ x\in X(t_1|u(\cdot))\} \quad (5)$$

(于是问题的解 $u^0(t)$将确保一个有保证的结果)或者优化一个积分泛函

$$\Phi(X(t_1|u(\cdot)))=\int_{X(t_1|u(\cdot))} f_0(x)\,dx. \quad (6)$$

使用推导最优性必要条件的方法或在此基础上的

改进方法，使得能提出一些条件以确保问题(5)，(6)存在类似于 Понтрягин 原理那样的结论(首先它取极小极大条件的形式)．对于线性系统，如同带完全信息的系统那样，这些问题允许有详细的解(见[3]，[20]，[21])．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Болтянский. В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976 (英译本: Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1967).

[2] Красовский, Н. Н., Теория управления движением, М., 1968.

[3] Красовский, Н. Н., Субботин, А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974 (英译本: Krasovaskiĭ, N. N. and Subbotin, A. I., Game-theoretical control problems, Springer, 1988).

[4] Калман, Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, 521 – 547.

[5] Lee, E. B. and Marcus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.

[6] Гамкрелидзе, Р. В., Основы оптимального управления, Тбилиси, 1977 (英译本: Gamkrelidze, R. V., Principles of optimal control theory, Plenum, 1978).

[7] Varga, J., Optimal control of differential and functional equations, Acad. Press, 1972.

[8] Иоффе, А. Д., Тихомиров, В. М., 《Успехи матем. наук》, **23** (1968), 6, 51 – 116.

[9] Дубовицкий, А. Я., Милютин, А. А., 《Журн. вычисл. матем. и матем. физики》, **5** (1965), 3, 395 – 453.

[10] Neustadt, L. W., Optimizations: a theory of necessary conditions. Princeton Univ. Press, 1976.

[11] Пшеничный, Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969.

[12] Clarke, F. H., Generalized gradients and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205** (1975), 247 – 262.

[13] Sussmann, H. J., Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems, *Math. Syst. Theory*, **10** (1977), 3, 263 – 284.

[14] Lions, J., Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer, 1971 (译自法文).

[15] Болтянский, В. Г., Математичекие методы оптимального управления, М., 1966 (英译本: Boltayanskiĭ, V. G., Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart & Winston, 1971).

[16] Болтянский, В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973 (英译本: Boltyanskiĭ, V. G., Optimal control of discrete systems, Wiley, 1978).

[17] Габасов, Р., Кириллова, Ф. М., Особые оптимальные упревления, М., 1973.

[18] Кротов, В. Ф., Букреев, В. З., Гурман, В. И., Новые методы вариационного исчисления в динамике полета, М., 1969.

[19] Левитин, Е. С., Милютин, А. А., Осмоловский, Н. П., 《Успехи матем. наук》, **33** (1978), 6, 85 – 148.

[20] Куржанский, А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977.

[21] Демьянов, В. Ф., Малоземов, В. Н., Введение в минимакс, М., 1972.

А. Б. Куржанский 撰

【补注】 最优程序控制在西方文献中常称为最优开环控制(optimal open-loop control)，而最优综合控制大多通称为最优闭环控制(optimal closed-loop control)或最优反馈控制(optimal feedback control)．亦见**最优控制的数学理论**(optimal control, mathematical theory of)．

参考文献

[A1] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic control, Springer, 1975.

[A2] Bertsekas, D. and Shreve, S., Stochastic optimal control, the discrete time case, Acad. Press, 1978.

[A3] Bertsekas, D., Dynamic programming and stochastic control, Acad. Press, 1976.

[A4] Davis, M. H. A., Martingale methods in stochastic control, in Stochastic Control and Stochastic Differential Systems, Lecture notes in control and inform. sci., Vol. 16, Springer, 85 – 117.

[A5] Cesari, L., Optimization - Theory and applications, Springer, 1983.

[A6] Barbu, V. and Da Prato, G., Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces, Pitman, 1983.

[A7] Kushner, H., Introduction to stochastic control, Holt, 1971.

[A8] Kumar, P. R. and Varaiya, P., Stochastic systems: estimation, identification and adaptive control, Printice-Hall, 1986.

[A9] Ljung, L., System identification theory for the user, Printice-Hall, 1987.

[A10] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Ginn, 1969.

[A11] Knobloch, H. W., Higher order necessary conditions in optimal control theory, Springer, 1981.

冯德兴 译

最优求积公式 [optimal quadrature formula; оптимальная квадратура]

对一类被积函数 F 给出积分

$$I(f)=\int_{\Omega} f(P)\omega(P)dP$$

的最佳逼近的**求积公式**(quadrature formula).如果

$$S_N(f)=\sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k),$$

那么

$$R_N(f)=S_N(f)-I(f)$$

称为计算给定函数的积分的求积误差(quadrature error),同时

$$r_N(F)=\sup_{f\in F}|R_N(f)|$$

称为类 F 中的求积误差.如果存在一个求积公式使相应的 $r_N(F)$ 满足等式

$$r_N(F)=\inf_{c_k,P_k} r_N(F),$$

那么这个公式称为在此类中的最优求积公式.

最优求积公式至今仅在基本是单变量某些函数类中找到(见[1]-[3]).最优求积公式亦称最佳求积公式(best quadrature formulas)或极值求积公式(extremal quadrature formulas).

参考文献

[1] Никольский, С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Quadrature formulae, H. M. Stationary Office, London, 1966).

[2] Бахвалов, Н. С., в кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, 5-63.

[3] Соболев, С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

Н. С. Бахвалов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engels, H., Numerical quadrature and cubature, Acad. Press, 1980.

史应光 译

最优奇异模态[optimal singular regime; оптимальный режим особый],实际上,应为奇异最优模态(singular optimal regime),奇异最优控制(singular optimal control)

一种最优控制(optimal control),这时 **Hamilton 函数**(Hamilton function)在某一时间内同时满足条件

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=0. \tag{2}$$

在向量情形下,奇异最优模态是通过 $k(k>1)$ 个控制分量出现的,于是条件(1)用 k 个条件

$$\frac{\partial H}{\partial u_s}=0,\ s=0,1,\cdots,k \tag{3}$$

代替,而代替等式(2)则变成行列式条件

$$\left|\frac{\partial^2 H}{\partial u_s \partial u_p}\right|=0,\ p,s=1,\cdots,k. \tag{4}$$

在奇异最优模态中,Hamilton 函数 H 是稳态的,但其二阶微分不是负定的,即 H 作为 u 的函数(这时 u 是容许区域中的变量)的极大值是一"混合极大值".

当最优控制问题中的被积函数和右端线性地依赖于控制时,可能会出现最典型的奇异最优模态问题.

下面从标量奇异控制开始来研究这一类型的问题.

设要确定泛函

$$J=\int_0^{t_1}(F(x)+u\Phi(x))dt \tag{5}$$

在给定约束

$$\dot{x}^i=f^i(x)+u\varphi^i(x),\ i=1,\cdots,n, \tag{6}$$

边界条件

$$x(0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{7}$$

和控制约束

$$|u|\leqslant 1 \tag{8}$$

之下的极小值.

最优控制所必须满足的必要条件允许事先去研究问题(5)-(8),并把容许区域 $|u|<1$ 内最优控制所处的那个奇异部分的流形分离出来.把它与满足边界条件(7)的非奇异部分连起来,就得到问题(5)-(8)的最优解,这里非奇异部分所加的控制 $|u|=1$ 由 **Понтрягин 最大值原理**(Pontryagin maximum principle)决定.

根据最大值原理,最优控制在任意 $t\in[0,t_1]$ 的值必须使 Hamilton 函数达到最大值:

$$H(\psi(t),x(t),u(t))=\max_{|u|\leqslant 1} H(\psi(t),x(t),u), \tag{9}$$

其中

$$H(\psi,x,u)=-\Big(F(x)+u\Phi(x)\Big)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i\Big(f^i(x)+u\varphi^i(x)\Big),$$

而 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_n)$ 是一非零共轭向量函数,满足方程组

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H(\psi,x,u)}{\partial x^i},\ i=1,\cdots,n. \tag{10}$$

条件(2)不仅对奇异最优模态满足,而且对任意控制也满足.

在 $\partial H/\partial u \neq 0$ 的时间内，条件(9)确定一非奇异的最优控制，它取边界值

$$u(t) = \operatorname{sign} \frac{\partial H}{\partial u} = \pm 1.$$

于是奇异最优控制

$$|u(t)| < 1$$

作用的区间 $[\tau_0, \tau_1]$ 仅当条件（1）满足时才会出现：

$$\frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u} = 0, \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \tag{11}$$

即 Hamilton 函数明显地与控制 u 无关．因此，对于线性控制问题，条件(9)无法直接确定奇异最优控制 $u(t)$.

设函数 $\partial H/\partial u$ 相对 t 进行逐次求导，并利用方程(9)和(10)，直到在下一阶导数中控制 u 的系数非零．已经证明（见[1]－[3]），具有非零系数的控制 u 只可能出现在偶数阶导数中，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{d^s}{dt^s}\left[\dfrac{\partial H}{\partial u}\right]\right] = 0, \ s = 1, \cdots, 2q-1, \\ \dfrac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left[\dfrac{\partial H}{\partial u}\right] = a(\psi, x) + ub(\psi, x), \\ b(\psi(t), x(t)) \neq 0, \end{cases} \tag{12}$$

并且不等式

$$(-1)^q b(\psi, x) = = (-1)^q\left[\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]\right]\right] \leqslant 0 \tag{13}$$

是奇异控制最优性的一个必要条件．如果在整个这一时间区间上 $b(\psi(t), x(t)) \neq 0$，则奇异最优控制是

$$u(t) = -\frac{a(\psi(t),x(t))}{b(\psi(t),x(t))}, \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1.$$

(12)中的这许多条件是通过对(11)逐次求导得到的，因此在奇异模态的区间上，尤其是在奇异和非奇异区间的连接点 τ_0 和 τ_1 处，除了等式(11)外，还满足如下 $2q-1$ 个等式:

$$\frac{d^s}{dt^s}\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right] = 0, \ s = 1, \cdots, 2q-1. \tag{14}$$

分析条件(11)和(14)表明，对于 q 的奇数值和偶数值，轨线的奇异和非奇异部分汇合的特征是不同的（见[4]）.

当 q 是偶数时，非奇异部分的最优控制不可能是分段连续的．控制的间断（开关点）聚集在与奇异区间的连接点处．于是最优控制是具有可数多个间断点的 Lebesgue 可测函数．

当 q 是奇数时，仅仅有两个分段光滑的最优轨线可以进入到位于奇异部分上的点（或从奇异部分出来）．设在相坐标的 n 维空间中奇异部分的流形的维数等于 k．于是若 q 是奇数，则具有分段连续控制的这些最优轨线形成相空间中一个 $k+1$ 维曲面．因此，当 $k \leqslant n-2$ 时，几乎所有的其余轨线所对应的控制有无穷多个开关点．

$k = n - q$ 的假设已经作出（见[4]）．如果这个假设成立，则当 $q \geqslant 2$ 时，在到达奇异段之前（或离去后）开关点的集聚是(5)－(8)这一类问题的典型特征．

在[5]中给出了把具有无穷多个开关点的最优控制的奇异和非奇异部分连接起来的一个例子.

当 q 是偶数且 $q \geqslant 2$ 时，在与一奇异区间接界的非奇异区间上，奇异最优控制不可能是分段连续的，但有无穷多个开关点聚集到进入点 τ_0，即不存在 $\varepsilon > 0$，使得在区间 $[\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]$ 中最优控制是常值．

在最常遇到的奇异最优模态中，$q = 1$．在这种情形下，奇异和非奇异部分通过一分段连续的最优控制连接起来．

在更一般的奇异最优模态中涉及到 $k(k > 1)$ 个控制:

$$J = \int_0^{t_1}\left[F(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x)\right]dt, \tag{15}$$

$$\dot{x}^i = f^i(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \varphi_s^i(x) \tag{16}$$

(如同在标量情形那样)，由于线性性质，条件(4)对任意控制都满足．在区间 $[\tau_0, \tau_1]$ 上，具有 k 个分量满足 $|u_s| < 1$ 的奇异最优模态必须满足 k 个条件(3):

$$M_s(\psi(t), x(t)) = \frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u_s} = 0,$$

$$\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \ s = 1, \cdots, k, \tag{17}$$

其中

$$H(\psi, x) = -\left[F(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x)\right] + \sum_{i=1}^{n} \psi_i\left[f^i(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \varphi_s^i(x)\right] = Q(\psi, x) + \sum_{s=1}^{k} u_s M_s(\psi, x),$$

而 ψ_i 由(10)确定.

对于具有几个分量的奇异最优模态，最优性的进一步的必要条件与上面研究过的具有一个分量情形的区别如下．在奇异最优模态的区间上，必须满足两种类型的必要条件．其一为不等式型条件、类似于条件

(13). 另一些必要条件是等式型条件，并且没有类似于单分量情况下的结果（见[6]).

对 (17)相对于 t取全微分，得到关于k个未知量 u_1，…、u_k 的 k个线性方程：

$$\frac{dM_s(\psi,x)}{dt}=\sum_{p=1}^{k}u_p\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial M_s}{\partial x^i}\varphi_p^i-\frac{\partial M_p}{\partial x^i}\varphi_s^i\right]\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial M_s}{\partial x^i}f^i-\frac{\partial Q}{\partial x^i}\varphi_s^i\right],\ s=1,\ \cdots,\ k. \quad (18)$$

方程组（18）的系数矩阵

$$a_{sp}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial M_s}{\partial x^i}\varphi_p^i-\frac{\partial M_p}{\partial x^i}\varphi_s^i\right],\ s,p=1,\ \cdots,k$$

是反对称的：$a_{sp}=-a_{ps}$．从而矩阵（a_{sp}）主对角线上的元素 a_{ss}等于零．一般说来，在对应于非最优控制的任意轨线上，（18）的其余元素 $a_{sp}(s\neq p)$ 不等于零．在有 k 个分量的奇异最优模态的区间上，必须满足必要条件：(18)的所有 $k(k-1)/2$ 个系数为零（见[6]），即

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial M_s}{\partial x^i}\varphi_p^i-\frac{\partial M_p}{\partial x^i}\varphi_s^i\right]=0,$$

$$s,\ p=1,\ \cdots,\ k,\ s<p. \quad (19)$$

除了这些条件外，还必须满足下列不等式型条件（与 $q=1$ 时有一个分量的最优奇异模态的条件（13）相似）：

$$\sum_{s,p=1}^{k}\frac{\partial}{\partial u_p}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial H}{\partial u_s}\right]\right]\delta u_s\delta u_p\geqslant 0. \quad (20)$$

条件（13),（20）可以看成是奇异最优模态情形下 **Legendre条件**(Legendre condition)和 **Clebsch条件**（Clebsch condition）的推广；因此所示不等式有时称作广义 Legendre-Clebsch 条件（generalized Legendre-Clebsch conditions）.

奇异最优模态的如下性质表明奇异最优模态在最优控制问题中的重要性（见[4]）：如果从某一点出发的最优轨线包含一奇异最优模态的一部分，则从该点附近出发的所有最优轨线都具有同样的性质．

对于线性和非线性控制问题，有关确定奇异最优模态的阶数的问题已经进行了研究（见[8]).

上述关于奇异最优模态的所有结果都是通过研究泛函的二阶变分得到的．通过研究泛函的三阶和四阶变分，有可能得到奇异模态的最优性的进一步的必要条件（见[9]).

参考文献

[1] Келли, Г.,《Ракетная техника и космонавтика》, 1964, 8, 26 – 29.

[2] Роббинс, Г.,《Ракетная техника и космонавтика》, 1965, 6, 139 – 145.

[3] Копп, Р., Мойер, Г.,《Ракетная техника и космонавтика》, 1965, 8, 84 – 90.

[4] Берщанский, Я. М.,《Автоматика и телемеханика》, 1979, 3, 5 – 11.

[5] Фуллер, А. Т., в кн.: Тр. 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем, М., 1961, 584 – 605.

[6] Вапнярский, И. Б.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 7 (1967), 2, 259 – 283.

[7] Krener, A., The high order maximal principle and its application to singular extremals, Siam J. Control Optim., **15** (1977), 2, 256 – 293.

[8] Lewis, R. M., Definition of order and function conditions in singular optimal control problems, *Siam J. Control Optim.*, **18** (1980), 1, 21 – 32.

[9] Скородинский, И. Т.,《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **19** (1979), 5, 1134 – 1140.

[10] Габасов, Р., Кириллова, Ф. М., Особые оптимальные упревления, М., 1973.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 在[A1]中，给出了奇异控制问题在变分法中的新的必要条件，推广了 Legendre-Clebsch 条件．这种新的条件有时称作 Kelley 条件（Kelley condition）.

参考文献

[A1] Kelley, H. J., Kopp, R. E. and Moyer, H.G., Singular extremals, in G. Leitmann (ed.): Topics of Optimization, Acad. Press, 1967, Chapt. 3.

[A2] Knobloch, H. W., Higher order necessary conditions in optimal control theory, Springer, 1981.

[A3] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Ginn, 1969.

[A4] Hermes, H. and Lasalle, J. P., Functional analysis and time optimal control, Acad. Press, 1969.

[A5] Bell, D. J. and Jacobson, D. H., Singular optimal control problems, Acad. Press, 1975.

[A6] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic control, Springer, 1975.

[A7] Bertsekas. D. and Shreve, S., Stochastic optimal control, the discrete time case, Acad. Press, 1978.

[A8] Bertsekas, D., Dynamic programming and stochastic control, Acad. Press, 1976.

[A9] Davis, M. H. A., Martingale methods in stochastic control, in Stochastic Control and Stochastic Differential Systems, Lecture notes in computer and inform. sci., Vol. 16, Springer, 1979.

[A10] Cesari, L., Optimization - Theory and applications, Springer, 1983.

[A11] Neustadt, L. W., Optimizaton, a theory of necessary conditions, Princeton Univ. Press, 1976.

[A12] Barbu, V. and Da Prato, Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces, Pitman, 1983.

[A13] Kushner, H., Introduction to stochastic control, Holt, 1971.

[A14] Kumar, P. R. and Varaiya, P., Stochastic systems: estimation, identification and adaptive control, Printice-Hall, 1986.

[A15] Ljung, L., System identification theory for the user, Printice-Hall, 1987.

冯德兴 译

最优滑动模态 [optimal sliding regime; оптимальный режим скользящий]

最优控制 (optimal control) 理论中使用的一个术语，用来描述当极小化控制函数序列在 Lebesgue 可测函数类中没有极限时，控制一个系统的一种最优方法.

例如，假定要寻求泛函

$$J(x, u)=\int_0^3 (x^2-u^2)dt \tag{1}$$

在约束条件

$$\dot{x}=u, \tag{2}$$

$$x(0)=1,\ x(3)=1, \tag{3}$$

$$|u|\leqslant 1 \tag{4}$$

之下的极小值. 为了得到泛函 (1) 的极小，希望对于每一个 t, $|x(t)|$ 的值尽可能小，而 $|u(t)|$ 的值尽可能大. 在约束条件 (2)、边界条件 (3) 和控制约束 (4) 之下，轨线

$$x(t)=\begin{cases}1-t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & 1<t<2,\\ t-2, & 2\leqslant t\leqslant 3,\end{cases} \tag{5}$$

满足第一个要求. 如果轨线 (5) 可以用某一个控制产生，该控制对一切 t 均取边界值

$$u(t)=+1 \text{ 或 } u(t)=-1, \tag{6}$$

则泛函 (1) 的绝对极小值就会被达到. 然而 "理想" 轨线 (5) 是不可能由满足 (6) 的任何控制函数 $u(t)$ 产生的，因为当 $1<t<2$ 时，$u(t)\equiv 0$. 但是，若取控制函数 $u_n(t)$ (当 $n\to\infty$ 时 $u_n(t)$ 在 $1<t<2$ 中从 $+1$ 到 -1 和从 -1 到 $+1$ 愈来愈频繁转换) 为:

$$u_n(t)=\begin{cases}-1 & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ +1, & \frac{k}{n}<t-1\leqslant\frac{2k+1}{2n},\ k=0,\cdots,n-1,\\ -1, & \frac{2k+1}{2n}<t-1\leqslant\frac{k+1}{n},\ k=0,\cdots,n-1,\\ +1, & 2<t\leqslant 3,\end{cases} \tag{7}$$

$(n=1, 2, \cdots)$，就构造出满足 (6) 的极小化控制序列 $\{u_n(t)\}$，和收敛于 "理想" 轨线 (5) 的极小化轨线序列 $\{x_n(t)\}$.

每一条轨线 $x_n(t)$ 仅仅在区间 $(1, 2)$ 上与 (5) 有区别；在这个区间上，它不再是沿 x 轴的一条精确的曲线，而是形成 x 轴上方有 n 个相同 "齿" 的 "锯齿形" 曲线. "锯的齿" 当 $n\to\infty$ 时越来越密，使得 $\lim_{n\to\infty}x_n(t)=0\ (1<t<2)$. 这样，极小化轨线序列 $\{x_n(t)\}$ 收敛于 (5)，但极小化控制序列 $\{u_n(t)\}$ 当 $n\to\infty$ 和 $1<t<2$ 时从 $+1$ 到 -1 和从 -1 到 $+1$ 愈来愈频繁转换，从而在可测 (更不用说分段连续的) 函数类中没有极限. 这意味着在 $(1, 2)$ 区间上出现最优滑动模态.

应用启发式推理，可以按下述方式描述所得到的最优滑动模态：最优控制在区间 $(1,2)$ 的每一点处滑动，即值从 $+1$ 到 -1 和从 -1 到 $+1$ 多次跳跃，使得对于任意一个时间区间，不论它多么小，$u=+1$ 的点 t 的集合的测度等于 $u=-1$ 的点 t 的集合的测度，这样根据方程 (2) 就得到一个沿 x 轴的精确运动. 上面给出的关于滑动模态部分区间上的最优控制变化特性的描述不是严格的，因为它并不满足通常的函数的定义.

有可能对最优滑动模态给出严格定义，如果与原始问题 (1)-(4) 一起，再引进一个辅助的 "分裂" 问题：找出泛函

$$I(x, \alpha, u)=\int_0^3 (x^2-\alpha_0u_0^2-\alpha_1u_1^2)dt, \tag{8}$$

在给定约束

$$\dot{x}=\alpha_0u_0+\alpha_1u_1, \tag{9}$$

$$x(0)=1,\ x(3)=1, \tag{10}$$

$$|u_0|\leqslant 1,\ |u_1|\leqslant 1,\ \alpha_0+\alpha_1=1,\ \alpha_0,\ \alpha_1\geqslant 0 \tag{11}$$

之下的极小值.

裂问题 (8)-(11) 与原始问题的区别在于，代替一个控制函数 $u(t)$，引进了两个独立的控制函数 $u_0(t)$ 和 $u_1(t)$；被积函数和原始问题中方程 (2) 右端的函数用相应函数的线性凸组合替代，这里 $u_0(t)$ 和 $u_1(t)$ 是不同的控制，并且系数 α_0 和 α_1 也看作是控制函数.

于是在问题 (8)-(11) 中有 4 个控制函数 $u_0(t)$, $u_1(t)$, α_0, α_1. 由于 α_0 和 α_1 之间有等式性条件 $\alpha_0+\alpha_1=1$，可以去掉控制 α_0 或 α_1 中的一个，为此只需把它表示成另一个的函数. 但是，为了今后分析方便起见，以明显的方式保留这两个控制更可取.

与原始问题不同，裂问题 (8)-(11) 的最优控制是存在的. 在原始问题的最优滑动模态的部分区间上，这个裂问题的最优控制取形式

$$\alpha_0(t)=\alpha_1(t)=\frac{1}{2},\ u_0(t)=-1,$$

$$u_1(t)=+1,\ 1<t<2,$$

而在进入和退出的两段上:

$$\alpha_0(t)=1,\ u_0(t)=-1,$$
$$\alpha_1(t)=0,\ u_1(t)\text{可以任意},$$
$$0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$\alpha_1(t)=1,\ u_1(t)=+1,$$
$$\alpha_0(t)=0,\ u_0(t)\text{可以任意},$$
$$2\leqslant t\leqslant 3.$$

在最优滑动模态这部分区间上，右端线性地出现的控制 α_0 和 α_1，以及被积函数在容许区域内取值．这意味着原始问题(1)-(4)的最优滑动模态是辅助裂问题(8)-(11)的一个奇异最优模态，或者奇异最优控制．

对于最优控制一般问题中的最优滑动模态，有同样的结果．假定要寻找泛函

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1}f^0(t,x,u)dt, \tag{12}$$

$$f^0(t,x,u):\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R},$$

在给定条件

$$\dot{x}=f(t,x,u),\ f(t,x,u):\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}, \tag{13}$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{14}$$

$$x\in U \tag{15}$$

之下的极小值．

最优滑动模态的特征是 Hamilton 函数

$$H(t,x,\psi,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,x,u)$$

相对 u 的极大的不唯一性，这里 ψ_i 是共轭变量(见[2])．在这些条件下，在以 $u_0,\cdots,u_k$ 为极大的第 $k+1$ 次 $(k>1)$"滑动"的区间 $[\tau_1,\tau_2]$ 上，原始问题分裂，并且取形式

$$I(x,\alpha,u)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{s=0}^{k}\alpha_s f^0(t,x,u_s)dt, \tag{16}$$

$$\dot{x}=\sum_{s=0}^{k}\alpha_s f(t,x,u_s), \tag{17}$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{18}$$

$$u_s\in U,\ \sum_{s=0}^{k}\alpha_s=1,\ \alpha_s\geqslant 0,\ s=0,\cdots,k. \tag{19}$$

问题(16)-(19)的 Hamilton 函数

$$H(t,x,\psi,\alpha,u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left[\sum_{s=0}^{k}\alpha_s f^i(t,x,u_s)\right],$$

在消去 α_0 并对各项重新组合之后，可以化成形式

$$H(t,x,\psi,\alpha,u)=$$
$$=\sum_{s=1}^{k}\left[\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,x,u_0)-\sum_{i=0}^{n}\psi_i f^i(t,x,u_s)\right]\alpha_s=$$
$$=\sum_{s=0}^{k}(H(t,x,\psi,u_1)-H(t,x,\psi,u_s))\alpha_s. \tag{20}$$

由于 $H(t,x,\psi,u_s)$ $(s=0,\cdots,k)$ 等于 H 相对于 u 在 U 上的极大值，在有 $k+1$ 个极大值的最优滑动模态的区间 $[\tau_1,\tau_2]$ 上，对于裂问题(12)-(15)的 Hamilton 函数，其在 k 个独立的线性控制 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 处的系数等于零．通过 $k+1$ 个极大值具有"滑动"的最优滑动模态是裂问题(16)-(19)的含有 k 个分量的奇异最优模态．在研究滑动模态时所取的适当的最大可能的 k 值，取决于右端向量值的集合的凸性条件以及裂系统的被积函数值当控制向量 (α_s,u_s) $(s=0,\cdots,k)$ 遍历整个容许值区域时所得到的集合的最大下界的下凸性．于是 $k\leqslant n$ 是关于 k 的一个上界估计．在最一般的情况下，写出对应于 $k=n$ 的裂问题的奇异最优控制，就得到原始问题的所有最优滑动模态．特别地，在上述例子中，已经对 $k=1$ 的裂问题(约束仅含一个方程)进行了研究; 对裂问题(8)-(11)的研究表明，它也适用于原始问题(1)-(4)的最优滑动模态．

若已经知道 $k+1$ 个控制 $u_0(t),\cdots,u_k(t)$ 在容许区域 U 中给出 Hamilton 函数 $H(t,x,\psi,u)$ 相同的绝对极大值，则最优滑动模态的分析归结为研究含 k 个分量的奇异最优模态．使用奇异控制最优性的必要条件可以进行这样的研究，见**最优奇异模态**(optimal singular regime)．

已经对最优滑动模态的最优性条件进行了研究(见[4])．

参考文献

[1] Гамкрелидзе, Р. В., 《Докл. АН СССР》, **143** (1962), 6, 1243 – 1245.

[2] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1967).

[3] Вапнярский, И. Б., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, 7 (1967), 2, 259 – 283.

[4] Кротов, В. Ф., 《Автоматика и телемеханика》, **24** (1963), 5, 581 – 598.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 滑动控制也叫做震颤控制(chattering control)，见[A1]．

至于更多的参考文献，亦见**最优奇异模态**(optimal singular regime)．

参考文献

[A1] Lee, E. B. and Markus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.

冯德兴 译

最优综合控制 [optimal synthesis control; **оптимальное управление позиционное**]

最优控制的数学理论 (optimal control, mathematical theory of) 中一个问题的解，由最优控制的综合 (synthesis of an optimal control) (反馈综合 (feedback synthesis)) 组成，并作为过程现时状态 (位置) 的函数以控制策略形式出现 (反馈原理) (见 [1] - [3]). 控制的值的确定不仅依赖于现时刻，而且还依赖于现时参数的允许值．这样，这种位置策略的引进就有可能根据系统运转过程中所得到的补充信息，随时对控制进行修正．

例如、对于系统

$$\dot{x}=f(t, x, u), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \ x \in \mathbf{R}^n, \ u \in \mathbf{R}^p, \quad (1)$$

在约束条件

$$u \in U \subseteq \mathbf{R}^p \text{ 或 } \psi(u) \leqslant 0, \ \psi: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^k \quad (2)$$

和给定的“末端”判据

$$I(x(\cdot), u(\cdot))=\varphi(t_1, x(t_1)), \ \varphi: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^1$$

之下，最简单的综合问题就是对于任意初始位置 $\{\tau, x\}$，寻找一个解 u^0，使得泛函 $I(x(\cdot), u(\cdot))$ 在形式为 $u(t, x)$ 的函数类中达到极小值．一种自然的想法是对于每一对 $\{\tau, x\}$ 构造一个**最优程序控制** (optimal programming control)

$$u^0[t|\tau, x], \ x=x(\tau), \ \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

使得同一个泛函 $I(x(\cdot), u(\cdot))$ 在同样的这些约束下达到极小．进而假定

$$u^0(t, x)=u^0[t|t, x];$$

如果函数 $u^0(t, x)$ 定义得恰当，并且方程

$$\dot{x}=f(t, x, u^0(t, x)), \ x(\tau)=x, \ \tau \leqslant t \leqslant t_1 \quad (3)$$

有唯一解，那么综合问题就可以解决，而且在程序控制和综合控制中所找到的 I 的最优值是相同的 (一般而言，保证方程 (3) 在特定意义下的解存在的条件是很多的，并且确保该方程的所有轨线为最优的条件也是很多的)．

经综合的函数 $u^0(t, x)$ 作为一个最优综合控制，正是这个最优控制问题中的泛函 I 对任意初始位置 $\{\tau, x\}$ 达到极小的一个最优解．这与最优程序控制不同，后者一般说来依赖于过程的固定的出发点 $\{t_0, x^0\}$．最优控制的解表示成最优综合控制的形式有许多应用，尤其是在信息受到限制或者动力学中出现扰动的情况下实现最优控制这样的实际过程中．在这样的情形下，综合控制比规划控制更可取．

寻找 $u^0(t, x)$ 作为现时状态的函数形式与**动态规划** (dynamic programming) 有直接关系 (见 [2])．返回函数 (return function) (Bellman 函数 (Bellman function)，值函数 (value function)) $V(\tau, x)$ 作为被优化的一个量 (例如，对于系统 (1)，泛函

$$J(x(\cdot), u(\cdot))=\int_{\tau}^{t_1} f^0(t, x, u)dt+ \\ +\varphi(t_1, x(t_1)), \quad (4)$$

这里假定 $x(\tau)=x$，而 $t \in [\tau, t_1]$) 必须满足 **Bellman 方程** (Bellman equation)，其边界条件依赖于控制的目的和 J．对于系统 (1)，(2) 和 (4)，这一方程取形式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left[t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right]=0, \ V(t_1, x)=\varphi(t_1, x), \quad (5)$$

其中

$$H\left[t, x, \frac{\partial V}{\partial t}\right]= \quad (6)$$

$$=\min\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, u)\right]+f^0(t, x, u): u \in U\right\}$$

是 Hamilton 函数．这一方程与在 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle) 的条件中出现的方程之间的关系，如同利润函数的 Hamilton-Jacobi 方程与分析力学中通常的 Hamilton 微分方程之间的关系那样，见**经典力学的变分原理** (variational priciples of classical mechanics)．

对于综合问题，方程 (5) 的推导基于最优性原理 (optimality principle)．该原理是说：最优轨线的一部分也是一个最优轨线 (见 [2])．这一方法的有效性取决于正确地确定过程的信息性质，尤其是取决于位置 (现时状态) 的概念，见 [5]．

在时间最优控制问题 (time-optimal control problem) (对于自治系统 (1)，研究从位置 x 出发的轨线与一集合 M 相遇的最小时间问题) 中，函数 $V(\tau, x)=V(x)$ 可以看成是相对 M 的一种特殊的位势 $V(x)=T(x)$．在目前情况下，从条件 (5)，(6) 选择最优控制 $u^0(t, x)$ 应满足

$$\min\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial t}, f(x, u)\right]: u \in U\right\}=-1,$$

$$V(x)=0, \text{ 当 } x \in M \text{ 时},$$

这意味着 $u^0(t,x)=u^0(x)$ 使得最优轨线 $x^0(t)$ 在条件 $u\in U$ 满足的前提下，以最快方式下降到函数 $V(x)$ 的等位势曲面上．如果函数处处满足某些光滑性条件（例如，在问题(3)－(6)中，函数 $V(\tau,x)$ 必须是连续可微的)，或者除了一“特殊集合”N 外处处满足光滑性条件，则动态规划方法（作为最优性的一个充分条件）的使用将是严格的．当某些特殊的“正则综合条件”满足时，动态规划方法等价于 Понтрягин 原理，于是可以把它看成是最优性的充分必要条件（见[8]）．由于要事先验证动态规划方法的可适用性，并且要求解 Bellman 方程，这样就使得应用这一方法变得复杂了．动态规划方法已经被推广到离散（多级）系统的最优综合问题，这时相应的 Bellman 方程是一有限差分方程（见[2]，[9]）．

在有微分约束的最优控制问题中，对于包括带二次性能指标(4)（这时函数 f^0，φ 分别是按 x，u 和 u 的正定二次型）的线性系统在内的一类系统，动态规划方法以封闭形式给出综合问题的有效解答．如果 $\varphi(t,x)\equiv 0$，$t_1=\infty$，则这一问题与最优调节器（optimal regulator）的解析构造（analytic construction）问题有关，成为系统的最优镇定（optimal stabilization）问题（一个经综合的系统平衡态位置的渐近稳定性性质直接从容许控制的存在性得到）（见[10]，[4]）．在上述情形下解的存在性由系统的能镇定性性质得到保证（见[4]）．对于线性定常与线性周期系统来说，这种能镇定性性质等价于系统不稳定振型的可控性性质，见**最优程序控制**（optimal programming control）．

最优镇定问题的求解表明，相应的 Bellman 函数同时也是原来系统在所得到的最优控制作用下的“最优的”Ляпунов 函数．在这些情况下，得到了可控性的有效条件，并且对于包括通常的拟线性和周期系统以及时滞系统在内的镇定问题，建立了与 Ляпунов 稳定性理论完全相类似的结果（在一次近似和在临界情形下）．在后一情况下，与系统中时滞值相对应的一段轨线上给出的“最优”Ляпунов-Красовский 泛函起着 Bellman 函数的作用（见[4]，[5]）．此外，与偏微分方程有关的线性二次型最优控制理论也得到了很好的发展（见[11]）．

在最优综合控制的应用问题中，要量测到系统的所有相坐标不一定总是可能的．这样就发生如下的观测问题（problem of observation）（当然允许有各种各样的推广）：已知能量测到系统(1)的坐标的函数 $y=g(t,x)$ 在区间 $\sigma\leqslant t\leqslant\theta$ 上的实现值（如果 $u(t)$ 已知，例如 $u(t)\equiv 0$，并且 $m\leqslant n$），求在给定时刻 θ 的向量 $x(\theta)\in\mathbf{R}^n$．一个系统称为完全可观测的（completely observable），如果通过仅有的这些观测值 $y[t]$ 能建立 $x(\theta)$．

就线性系统而言，完全可观测性性质，以及用以区分 $x(\theta)$ 的相应的解析运算的结构和这些运算的优化等，已经做了深入的研究．这里有一个已知的对偶性原理（duality principle）：对于每一个观测问题，可以建立相应于对偶系统的等价的两点边值控制问题．它的一个结论是，一个线性系统的完全可观测性性质等同于一个带有控制的对偶系统的完全可控性性质．此外，已经证明，最优观测和最优控制的相应的对偶边值问题也可以用如下方式形成，即使得它们的解重合（见[3]）．线性系统的可控性和可观测性性质有很多已被推广到线性无穷维系统（Banach 空间中的方程、具有漂移变量的系统、偏微分方程），并有许多结果刻画相应的性质．就非线性系统而言，仅知道一些局部的关于可观测性的定理．观测问题的解在仅具坐标信息不完整的综合问题中有许多应用，其中包括最优镇定问题（见[3]－[5]，[14]，[15]）．

当关于可控过程的控制、初始条件以及现时参数的信息受到不确定性（扰动）的影响时，综合控制的问题变得尤其重要．如果这种不确定性的描述具有统计特性，则最优控制问题在随机最优控制（stochastic optimal control）理论的框架内进行研究．源于随机问题的求解的这一理论（[16]），在很大程度上是对形式为

$$\dot{x}=f(t,x,u)+g(t,x,u)\eta,\ x(t_0)=x^0 \tag{7}$$

的系统展开的，这里的随机扰动 $\eta(t)$ 由 Gauss 扩散过程或者更一般类型的 Марков 过程描述（初始向量通常也取成随机的）．在这些情况下，常常假定变量 η 的某些概率特性是已知的（例如，相应分布的矩的信息，以及描述过程 $\eta(t)$ 发展的随机方程参数的信息）．

一般说来，使用程序控制和综合控制将给出本质上不同的最优性能指标 J（例如，定义在过程轨线上的非负泛函的平均估计可以起指标的作用）的值．目前随机最优综合控制的综合问题有明显的优点，因为系统坐标的连续量测，使得能相对于该随机过程的实际的而不是事前预测的路径对运动进行修正．把动态规划方法与有关随机过程的 Марков 半群的生成算子理论结合起来，得出了最优性的充分条件．这种方法还解决了有穷或无穷时间区间上许多随机最优控制问题，包括现时坐标具有完全或不完全信息的系统，随机追踪问题，等等．就最优性原理的应用来说，重要的是控制 u 在每一时刻 t 以过程的“足够多坐标”z 的函数的形式存在、这里的过程已知具有 Марков 性质（见[5]，[6]，[17]，[18]）．

特别地，对于随机系统，最优随机镇定（optimal stochastic stabilization）理论与相应的 Ляпунов 稳定性理论，正是用这种方法发展起来的（[19]）．

为了形成最优综合控制器以及别的控制目的，通常用量测数据去估计随机系统的状态．随机滤波理论(stochastic filtering theory)就是在量测过程被概率性“噪声”干扰的条件下解决这一问题．对于具有二次最优性判据的线性系统，已经得到这方面的最完整的解答，即所谓 Kalman - Bucy 滤波器(Kalman - Bucy filter)，见[13]．在应用这一理论于随机最优综合控制问题时，已经得到了保证分离原理(separation principle)成立的条件．该原理表明，控制问题的解决与基于过程的足够多坐标估计现时位置的问题无关(见[20]；[18]和[21]致力于研究随机滤波的更一般方法，以及当控制本身也选自 Марков 扩散过程类时的随机最优控制问题)．

随机最优控制问题的严格的形式化解与正确建立相应的随机微分方程解的存在性问题常常耦合在一起．后者在求解含非经典约束的随机最优控制问题时引起了特殊的困难．

在不确定性条件下的最优综合控制问题中发生一种有趣的动态优化过程(见**最优程序控制**(optimal programming control))．与程序解相比，虽然综合解一般说来允许改进过程判据的品质，但它们仍然是统计优化的结果(通常认为在动态系统和控制函数的空间中进行)．对策论的概念和方法现今已被用来求解这些问题．

设给定系统

$$\dot{x} = f(t, x, u, w),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad (8)$$

以及关于初始向量 x^0，控制 u 和干扰 w 的约束条件

$$x^0 = x(t_0) \in X^0 \subseteq \mathbf{R}^n,\ u \in U \subseteq \mathbf{R}^p,\ w \in W \subseteq \mathbf{R}^q.$$

与由定义中原始控制所表达的参与者合作的情形不同，这里干扰 w 是作为一个对抗的参与者的控制来处理的，并且允许考虑由任何容许信息所构成的任何策略．此外，可以从每个参与者的角度单独地提出控制目标．如果所述目标是矛盾的，则出现不相容控制问题(problem of conflicting control)．研究在不相容或不确定性条件下的综合控制问题是**微分对策**(differential games)理论的课题．

在不确定性条件下形成最优综合控制的过程，也可能会由于现时状态信息的不完全而变得复杂化．因此在系统(8)中，仅仅能间接量测到相位向量 x 和函数

$$y(t) = g(t, x, \xi) \qquad (9)$$

的实现数据 $y[t]$；这里不定参数 ξ 受到一事前知道的约束 $\xi \in \Xi$ 的限制．量测值 $y[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \theta)$ (在给定 $u(t)$ 之下)，使得有可能在相空间中根据实现数据 $y[t]$、方程(9)以及对 w、ξ 的限制，去构造出系统(8)的状态的信息区域(region of information) $X(\theta, y(\cdot))$．$X(\theta, y(\cdot)) = X(\theta, \cdot)$ 的元素中也会含有系统(8)的未知的准确的状态，它可以通过选择 $X(\theta, \cdot)$ 中的某点 $x^*(\theta, \cdot)$ 进行估计(例如，$X(\theta, \cdot)$ 的“重心”或“Чебышев 中心”)．研究区域 $X(\theta, \cdot)$ 的演化和向量 $x^*(\theta, \cdot)$ 的动力学是极小极大滤波理论(minimax filtering theory)的目的．对于线性系统和凸约束情形，大多有完整的解答(见[22])．

一般说来，在不确定性条件下选择最优控制的综合策略(例如，以泛函 $u = u(t, X(t, \cdot))$ 的形式))的目的，必定在于根据预先指定的判据控制区域 $X(\theta, \cdot)$ 的演化(即变更它们在空间中的形状和位置)．对于上述问题已经有不少一般的定性结果，而对特殊类型的线性凸问题也有不少构造性解法(见[7]，[22])．此外，含有量测(例如，系统(8)和(9)中函数 $y[t]$ 的量测)的信息允许在过程中对不定参数在约束下的允许值区域作后验再估计．这样，同时也就解决了一个过程的数学模型(例如，方程(8)中的参数 w)的辨识问题(problem of identification)．上述所有这些使得有可能把不确定性条件下的最优综合控制问题的求解作为适应最优控制(adaptive optimal control)的一种方法来处理，而在适应最优控制中，过程模型性质的更精确的确定与控制的选择是混杂在一起进行的．在不定参数存在概率性描述的假设下，动态过程模型的辨识和适应最优控制问题已经做了详细的研究(见[23]，[24])．

如果在不确定性条件下的最优综合控制问题中，参数 w，ξ 作为想象的不合作的参与者的“控制”来处理，则控制 u 和 $\{w, \xi\}$ 的目的可能是不同的．后者导致过程的非标量判据．结果是，可以在合作对策及其推广的理论特有的多判据问题的平衡态概念的框架内考虑相应的问题．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976 (英译本：Pontryagin, L. S., Boltyanskiĭ, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1967.

[2] Bellman, R., Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957.

[3] Красовский, Н. Н., Теория управления движением, М., 1968.

[4] Красовский, Н. Н., «Дифференциальные упревнения», 1 (1965), 1, 5 – 16.

[5] Красовский, Н. Н., в сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, 179 – 244.

[6] Красовский, Н. Н., «Прикл. матем. и мех.», 25 (1961), 5. 806 – 817.

[7] Красовский, Н. Н., Субботин, А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974 (英译本: Krasovskiĭ, N. N. and Subbotin, A. I., Game-theoretical control problems, Springer, 1988).
[8] Болтянский, В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966 (英译本: Boltyanskiĭ, V. G., Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart & Winston, 1971).
[9] Болтянский, В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973 (英译本: Boltyanskiĭ, V. G., Optimal control of discrete systems, Wiley, 1978).
[10] Летов, А. М., Математическая теория процессов управления, М., 1981.
[11] Lions, J. L., Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer, 1971 (译自法文).
[12] Калман, Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому упралению, т. 2, М., 1961, 521 − 547.
[13] Kalman, R. and Bucy, R., New results in linear filtering and prediction theory, *Proc. Amer. Soc. Mech. Engineers Ser. I. D*, **83** (1961), 95 − 108.
[14] Lee, E. B. and Marcus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.
[15] Бутковский, А. Г., Структурная теория распределенных систем, М., 1977 (英译本: Butkovskiĭ, A. G., Structural theory of distributed systems, Horwood, 1983).
[16] Колмогоров, А. Н., Мищенко, Е. Ф., Понтрягин, Л. С., 《Докл. АН СССР》, **145** (1962), 5, 993 − 995.
[17] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Statistics of random processes, 1 − 2, Springer, 1977 − 1978).
[18] Åström, K. J., Introduction to stochastic control theory, Acad. Press, 1970.
[19] Кац, И. Я., Красовский, Н. Н., 《Прикл. матем. и мех.》, **24** (1960), 5, 809 − 823.
[20] Wonham, W. M., On the separation theorem of stochastic control, *SIAM J. Control*, **6** (1968), 312 − 326.
[21] Крылов, Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977 (英译本: Krylov, N. V., Controlled diffusion processes, Springer, 1980).
[22] Куржанский, А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977.
[23] Цыпкин, Я. З., Основы теории обучающихся систем, М., 1970 (英译本: Tsypkin, Ya. Z., Foundations of the theory of learning systems, Acad. Press, 1973).
[24] Эйкхофф. П., Основы идинтификации систем управления, пер. с англ., М., 1975 (译自英文).

А. Б. Куржанский 撰

【补注】 在西方文献中，最优综合控制通常叫做最优闭环控制 (optimal closed-loop control) 或最优反馈控制 (optimal feedback control)，而**最优程序控制** (optimal programming control) 则常常称为最优开环控制 (optimal open-loop control). 亦见**最优控制的数学理论** (optimal control, mathematical theory of).

至于什么时候最优开环控制可以用来找出最优闭环控制的详细的讨论，见 [A11], [A12].

在最优控制问题的叙述中，人们把问题分成带终端指标的问题、带积分指标的问题以及带组合这两种指标的问题，如方程 (4) 所表示的那样. 代替 “指标”，在各种具体问题中，人们往往说 “损失函数” (取极小) 或 “性能指标” (通常取极大).

一般说来，最优控制问题的解析解是不存在的. 一个值得注意的例外情形是: 系统由线性方程

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_f,\ x(t_0) = x_0$$

描述; 而损失函数由二次型方程

$$J = \frac{1}{2}\, x'(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (x'Qx + u'Ru)\,dt$$

描述. 这里 $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^p$, A, B, Q_f, Q 和 R 是适当阶的矩阵. 此外, $Q_f \geqslant 0$, $Q \geqslant 0$, $R > 0$, 并且撇 ($'$) 表示转置. 这里假定末时刻是固定的. 这个最优控制问题的解是

$$u^0(x,\ t) = -R^{-1}B'P(t)x,$$

其中 $(n \times n)$ 矩阵 $P(t)$ 满足所谓 Riccati 方程:

$$\dot{P} = -A'P - PA + PBR^{-1}B'P - Q,\ P(t_f) = Q_f.$$

如果偶对 $(A,\ B)$ 是可控的, 并且偶对 $(A,\ C)$ 是可观测的, 这里 $(n \times n)$ 矩阵 C 由方程 $C'C = Q$ 确定, 那么极限 $\lim_{t_f \to \infty} P(t_0)$ 存在, 极限记作 $\bar{P}$. 方程 $\dot{x} = (A - R^{-1}B'\bar{P}B)x$ 的解 $x = 0$ 是渐近稳定的. 关于可控性和可观测性的条件可以分别用更弱的可镇定性和可检测性条件代替, 见 [A13]. 可控性、可观测性等等概念是系统的性质, 属于数学系统理论研究的领域.

线性时间最优控制问题是对最优控制函数 $u^0(x,\ t)$ 有很好了解的另一类问题. 可达性集合的概念有助于具体求出最优控制, 见 [A14].

参考文献

[A1] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic control, Springer, 1975.
[A2] Bertsekas, D. and Shreve, S., Stochastic optimal control, the discrete time case, Acad. Press, 1978.
[A3] Bertsekas, D., Dynamic programming and stochastic

control, Acad. Press, 1976.

[A4] Davis, M. H. A., Martingale methods in stochastic control, in Stochastic Control and Stochastic Differential Systems, Lecture notes in control and inform. sci., Vol. 16, Springer, 1979, 85 - 117.

[A5] Cesari, L., Optimization - theory and applications, Springer, 1983.

[A6] Neustadt, L. W., Optimization, a theory of necessary conditions, Princeton Univ. Press, 1976.

[A7] Barbu, V. and Da Prato, G., Hamilton - Jacobi equations in Hilbert spaces, Pitman, 1983.

[A8] Kushner, H., Introduction to stochastic control, Holt, 1971.

[A9] Kumar, P. R. and Varaiya, P., Stochastic systems: estimation, identification and adaptive control, Prentice - Hall, 1986.

[A10] Ljung, L., System identification theory for the user, Prentice - Hall, 1987.

[A11] Brunovský, P., On the structure of optimal feedback systems, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Helsinki, 1978, Acad. Sci. Fennica, 1980, 841 - 846.

[A12] Sussmann, H. J., Analytic stratifications and control theory, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Helsinki, 1978, Acad. Sci. Fennica, 1980, 865 - 871.

[A13] Kuakernaek, H. and Sivan, R., Linear optimal control systems, Wiley, 1972.

[A14] Hermes, H. and Lasalle, J. P., Functional analysis and time optimal control, Acad. Press, 1969.

[A15] Bryson, A. E. and Ho, Y.-C., Applied optimal control, Ginn, 1969.

冯德兴 译

最优轨道 [optimal trajectory; оптимальная траектория]

变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 的 $(n+1)$ 维空间中的一条曲线，沿此曲线其运动由向量微分方程

$$\dot{x}=f(t, x, u), f: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^n \quad (1)$$

决定的点 $x(t)=(x^1(t), \cdots, x^n(t))$ 在一个使给定泛函

$$J=\int_{t_0}^{t} f^0(t, x, u)dt, f^0: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R} \quad (2)$$

极小化的**最优控制** (optimal control) $u(t)$ 的影响下，从其初始位置

$$x(t_0)=x_0 \quad (3)$$

转移到最终位置

$$x(t_1)=x_1. \quad (4)$$

最优控制的选择是受限制

$$u\in U \quad (5)$$

制约的，这里 U 是容许控制的一个闭集，$U\subset\mathbf{R}^p$. 初始和最终瞬时 t_0 和 t_1 分别假定是固定的和自由的.

对于比 (1) - (5) 更一般类型的变分问题，最优轨道按同样方式定义；例如，对带可移动终点和在相坐标上带有约束的问题. 关于描绘最优轨道的方法，见**变分学的数值方法** (variational calculus, numerical methods of).

对自治问题，其中函数 f^0, f 不显式地依赖于时间 t:

$$f^0=f^0(x, u), f=f(x, u),$$

相最优轨道的概念对这个理论及其应用证明是更恰当的. 一个相最优轨道 (phase optimal trajectory) 是一个最优轨道在相变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的 n 维子空间上的投影. 对自治问题，相轨道不依赖于初始瞬时 t_0 的选择.

对使系统从一个任意的初始位置转移到给定的最终位置 (或从给定的初始位置到一个任意的最终位置) 的相最优轨道的集合的研究，使得能够回答从所考虑的变分问题中产生的许多定性问题. 相最优轨道的集合的构成在构造最优反馈控制

$$u(t)=v(x(t))$$

的综合中是必须做的一步，这种综合保障了在相空间的任一点上沿最优轨道的运动.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976 (英译本: Pontryagin, L. S., Boltayanskiĭ, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

[2] DeRusso, P., Roy, R. and Clois, C., State space in control theory, Moscow, 1970.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lee, E. B. and Markus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.

[A2] Cesari, L., Optimization - theory and applications, Springer, 1983.

葛显良 译 鲁世杰 校

最优性原理 [optimality principle; оптимальности принципы]

各类最优概念的一种形式描述. 最优性原理一

般反映对稳定性、有益性和完美性的一种直观理解的某些特征. 其本质在于所有（或即使是充分多个）这样的特征的同时实现, 由于它们形式上的不相容, 通常看来是不可能的. 随着最优性原理的理论变为带有公理化的特性, 新的最优化原理的出现就不再总具有一种直观明显性.

例如, 变量的值是要使几个给定的函数同时达到极值（所谓多准则极值问题）, 最优化原理的问题就出现了. 为了能实际解决而需要非平凡的最优性原理的问题在**对策论**（games, theory of）中提出. 最简单的对策论最优性原理是**极小化极大原理**（minimax principle）. 另外的最优性原理以核心或 von Neumann-Morgenstern 解（见**对策论中的核心**（core in the theory of games））、**Shapley 值**（Shapley value）等形式来实现.

关于 Bellman 最优性原理见**动态规划**（dynamic programming）. Н. Н. Воробьев 撰

【补注】 也见 **Pontryagin 最大值原理**（Pontryagin maximum principle）; **最优控制**（optimal control）.

史树中 译

最优性的充分条件 [**optimality, sufficient conditions for; оптимальности достаточные условия**]

保证变分法问题的给定解在所选比较曲线类中最优性的条件.

弱极小值（weak minimum）最优性的充分条件（见[1]）: 为了曲线 $\bar{y}(x)$ 给予泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \qquad (1)$$

在边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

下的一个弱极小值, 只须下面的条件都满足:

1）曲线 $\bar{y}(x)$ 必须是极值曲线, 即它必须满足 **Euler 方程**（Euler equation）

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

2）沿着曲线 $\bar{y}(x)$, 包括其端点, 强 **Legendre 条件**（Legendre condition）

$$F_{y'y'}(x, y, y')>0$$

必须满足.

3）曲线 $\bar{y}(x)$ 必定满足强 **Jacobi 条件**（Jacobi condition）, 它要求 Jacobi 方程

$$\left[F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right]\eta-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}\eta')=0 \quad (2)$$

带初始条件

$$\eta(x_0)=0,\ \eta'(x_0)=1$$

的解在右闭区间 $x_0<x\leqslant x_1$ 的点上不为零.

本身是二阶线性微分方程的 Jacobi 方程（2）的系数是沿极值曲线 $\bar{y}(x)$ 计算的且系 x 的已知函数.

对强极小值（strong minimum）, 只需除了上面提到的条件外, 下面的附加条件满足.

4）存在曲线 $\bar{y}(x)$ 的一个邻域, 使得在其中的每一点 (x, y), 和对任何 y', 不等式

$$\mathscr{E}(x, y, u(x, y), y')\geqslant 0 \qquad (3)$$

成立, 这里

$$\mathscr{E}(x, y, u, y')=F(x, y, y')-F(x, y, u)+\\ -(y'-u)F_{y'}(x, y, u)$$

是 Weierstrass 函数, 而 $u(x, y)$ 是围绕 $\bar{y}(x)$ 的极值曲线场的斜率.

在极值曲线 $\bar{y}(x)$ 上, 条件（3）具有形式

$$\mathscr{E}(x, \bar{y}, \bar{y}', y')=F(x, \bar{y}, y')-F(x, \bar{y}, \bar{y}')+\\ -(y'-\bar{y}')F_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\geqslant 0. \qquad (4)$$

条件（4）对强极小值是必要的; 它称为 Weierstrass 必要条件（Weierstrass necessary condition）（见 **Weierstrass 条件（对变分极值）**（Weierstrass conditions (for a variational extremum)））. 这样, 不像弱极值的充分条件那样, 只要求在极值曲线本身的点满足某种强的必要条件, 强极值的充分条件要求在极值曲线的某邻域内满足 Weierstrass 必要条件. 一般地, 一旦 Weierstrass 条件在极值曲线的邻域内满足的要求被换成强 Weierstrass 条件（带严格不等式的条件（4））在极值曲线的点上满足, 则强极小值充分条件的表述不可能再减弱（见[1]）.

关于**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of）中考察的非经典变分问题, 存在几种途径去建立绝对极值最优性的充分条件.

设一个最优控制问题这样提出, 其中要求决定泛函

$$J=\int_0^{t_1} f^0(x, u)dt, \qquad (5)$$

$$f^0: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R},$$

在给定条件

$$\dot{x}=f(x, u),\ f: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^n, \qquad (6)$$

$$x(0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \qquad (7)$$

$$u\in U \qquad (8)$$

下的极小值, 这里 U 是 p 维空间中一个给定闭集.

用**动态规划**（dynamic programming）方法（[3]）, 最优性的充分条件可用以下方式表述. 为了控制 $u(t)$

是问题 (5) − (8) 中的一个最优控制，其充分条件是下面的 a), b) 都成立：

a) 存在连续函数 $S(x)$，除了可能有的某一维数小于 n 的分片光滑集以外，对所有 x 有连续偏导数，在终点 x_1 为零，$S(x_1)=0$，且满足 **Bellman 方程** (Bellman equation)：

$$\max_{u\in U}\left[\frac{\partial S}{\partial x}f(x,u)-f^0(x,u)\right]=0; \qquad (9)$$

b) $u(t)=v(x(t))$ (当 $0\leqslant t\leqslant t_1$)，这里 $v(x)$ 是一个综合化函数 (亦见**最优综合控制** (optimal synthesis control)，它能用 Bellman 方程：

$$\frac{\partial S}{\partial x}f(x,v(x))-f^0(x,v(x))=$$

$$=\max_{u\in U}\left[\frac{\partial S}{\partial x}f(x,u)-f^0(x,u)\right]=0$$

定义．

实际上，用动态规划方法时，得到一个更强的结果：对于把相点从任意初始状态转移到给定最终状态 x_1 的不同控制的集合的最优性的充分条件．

对非自治系统这种更一般的情况，即当被积函数和右端的向量函数也依赖于时间 t 时，函数 S 将依赖于 t 且项 $\partial S/\partial t$ 必须加到方程 (9) 的左端．有一个证明 (见 [4])，其中假设函数 $S(x)$ 对所有 x 的连续可微性条件，它是有很大限制性的，且对大部分问题不满足，然而通常作这样的假设．

最优性的充分条件能在 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle) 的基础上构造．如果在相空间的一个区域 G 内一个正则的综合被实现 (见**最优综合控制** (optimal synthesis control))，则当构造正则综合时利用最大值原理得到的所有轨道是 G 内最优的．

正则综合的定义，虽然比较麻烦，本质上在问题 (5) − (8) 上不加任何特别的限制．

还有建立最优性的充分条件的另一方法 (见 [5])．设 $\varphi(x)$ 是对属于给定区域 G 的所有可容许 x 有连续偏导数的连续函数，且令

$$R(x,u)=\varphi_x f(x,u)-f^0(x,u). \qquad (10)$$

为了使函数对 $\overline{u}(t)$, $\overline{x}(t)$ 给出问题 (5) − (8) 中的一个绝对极小值，其充分条件是存在函数 $\varphi(x)$，使得

$$R(\overline{x},\overline{u})=\max_{\substack{x\in G\\ u\in U}}R(x,u). \qquad (11)$$

对非自治系统这种更一般的情况，带 Mayer 和 Bolza 型泛函的问题 (见 **Bolza 问题** (Bolza problem))，及**最优滑动模态** (optimal sliding regime) (亦见 [5])，上述最优性的充分条件的表述的相应变化是容许的．

对其中出现多元函数、带重积分形式的泛函和带偏微分方程形式的微分约束的变分问题，也已经进行了研究 (见 [6])．

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本：M. A. 拉弗林契叶夫，Л. A. 留斯切尔涅克，变分学教程，高等教育出版社，1953).

[2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[3] Bellman, R., Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957.

[4] Болтянский, В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966 (英译本：Boltyanskiĭ, V. G., Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart & Winston, 1971).

[5A] Кротов, В. Ф., 《Автоматика и телемеханика》, **23** (1962), 12, 1571 − 1583.

[5B] Кротов, В. Ф., 《Автоматика и телемеханика》, **24** (1963), 5, 581 − 598.

[6] Бутковский, А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., 1965.

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 要区别固定终止时间问题 (fixed end-time problem) 和自由终止时间问题 (free end-time problem)．由方程 (5) − (8) 表示的问题是自由终止时间问题；终止时间是由状态 $x(t)$ 等于最后状态 x_1 的瞬时决定的．

补充的参考文献，亦见**最优控制的数学理论**．

参考文献

[A1] Lee, E. B. and Markus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.

葛显良 译 鲁世杰 校

计算方法的最优化 [optimization of a computational method; оптимизация вычислительного метода]

通常与**计算算法的最优化** (optimization of computational algorithms) 相同．但是，有时这两个概念也有区别．例如，可以说解某一类边值问题的一具体的网格方法的最优化，它是指用最少的点来计算方程的右端部分．而当检验一个算法是否是最优的问题时，还要考虑到许多其他方面：求解所产生的网格方程组的方法，实现这些方法的程序，等等．

Н. С. Бахвалов 撰 史应光 译

计算算法的最优化 [optimization of computational algorithms; оптимизация вычислительных алгоритмов]

在求解应用问题或精心设计标准程序系统时最优**计算算法** (computational algorithm) 的选择．当解决一个具体问题时，最优策略可能不会使解法最优化，

可是为优化一个标准程序或应用最简单的解法编制程序则是很直截了当的.

计算算法的最优化问题的理论提法是基于下述原则. 当选择一种方法来求解一个问题时，研究人员关心的是某些特性，而且根据这些特性来选择算法，同时这个算法也能用来解决具有这些特性的其他问题. 据此，在算法的理论研究中，人们引入了具有特殊性质的一类问题 P. 当选择一种解法时，研究人员有一组解法 M 可供选用. 当选用一种方法 m 来求解一个问题 p 时，得到的解会有一定的误差 $\varepsilon(p, m)$. 称量

$$E(P, m) = \sup_{p \in P} |\varepsilon(p, m)|$$

为在这类问题 P 中方法 m 的误差 (error of the method)，同时，称量

$$E(P, M) = \inf_{m \in M} E(P, m)$$

为 M 中方法在 P 中误差的最优估计 (optimal estimate of the error). 如果存在一种方法，使得

$$E(P, m_0) = E(P, M),$$

那么称这个方法为最优的 (optimal). 研究计算算法最优化问题的一个方案可以追溯到 А. Н. Колмогоров ([2])，所考虑的是计算积分

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

问题的集合，给定的条件是 $|f^{(n)}| \leq A$，其中 M 是所有可能求积

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j)$$

的集合. 每一种求积由总数为 $2N$ 的 C_j 和 x_j 确定. 由具有所需精度的某函数类重新生成一个函数所需要的最小信息量 (见 [2], [3]) 也可以包含在这个方案中. 这个问题的一个更详细的阐述可查阅 [4]，它指出在特定意义下实现算法的工作量与应用的存储量同样大. 最优算法仅对极少数类型问题存在 ([1])，然而，对大量计算问题，已经建立了就其渐近特性而言几乎是最优的方法 (见 [5] - [8]).

对某类问题最优的计算算法特性的研究工作 (见 [5], [7]) 包含两部分：建立其特性尽可能好的具体解法，和根据计算算法的特性得出估计量 (见 [2] - [4], [9]). 实质上，问题的第一部分是数值方法理论的一个基本问题，而且在大多数情况下它是与最优化问题无关的研究工作. 下面得到的估计通常归结为对 ε **熵** (ε - entropy) 或相对应的空间**宽度** (width) 的估计；有时，利用提到的得出估计的同样技巧，可以独立地进行估计.

计算算法可分成被动算法和主动算法两种. 解题的被动算法 (passive algorithm) 不依赖于求解问题时得到的信息，反之，主动算法 (active algorithm) 则需依赖. 当计算一个积分时，函数所用的信息通常是它在 N 个点上值的信息. 对被动算法，积分用公式

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(P_j)$$

计算，其中权 C_j 和 f 定义域 Ω 中的 P_j 预先已确定. 计算该积分的主动算法包含在下面的设计里：点 $P_1 \in \Omega$，给定函数

$$\Omega_q = \Phi_q(Q_1, \cdots, Q_{q-1}; y_1, \cdots, y_{q-1}),$$

$$q = 2, \cdots, N,$$

$$S_N(Q_1, \cdots, Q_N; y_1, \cdots, y_N)$$

其中 y_j, S_N 是数，$Q_j \in \Omega$. 下面的量是逐次计算的：

$$f(P_1),\ P_2 = \Phi_2(P_1; f(P_1)),\ f(P_2),$$

$$P_3 = \Phi_3(P_1, P_2; f(P_1), f(P_2)),\ \cdots,\ f(P_N),$$

而且假定

$$I(f) \approx S_N(P_1, \cdots, P_N; f(P_1), \cdots, f(P_N)).$$

在关于函数 $f \equiv 0$ 中心对称的凸的被积函数类中，问题的被动算法的最优估计与它的主动算法的最优估计一致 (见 [10], [11]).

在进行数值积分的实践中，能自动选定步长的这种类型积分算法的主动算法 (见 [10]) 已经显示出比被动算法优越. 这就证实了一个一般的观点，即形式上计算算法的最优化设计常常并不能解决具体的实际问题. 当解最优化问题 (尤其是极小化问题) 时，被动算法几乎不能应用 (见 [12], [13]). 因为工作量的上界包含在某类函数 F 中函数的一个值的计算中，这就隐含着可把它取作衡量算法工作量的单位. 另外，还有一些可能的方法可用来估计一个算法特性的最优性质. 例如，计算泛函集合 $L(f)$ 的泛函 $l(f)$ 的工作量可以取作整个工作量的单位. 在这种情况，实现这种算法的工作量的下界是用宽度原理得到的 (见 [14], [15]). 工作量不仅包含由初始数据得到信息的工作量，而且也包含处理这些信息的工作量. 目前，人们似乎还不能举出一类实际计算问题的例子，说明可以得到包含实现这些算法的工作量的下界，它的下界与所考虑问题类型的信息的界不同. 但是，对一些这种类型的非计算问题，界是已知的 (见**算法的计算复杂性** (algorithm, computational complexity of an) 和**算法的描述复杂性** (algorithm, complexity of description of an)).

当研究计算算法最优化问题的目的是在计算机上求解问题时，这个问题与涉及计算误差的算法的稳定性和所用的不同形式的存贮容量的限制只有极细微的差别 (见**计算算法** (computational algorithm)). 最优计算算法的问题已经像上面那样被看作一类问题的计

算算法的最优化问题，实际上，一个具体问题的计算算法的最优化问题是极重要的（见[10]，[16]）．一个问题的最优化可阐述（见[16]）如下．一个微分方程用变步长的 Runge-Kutta 法来积分．其估计是由估计误差的主要项来表示的，然后由积分点（一般来说，点的数目是给定的）的分布将估计最优化．最优化问题的这种处理对理论的发展和数值积分有效算法的实践有很大关系．

参考文献

[1] Никольский, С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979（中译本：С. М. 尼科尔斯基，求积公式，高等教育出版社，1959）.

[2] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, **108** (1956), 3, 385 – 388.

[3] Колмогоров, А. Н., Тихомиров, В. М., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 2, 3 – 86.

[4] Витушкин, А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959.

[5] Бабушка, И., Соболев, С. Л., 《Aplikace Mat》, **10** (1965), 96 – 129.

[6] Бахвалов, Н. С., 《Aplikace Mat》, **13** (1968), 27 – 38.

[7] Bakhvalov, N. S., About optimisation of numerical methods, in Internat. Congress Mathematicians Nice, 1970, Vol. 3, Gauthier-Villars, 1972, 289 – 295.

[8] Бахвалов, Н. С., Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, 3 – 63.

[9] Bakhvalov, N. S., A lower bound for the asymptotic characteristics of classes of functions with dominating mixed derivative, *Math Notes*, **12** (1972), 6, 833 – 838. (*Mat. Zametki*, **12** (1972), 6, 655 – 664.)

[10] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[11] Bakhvalov, N. S., On the optimality of linear methods for operator approximation in convex classes of functions, *USSR Math. Math. Phys.*, **11** (1971), 4, 244 – 249. (*Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **11** (1971), 4, 1010 – 1018.)

[12] Wilde, D. J., Optimum seeking methods, Prentice-Hall, 1964.

[13] Васильев, Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980.

[14] Оганесян, Л. А., Руховец, Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ер., 1979.

[15] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[16] Tikhonov, A. N. and Gorbunov, A. D., Estimates of the error of a Runge-Kutta method and the choice of optimal meshes, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, **4** (1964), 2, 30 – 42. (*Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **4** (1964), 2, 232 – 241).

Н. С. Бахвалов 撰　袁国兴、张宝琳 译

可选随机过程 [**optional random process**; **опциональный случайный процесс**]

关于**可选 σ 代数**（optional sigma-algebra）$\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbf{F})$ 可测的**随机过程**（stochastic process）$X=(X_t(\omega), F_t)_{t\geqslant 0}$（作为映射 $(\omega,t)\mapsto X(\omega,t)=X_t(\omega)$）.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】可选随机过程也称为适应随机过程（adapted random process）.

参考文献

[A1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972, Chapt. 3, Sect. 2.

[A2] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972, Chapt. 11.

【译注】

参考文献

[B1] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981.

刘秀芳 译

可选 σ 代数 [**optional sigma-algebra** 或 optional σ-algebra; **опциональная σ-алгебра**]

在 $\Omega\times\mathbf{R}_+=\{(\omega,t):\omega\in\Omega, t\geqslant 0\}$ 上由一切 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}$ 的（对每一固定的 $\omega\in\Omega$）关于 t 右连续、左极限存在且关于可测空间 (Ω,F) 的非减子 σ 代数族 $\mathbf{F}=(F_t)_{t\geqslant 0}(F_t\subset F, t\geqslant 0)$ 适应的映射 $(\omega,t)\to f(\omega,t)$ 生成的最小 σ 代数 $\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbf{F})$（见集代数（algebra of sets））. 可选 σ 代数与由随机区间 $[\![0,\tau]\!]=\{(\omega,t):0\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\}$（其中 $\tau=\tau(\omega)$ 是关于 $\mathbf{F}=(F_t)_{t\geqslant 0}$ 的停时（见 **Марков 时**（Markov moment）））生成的最小 σ 代数相一致. 在可选和可料 σ 代数（见**可料 σ 代数**（predictable σ-algebra））之间，包含关系 $\mathcal{P}(\mathbf{F})\subseteq\mathcal{O}(\mathbf{F})$ 成立.

参考文献

[1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】在[A1]中可选 σ 代数称为循序可测 σ 代数.

参考文献

[A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, A, North-Holland, 1978.

【译注】

参考文献

[B1] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981.

刘秀芳 译

